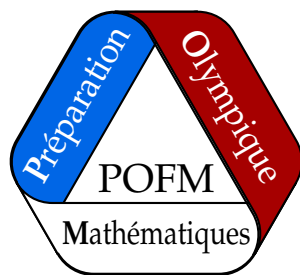


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 25 MARS 2026

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de téléverser les copies sur le site :

<https://coupe.maths-olympiques.fr/>

Énoncés Junior

Exercice 1. Déterminer tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs pour lesquels l'entier $ab + bc + ca$ est un nombre premier et un diviseur de $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

Exercice 2. Soient a, b, c et d des entiers positifs ou nuls tels que $a > b > c > d$ et $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 < 2025$. Déterminer la plus grande valeur que peut prendre $a + b + c + d$.

Exercice 3. Anna et Eva jouent au jeu suivant. Au début du jeu, Anna choisit un entier a dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et Eva choisit un entier b différent de a dans ce même ensemble. Ensuite, chacune à leur tour, en commençant par Anna, les deux joueuses choisissent un entier dans l'ensemble $\{a, b\}$ et l'écrivent au tableau. Si, après le tour de l'une d'entre elles, la somme de tous les nombres écrits au tableau est divisible par 1111, la dernière joueuse à avoir joué est déclarée gagnante.

Déterminer si l'une des deux joueuses possède une stratégie gagnante, et si oui laquelle.

Exercice 4. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. On note I_B et I_C les centres respectifs des cercles B -exinscrit et C -exinscrit au triangle ABC . Soit E un point sur la droite (AB) tel que $\widehat{BI_BE} = 90^\circ$ et soit F un point sur la droite (AC) tel que $\widehat{CI_CF} = 90^\circ$. Le cercle de centre I_B et de rayon I_BE coupe le segment $[BI_B]$ en X et le cercle de centre I_C de rayon I_CF coupe le segment $[CI_C]$ en Y .

Montrer que les droites (BY) et (CX) sont perpendiculaires.

Le cercle B -exinscrit du triangle ABC est le cercle tangent au segment $[AC]$ et aux demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ en des points en dehors des segments $[BA]$ et $[BC]$. Le cercle C -exinscrit est défini de façon similaire.

Énoncés Senior

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. On note I_B et I_C les centres respectifs des cercles B -exinscrit et C -exinscrit au triangle ABC . Soit E un point sur la droite (AB) tel que $\widehat{BI_BE} = 90^\circ$ et soit F un point sur la droite (AC) tel que $\widehat{CI_CF} = 90^\circ$. Le cercle de centre I_B et de rayon I_BE coupe le segment $[BI_B]$ en X et le cercle de centre I_C de rayon I_CF coupe le segment $[CI_C]$ en Y .

Montrer que les droites (BY) et (CX) sont perpendiculaires.

Le cercle B -exinscrit du triangle ABC est le cercle tangent au segment $[AC]$ et aux demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ en des points en dehors des segments $[BA]$ et $[BC]$. Le cercle C -exinscrit est défini de façon similaire.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$ un entier strictement positif et soit $(a_1, \dots, a_n)$ un n -uplet d'entiers strictement positifs et deux à deux distincts. Une *inversion* est une couple (i, j) d'entiers tel que $1 \leq i < j \leq n$ et $a_i > a_j$. Une inversion est dite *impaire* si $j - i$ est impair. On note A le nombre d'inversions et B le nombre d'inversions impaires.

Montrer que $A \leq 5B$.

Exercice 7. Étant donné deux entiers strictement positifs k et n , on note $f_k(n)$ le reste de la division euclidienne de n par $2^k - 1$. Un entier n est dit *ascendant* si

$$f_1(n) \leq f_2(n) \leq f_3(n) \leq f_4(n) \leq \dots,$$

autrement dit si la suite $(f_k(n))_{k \geq 1}$ est croissante.

- (a) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers ascendants.
- (b) Montrer qu'il existe un entier strictement positif M tel qu'il existe au plus $M/2025^{2025}$ entiers ascendants inférieurs ou égaux à M .