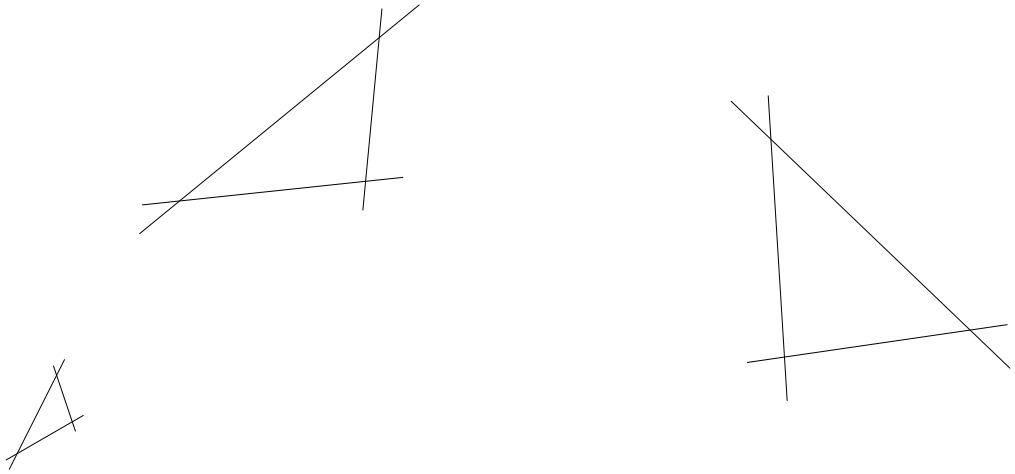
TRIANGLES SEMBLABLES

Cours

Les triangles semblables sont très utiles en géométrie, car ils permettent de passer de relations d'angles à des égalités de rapports de longueurs et vice-versa.

- Intuitivement, deux triangles sont **semblables** si en les translatants/retournant/aggrandissant, ils sont superposables :



- On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si :

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}, \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \text{ et } \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

  Et on le note : $ABC \sim A'B'C'$
  Attention : l'ordre des points est important !
- La propriété intéressante est que :

$$ABC \sim A'B'C' \iff \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

  Ce qui nous permet donc de passer d'égalités d'angles à des égalités de rapports, ainsi que dans l'autre sens.

  Pour retrouver quels rapports on a, c'est assez facile : deux points sont l'un au dessus de l'autre si ils ont la même position dans leur triangle.
- On peut également se contenter de montrer une égalité de rapports, et l'égalité de l'angle entre les deux côté. On a :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

Pour résumer, pour montrer que deux triangles sont semblables, on a besoin au choix :

— des 3 égalités d'angle (2 suffisent donc car à partir de deux angles dans un triangle, on peut trouver le troisième)
— des trois égalités de rapports de longueur
— d'une égalité entre deux rapports et de l'angle au milieu de ce rapport (c'est important d"avoir cet angle et pas un autre)

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 2
Soit ABC un triangle rectangle en A et D le pied de la hauteur issue de A. Montrer que : $AB^2 = BD \cdot BC$ et $AC^2 = CD \cdot CB$. En déduire que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exercice 3
Quels sont les triangles ABC tels que ABC et ACB sont semblables ? tels que ABC et CAB sont semblables ?

Exercice 4 (Théorème de Thalès)
Soit A, B, X trois points et (d) une droite parallèle à (AB). Soit A' l'intersection de (AX) et (d), et soit B' celle de (BX) et (d). Montrer que :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AX}{A'X} = \frac{BX}{B'X}$$

Exercice 5 (puissance d'un point)
Soit ω un cercle, A, B, C, D des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites AB et CD (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point P.
Montrer que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Exercice 6 (puissance d'un point intérieur)
Soit ω un cercle et X un point dans ω. Soit (d) et (d') deux droites passant pas X. On note A et B les intersections de (d) et ω ; et A' et B' celles de (d') et ω.
Montrer que $XA \cdot XB = XA' \cdot XB'$.

Exercice 7
Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point de $[AC]$. On nomme E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F celui sur $[CD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$

Exercice 8
Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2, s'intersectant en deux points X et Y. Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y. On note B l'intersection de (AY) en Ω_2. Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Exercice 9
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M et N les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$. La droite (DB) coupe les droites (AM) et (AN) respectivement en P et Q.
Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 10
Soit ABC un triangle isocèle rectangle en C. Soit D et E des points sur $[CA]$ et $[CB]$ tels que $CD = CE$. Soient U et V les points d'intersection des perpendiculaires à (AE) passant par D

et C.
Montrer que $UV = VB$.

Exercice 11 (Ptolémée)
Soit A, B, C, D quatre points disposés dans cet ordre sur un cercle. Montrer que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

Exercice 12
Soit ABC un triangle, D, E, F les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit X un point dans ABC. On note A', B', C' les symétriques de X par rapport à D, E, F.
Montrer que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.