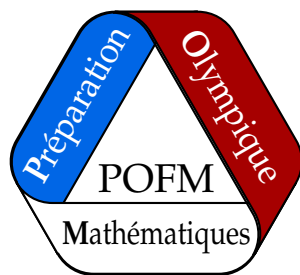


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 18 FÉVRIER 2026

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de téléverser les copies sur le site :

<https://coupe.maths-olympiques.fr/>

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soit D un point sur l'arc AB ne contenant pas C et E un point sur l'arc AC ne contenant pas B . La droite (DE) coupe le segment $[AB]$ en F et le segment $[AC]$ en G . On note O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles DFB et DGC . On note ℓ la perpendiculaire à (DE) passant par A .

Montrer que les droites (O_1O_2) et ℓ se coupent sur un point de Ω .

Exercice 2. Maryam écrit les puissances de deux $2, 4, 8, \dots, 2^{2024}$ au tableau. Chaque minute, elle effectue l'une des trois opérations suivantes :

- Elle choisit un nombre pair écrit au tableau, disons $2k$, l'efface et écrit le nombre k à la place,
- Elle choisit un nombre impair écrit au tableau, disons $2k+1$, l'efface et écrit les nombres k et 1 à la place,
- Elle choisit deux nombres écrits au tableau, disons k et ℓ (les valeurs de k et ℓ ne sont pas forcément distinctes), les efface et écrit (une seule fois) le nombre $k + \ell \cdot 2^k$. Par exemple, si le tableau contient les nombres $1, 3, 5$, Maryam peut choisir $k = 5$ et $\ell = 1$, et après son opération le tableau contiendra les nombres $3, 37$.

Déterminer, pour chacun des deux entiers n suivants, s'il existe une suite d'opérations au bout de laquelle l'entier n est le seul nombre écrit au tableau :

(a) $n = 2^{2025} - 1$?

(b) $n = 2^{2025} - 3$?

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier et $a_1, \dots, a_{2n}$ des réels strictement positifs dont la somme vaut 2. On suppose que

$$\min(a_1, a_2) + \min(a_2, a_3) + \min(a_3, a_4) + \dots + \min(a_{2n}, a_1) \leq 1.$$

Déterminer, en fonction de n , la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2n}^2.$$

Exercice 4. Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que

$$\frac{1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 2024!}{n!}$$

est le carré d'un entier.

Énoncés Senior

Exercice 5. On considère une grille de $n \times n$ cases. On numérote les lignes de 1 à n du bas vers le haut et les colonnes de 1 à n de la gauche vers la droite. Pour toute paire (i, j) d'indices, avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on place $\text{PGCD}(i, j)$ bonbons la case située sur la i -ème ligne et la j -ème colonne. Edwige souhaite partir du coin inférieur gauche pour se rendre au coin supérieur droit de la grille. Pour cela, à chaque minute, elle se déplace sur la case adjacente située à droite ou au-dessus de la case où elle se trouve. Edwige récupère les bonbons de chaque case par laquelle elle est passée (y compris la case de départ).

Déterminer le nombre maximal de bonbons qu'Edwige peut récupérer.

Exercice 6. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction non bornée et telle que, pour toute paire (m, n) d'entiers positifs ou nuls vérifiant

$$f(m+n) = \max\{f(0), \dots, f(m+n)\},$$

on a

$$f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs A, B, C et D tels que, pour tout entier positif n , on a $f(An + B) = Cn + D$.

Une fonction est dite non bornée si, pour tout entier $N \geq 0$, il existe un entier positif ou nul n tel que $f(n) \geq N$.

Exercice 7. Elsa veut placer des bonbons sur une grille de taille 1000×1000 . Au départ, toutes les cases de la grille sont vides. Chaque minute, Elsa choisit une case vide appartenant à une ligne ou une colonne contenant un nombre de bonbons qui est divisible par 3, et Elsa place un bonbon sur cette case.

Déterminer le plus grand nombre de bonbons qu'Elsa peut placer dans la grille.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Dans chaque case d'un tableau 10×10 , on inscrit un nombre réel. On suppose que pour chaque rectangle horizontal 1×3 , la somme des réels inscrits dans les cases du rectangle est négative ou nulle. On suppose également que pour chaque rectangle vertical 3×1 , la somme des réels inscrits dans les cases du rectangle est positive ou nulle.

Déterminer le nombre maximal de nombres réels strictement positifs parmi les 100 réels inscrits dans le tableau.

Exercice 9. Soient k et m deux entiers strictement positifs tels que $k \geq 3$. On suppose qu'il existe au moins k entiers $n \geq 2$ distincts vérifiant la propriété suivante : la somme de n et du plus grand diviseur de n différent de n est égale à m . Montrer que $m > 3^{2^{k-2}}$.

Exercice 10. Soit ABC un triangle dans lequel $AB < AC$ et soit Ω son cercle circonscrit. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ intersecte le segment $[BC]$ au point L et recoupe le cercle Ω au point W . Soit P un point distinct de W sur le cercle circonscrit au triangle WLC tel que $BP = CP$. La tangente au cercle Ω au point A coupe la droite (BC) au point T . Soit Q un point sur la droite (BW) tel que $TB = TQ$.

Montrer que les points Q, A, P et W sont cocycliques.