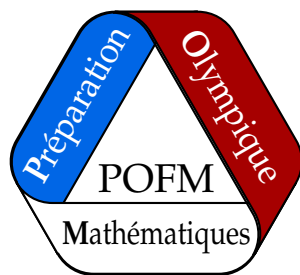


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 19 NOVEMBRE 2025
à destination des élèves du groupe Senior

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Après l'épreuve, merci de téléverser les copies sur le site :

<https://coupe.maths-olympiques.fr/>

Énoncés Senior

Exercice 1. Aline joue au *solitaire quadratique*. Pour cela, elle commence par choisir deux entiers a et b non nuls et écrit au tableau l'équation $x^2 + ax + b = 0$ d'inconnue x . Chaque tour, si l'équation écrite au tableau admet deux solutions entières distinctes et non nulles notées u et v , alors Aline efface l'équation du tableau et la remplace, à sa convenance, soit par $x^2 + ux + v = 0$ soit par $x^2 + vx + u = 0$. Sinon, le jeu s'arrête. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers à partir desquels Aline peut jouer au solitaire quadratique indéfiniment.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dans lequel l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus. Soient D et E des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ et tels que le quadrilatère $BDEC$ est cyclique. On suppose que le cercle circonscrit au triangle ADE coupe le segment $[BC]$ en deux points X et Y , de sorte que les points B, X, Y et C sont alignés dans cet ordre. On note Ω_B le cercle circonscrit au triangle BDX et Ω_C le cercle circonscrit au triangle CEY . On note P le point d'intersection de la tangente à Ω_B en D et de la tangente à Ω_C en E . On note Q le point d'intersection de la tangente à Ω_B en B et de la tangente à Ω_C en C .

Montrer que les points A, P et Q sont alignés.

Exercice 3. Soient n et m deux entiers strictement positifs, avec $n \geq 2$. On place sur une table n piles de cailloux, contenant chacune respectivement $a_1, \dots, a_n$ cailloux, de sorte que l'on ait $m \leq a_i \leq i \times m$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ (en particulier, $a_1 = m$).

Auriane et Edwige jouent au jeu suivant : à chaque minute, tant que cela est possible, Edwige choisit deux piles non vides et retire un certain nombre strictement positif de cailloux de la pile avec le moins de cailloux (en cas d'égalité, elle choisit la pile qu'elle veut). Auriane décide ensuite si elle retire un nombre identique de cailloux dans l'autre pile, ou si elle ajoute les cailloux qu'Edwige a retirés à l'autre pile. Lorsqu'il y a au plus une pile non vide, le jeu s'arrête.

Déterminer le plus petit entier k tel que Auriane peut garantir que, quels que soient les entiers $a_1, \dots, a_n$ et quelles que soient les décisions d'Edwige, à un moment du jeu il y aura au plus k cailloux sur la table.

Exercice 4. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$ telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout diviseur strictement positif d de n , il existe un diviseur strictement positif e de n tel que n divise $d + f(e)$.