TD de géométrie

Groupe E – POFM

Échauffement

Exercice 1

Soit ABC un triangle, et soient $B_1 \in AC$ et $C_1 \in AB$ les pieds des bissectrices intérieures issues respectivement de B et C. On note O le centre du cercle circonscrit à ABC et I_A le centre de son cercle A-exinscrit. Montrer que

$$(OI_A) \perp (B_1C_1).$$

Exercice 2

Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, de centre O. On note D le point diamétralement opposé à C sur Γ. La tangente à Γ en D coupe la droite (AB) en E. La droite (EO) coupe respectivement les droites (AC) et (BC) en F et P. Montrer que

$$OF = OP.$$

Exercice 3

Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en C et D. Une droite passant par C recoupe ω_1 en A et ω_2 en B, avec C entre A et B. On note K le milieu du segment $[AB]$. Soient M et N les milieux respectifs des arcs AD de ω_1 et DB de ω_2 ne contenant pas C. Montrer que

$$\angle MKN = 90^\circ.$$

Plat principal

Exercice 4

Soit ABC un triangle, et soit P le point d'intersection de la tangente en B à son cercle circonscrit avec la bissectrice intérieure de $\angle BAC$. La parallèle à (AC) passant par P coupe (AB) en Q. On suppose que Q appartient au segment ouvert $]A, B[$. La parallèle à (BC) passant par Q coupe respectivement (AC) en X et (PC) en Y. Montrer que la droite (PX) est tangente au cercle circonscrit à XYC.

Exercice 5

Soit ABC un triangle acutangle scalène. On choisit $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ de sorte que $(DE) \parallel (BC)$. On suppose qu'il existe $R, S \in [BC]$ tels que

$$\angle BRD = \frac{1}{2}\angle BAC = \angle CSE.$$

Les cercles circonscrits aux triangles BDR et CSE se coupent en deux points distincts P et Q. Montrer que, lorsque D varie en respectant les conditions précédentes, le cercle circonscrit à APQ passe par un point fixe distinct de A.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un quadrilatère. Les demi-droites $[AB)$ et $[DC)$ se coupent en E, et les demi-droites $[AD)$ et $[BC)$ se coupent en F. Les bissectrices intérieures des angles $\angle EAF$ et $\angle ECF$ se coupent en X. La bissectrice intérieure de $\angle ADE$ et la bissectrice extérieure de $\angle EBC$ se coupent en Y. Les bissectrices extérieures des angles $\angle AFB$ et $\angle AEC$ se coupent en Z. Montrer que X, Y, Z sont alignés.

Dessert

Exercice 7

Soit ABC un triangle isocèle en A, avec $AB = AC$. On choisit deux points M, N sur le segment $[BC]$, dans l'ordre B, M, N, C, tels que

$$\angle MAN = \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Soit P le centre du cercle circonscrit au triangle AMN. Les médiatrices des segments $[AM]$ et $[AN]$ coupent la droite (BC) en R et Q, respectivement. On choisit $S \in (PR)$ et $T \in (PQ)$ tels que $(ST) \perp (PA)$. Soient K et L les symétriques de A par rapport aux droites (QS) et (RT), respectivement. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles CMK et BNL ont un point commun sur la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 8

Soit ABC un triangle tel que $BC > AC$, et soit I_B son centre B-exinscrit. La parallèle à (AB) passant par C coupe (BI_B) en F. Soit M le milieu de $[AI_B]$, et D le point où le cercle A-exinscrit à ABC touche la droite (AB). On choisit un point E, du même côté de (AB) que C, tel que

$$\angle BDE = \angle BAC \qquad \text{et} \qquad DE = BC.$$

La droite (EC) coupe respectivement (AB) en P et (FM) en Q. Montrer que P, A, M, Q sont cocycliques.

Exercice 9

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Une droite ℓ coupe les segments $[BC]$ et $[AD]$ en leurs points intérieurs respectifs R et S ; elle coupe également la demi-droite $[DC)$ au-delà de C en Q, et la demi-droite $[BA)$ au-delà de A en P. Les cercles circonscrits à QCR et QDS se recoupent en $N \neq Q$, tandis que les cercles circonscrits à PAS et PBR se recoupent en $M \neq P$.

On pose

$$X = (MP) \cap (NQ), \qquad K = (AB) \cap (CD), \qquad L = (BC) \cap (AD).$$

Montrer que X appartient à la droite (KL).