PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

À TÉLÉVERSER AU PLUS TARD LE 25 NOVEMBRE 2026

Les consignes suivantes sont à lire attentivement:

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2012 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit Γ un cercle et A, B, C, D quatre points sur Γ dans cet ordre tels que (AB) est parallèle à (CD). Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{DAB}$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle et D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Montrer que A est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{EDF}$.

Exercice 3. Soient C_1 et C_2 deux cercles qui se coupent en deux points P et Q. Soit ℓ une droite qui coupe C_1 en X et Y et C_2 en U et V, de sorte à ce que les points X, U, Y, V soient dans cet ordre sur la droite ℓ. Montrer que $\widehat{XPU} = \widehat{YQV}$.

Exercice 4. Soit BCS un triangle isocèle en S et Γ son cercle circonscrit. Soit X, Y deux points de $[BC]$ et U, V deux points de Γ tels que X, U, S sont alignés et Y, V, S sont alignés. Montrer que $UVXY$ est un quadrilatère inscriptible.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On suppose qu'il existe un point P à l'intérieur de $ABCD$ tel que $\widehat{APD} = 2 \cdot \widehat{PAB}$ et $\widehat{BPC} = 2 \cdot \widehat{PCD}$. Montrer que $ABCD$ est un rectangle.

Exercice 6. Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A. Soit D le milieu de $[AC]$, soit ℓ la droite (BD) et soit ω le cercle de diamètre $[AB]$. On considère P l'intersection autre que B entre ℓ et ω. Montrer que le cercle circonscrit à PAC est tangent à la droite (BC).

Exercice 7. Soient ABC un triangle et E, F des points sur les segements $[AC]$ et $[AB]$. On note O le centre de son cercle circonscrit. Montrer que le quadrilatère $AEOF$ est cyclique si et seulement si il existe un point D sur le segment $[BC]$ tel que $\widehat{ABC} = \widehat{DEF}$, $\widehat{CAB} = \widehat{FDE}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{EFD}$.

Exercice 8. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu de l'arc AC contenant B du cercle circonscrit au triangle ABC. Soient E un point de (AD) et F un point de (CD) tels que M soit équidistant de D, E et F. Montrer que les points B, M, E et F sont cocycliques.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle, qui n'est pas un cerf-volant, mais dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en H. On note M et N les milieux de $[BC]$ et $[CD]$. Les droites (MH) et (NH) rencontrent respectivement $[AD]$ et $[AB]$ en S et T. Démontrer qu'il existe un point E, situé à l'extérieur du quadrilatère $ABCD$, tel que :

- La droite (EH) soit la bissectrice des deux angles $\widehat{BES}$ et $\widehat{TED}$;
- $\widehat{BEN} = \widehat{MED}$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle. Soit D le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). On considère les points X, V, U étant respectivement les projetés orthogonaux de D sur : la droite (AB), la hauteur issue de C et la hauteur issue de B. Montrer que X, V et U sont alignés.

Exercice 11. Soient C_1 et C_2 deux cercles qui se coupent en deux points P et Q. Soit ℓ une droite qui coupe C_1 en X et Y et C_2 en U et V, de sorte à ce que les points X, U, Y, V soient dans cet ordre sur la droite ℓ. Montrer que $\widehat{XPU} = \widehat{YQV}$.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un parallélogramme. On suppose qu'il existe un point P à l'intérieur de $ABCD$ tel que $\widehat{APD} = 2 \cdot \widehat{PAB}$ et $\widehat{BPC} = 2 \cdot \widehat{PCD}$. Montrer que $ABCD$ est en fait un rectangle.

Exercice 13. Soit ABC un triangle isocèle rectangle en A. Soit D le milieu de $[AC]$, soit ℓ la droite (BD) et soit ω le cercle de diamètre $[AB]$. On considère P l'intersection autre que B entre ℓ et ω. Montrer que le cercle circonscrit à PAC est tangent à la droite (BC).

Exercice 14. Soit A un point et ℓ_B, ℓ_C deux demi-droites non parallèles partant de A. Les points B et C varient sur l_B, l_C respectivement, de sorte à ce que la quantité $AB + AC$ soit conservée. Montrer que le cercle circonscrit à ABC passe toujours par un point fixe autre que A.

Exercice 15. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M le milieu de l'arc AC contenant B du cercle circonscrit au triangle ABC. Soient E un point de (AD) et F un point de (CD) tels que M soit équidistant de D, E et F. Montrer que les points B, M, E et F sont cocycliques.

Exercice 16. Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, et D, E, F des points sur les segments $[BC], [AC], [AB]$ respectivement vérifiant $BD = BF$ et $CD = CE$. Le cercle circonscrit à EFD recoupe (BC) en $X \neq D$, et le cercle circonscrit à AEF recoupe Γ en $Y \neq A$. On suppose de plus que $BCEF$ est un quadrilatère cyclique. Montrer que les droites (AX) et (YD) se coupent sur Γ.

Exercice 17. Soit $ABCD$ un trapèze convexe tel que (AB) est parallèle à (CD). On suppose qu'il existe un cercle tangent à $(AB), (BD), (AC)$ et (CD). Soit X son centre. On suppose que X et A ne sont pas du même côté de la droite (BC). Soit P l'intersection de (AC) et (BD). La droite passant par P parallèle à (AB) intersecte $[AD]$ et $[BC]$ en Q et R respectivement. Soit S le projeté orhogonal de X sur $[BC]$. Montrer que $PQ = PR = PS$.

Exercice 18. Soient ABC un triangle, ω son cercle circonscrit, et Ω_A son cercle A-exinscrit. Soient X et Y les points d'intersection des cercles ω et Ω_A. Soient P et Q les projetés orthogonaux de A sur les tangentes à Ω_A en X et en Y, respectivement. La tangente en P au cercle circonscrit au triangle APX coupe la tangente en Q au cercle circonscrit au triangle AQY en un point R. Démontrer que $(AR) \perp (BC)$.