MILIEUX

Réflexes :

— Faire une chasse aux longeurs ou aux rapports pour trouver des triangles semblables ou isométriques traduisant des égalités d'angles.

— Introduire d'autres milieux : Introduire d'autres milieux peut permettre d'obtenir des droites parallèles ou des triangles semblables et donc des angles et des égalités de rapports. De manière générale, si on est en présence d'une condition sur des longueurs, il peut être utile d'introduire d'autres points bien choisis satisfaisant les mêmes conditions.

— Compléter un parallélogramme : Ce qu'il y a de génial avec un parallèlogramme, c'est qu'on a plein d'égalités d'angles et de longueur (c'est d'ailleurs aussi ce qu'il y a d'embêtant avec un parallélogramme). Lorsqu'on a un point milieu de segment, introduire un autre segment dont ce point est aussi un milieu donne un beau parallélogramme et transforme donc l'hypothèse "M est le milieu d'un segment" en une égalité d'angle, un parallélisme, etc...

Exercices

Exercice 1
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles se coupant en A et B. On introduit ℓ une tangente commune de ω_1 et ω_2 tangente en ω_1 en P et en ω_2 en Q. Montrer que (AB) coupe $[PQ]$ en son milieux.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soient M le milieu de $[CD]$ et E le projeté orthogonale de C sur $[AD]$. Enfin, on note F le point de (CE) tel que $FB = FA$, montrer que $\angle AMF = 90$

Exercice 3 (JBMO 2013)
Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$ et soit O le centre de son cercle circonscrit k. Soit D un point du segment $[BC]$ tel que $\angle BAD = \angle CAO$. Soit E le second point d'intersection du cercle k avec la droite (AD). Soient M, N et P les milieux respectifs des segments $[BE]$, $[OD]$ et $[AC]$. Montrez que les points M, N et P sont alignés.

Exercice 4 (Math beyond limits 2018)
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On note D, E, F les pieds des hauteurs issues respectivement des sommets A, B et C. La parallèle à la droite (AC) passant par le point B coupe la droite (EF) au point X. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\angle ACM = \angle XDB$.

Exercice 5 (Théorème du papillon)
Soit Γ un cerlce et O sont centre. Soit $[AB]$ une corde de Γ et I son milieux. Soient $[CD]$ et $[EF]$ des cordes de Γ passant par I. On introduit P et Q les intersections de (CF) et (DE) avec la droite (AB). Montrer que $IP = IQ$

Exercice 6 ((IMO SL 2015 G1)
Soit ABC un triangle d'orthocentre H et soit G le point tel que le quadrilatère $ABGH$ est un parallélogramme. Soit I le point de la droite (GH) tel que la droite (AC) coupe le segment

$[HI]$ en son milieu. La droite (AC) recoupe le cercle circonscrit du triangle GCI au point J. Montrer que $IJ = AH$.

Exercice 7 (IMO SL 2017 G3)
Soit ABC un triangle acutangle et soit O le centre de son cercle circonscrit. La droite (OA) coupe les hauteurs issues des sommets B et C aux points P et Q respectivement. On note H l'orthocentre du triangle ABC. Montrer que le centre du cercle circonscrit au triangle PQH se trouve sur une médiane du triangle ABC.

Exercice 8 (IMO 2017 P4)
Soient R et S des points distincts appartenant à un cercle W tels que le segment $[RS]$ n'est pas un diamètre du cercle W. Soit ℓ la tangente au cercle W au point R. Le point T est tel que le point S est le milieu du segment $[RT]$. Le point J est choisi sur le plus petit arc RS du cercle W de sorte que le cercle Γ circonscrit au triangle JST rencontre la droite ℓ en deux points distincts. Soit A le point commun du cercle Γ et de la droite ℓ qui est le plus proche du point R. La droite (AJ) recoupe le cercle W au point K. Prouver que la droite (KT) est tangente au cercle .

Exercice 9
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Soient P l'intersction de (AB) avec (CD) et Q l'intersection de (AD) avec (BC). Montrer que les milieux des segments $[AC]$, $[BD]$ et $[PQ]$ sont alignés.

Exercice 10 (IMO 2026 P2)
Soit ABC un triangle, et soient M et N les milieux respectifs des côtés $[AB]$ et $[AC]$.

On choisit des points K et L respectivement à l'intérieur des triangles BMC et BNC, de sorte que K soit à l'intérieur de l'angle $\widehat{LBA}$, que L soit à l'intérieur de l'angle $\widehat{ACK}$ et que

$$\widehat{KBA} = \widehat{ACL}, \qquad \widehat{LBK} = \widehat{LNC}, \qquad \widehat{LCK} = \widehat{BMK}.$$

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle AKL. Démontrer que $OM = ON$.