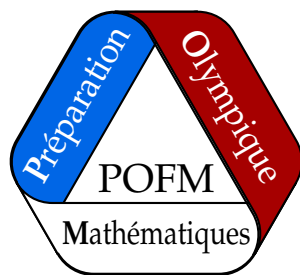


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 12 MAI 2026

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de téléverser les copies sur le site :

<https://coupe.maths-olympiques.fr/>

Énoncés Junior

Exercice 1. Les nombres de 1 à 2025 sont écrits au tableau. Anaïs effectue 674 fois l'opération suivante : elle choisit deux entiers encore écrits au tableau dont la différence vaut 1 et les efface.

Montrer que la somme des entiers encore écrits au tableau à la fin des 674 opérations n'est pas divisible par 6 mais que le produit de ces entiers est divisible par 6.

Exercice 2. Un entier $n \geq 1$ est dit *dynamique* s'il existe une infinité de carrés parfaits qui sont la somme de n entiers consécutifs strictement positifs.

Déterminer le nombre d'entiers dynamiques n tels que $1 \leq n \leq 2048$.

Exercice 3. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 et se coupant en deux points A et B distincts. La tangente en A au cercle circonscrit au triangle AO_1O_2 recoupe le cercle ω_1 en D et le cercle ω_2 en E .

Montrer que les points D et E sont à égale distance du centre du cercle circonscrit au triangle BO_1O_2 .

Exercice 4. Le *prix* d'une suite $a_1, \dots, a_{100}$ d'entiers (non nécessairement positifs) est défini comme le plus grand des entiers de la forme

$$|(a_1 + \dots + a_i) - a_j|$$

où i et j sont des entiers de $\{1, 2, \dots, 100\}$.

Déterminer le plus petit prix parmi toutes les suites $a_1, \dots, a_{100}$ d'entiers deux à deux distincts.

Énoncés Senior

Exercice 5. Le *prix* d'une suite $a_1, \dots, a_{100}$ d'entiers (non nécessairement positifs) est défini comme le plus grand des entiers de la forme

$$|(a_1 + \dots + a_i) - a_j|$$

où i et j sont des entiers de $\{1, 2, \dots, 100\}$.

Déterminer le plus petit prix parmi toutes les suites $a_1, \dots, a_{100}$ d'entiers deux à deux distincts.

Exercice 6. La suite de triplets d'entiers strictement positifs $(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), \dots, (a_{2025}, b_{2025}, c_{2025})$ vérifie les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} a_{i+1} &= a_i + \text{PGCD}(b_i, c_i), \\ b_{i+1} &= b_i + \text{PGCD}(c_i, a_i), \\ c_{i+1} &= c_i + \text{PGCD}(a_i, b_i) \end{cases}$$

pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq 2024$.

Déterminer la plus petite valeur que peut prendre a_{2025} .

Le nombre $\text{PGCD}(x, y)$ désigne le plus grand commun diviseur de x et y .

Exercice 7. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel $\widehat{ADC} > 90^\circ$. On suppose qu'il existe des points X et Y sur le segment $[AC]$ tels que

$$\widehat{ADX} = \widehat{YDC} = 90^\circ, \quad \widehat{CAD} = \widehat{CBX} \quad \text{et} \quad \widehat{DCA} = \widehat{YBA}.$$

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle BXY . On suppose que O n'est pas sur la médiatrice du segment $[AC]$. La parallèle à (AC) passant par O coupe la médiatrice du segment $[AC]$ au point R .

Montrer que la droite (OR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DRB}$.