TD DE GÉOMÉTRIE GROUPE E

Exercice 1

(Iran 2023, troisième tour, problème 1)

Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et M le milieu de l'arc BC du cercle (ABC) ne contenant pas A.

On choisit un point X sur la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$, tel que $X \notin (ABC)$ et $X \notin (BC)$. La droite (BX) recoupe le cercle (BIC) en T, distinct de B. Soit Y le point du cercle (AXC), distinct de A, tel que $MY = MA$.

Montrer que les droites (TC) et (AY) sont parallèles.

Exercice 2

((Biélorussie 2026, TST 4, problème 1))

Sur les côtés AB et AC d'un triangle ABC, on construit, à l'extérieur du triangle, des triangles ABD et ACE tels que

$$AD = BD, \qquad AE = CE \qquad \text{et} \qquad \widehat{ADB} + \widehat{AEC} = 180°.$$

Soit P un point tel que $DP = DC$ et $EP = EB$. Les droites (CD) et (BE) se coupent en Q.

Montrer que si le quadrilatère $PDQE$ est convexe, alors ses quatre sommets sont cocycliques.

Exercice 3

(Poly Russe)

Soit ABC un triangle. On prend $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ tels que les points B, D, E, C soient cocycliques. Soient F le milieu du segment $[BD]$ et G le milieu du segment $[EC]$.

On définit

$$I = (FG) \cap (BE), \qquad J = (FG) \cap (DC), \qquad H = (BE) \cap (DC).$$

On suppose que les intersections et les cercles considérés sont bien définis.

Montrer que les cercles (AFG) et (HIJ) sont tangents.

Exercice 4

(Kazakhstan 2026, classes 10–11, problème 2)

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $\widehat{BAC} = 45°$ et $\widehat{ABC} > 90°$. La perpendiculaire à (BC) passant par A recoupe le cercle (ACD) en E, distinct de A. La droite (EB) coupe la diagonale (AC) en F.

On suppose que $EF = 2AF$. La droite (DF) recoupe le cercle (ACD) en M, distinct de D, et les droites (AM) et (BC) se coupent en N.

Montrer que les droites (CM), (FN) et (AE) sont concourantes.

Exercice 5

(Bulgarie 2024, olympiade nationale, problème 6)

Soit ABC un triangle et ω un cercle de centre I, tangent aux droites (AB) et (AC) et coupant la droite (BC) en deux points distincts X et Y.

La perpendiculaire à (BC) passant par I coupe la parallèle à (BC) passant par A en Z.

Montrer que les cercles (XYZ) et (ABC) sont tangents.