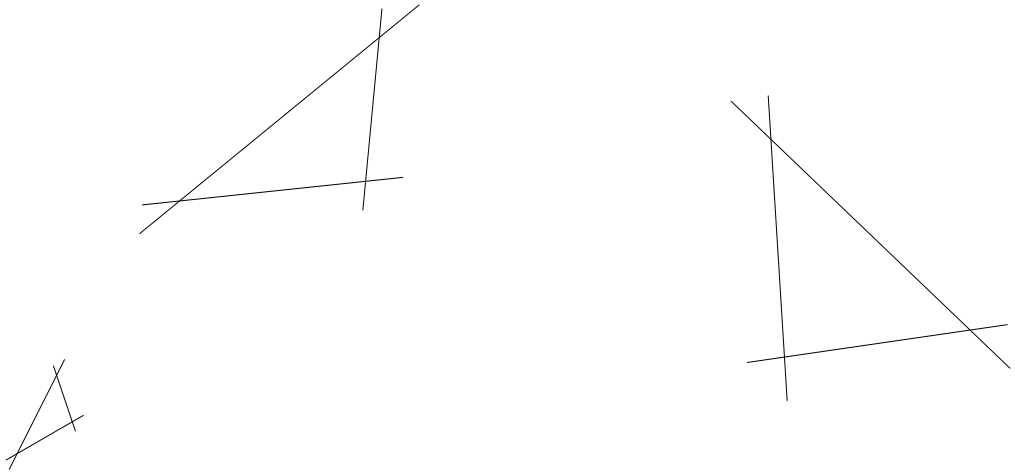
## TRIANGLES SEMBLABLES

### Cours

Les triangles semblables sont très utiles en géométrie, car ils permettent de passer de relations d'angles à des égalités de rapports de longueurs et vice-versa.

- Intuitivement, deux triangles sont **semblables** si en les translatants/retournant/aggrandissant, ils sont superposables :



- On dit que deux triangles $ABC$ et $A'B'C'$ sont semblables si :

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}, \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \text{ et } \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

  Et on le note : $ABC \sim A'B'C'$
  Attention : l'ordre des points est important !
- La propriété intéressante est que :

$$ABC \sim A'B'C' \iff \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

  Ce qui nous permet donc de passer d'égalités d'angles à des égalités de rapports, ainsi que dans l'autre sens.

  Pour retrouver quels rapports on a, c'est assez facile : deux points sont l'un au dessus de l'autre si ils ont la même position dans leur triangle.
- On peut également se contenter de montrer une égalité de rapports, et l'égalité de l'angle entre les deux côté. On a :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

Pour résumer, pour montrer que deux triangles sont semblables, on a besoin au choix :

— des $3$ égalités d'angle (2 suffisent donc car à partir de deux angles dans un triangle, on peut trouver le troisième)
— des trois égalités de rapports de longueur
— d'une égalité entre deux rapports et de l'angle au milieu de ce rapport (c'est important d"avoir cet angle et pas un autre)

**Exercices**

**Exercice 1**
Soit $ABC$ un triangle et $D$, $E$ les pieds des hauteurs issues de $A$ et $B$ respectivement. Montrer que les triangles $CDE$ et $CAB$ sont semblables.

**Exercice 2**
Soit $ABC$ un triangle rectangle en $A$ et $D$ le pied de la hauteur issue de $A$. Montrer que : $AB^2 = BD \cdot BC$ et $AC^2 = CD \cdot CB$. En déduire que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

**Exercice 3**
Quels sont les triangles $ABC$ tels que $ABC$ et $ACB$ sont semblables ? tels que $ABC$ et $CAB$ sont semblables ?

**Exercice 4** (Théorème de Thalès)
Soit $A, B, X$ trois points et $(d)$ une droite parallèle à $(AB)$. Soit $A'$ l'intersection de $(AX)$ et $(d)$, et soit $B'$ celle de $(BX)$ et $(d)$. Montrer que :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AX}{A'X} = \frac{BX}{B'X}$$

**Exercice 5** (puissance d'un point)
Soit $\omega$ un cercle, $A, B, C, D$ des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites $AB$ et $CD$ (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point $P$.
Montrer que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

**Exercice 6** (puissance d'un point intérieur)
Soit $\omega$ un cercle et $X$ un point dans $\omega$. Soit $(d)$ et $(d')$ deux droites passant pas $X$. On note $A$ et $B$ les intersections de $(d)$ et $\omega$ ; et $A'$ et $B'$ celles de $(d')$ et $\omega$.
Montrer que $XA \cdot XB = XA' \cdot XB'$.

**Exercice 7**
Soit $ABCD$ un parallélogramme, $M$ un point de $[AC]$. On nomme $E$ le projeté orthogonal de $M$ sur $(AB)$ et $F$ celui sur $(AD)$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$

**Exercice 8**
Soit $\Omega_1$ et $\Omega_2$ deux cercles de centres $O_1$ et $O_2$, s'intersectant en deux points $X$ et $Y$. Soit $A$ un point de $\Omega_1$ distinct de $X$ et $Y$. On note $B$ l'intersection de $(AY)$ en $\Omega_2$. Montrer que les triangles $XO_1O_2$ et $XAB$ sont semblables.

**Exercice 9**
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit $M$ et $N$ les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$. La droite $(DB)$ coupe les droites $(AM)$ et $(AN)$ respectivement en $P$ et $Q$.
Montrer que $BP = PQ = QD$.

**Exercice 10**
Soit $ABC$ un triangle isocèle rectangle en $C$. Soit $D$ et $E$ des points sur $[CA]$ et $[CB]$ tels que $CD = CE$. Soient $U$ et $V$ les points d'intersection des perpendiculaires à $(AE)$ passant par $D$

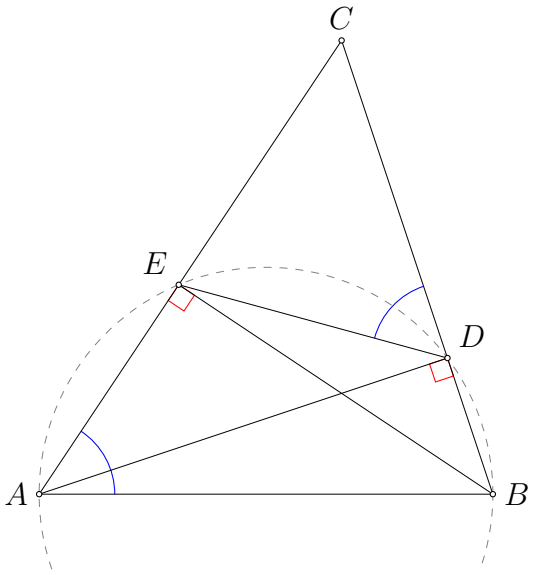
et $C$.
Montrer que $UV = VB$.

**Exercice 11** (Ptolémée)
Soit $A, B, C, D$ quatre points disposés dans cet ordre sur un cercle. Montrer que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

**Exercice 12**
Soit $ABC$ un triangle, $D, E, F$ les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit $X$ un point dans $ABC$. On note $A', B', C'$ les symétriques de $X$ par rapport à $D, E, F$.
Montrer que $(AA'), (BB')$ et $(CC')$ sont concourantes.

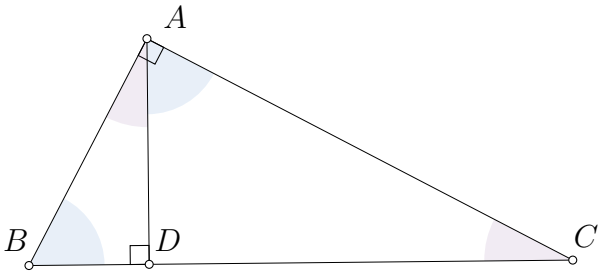
**Solutions**

*Solution de l'exercice 1*




$\widehat{AEB} = \widehat{ADB}$ donc $A, B, D, E$ sont cocycliques. Ainsi, $\widehat{CDE} = 180 - \widehat{BDE} = \widehat{CAB}$. De plus, $\widehat{ECD} = \widehat{BCA}$, donc on a deux angles égaux, ainsi, on a $CDE \sim CAB$.

*Solution de l'exercice 2*




On a : $\widehat{ABD} = 90 - \widehat{BAD} = \widehat{DAC}$ et de même, $\widehat{BAD} = \widehat{ACD}$. Ainsi, les triangles $ABD$, $CAD$ et $CBA$ sont deux à deux semblables. Que $ABD$ et $CBA$ le soient montre que :

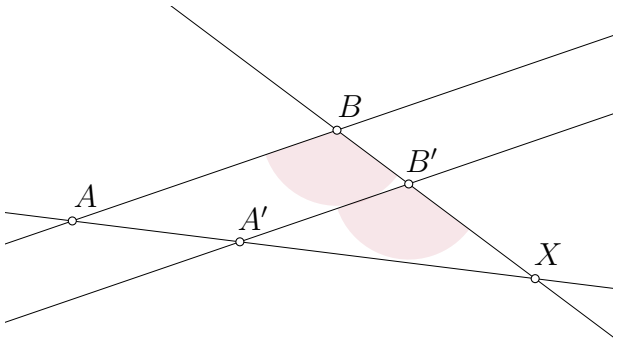
$$\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{BA}$$

d'où $AB^2 = CB \cdot BD$. On obtient l'autre égalité voulue en exploitant le fait que $CAD$ et $CBA$ sont semblables.

On a alors : $AB^2 + AC^2 = BD \cdot BC + CD \cdot BC = (BD + DC) \cdot BC = BC^2$.

*Solution de l'exercice 3*
$ABC \sim ACB$ si et seulement si $ABC$ est isocèle en $A$. $ABC \sim CAB$ si et seulement si $ABC$ est équilatéral.

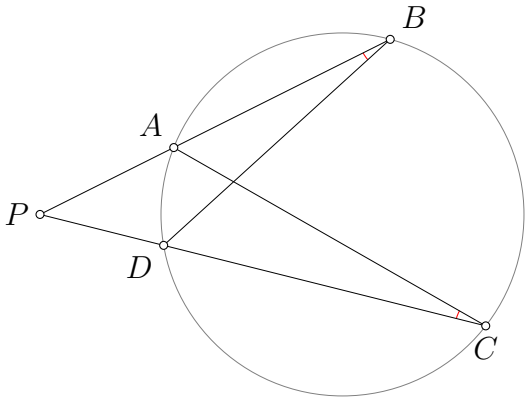
*Solution de l'exercice 4*




Par angles correspondants, $\widehat{XB'A'} = \widehat{XBA}$, et on a $\widehat{B'XA'} = \widehat{BXA}$ donc les triangles $XB'A'$ et $XBA$ sont semblables, ce qui donne les rapports voulus.

*Remarque :* si $X$ est entre les deux droites, on doit utiliser les angles alternes-internes et on obtient bien que les triangles sont semblables.

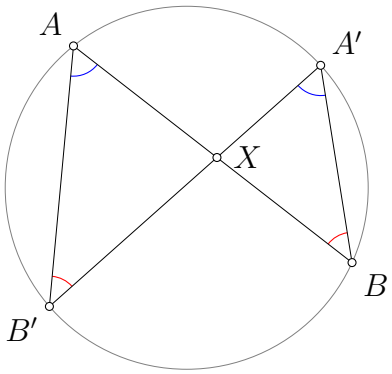
*Solution de l'exercice 5*




Une chasse aux angles nous montre que : $PCA \sim PBD$. Cela implique que : $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{PB}{PD}$. D'où :

$$PC \cdot PD = PA \cdot PB$$

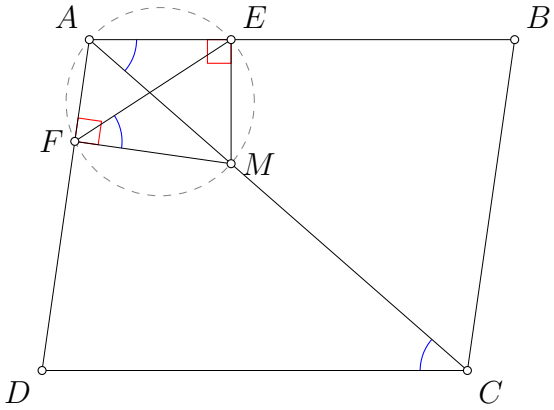
*Solution de l'exercice 6*




Une chasse aux angles nous montre que : $AXB' \sim A'XB$. Il vient donc $\dfrac{XA}{XB'} = \dfrac{XA'}{XB}$. C'est-à-dire :

$$XA \cdot XB = XA' \cdot XB'$$

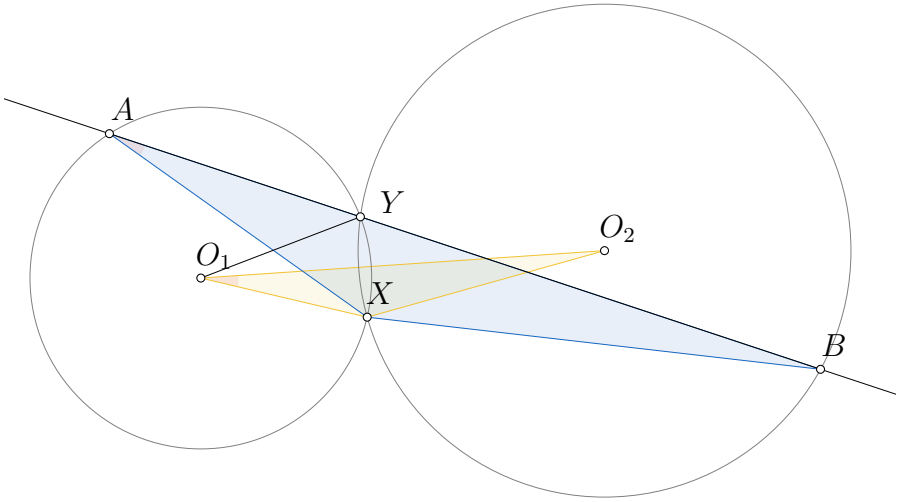
*Solution de l'exercice 7*




$AEMF$ sont cocycliques car $\widehat{AFM} = 180 - \widehat{AEM}$. Donc $\widehat{EMF} = 180 - \widehat{FAE} = 180 - \widehat{BAD}$. Et comme $(AB) \parallel (CD)$, $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAD} = \widehat{EMF}$.
On a de plus $\widehat{EFM} = \widehat{EAM} = \widehat{CAB} = \widehat{ACD}$ par angles alternes-internes.
Ainsi, les triangles $MFE$ et $BAC$ semblables. D'où :

$$\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$$

*Solution de l'exercice 8*



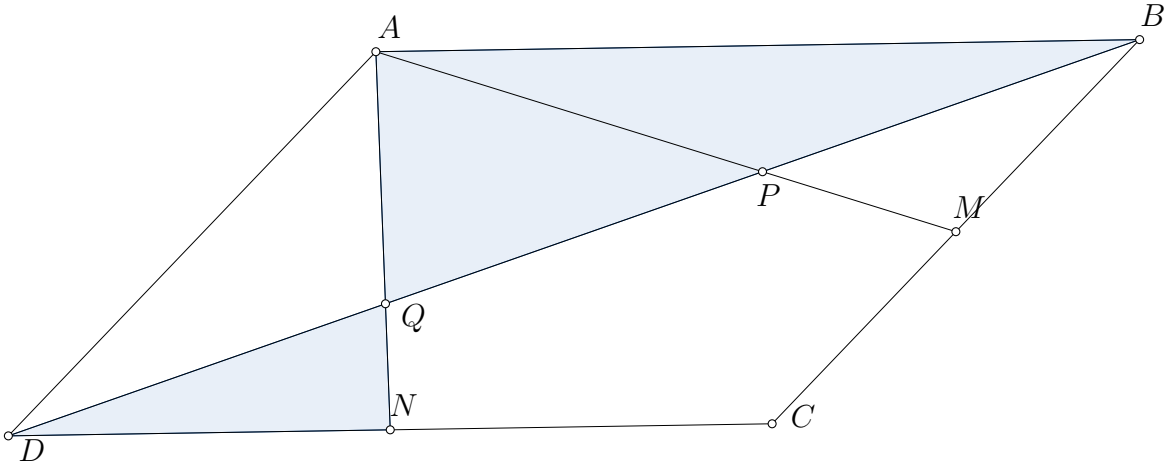

Par théorème de l'angle au centre, on a : $\widehat{ABX} = \widehat{YBX} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{YO_1X}$.

La médiatrice de $[XY]$ est $(O_1O_2)$, donc par symétrie selon la droite $(O_1O_2)$ : $\widehat{XO_1O_2} = \widehat{YO_1O_2}$, d'où $\frac{1}{2} \cdot \widehat{YO_1X} = \widehat{XO_1O_2}$.

Ainsi, on a $\widehat{ABX} = \widehat{O_2O_2X}$. De même, on a : $\widehat{BAX} = \widehat{O_1O_2X}$.

Il en résulte que $AXB \sim O_1XO_2$.

*Solution de l'exercice 9*




Par angles alternes-internes, on a $\widehat{QDN} = \widehat{QBA}$ et $\widehat{QND} = \widehat{QAB}$, donc $QDN \sim QBA$.

Ainsi, on a $\frac{DQ}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$ car $AB = DC$ et $N$ est le milieu de $[DC]$. (On peut remarquer que c'est en fait le théorème de Thalès dans $DNQAB$)

Dond $DQ = \frac{QB}{2}$, ce qui implique $DQ = \frac{DB}{3}$. On montre de même que $BP = \frac{DB}{3}$, et il vient alors que $QP = BP - DQ - PB = \frac{BD}{3}$.

On a bien alors $DQ = QB = PB$.

*Solution de l'exercice 10*
Voir le poly de valbonne de 2021, page 96, exercice 8.

*Solution de l'exercice 11*
Voir le poly de valbonne de 2023, page 125, exercice 7.

*Solution de l'exercice 12*
Voir le poly de valbonne de 2021, page 96, exercice 7.