Groupe A : Introduction à la Chasse aux angles

Cours du 7 novembre 2026 - par Arthur D

Ce document a été rédigé en grande partie en direct et peut contenir des typos.

1 Cours

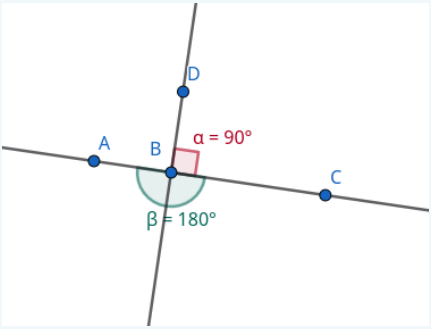
1.1 Conseils en géométrie olympique

- Faire une figure
  - Faire une figure générale (ne pas faire de cas particulier : isocèle, équilatéraux, etc...)
  - A la main pour commencer, puis éventuellement au propre (règle compas) pour faire des conjectures
  - La/Les figures au brouillon vs La figure sur la copie qui elle doit être au propre
- Rédaction : Annoncer les étapes de résolution.
- Ne pas se décourager !

1.2 Angles géométriques formés par des droites

Définition : Angle géométrique

L'angle géométrique est un angle formé par 3 points, et dont la mesure est comprise entre 0° et 180°



Par exemple $\widehat{DBC} = 90°$

Propriété

Des angles opposés par le sommet sont égaux

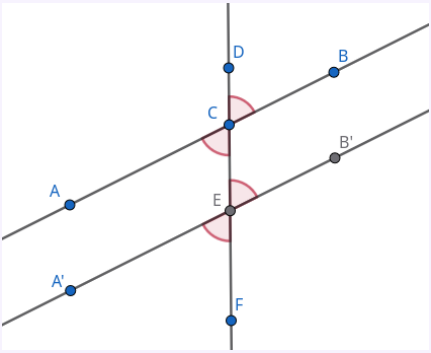


Propriété : Angles alternes-internes et correspondants

Dans la figure où $(AB) \parallel (A'B')$ on a les égalités d'angles suivantes

$$\widehat{ACE} = \widehat{DCB} = \widehat{CEB'} = \widehat{A'EF}$$

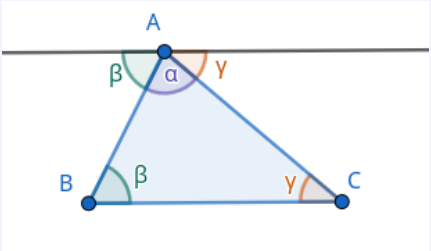
- $\widehat{ACE}$ et $\widehat{CEB'}$ sont dits « alternes-internes ».
- $\widehat{ACE}$ et $\widehat{A'EF}$ sont dits « correspondants ».



A l'inverse, si j'ai l'égalité des angles alternes internes ou bien celle des angles correspondants alors je peux en déduire $(AB) \parallel (A'B')$.
On dira : « $(AB) \parallel (A'B')$ **si et seulement si** $\widehat{ACE} = \widehat{CEB'}$ ou $\widehat{ACE} = \widehat{A'EF}$ ».

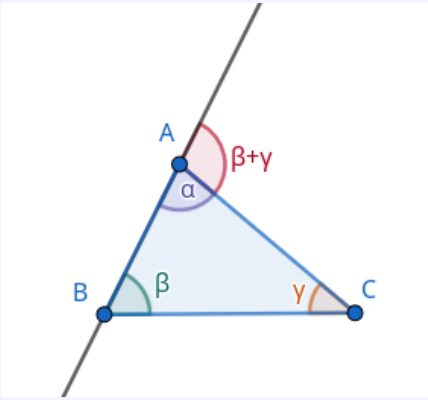
Propriété : Somme des angles dans un triangle

La somme des angles dans un triangle fait 180°

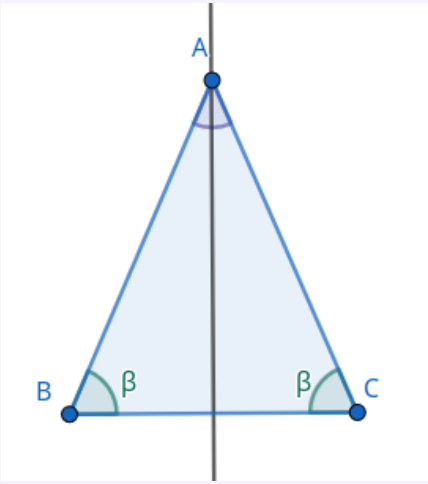


Pour s'en convaincre, on trace la droite paralèlle à (BC) passant par A, puis on conclut grace aux angles alternes-internes.

Propriété : Relation Chasles



Critère des triangles isocèles

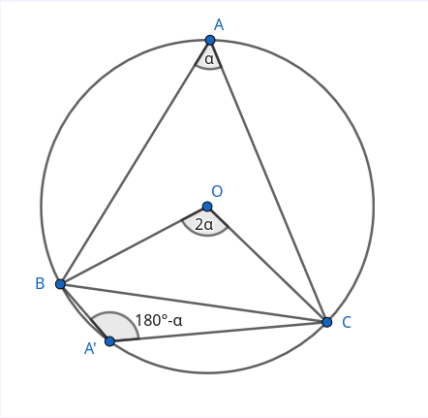


$AB = AC$ si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

1.3 Angles dans le cercle

Théorème de l'angle au centre

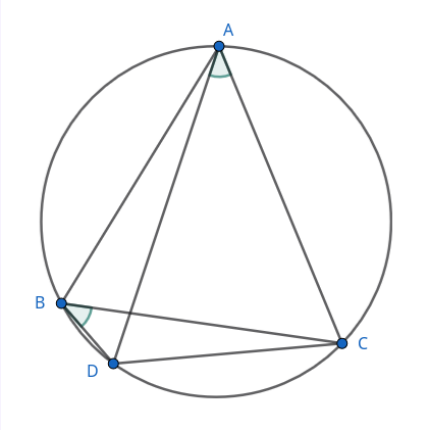
On a les égalité d'angles suivantes dans le cercle



Chercher la démonstration de ce théorème est un bon exercice de chasse aux angles !

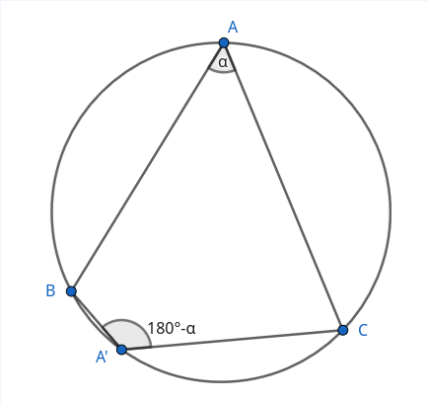
Ainsi, deux angles inscrits au même arc, dans le même cercle ont la même mesure, (si par exemple on bougeait le point A dans la figure ci-dessus, l'angle ne change pas)
On en déduit le théorème suivant :

Théorème de l'angle inscrit



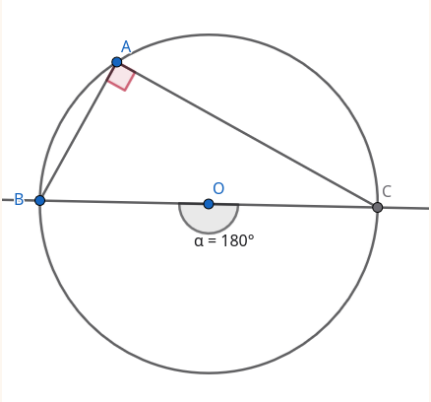
A, B, C, D sont sur un même cercle (cocyclique) si et seulement si $\widehat{DBC} = \widehat{DAC}$.

Théorème des angles correspondants



A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si $\widehat{BA'C} = 180° - \widehat{BAC}$.

Cas particulier de l'angle au centre à connaître



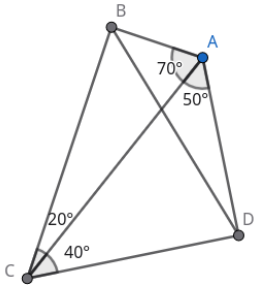
A est sur le cercle de diamètre $[BC]$ si et seulement si ABC est rectangle en A.

2 Exercices

Exercice 1 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère, P l'intersection de (AC) et (BD).
On suppose que $\widehat{CAD} = 50°$, $\widehat{BAC} = 70°$, $\widehat{DCA} = 40°$ et $\widehat{ACB} = 20°$.
Calculer l'angle $\widehat{CPD}$.

Correction :

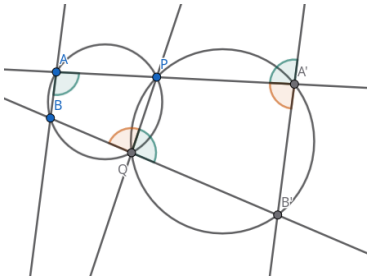


Etape 1 : Montrons que A, B, C, D sont cocycliques
$\widehat{BCD} = \widehat{BCA} + \widehat{ACD} = 20° + 40° = 60°$
$\widehat{BAD} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} = 70° + 50° = 120°$
Donc $\widehat{BCD} + \widehat{BAD} = 180°$, les angles sont supplémentaires, alors par angles opposés A, B, C, D sont cocycliques.
Etape 2 : Calcul de l'angle demandé
Par angles inscrits $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 70° = \widehat{PDC}$
Donc dans le triangle PCD on a
$\widehat{CPD} = 180° - \widehat{PCD} - \widehat{PDC} = 180° - 40° - 70° = 70°$
Donc $\widehat{CPD} = 70°$.

Exercice 2 :

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en deux points P et Q. Une droite passant par P coupe Γ_1 en $A \neq P$ et Γ_2 en $A' \neq P$. Une droite passant par Q coupe Γ_1 en $B \neq Q$ et Γ_2 en $B' \neq Q$. Montrer que (AB) et $(A'B')$ sont paralèlles.

Correction :
Sur la figure $H = D$

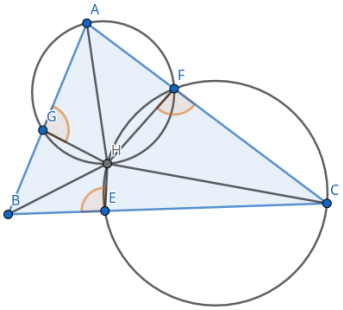


Puisque le gros de la figure est entre les deux droites qui nous interessent, on va probablement devoir montrer une égalité d'angles alternes-internes. Pour bien nommer nos angles, on introduit donc un point R sur la demi-droite $[B'A')$ mais tel qu'il n'est pas dans le segment $[A'B']$.
Dans le quadrilatère cyclique/inscriptible $APQB$ on a
$\widehat{BQP} = 180° - \widehat{BAP}$
d'où par angles supplémentaires, comme B, Q, B' sont alignés :
$\widehat{PQB'} = 180° - \widehat{BQP} = 180° - \left(180° - \widehat{BAP}\right) = \widehat{BAP}.$
De la même façon dans le quadrilatère cyclique $PQB'A'$ et avec l'alignement de $RA'B'$:
$\widehat{PA'R} = 180° - \widehat{PA'B'} = \widehat{PQB'} = \widehat{BAP}$
Donc par angles alternes-internes $(AB) \parallel (A'B')$.

Exercice 3 : (Théorème de Miquel)

Soit ABC un triangle, avec E sur $[BC]$, F sur $[AC]$ et G sur $[AB]$. Le cercle circonscrit à A, F et G recoupe le cercle circonscrit C, F et E en un point D. Montrer que B, G, D, E sont des points cocycliques.

Correction :

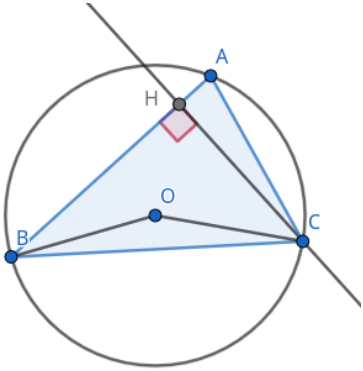


Comme B, E, C sont alignés : $\widehat{DEC} = 180° - \widehat{BED}$
Puis par cocyclicité de $DFCE$, on a $\widehat{DFC} = 180° - \widehat{DEC} = \widehat{BED}$
De même comme A, F, C sont alignés et par cocyclicité de $AFDG$:
$\widehat{DGA} = 180° - \widehat{AFD} = \widehat{DFC} = \widehat{BED}$
Enfin par l'alignement A, G, B on a $\widehat{BGD} = 180° - \widehat{BED}$.
Donc par angles opposés $BGDE$ est cocylcique.

Exercice 4 :

Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit. La droite perpendiculaire à (AB) passant par C recoupe (AB) en H. Montrer que $\widehat{HCA} = \widehat{OCB}$.

Correction :

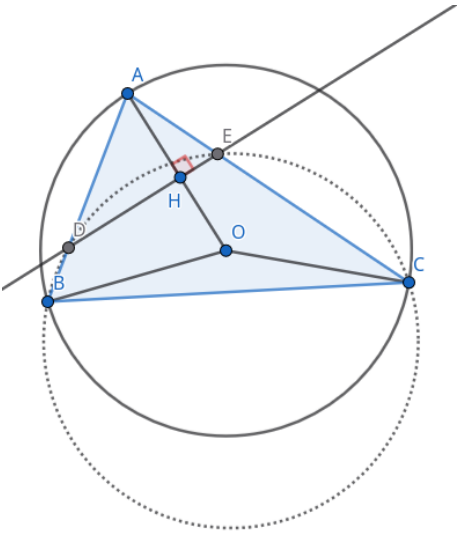


Puisque le point O nous intéresse, il va probablement falloir utiliser le théorème de l'angle au centre.
Etape 1 : Montrer que $x = \widehat{HCA} = 90° - \frac{\widehat{BOC}}{2}$
Dans le triangle HCA on a $x = \widehat{HCA} = 180° - \widehat{CHA} - \widehat{HAC} = 180° - 90° - \widehat{BAC} = 90° - \widehat{BAC}$.
Par le théorème de l'angle au centre on a $\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$, ainsi $x = 90° - \frac{\widehat{BOC}}{2}$
Etape 2 : $y = \widehat{OCB} = x$:
Dans le triangle OBC isocèle en O ($OB = OC$) on a
$\widehat{OCB} = y = \widehat{OBC}$
Mais aussi $\widehat{BOC} + \widehat{OCB} + \widehat{CBO} = 180°$
donc $2y + \widehat{BOC} = 180°$
$2y = 180° - \widehat{BOC}$
$y = 90° - \frac{\widehat{BOC}}{2} = x$
Ce qui conclut.

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit. On trace une droite perpendiculaire à (AO), qui recoupe (AB) et (AC) en D et E respectivement. Montrer que les points C, D, E, B sont cocycliques.

Correction :

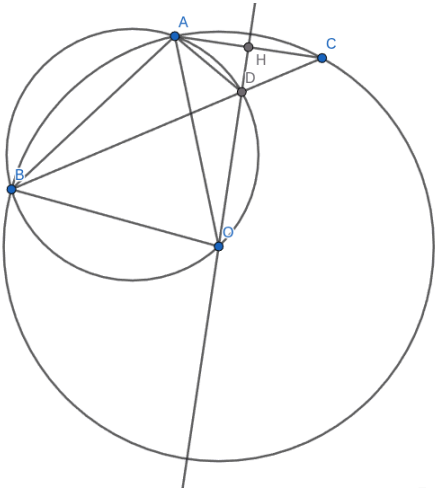


On note H l'intersection de (AO) et (DE).
Les diagonales dans le quadrilatère dont on veut montrer qu'il est cyclique ne sont pas tracées et ne semblent pas utiles, ainsi on va montrer que $\widehat{DEC} = 180° - \widehat{DBC}$. (angles opposés)
Puisque A, E, C sont alignés on a $\widehat{HEC} = 180° - \widehat{HEA}$.
Mais dans le triangle AEH rectangle en H on a $\widehat{HEA} = 90° - \widehat{HAE}$ ainsi $\widehat{HEC} = 180° - \left(90° - \widehat{HAE}\right) = 90° + \widehat{HAE} = 90° + \widehat{OAC}$
Dans le triangle isocèle AOC on a $\widehat{OAC} = 90° - \frac{\widehat{AOC}}{2}$
Par le théorème de l'angle au centre $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2}$ donc $\widehat{OAC} = 90° - \widehat{ABC} = 90° - \widehat{DBC}$
Donc $\widehat{DEC} = \widehat{HEC} = 90° + \left(90° - \widehat{DBC}\right) = 180° - \widehat{DBC}$.
Donc par angles opposés les points B, D, E, C sont cocycliques.

Exercice 6 :

Soit ABC avec $\widehat{BAC} > 90°$, O le centre de son cercle circonscrit. Le cercles circonscrit à AOB recoupe $[BC]$ en un point D. Montrer que (OD) et (AC) sont perpendiculaires.

Correction :

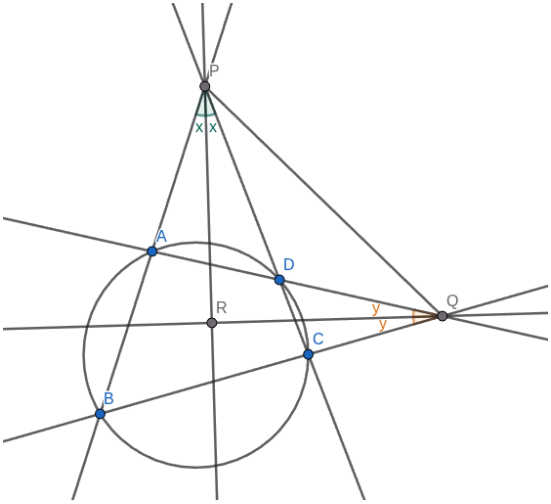


On note H l'intersection de (OD) et (AC).
Comme le point O nous intéresse, on va sûrement une nouvelle fois devoir utiliser l'angle au centre dans le grand cercle circonscrit à ABC, il semble plus intéréssant de l'utiliser sur l'arc $\widehat{AB}$, ce qui donne : $2\widehat{ACB} = \widehat{AOB}$
Puis dans le quadrilatère $ABOD$, par angles inscrits : $\widehat{AOB} = \widehat{ADB} = 180° - \widehat{ADC}$.
Donc $2\widehat{ACD} = 180° - \widehat{ADC}$ c'est à dire $\widehat{ADC} = 180° - 2\widehat{ACD}$
Enfin dans le triangle ACD on a $\widehat{DAC} = 180° - \left(180° - 2\widehat{ACD}\right) - \widehat{ADC} = \widehat{ACD}$
Donc ACD est isocèle en D.
Ainsi montrer que $[DH]$ est la hauteur de ACD revient à montrer que $[DH)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.
Montrons donc que $\widehat{ADH} = \widehat{HDC}$
Par cocyclicité $\widehat{ADH} = 180° - \widehat{ADO} = \widehat{ABO}$.
Et par angles opposés par le sommet et angles inscrits $\widehat{HDC} = \widehat{BDO} = \widehat{BAO}$.
$\widehat{ABO} = \widehat{BAO}$ car AOB est isocèle en O, ce qui conclut bien que $\widehat{ADH} = \widehat{HDC}$, donc que $\widehat{DHA} = 90°$ par la remarque ci dessus.

Exercice 7 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique avec les points dans cet ordre sur le cercle. (AB) et (CD) se coupent en P, tandis que (BC) et (AD) se coupent en Q. Les bissectrices de $\widehat{CPB}$ et $\widehat{DQC}$ s'intersectent en R. Montrer que $\widehat{PRQ} = 90°$.

Correction :



On va s'interesser au triangle PRQ et essayer de montrer que $\widehat{RPQ} = 90° - \widehat{RQP}$, ce qui concluera en exprimant la somme des angles du triangle.
On note déjà $x = \widehat{RPD}$, $y = \widehat{RQD}$ et $z = \widehat{DPQ} + \widehat{DQP}$.
Par la relation Chalses pour les angles dans le triangle DPQ (voir le cours ci dessus) on a $\widehat{ADP} = z$ et $\widehat{CDQ} = z$.
Dans les triangles APD et CDQ : $180° = 2x + z + \widehat{PAD}$ et $180° = 2y + z + \widehat{QCD}$. $(*)$
Or par angles opposés dans le cercle passant par A, B, C, D on a $\widehat{PAD} = 180° - \widehat{BAD} = \widehat{BCD} = 180° - \widehat{QCD}$.
Ainsi en sommant les deux égalités de la ligne $(*)$:

$$180° + 180° = 2x + 2y + z + z + \left(180° - \widehat{QCD}\right) + \widehat{QCD}$$

$$180° = 2x + 2y + 2z$$

$$x + y + z = 90°$$

Donc dans le triangle PRQ : $\widehat{PRQ} = 180° - x - y - z = 180° - 90° = 90°$.
Ce qui conclut.