

COUPE ANIMATH D'AUTOMNE

30 septembre 2026

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
Chaque exercice est noté sur 7 points.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ **Pour les exercices 1 et 8**, seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.
- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8**, on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.
Les dictionnaires et outils de traduction sont interdits.

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{202 - 6}{20 + 2 + 6}$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Exercice 2. Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB < BC$. Soit D le point du segment $[AC]$ tel que la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC) . Soit E le point d'intersection, autre que B , du cercle de centre D passant par B avec le segment $[BC]$. Soit F le point d'intersection de la médiatrice du segment $[EC]$ avec la droite (AC) .

Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$?

Exercice 3. Soit n un nombre entier vérifiant $n \geq 4$. Aline a n bâtons dont les longueurs sont exactement les nombres entiers de 1 à n , 1 et n inclus. Elle souhaite faire un carré, de sorte que chaque côté soit composé d'un ou plusieurs bâtons mis bout à bout, et que chaque bâton soit utilisé pour former le carré.

Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle cela est possible?

Exercice 4. Déterminer tous les nombres entiers a, b, c positifs ou nuls pour lesquels les nombres $a^2 + a + b + c$, $b^2 + a + b + c$ et $c^2 + a + b + c$ sont tous les trois des nombres premiers.

Exercice 5. Soit ABG un triangle isocèle en G , et soit D et C des points appartenant aux segments $[AG]$ et $[BG]$ respectivement, différents de A et B , tels que les droites (DC) et (AB) sont parallèles. Soit M le milieu du segment $[DB]$ et E le point du segment $[AB]$ tel que les droites (DE) et (AB) sont perpendiculaires.

Montrer que les droites (EM) et (AC) sont parallèles.

Exercice 6. Soit a, b, c des nombres réels strictement positifs. Anatole écrit les nombres réels ab, bc et ca dans l'ordre qu'il souhaite sur son ardoise. Ensuite, Akin écrit les nombres réels $a + 2, b + 2$ et $c + 2$ dans l'ordre qu'il souhaite sur son ardoise. Il se montrent alors leurs ardoises et constatent qu'ils ont tous deux écrit les trois mêmes nombres.

Déterminer les nombres réels a, b, c pour lesquels cela est possible.

Exercice 7. Sur une grille 8×8 composée de 64 cases, Raphaël place une pierre noire sur chaque case de la ligne du haut et une pierre blanche sur chaque case de la ligne du bas. Un *déplacement* consiste à bouger une des pierres d'exactly une case vers le haut, le bas, la droite ou la gauche, si la case d'arrivée ne contient pas déjà une pierre.

Combien de déplacements faut-il au minimum à Raphaël pour arriver dans une situation où il y a une pierre blanche sur chaque case de la ligne du haut et une pierre noire sur chaque case de la ligne du bas?

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer

$$\sqrt{\sqrt{9^2 + 12^2} + \sqrt{6^2 + 8^2}}.$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Exercice 9. Soit n un nombre entier vérifiant $n \geq 4$. Aline a n bâtons dont les longueurs sont exactement les nombres entiers de 1 à n , 1 et n inclus. Elle souhaite faire un carré, de sorte que chaque côté soit composé d'un ou plusieurs bâtons mis bout à bout, et que chaque bâton soit utilisé pour former le carré.

Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle cela est possible ?

Exercice 10. Déterminer tous les nombres entiers a, b, c positifs ou nuls pour lesquels les nombres $a^2 + a + b + c$, $b^2 + a + b + c$ et $c^2 + a + b + c$ sont tous les trois des nombres premiers.

Exercice 11. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que les points D et B ne sont pas du même côté de la droite (AC) et tel que $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 90^\circ$. On suppose de plus que $AB = BC$ et $AD + DC = 1$. Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Exercice 12. Soit k un nombre entier vérifiant $k \geq 2$. Dans le pays d'Animath, il y a k villes, chaque paire de villes étant reliée par une unique route allant dans les deux sens. Théo souhaite organiser un grand voyage à vélo : il veut partir de la ville de son choix, emprunter 13 routes différentes, et revenir à son point de départ. Il s'autorise à passer plusieurs fois par la même ville, mais jamais deux fois par la même route, même dans des sens différents.

Quelle est la valeur minimale de k pour laquelle Théo peut organiser son voyage à vélo ?

Exercice 13. Déterminer tous les nombres entiers strictement positifs n tels que $\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{10}{\sqrt{n}}$ est un nombre entier.

Exercice 14. Antoine choisit quatre nombres réels strictement positifs x, y, z et t distincts et écrit au tableau les 12 fractions

$$\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \frac{z}{t}, \frac{t}{x}, \frac{t}{y}, \frac{t}{z}.$$

Montrer qu'Antoine peut entourer deux de ces fractions, notées a et b , telles que $|a - b| \leq \frac{1}{\sqrt{30}}$.

Exercice 15. Soit ABC un triangle dont on note O le centre du cercle circonscrit et G le centre de gravité. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le symétrique du point M par rapport au point O . On suppose que $NO = NA$.

Montrer que $\widehat{AOG} = 90^\circ$.