Révisions de géométrie

Exercice 1
Soit ABC un triangle et E, D les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que $(ED)//(BC)$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle. On note D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. Montrer que $ME = MF$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, et I le centre de son cercle inscrit. Soit X l'intersection de (AI) et du cercle circonscrit à ABC. Montrer que $BX = IX = CX$.

Exercice 5 (Miquel)

1. Soit ABC un triangle, et D, E, F des points sur les côtés $[BC], [AC], [AB]$ respectivement. Montrer que les cercles circonscrits des triangles AEF, BFD et CED sont concourants.
2. Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.
3. Soit ABC un triangle, et X un point de $[BC]$. Un cercle passant par A et X coupe AC en Y et AB en Z.

   Montrer que les cercles circonscrits à CXY et BXZ sont tangents.

Exercice 6
Soit ABC un triangle, d'orthocentre H. Montrer que les symétriques de H par rapport à (BC) et par rapport au milieu de $[BC]$ sont tous deux sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, H_1, H_2, H_3 les pieds des 3 hauteurs, I_1, I_2, I_3 les milieux des 3 côtés et J_1, J_2, J_3 les milieux de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$. Montrer que $H_1, H_2, H_3, I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3$ sont cocycliques.

Exercice 8 (Simpson)
Soit ABC un triangle, et M un point du plan. Soient P, Q, R les projetés orthogonaux de M respectivement sur (BC), (AC) et (AB). Montrer que P, Q et R sont alignés si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 9
Soient B, C deux points d'un cercle Γ, et A le milieu de l'arc BC. Soit Ω un cercle tangent à $[BC]$ et à Γ. On note I et X les point de tangence respectifs de Ω avec $[BC]$ et Γ. Montrer que A, I et X sont alignés.

Exercice 10
On prend un demi-cercle de diamètre AB et C, D sur ce demi-cercle. Soit S l'intersection de AC et BD, et T le projeté de S sur AB.
Montrer que TS est la bissectrice de $\widehat{CTD}$.

Exercice 11
Soient Γ un cercle de centre O, A et B deux points sur le cercle non opposés. Les tangentes à Γ en A et B s'intersectent en X. Les points M sur (AB) et K sur (XB) sont tels que M est le milieu de $[OK]$. Montrer que A, X, K et M sont cocycliques.

Exercice 12
Soient B, C deux points d'un cercle Γ, et A le milieu de l'arc BC. On prend D, E deux autres points de Γ, et on pose F, G les intersections de AD et AE avec BC.

Montrer que D, E, F, G sont cocycliques.