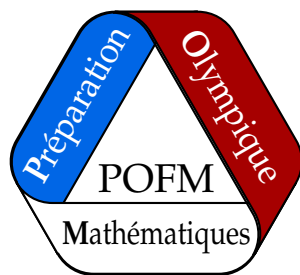


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 14 JANVIER 2026

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de téléverser les copies sur le site :

<https://coupe.maths-olympiques.fr/>

Énoncés Junior

Exercice 1. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} \geq 3.$$

Exercice 2. Soit ABC un triangle et soient D et E des points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que les points B, D, E et C sont cocycliques. Le cercle circonscrit au triangle ADC recoupe le segment $[BC]$ au point F , tandis que le cercle circonscrit au triangle AEB recoupe le segment $[BC]$ au point G .

Montrer que les droites (DF) et (EG) se coupent sur la perpendiculaire à (BC) passant par A .

Exercice 3. On appelle *note* d'une paire (x, y) d'entiers strictement positifs la quantité $\text{PGCD}(x^2, y^2)$.

Soit $n \geq 3$ un entier. On appelle *arrangement* de n entiers strictement positifs $a_1, \dots, a_n$ le choix de n paires d'entiers de la forme (a_i, a_j) avec $i \neq j$ de sorte que chaque entier a_i appartient à exactement 2 paires. Le *prix* de cet arrangement est la somme des notes de chaque paire.

Un entier $n \geq 3$ est dit *sympathique* si il satisfait la propriété suivante : pour tout entier $m \geq 1$, il existe n entiers et un arrangement de ces n entiers dont le prix est exactement 2025^m .

Déterminer le plus petit et le plus grand entier sympathique.

Par exemple, si $n = 4$, que les quatre entiers choisis sont $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 6$ et que l'arrangement est $(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2)$, le prix de l'arrangement est $2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 = 18$.

Exercice 4. On considère une rangée de n fleurs, numérotées de 1 à n de gauche à droite (la fleur la plus à gauche étant numérotée 1, celle la plus à droite numérotée n), avec $n \geq 3$ un entier. Maïa l'abeille butine les fleurs en suivant la règle suivante :

Maïa commence par butiner la fleur sur laquelle elle se trouve au début. Si Maïa vient de butiner la fleur de numéro k , son déplacement consiste en k mouvements d'une fleur vers une fleur adjacente. Elle commence déjà par se déplacer vers la droite. Si elle atteint la fleur n , et qu'il lui reste des mouvements, elle se déplace alors vers la gauche. Si elle atteint la fleur 1, et qu'il lui reste des mouvements, elle utilise les mouvements restants pour se déplacer vers la droite. L'ensemble de ces trajets constitue un *déplacement*. Maïa butine *uniquement* la fleur sur laquelle elle atterrit au bout du k -ème trajet.

Maïa butine ainsi indéfiniment. Une fleur est dite *surexposée* si, quelle que soit la fleur sur laquelle Maïa démarre son aventure, elle butinera cette fleur au bout d'un nombre fini de déplacements. Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe exactement une fleur surexposée.

Par exemple, si $n = 8$ et que Maïa butine la fleur 3, elle effectue trois mouvements vers la droite, donc butine ensuite la fleur 6. Ensuite elle effectue deux déplacements vers la droite, puis comme elle a atteint la fleur 8, effectue les quatre mouvements restants vers la gauche, et butine la fleur 4. Ensuite, elle effectue quatre mouvements vers la droite et butine la fleur 8. Ensuite, comme elle a déjà atteint la fleur 8, elle effectue 7 mouvements vers la gauche. Elle a alors atteint la fleur 1, donc effectue 1 mouvement vers la droite, et butine la fleur 2. Ainsi si Maïa butine la fleur 3, les quatre fleurs qu'elle butinera ensuite seront les fleurs de numéro 6, 4, 8 et 2, dans cet ordre.

Énoncés Senior

Exercice 5. On considère une rangée de n fleurs, numérotées de 1 à n de gauche à droite (la fleur la plus à gauche étant numérotée 1, celle la plus à droite numérotée n), avec $n \geq 3$ un entier. Maïa l'abeille butine les fleurs en suivant la règle suivante :

Maïa commence par butiner la fleur sur laquelle elle se trouve au début. Si Maïa vient de butiner la fleur de numéro k , son déplacement consiste en k mouvements d'une fleur vers une fleur adjacente. Elle commence déjà par se déplacer vers la droite. Si elle atteint la fleur n , et qu'il lui reste des mouvements, elle se déplace alors vers la gauche. Si elle atteint la fleur 1, et qu'il lui reste des mouvements, elle utilise les mouvements restants pour se déplacer vers la droite. L'ensemble de ces trajets constitue un *déplacement*. Maïa butine *uniquement* la fleur sur laquelle elle atterrit au bout du k -ème trajet.

Maïa butine ainsi indéfiniment. Une fleur est dite *surexposée* si, quelle que soit la fleur sur laquelle Maïa démarre son aventure, elle butinera cette fleur au bout d'un nombre fini de déplacements. Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe exactement une fleur surexposée.

Par exemple, si $n = 8$ et que Maïa butine la fleur 3, elle effectue trois mouvements vers la droite, donc butine ensuite la fleur 6. Ensuite elle effectue deux déplacements vers la droite, puis comme elle a atteint la fleur 8, effectue les quatre mouvements restants vers la gauche, et butine la fleur 4. Ensuite, elle effectue quatre mouvements vers la droite et butine la fleur 8. Ensuite, comme elle a déjà atteint la fleur 8, elle effectue 7 mouvements vers la gauche. Elle a alors atteint la fleur 1, donc effectue 1 mouvement vers la droite, et butine la fleur 2. Ainsi si Maïa butine la fleur 3, les quatre fleurs qu'elle butinera ensuite seront les fleurs de numéro 6, 4, 8 et 2, dans cet ordre.

Exercice 6. Soit ABC un triangle aux angles aigus dans lequel $AB < AC$ et Γ son cercle circonscrit. La perpendiculaire à (AC) passant par B recoupe le cercle Γ au point D . Soit Q le point de Γ , autre que B , vérifiant $AQ = AB$. Les droites (BQ) et (AC) se coupent au point R . La droite (DR) recoupe le cercle Γ au point S . On note T le point d'intersection du cercle circonscrit au triangle QRS et du segment $[BC]$. Les droites (QT) et (RS) se coupent au point X .

Montrer que les droites (CX) et (AB) sont perpendiculaires.

Exercice 7. Soit S un ensemble non vide (fini ou infini) d'entiers strictement positifs, tel qu'aucun entier strictement plus grand que 1 ne divise tous les éléments de S . Déterminer toutes les suites non périodiques $a_1, a_2, a_3, \dots$ d'entiers strictement positifs telles que, pour tout entier $n \geq 1$,

- $a_n \leq |a_{n+\ell} - \ell|$ pour tout entier ℓ dans S ,
- $a_n = |a_{n+\ell} - \ell|$ pour au moins un entier ℓ dans S .

Une suite $b_1, b_2, b_3, \dots$ est dite *périodique* s'il existe un entier $t \geq 1$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, $b_{n+t} = b_n$.