Animath
Association pour l'animation mathématique

Préparation Olympique POFM Mathématiques

Coupe Animath d'Automne

30 septembre 2026

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

  Les dictionnaires et outils de traduction sont interdits.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{202-6}{20+2+6}$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 En simplifiant progressivement, on obtient

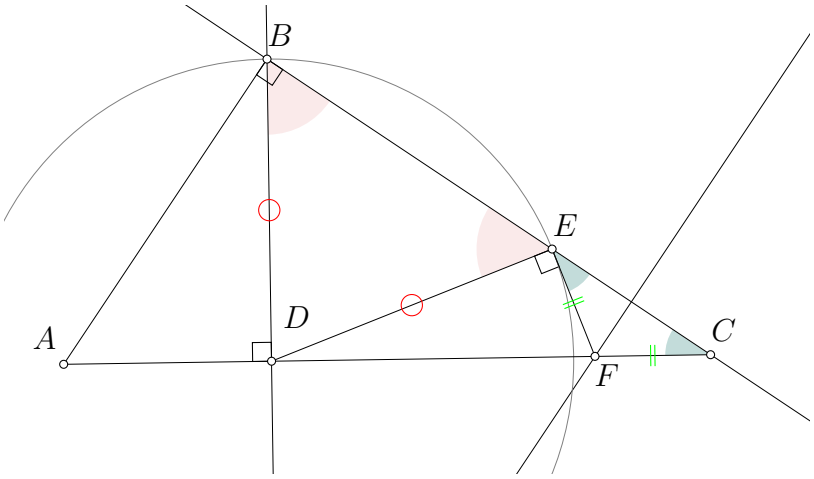
$$\frac{202-6}{20+2+6} = \frac{196}{28} = \frac{98}{14} = \frac{49}{7} = 7.$$

La réponse est donc 7.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a naturellement été très largement traité et presque toujours résolu. Les rares erreurs proviennent le plus souvent de fautes de calculs, par exemple dans le calcul du numérateur. Il est très dommage de perdre les points faciles du premier exercice : ils valent autant que des points difficilement récupérables sur les exercices plus avancés, aussi il est très fortement recommandé de relire plusieurs fois sa solution pour vérifier qu'il n'y a pas d'erreurs. Cela vous prendra assurément infiniment moins de temps que de résoudre un exercice 4 ou 5 de la feuille, et vous empêchera de rater votre coupe de manière "idiote".

Exercice 2. Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $AB < BC$. Soit D le point du segment $[AC]$ tel que la droite (BD) est perpendiculaire à la droite (AC). Soit E le point d'intersection, autre que B, du cercle de centre D passant par B avec le segment $[BC]$. Soit F le point d'intersection de la médiatrice du segment $[EC]$ avec la droite (AC).
Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{DEF}$?

Solution de l'exercice 2



Notons que comme l'angle $\widehat{BEC}$ est plat,

$$\widehat{BED} + \widehat{DEF} + \widehat{FEC} = 180°.$$

De plus, comme le point F est sur la médiatrice du segment $[EC]$, on a que le triangle FEC est isocèle en F, donc

$$\widehat{FEC} = \widehat{FCE} = \widehat{ACB}.$$

D'après la définition du point E, $ED = EB$, donc le triangle DEB est isocèle en D. Donc en particulier

$$\widehat{BED} = \widehat{EBD} = \widehat{DBC}.$$

Or le triangle DBC est rectangle en D, donc par hypothèse

$$\widehat{BED} = \widehat{DBC} = 90° - \widehat{DCB} = 90° - \widehat{ACB}.$$

En particulier, en reprenant la première équation, on obtient :

$$180° = \widehat{BED} + \widehat{DEF} + \widehat{FEC} = 90° - \widehat{ACB} + \widehat{DEF} + \widehat{ACB} = 90° + \widehat{DEF}.$$

Ainsi $\widehat{DEF} = 90°$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est assez bien résolu. La plupart des élèves ont trouvé, ou avancé sur la première solution du corrigé, avec de bons réflexes sur les triangles isocèles et la chasse aux angles. Attention, quelques élèves rajoutent des hypothèses, comme par exemple qu'une droite soit la bissectrice d'un angle, ou déduisent du fait que $[BE]$ est une corde d'un cercle de centre D que BDE est équilatéral, alors qu'on ne peut en déduire que le fait que BDE est isocèle en D.

Pour les exercices de géométrie, nous recommandons de faire une figure propre (c'est-à-dire assez grande, avec des points suffisamment espacés : ne pas hésiter à recommencer en changeant la position de A, B et C si on se rend compte que les points que l'on trace après sont trop proches). Elle permet par exemple de deviner que l'angle recherché est droit (attention, cela ne constitue pas une

preuve, même si on vérifie avec son équerre ; cependant, cela permet de se rendre compte qu'on a dû se tromper quand on montre que l'angle fait $15°$). Globalement, les figures que nous avons reçues étaient très satisfaisantes.

De plus, il est dommage que certains élèves se trompent sur la construction de la figure : il faut bien lire les énoncés (et ne pas hésiter à vérifier après avoir mis chaque point que l'on ne s'est pas trompé).

Exercice 3. Soit n un nombre entier vérifiant $n \geqslant 4$. Aline a n bâtons dont les longueurs sont exactement les nombres entiers de 1 à n, 1 et n inclus. Elle souhaite faire un carré, de sorte que chaque côté soit composé d'un ou plusieurs bâtons mis bout à bout, et que chaque bâton soit utilisé pour former le carré.
Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle cela est possible ?

Solution de l'exercice 3 Montrons que la réponse est $n = 7$. Pour cela, on va montrer que si n convient, alors $n \geqslant 7$, puis que $n = 7$ convient.

Si n convient, alors $n \geqslant 7$: Si n convient, alors on peut diviser les entiers entre 1 et n en quatre groupes qui ont la même somme : la longueur de chaque côté du carré. Or pour $n = 4, 5, 6$, la somme des entiers de 1 à n vaut $10, 15, 21$ qui n'est jamais divisible par 4. On obtient donc que si n est solution, alors $n \geqslant 7$.

Le nombre $n = 7$ convient : L'argument précédent ne donne pas de contradiction : en effet la somme des entiers de 1 à 7 vaut 28 qui est divisible par 4. Ainsi on cherche à former un carré où chaque côté a longueur 7. On peut former un côté avec le bâton de longueur 7, un avec ceux de longueur 6 et 1, un avec ceux de longueur 5 et 2, et un avec ceux de longueur 4 et 3. On obtient alors un carré formé avec tous les bâtons, donc $n = 7$ convient.

Solution alternative n°1 On peut aussi montrer que $n \leqslant 6$ est impossible de la façon suivante : un côté du carré contient le bâton n, donc forcément le périmètre du carré vaut au moins $4n$. Or pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, la somme des entiers de 1 à n vaut $1, 3, 6, 10, 15, 21$ qui n'est jamais plus grand que $4n$.

Solution alternative n°2 On peut aussi montrer que $n \geqslant 7$ de la façon suivante : il est impossible que deux côtés du carré soient tous les deux formés d'un seul bâton, car ceux-ci ne seraient pas de même longueur. Donc à part un côté qui contient au moins un bâton, les trois autres en contiennent au moins 2, ce qui fait au total $2 \times 3 + 1 = 7$ bâtons au minimum.

Solution alternative n°3 On peut aussi montrer que $n \geqslant 7$ de la façon suivante : un des côtés contient le bâton n, donc tout autre côté doit contenir au moins 2 bâtons pour avoir longueur au moins n. Il doit donc y avoir au moins $3 \times 2 + 1 = 7$ bâtons utilisés.

Commentaire des correcteurs : Le problème est globalement bien réussi. Une grande majorité des élèves a bien compris que dans les problèmes où l'on cherche le plus petit n vérifiant une propriété, il faut distinguer deux phases de raisonnement : une où l'on montre que la valeur minimale (ici 7) vérifie l'énoncé, et une où l'on montre que toutes les valeurs inférieures ne vérifient pas l'énoncé.

La première a été réussi par quasiment tous ceux qui ont bien identifié que 7 est la plus petite solution, c'est très bien de ne pas avoir oublié de le faire. Faisons tout de même un rappel pour les quelques personnes l'ayant oublié : dire que l'argument utilisé pour montrer que $n > 6$ échoue si $n = 7$ ne prouve pas qu'il existe bien un carré dans ce dernier cas.

La seconde partie était un peu plus délicate, et on attendait une justification qui ne pouvait pas être « pour $n = 6$, on doit faire un côté de 6, un de $5 + 1$, un de $4 + 2$ et il nous reste plus que 3 donc ça marche pas. » Il faut se méfier des arguments du style « on doit » ou « il faut clairement faire des côtés de taille n pour trouver le plus petit n », qui ne forment pas une preuve. Montrer une construction qui ne marche pas ne consitue pas non plus une preuve qu'aucune construction n'existe (même si votre construction semble être « la seule qui peut marcher » ou celle « idéale »). Cela peut paraître frustrant dans ce problème où l'on peut se convaincre facilement que c'est impossible pour $n = 5$ sans avoir d'argument très formel, mais il fallait faire l'effort de trouver une preuve complète (telles que celles du corrigé), ou expliquer proprement pourquoi c'est impossible (en explicitant ce que l'on se dit dans sa tête pour se convaincre que ça l'est).

Il y avait plusieurs façons de procéder qui sont détaillées dans le corrigé, voici quelques remarques sur celles-ci :

- ▷ Certains ont déduit de la relation $8 \mid n(n+1)$ que $8 \mid n$ ou $8 \mid n+1$. C'est correct car n et $n+1$ sont premiers entre eux ET car 8 est une puissance de nombre premier : par exemple $6 \mid 2 \cdot 3$ et 2 et 3 sont premiers entre eux mais on n'a pas $6 \mid 3$ ou $6 \mid 2$; et $8 \mid 2 \cdot 4$ mais on n'a pas $8 \mid 2$ ni $8 \mid 4$. On pouvait également invoquer le fait que n et $n+1$ sont de parité différentes.
- ▷ Un certain nombre d'élèves ont montré que 4 devait diviser $\frac{n(n+1)}{2}$ et ont ensuite directement affirmé que 7 était le plus petit nombre vérifiant cette condition : cela ne saute pas aux yeux et il convenait de le prouver, par exemple en calculant $\frac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 4, 5, 6$.
- ▷ De nombreuses copies affirment que le côté du carré doit être égal à n : ce n'était pas supposé par l'énoncé et c'est faux (il existe des carrés de côté 9 pour $n = 8$), les démonstrations partant de ce principe ne peuvent donc pas être valorisées. Certaines copies ont un peu raffiné l'argument en disant : « dans le cas optimal, puisque faire un côté de taille n économise un bâton, c'est nécessairement ce qu'il faut faire » ; cette affirmation n'est pas justifiée : rien ne dit *a priori* qu'il sera bien possible de construire un carré de taille n pour le n minimal, ni qu'il s'agisse de la seule façon de faire.

Exercice 4. Déterminer tous les nombres entiers a, b, c positifs ou nuls pour lesquels les nombres $a^2+a+b+c$, $b^2+a+b+c$ et $c^2+a+b+c$ sont tous les trois des nombres premiers.

Solution de l'exercice 4 Procédons par analyse synthèse : tout d'abord, lors de la phase d'analyse, on part d'un triplet (a, b, c) solution pour en déduire les valeurs possibles de (a, b, c), puis lors de la synthèse on vérifie que les triplets obtenus sont bien solutions.

Analyse : Soit (a, b, c) un triplet d'entiers positifs ou nuls vérifiant l'énoncé. Supposons que parmi a, b, c, deux nombres ont des parités différentes, disons a et b. Alors $a^2+a+b+c$ et $b^2+a+b+c$ ont des parités différentes, donc l'un des deux est pair. Par symétrie disons que $a^2+a+b+c$ est pair.
Si les trois nombres ont la même parité, alors $a^2+a+b+c$ est la somme de quatre nombres de même parité donc c'est aussi un nombre pair.
Comme $a^2+a+b+c$ est un nombre pair et premier, on a que $a^2+a+b+c=2$. En particulier, $a^2 \leqslant 2$, donc $a=1$ ou 0. Si $a=1$, on a $b=c=0$, qui n'est pas solution car $b^2+a+b+c=1$ qui n'est pas premier.

On obtient donc que $a=0$ et $b+c=2$, donc quitte à échanger b et c, $b=c=1$, ou $b=2$ et $c=0$.

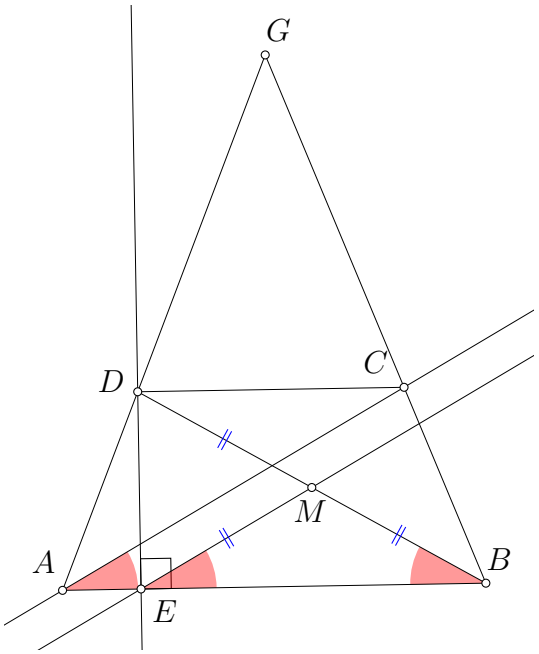
Si $a=0=c$ et $b=2$, $b^2+a+b+c=6$ qui n'est pas premier, donc $(a, b, c)=(0, 1, 1)$. Comme plusieurs fois on a utilisé la symétrie, les triplets $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$ peuvent aussi être solution.

Synthèse : Les triplets $(0, 1, 1), (1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont solutions car $0^2+1+1+0=2$ et $1^2+1+1+0=3$ sont bien des nombres premiers.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été bien traité dans l'ensemble. On note cependant plusieurs écueils ayant coûté cher à de nombreux.ses élèves.
Tout d'abord, tous les nombres premiers ne sont pas impairs : 2 est en effet le seul nombre premier pair.
Ensuite, de nombreuses copies se ramènent à traiter $a^2+a+b+c=2$, mais manquent d'exhaustivité dans l'étude de ce cas. Il y a en effet trois possibilités à traiter a priori (voir le corrigé).
De plus, beaucoup d'élèves semblent penser que 0 n'est pas un nombre pair, et distinguent donc les cas a pair, a impair et $a=0$. Cette distinction fait un peu de sens, car le cas a pair inclut le cas $a=0$. Il est cependant bien sûr possible de distinguer les cas a pair non nul, a impair et $a=0$.
Enfin, quasiment toutes les copies font une supposition cassant la symétrie sur (a, b, c) au début de la preuve. Lorsque l'on obtient la solution $(1, 1, 0)$, il convient alors de se souvenir que l'énoncé est symétrique en a, b, c, ce qui donne alors l'existence de deux autres solutions : $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$.
Et bien sûr, il est essentiel de vérifier les solutions trouvées, on ne le répétera jamais assez

Exercice 5. Soit ABG un triangle isocèle en G, et soit D et C des points appartenant aux segments $[AG]$ et $[BG]$ respectivement, différents de A et B, tels que les droites (DC) et (AB) sont parallèles. Soit M le milieu du segment $[DB]$ et E le point du segment $[AB]$ tel que les droites (DE) et (AB) sont perpendiculaires.
Montrer que les droites (EM) et (AC) sont parallèles.

Solution de l'exercice 5



Comme les droites (DC) et (AB) sont parallèles, on a par angle alterne-interne que $\widehat{GCD} = \widehat{GAB}$ et $\widehat{GCD} = \widehat{GBA}$. De plus, comme le triangle ABG est isocèle en G, on a que $\widehat{GBA} = \widehat{GAB}$, donc en utilisant les égalités précédentes, on a que $\widehat{GDC} = \widehat{GCD}$, donc le triangle GCD est isocèle en G. En particulier, la médiatrice de $[DC]$ est perpendiculaire à $[DC]$ donc à $[AB]$, et passe par G, tout comme la médiatrice de $[AB]$: ces deux droites sont donc confondues.

Par définition, le triangle EDB est rectangle en E. Comme M est le milieu de son hypoténuse, c'est le centre de son cercle circonscrit. Ainsi MEB est isocèle en E, et on a que $\widehat{MEB} = \widehat{MBE} = \widehat{DBA}$.

La symétrie autour de la médiatrice de $[AB]$ (qui est aussi celle de $[BC]$) échange C et D, et A et B, donc $\widehat{DBA} = \widehat{CAB}$. Ainsi $\widehat{MEB} = \widehat{CAB}$, donc les droites (EM) et (AC) sont parallèles.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien abordé compte tenu de sa position dans le test, et traité correctement par une bonne moitié des élèves. Une des difficultés de l'exercice était de justifier l'égalité $\widehat{CAB} = \widehat{DBA}$, mais les élèves s'en sont en général assez bien sorti ; l'approche la plus naturelle était sans doute de faire remarquer la symétrie par rapport à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 6. Soit a, b, c des nombres réels strictement positifs. Anatole écrit les nombres réels ab, bc et ca dans l'ordre qu'il souhaite sur son ardoise. Ensuite, Akin écrit les nombres réels $a+2, b+2$ et $c+2$ dans l'ordre qu'il souhaite sur son ardoise. Il se montrent alors leurs ardoises et constatent qu'ils ont tous deux écrit les trois mêmes nombres.
Déterminer les nombres réels a, b, c pour lesquels cela est possible.

Solution de l'exercice 6 Procédons par analyse synthèse : tout d'abord, lors de la phase d'analyse, on part d'un triplet (a, b, c) solution pour en déduire les valeurs possibles de (a, b, c), puis lors de la synthèse on vérifie que les triplets obtenus sont bien solutions.

Analyse : Soit (a, b, c) un triplet de réels strictement positifs pour lesquels la situation de l'énoncé est possible. Quitte à échanger a, b, c, on peut supposer $a \leqslant b \leqslant c$. Dans ce cas, les nombres $a+2, b+2, c+2$ et les nombres ab, ac, bc sont dans l'ordre croissant, donc $a + 2 = ab, b + 2 = ac$ et $c + 2 = bc$.

En multipliant la première équation par c, on a que $ac + 2c = abc$, en multipliant la dernière par a, on a que $ac + 2a = abc$, donc $ac + 2c = ac + 2a$, donc $a = c$. Par hypothèse on a aussi $b = c = a$. Ainsi $a + 2 = a^2$, donc $(a - 2)(a + 1) = a^2 - a - 2 = 0$. Ainsi $a = 2 = b = c$.

Synthèse : Si $a = b = c = 2$, on a bien $a + 2 = b + 2 = c + 2 = ab = ac = bc = 4$, donc Anatole et Akin auront écrit les mêmes nombres au tableau. Ainsi le seul triplet solution est $(a, b, c) = (2, 2, 2)$

Solution alternative n°1 A partir de $ab = a + 2$ et $bc = c + 2$, on a que $a(b - 1) = 2$ et $c(b - 1) = 2$. En particulier ces deux équations impliquent que $b \neq 1$, et que $a = \frac{2}{b-1} = c$. On conclut de même que précédemment.

Solution alternative n°2 A partir du moment où on a $a + 2 = a^2$, une autre manière de conclure est de dire que $a(a - 1) = 2$. Si $0 \leqslant a \leqslant 1$, le terme de gauche est négatif ce qui est absurde. Si $1 < a < 2$, $a(a - 1) < 2 \times 1 = 2$, et si $a > 2$, $a(a - 1) > 2 \times 1 = 2$, ce qui donne une absurdité. Ainsi la seule possibilité est $a = 2$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été relativement peu réussi au vu de sa position dans le sujet. Cependant, de nombreuses copies identifient avec succès l'unique triplet solution, ce qui est une excellente chose !
Il est toutefois dommage que beaucoup d'élèves pensent implicitement que les réels strictement positifs a, b et c sont en fait entiers, et en déduisent des approches arithmétiques qui ne se translatent pas dans le cas général. Nous rappelons que la notion de nombres réels est mentionnés dans les prérequis, et donc que les élèves préparant la coupe Animath doivent savoir ce que c'est ,et que ce ne sont pas forcément des entiers.
En outre, un nombre conséquent d'élèves se contente d'affirmer des faits souvent pas clairs à partir d'égalités compliquées ; de fait, il est crucial de justifier explicitement pourquoi les égalités $ab = a+2$ et $bc = c + 2$ donnent $a = c$. Dans le cas contraire, le correcteur ou la correctrice n'auront souvent d'autres choix de considérer ces affirmations comme un bluff, et il sera compliqué d'en retirer des points. C'est pourquoi il est essentiel de bien expliquer les démarches que vous entreprenez, de justifier en détaillant pourquoi telle égalité implique telle autre, quitte à mentionner explicitement que vous n'avez pas réussi à montrer telle affirmation et que vous allez la supposer vraie pour continuer le problème.
Régulièrement, des erreurs de calculs empêchent les élèves de progresser.
Dans la même veine, une résolution de système implique en général deux étapes : une analyse, suivie d'une synthèse. De ce fait, à moins que vous ne procédiez par équivalence, il est très important de vérifier les solutions que vous obtenez à la fin !
Par ailleurs, souvent les élèves écrivent dans un coin des phrases comme $a = b = c = 2$ sans contexte particulier et sans expliquer qu'iels explicitent un triplet solution. C'est super d'avoir réussi à identifier une solution du système, et c'est le premier réflexe à avoir pour aborder ce genre d'exercice !

Toutefois, il serait encore mieux d'écrire explicitement ce que vous faites, par exemple en disant "Remarquons que le triplet $(a, b, c) = (2, 2, 2)$ est solution".

Exercice 7. Sur une grille 8×8 composée de 64 cases, Raphaël place une pierre noire sur chaque case de la ligne du haut et une pierre blanche sur chaque case de la ligne du bas. Un *déplacement* consiste à bouger une des pierres d'exactement une case vers le haut, le bas, la droite ou la gauche, si la case d'arrivée ne contient pas déjà une pierre.
Combien de déplacements faut-il au minimum à Raphaël pour arriver dans une situation où il y a une pierre blanche sur chaque case de la ligne du haut et une pierre noire sur chaque case de la ligne du bas ?

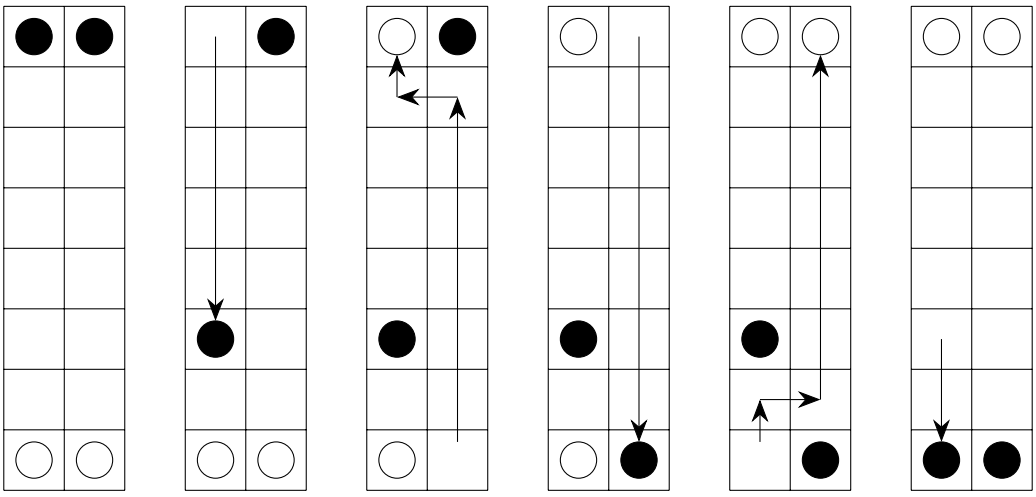
Solution de l'exercice 7 La réponse est 120. On va dans un premier temps montrer qu'il faut nécessairement effectuer au moins 120 mouvements, puis on va construire une suite de 120 déplacements vérifiant les conditions de l'énoncé.

Montrons d'abord que Raphaël doit effectuer au moins 120 déplacements. On remarque déjà que chaque pierre doit effectuer au moins 7 déplacements verticaux, puisqu'elle doit passer de la ligne 1 à la ligne 8, ou de la ligne 8 à la ligne 1. Cela fait déjà $7 \times 16 = 112$ déplacements. Il nous en manque seulement 8.
On remarque qu'en fait que pour chaque colonne c, au moins une des deux pierres situées initialement sur c doit effectuer un déplacement horizontal. En effet, si ce n'est pas le cas les deux pierres restent toujours sur c, mais ne peuvent alors pas se croiser. Ainsi, on peut associer à chaque colonne au moins un déplacement horizontal, correspondant à l'une des deux pierres situées initialement sur cette colonne. Cela nous donne bien au moins 8 déplacements horizontaux, au moins un pour chaque colonne. On en déduit que Raphaël doit effectuer au moins $112+8 = 120$ déplacements.

Construisons maintenant une solution en 120 déplacements. Commençons par découper les colonnes en 4 paires de deux colonnes consécutives, on va traiter les 4 paires séparément. Il nous suffit donc de montrer que pour chaque paire de colonnes, on peut échanger les positions des deux pierres blanches et des deux pierres noires sur cette colonne en 30 déplacements.
Pour cela, numérotons les lignes de 1 à 8, et notons A et B les deux colonnes. Les pierres blanches sont alors en $A1$ et $B1$, et les pierres noires en $A8$ et $B8$. Effectuons la suite de déplacements suivantes :

- ▷ On déplace la pierre qui est en $A8$ en $A3$ (5 déplacements)
- ▷ On déplace la pierre qui est en $B1$ en $B7$, puis en $A7$, puis en $A8$ (8 déplacements)
- ▷ On déplace la pierre qui est en $B8$ en $B1$ (7 déplacements)
- ▷ On déplace la pierre qui est en $A1$ en $A2$, puis en $B2$, puis en $B8$ (8 déplacements)
- ▷ On déplace la pierre qui est en $A3$ en $A1$ (2 déplacements)

On a atteint notre objectif en 30 déplacements, ce qui conclut !



Commentaire des correcteurs : Le problème a été beaucoup traité par rapport à sa position dans le sujet, mais seulement une dizaine d'élèves en sont arrivés à bout.

Beaucoup d'élèves ont essayé de construire une solution gloutonne, ce qui donnait la mauvaise borne de 128 coups. Il est d'ailleurs dommage de constater que dans bon nombre de ces cas, les élèves ont tenté de faire fonctionner une preuve erronée pour atteindre 128 coups, tandis qu'un raisonnement très similaire permettait de trouver la bonne borne de 120.

Par ailleurs, un certain nombre d'élèves ont trouvé la bonne construction pour atteindre 120 coups, sans pour autant expliquer pourquoi c'était optimal. On rappelle donc que dans un problème où on cherche le plus petit (ou le plus grand) nombre vérifiant une certaine propriété, il y a toujours deux étapes : démontrer pourquoi on ne peut pas faire mieux, et donner la construction de la valeur optimale.

Il est regrettable que beaucoup d'élèves aient commis des étourderies sur ce problème, alors qu'ils avaient de bonnes idées. Notamment, il ne faut que 7 déplacements pour amener un jeton de la première ligne à la huitième. De plus, même s'ils ne constituaient pas le cœur du problème, il ne fallait pas négliger les quelques calculs qui se présentaient : beaucoup d'élèves, qui ont démontré leur capacité à mener ce type de calcul dans le premier exercice, commettent une erreur sur ce problème.

Enfin, dans un tel problème il est toujours recommandé de faire des figures afin d'expliquer simplement sa construction ou ses idées. Les descriptions d'algorithmes sans figure mènent souvent à des lourdeurs qui rendent la compréhension plus difficile à la correction et qui peut mener à des oublis dans le raisonnement.

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer

$$\sqrt{\sqrt{9^2+12^2}+\sqrt{6^2+8^2}}.$$

Seule une réponse numérique simplifiée est attendue ici.

Solution de l'exercice 8 Notons que

$$9^2+12^2=3^2(3^2+4^2)=3^2\times(9+16)=3^2\times 25=3^2\times 5^2=15^2.$$

De plus

$$6^2+18^2=2^2(3^2+4^2)=2^2\times(9+16)=2^2\times 25=2^2\times 5^2=10^2.$$

Ainsi, en regroupant tout cela,

$$\sqrt{\sqrt{9^2+12^2}+\sqrt{6^2+8^2}}=\sqrt{15+10}=\sqrt{25}=5.$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi. Attention cependant aux simplifications : dans le cas général $\sqrt{a^2+b^2}\neq a+b$.

Exercice 9. Soit n un nombre entier vérifiant $n \geqslant 4$. Aline a n bâtons dont les longueurs sont exactement les nombres entiers de 1 à n, 1 et n inclus. Elle souhaite faire un carré, de sorte que chaque côté soit composé d'un ou plusieurs bâtons mis bout à bout, et que chaque bâton soit utilisé pour former le carré.
Quelle est la plus petite valeur de n pour laquelle cela est possible ?

Solution de l'exercice 9 Montrons que la réponse est $n = 7$. Pour cela, on va montrer que si n convient, alors $n \geqslant 7$, puis que $n = 7$ convient.

Si n convient, alors $n \geqslant 7$: Si n convient, alors on peut diviser les entiers entre 1 et n en quatre groupes qui ont la même somme : la longueur de chaque côté du carré. Or pour $n = 4, 5, 6$, la somme des entiers de 1 à n vaut $10, 15, 21$ qui n'est jamais divisible par 4. On obtient donc que si n est solution, alors $n \geqslant 7$.

Le nombre $n = 7$ convient : L'argument précédent ne donne pas de contradiction : en effet la somme des entiers de 1 à 7 vaut 28 qui est divisible par 4. Ainsi on cherche à former un carré où chaque côté a longueur 7. On peut former un côté avec le bâton de longueur 7, un avec ceux de longueur 6 et 1, un avec ceux de longueur 5 et 2, et un avec ceux de longueur 4 et 3. On obtient alors un carré formé avec tous les bâtons, donc $n = 7$ convient.

Solution alternative n°1 On peut aussi montrer que $n \leqslant 6$ est impossible de la façon suivante : un côté du carré contient le bâton n, donc forcément le périmètre du carré vaut au moins $4n$. Or pour $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, la somme des entiers de 1 à n vaut $1, 3, 6, 10, 15, 21$ qui n'est jamais plus grand que $4n$.

Solution alternative n°2 On peut aussi montrer que $n \geqslant 7$ de la façon suivante : il est impossible que deux côtés du carré soient tous les deux formés d'un seul bâton, car ceux-ci ne seraient pas de même longueur. Donc à part un côté qui contient au moins un bâton, les trois autres en contiennent au moins 2, ce qui fait au total $2 \times 3 + 1 = 7$ bâtons au minimum.

Solution alternative n°3 On peut aussi montrer que $n \geqslant 7$ de la façon suivante : un des côtés contient le bâton n, donc tout autre côté doit contenir au moins 2 bâtons pour avoir longueur au moins n. Il doit donc y avoir au moins $3 \times 2 + 1 = 7$ bâtons utilisés.

Commentaire des correcteurs : Le problème est globalement bien réussi. Une grande majorité des élèves a bien compris que dans les problèmes où l'on cherche le plus petit n vérifiant une propriété, il faut distinguer deux phases de raisonnement : une où l'on montre que la valeur minimale (ici 7) vérifie l'énoncé, et une où l'on montre que toutes les valeurs inférieures ne vérifient pas l'énoncé.

La première a été réussi par quasiment tous ceux qui ont bien identifié que 7 est la plus petite solution, c'est très bien de ne pas avoir oublié de le faire. Faisons tout de même un rappel pour les quelques personnes l'ayant oublié : dire que l'argument utilisé pour montrer que $n > 6$ échoue si $n = 7$ ne prouve pas qu'il existe bien un carré dans ce dernier cas.

La seconde partie était un peu plus délicate, et on attendait une justification qui ne pouvait pas être « pour $n = 6$, on doit faire un côté de 6, un de $5 + 1$, un de $4 + 2$ et il nous reste plus que 3 donc ça marche pas. » Il faut se méfier des arguments du style « on doit » ou « il faut clairement faire des côtés de taille n pour trouver le plus petit n », qui ne forment pas une preuve. Montrer une construction qui ne marche pas ne consitue pas non plus une preuve qu'aucune construction n'existe (même si votre construction semble être « la seule qui peut marcher » ou celle « idéale »). Cela peut paraître frustrant dans ce problème où l'on peut se convaincre facilement que c'est impossible pour $n = 5$ sans avoir d'argument très formel, mais il fallait faire l'effort de trouver une preuve complète (telles que celles du corrigé), ou expliquer proprement pourquoi c'est impossible (en explicitant ce que l'on se dit dans sa tête pour se convaincre que ça l'est).

Il y avait plusieurs façons de procéder qui sont détaillées dans le corrigé, voici quelques remarques sur celles-ci :

- ▷ Certains ont déduit de la relation $8 \mid n(n+1)$ que $8 \mid n$ ou $8 \mid n+1$. C'est correct car n et $n+1$ sont premiers entre eux ET car 8 est une puissance de nombre premier : par exemple $6 \mid 2 \cdot 3$ et 2 et 3 sont premiers entre eux mais on n'a pas $6 \mid 3$ ou $6 \mid 2$; et $8 \mid 2 \cdot 4$ mais on n'a pas $8 \mid 2$ ni $8 \mid 4$. On pouvait également invoquer le fait que n et $n+1$ sont de parité différentes.
- ▷ Un certain nombre d'élèves ont montré que 4 devait diviser $\frac{n(n+1)}{2}$ et ont ensuite directement affirmé que 7 était le plus petit nombre vérifiant cette condition : cela ne saute pas aux yeux et il convenait de le prouver, par exemple en calculant $\frac{n(n+1)}{2}$ pour $n = 4, 5, 6$.
- ▷ De nombreuses copies affirment que le côté du carré doit être égal à n : ce n'était pas supposé par l'énoncé et c'est faux (il existe des carrés de côté 9 pour $n = 8$), les démonstrations partant de ce principe ne peuvent donc pas être valorisées. Certaines copies ont un peu raffiné l'argument en disant : « dans le cas optimal, puisque faire un côté de taille n économise un bâton, c'est nécessairement ce qu'il faut faire » ; cette affirmation n'est pas justifiée : rien ne dit *a priori* qu'il sera bien possible de construire un carré de taille n pour le n minimal, ni qu'il s'agisse de la seule façon de faire.

Exercice 10. Déterminer tous les nombres entiers a, b, c positifs ou nuls pour lesquels les nombres $a^2+a+b+c$, $b^2+a+b+c$ et $c^2+a+b+c$ sont tous les trois des nombres premiers.

Solution de l'exercice 10 Procédons par analyse synthèse : tout d'abord, lors de la phase d'analyse, on part d'un triplet (a, b, c) solution pour en déduire les valeurs possibles de (a, b, c), puis lors de la synthèse on vérifie que les triplets obtenus sont bien solutions.

Analyse : Soit (a, b, c) un triplet d'entiers positifs ou nuls vérifiant l'énoncé. Supposons que parmi a, b, c, deux nombres ont des parités différentes, disons a et b. Alors $a^2+a+b+c$ et $b^2+a+b+c$ ont des parités différentes, donc l'un des deux est pair. Par symétrie disons que $a^2+a+b+c$ est pair.
Si les trois nombres ont la même parité, alors $a^2+a+b+c$ est la somme de quatre nombres de même parité donc c'est aussi un nombre pair.

Comme $a^2+a+b+c$ est un nombre pair et premier, on a que $a^2+a+b+c=2$. En particulier, $a^2 \leqslant 2$, donc $a=1$ ou 0. Si $a=1$, on a $b=c=0$, qui n'est pas solution car $b^2+a+b+c=1$ qui n'est pas premier.

On obtient donc que $a=0$ et $b+c=2$, donc quitte à échanger b et c, $b=c=1$, ou $b=2$ et $c=0$.

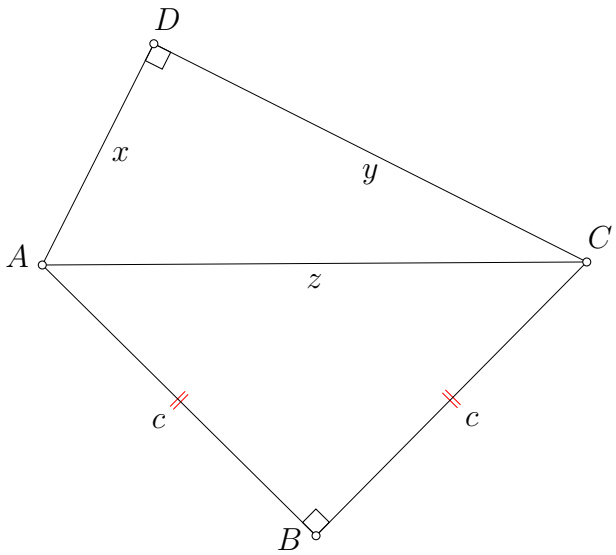
Si $a=0=c$ et $b=2$, $b^2+a+b+c=6$ qui n'est pas premier, donc $(a, b, c)=(0, 1, 1)$. Comme plusieurs fois on a utilisé la symétrie, les triplets $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$ peuvent aussi être solution.

Synthèse : Les triplets $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 1)$ et $(1, 1, 0)$ sont solutions car $0^2+1+1+0=2$ et $1^2+1+1+0=3$ sont bien des nombres premiers.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été bien traité dans l'ensemble. On note cependant plusieurs écueils ayant coûte cher à de nombreux.ses élèves.
Tout d'abord, tous les nombres premiers ne sont pas impairs : 2 est en effet le seul nombre premier pair.
Ensuite, de nombreuses copies se ramènent à traiter $a^2+a+b+c=2$, mais manquent d'exhaustivité dans l'étude de ce cas. Il y a en effet trois possibilités à traiter a priori (voir le corrigé).
De plus, beaucoup d'élèves semblent penser que 0 n'est pas un nombre pair, et distinguent donc les cas a pair, a impair et $a=0$. Cette distinction fait un peu de sens, car le cas a pair inclut le cas $a=0$. Il est cependant bien sûr possible de distinguer les cas a pair non nul, a impair et $a=0$.
Enfin, quasiment toutes les copies font une supposition cassant la symétrie sur (a, b, c) au début de la preuve. Lorsque l'on obtient la solution $(1, 1, 0)$, il convient alors de se souvenir que l'énoncé est symétrique en a, b, c, ce qui donne alors l'existence de deux autres solutions : $(1, 0, 1)$ et $(0, 1, 1)$.
Et bien sûr, il est essentiel de vérifier les solutions trouvées, on ne le répétera jamais assez

Exercice 11. Soit $ABCD$ un quadrilatère tel que les points D et B ne sont pas du même côté de la droite (AC) et tel que $\widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 90°$. On suppose de plus que $AB = BC$ et $AD + DC = 1$. Déterminer l'aire du quadrilatère $ABCD$.

Solution de l'exercice 11



Notons x, y, z, c les longueurs AD, DC, AC et AB respectivement. On sait que $x + y = 1$ et, par le théorème de Pythagore, $x^2 + y^2 = z^2$. De plus, toujours par le théorème de Pythagore, $z^2 = AB^2 + BC^2 = 2c^2$.
L'aire du triangle ADC vaut $\frac{xy}{2}$ et celle du triangle ABC vaut $\frac{c^2}{2}$. Ainsi, l'aire du quadrilatère vaut

$$\frac{c^2 + xy}{2} = \frac{z^2 + 2xy}{4} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{4} = \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4}$$

Commentaire des correcteurs : Le problème a été beaucoup abordé et inégalement réussi.

L'erreur la plus fréquente était de penser que $ABCD$ était un carré (ce qui rendait le problème beaucoup plus simple). La figure du corrigé devrait suffire à montrer que ce n'est pas nécessairement le cas, rappelons de plus qu'un quadrilatère avec deux angles droits n'est pas toujours un rectangle. Nous invitons les futurs participants à la coupe à essayer de tracer des figures sans rajouter des propriétés que l'énoncé ne suppose pas, ce qui devrait les aider à vérifier leurs conjectures. Les élèves qui ont cru avoir démontré que $ABCD$ était un carré avaient ensuite du mal à gagner des points car ils finissaient le problème en utilisant des raisonnements valides uniquement dans cas très particuliers. Nous avons bien sûr valorisé les éléments qui demeuraient vrais en toute généralité (s'il y en avait).

Les copies qui ne tombaient pas dans cet écueil réussissaient en grande majorité à donner une solution complète, avec des méthodes similaires mais des façons diverses de mener les calculs. Nous n'avons pas vraiment de reproches globaux à faire en dehors du premier point.

Nous pouvons néanmoins donner un conseil aux élèves (certes assez minoritaires) qui ont bien vu que $ABCD$ pouvait ne pas être un carré mais qui n'ont pas su avancer sur l'exercice : essayez d'appliquer ce que vous connaissez. Ici, écrire le théorème de Pythagore dans ADC et ABC était un bon début, de même que calculer l'aire de ces triangles (il est étrange de lire une ou deux pleines pages sur ce problème sans voir la notion d'aire apparaître). De façon plus générale, si l'on n'a pas réussi à aboutir à une solution complète il faut toujours retranscrire le maximum d'idées sur sa copie car il est possible qu'elles soient utiles et donc valorisées par le barème.

Exercice 12. Soit k un nombre entier vérifiant $k \geqslant 2$. Dans le pays d'Animath, il y a k villes, chaque paire de villes étant reliée par une unique route allant dans les deux sens. Théo souhaite organiser un grand voyage à vélo : il veut partir de la ville de son choix, emprunter 13 routes différentes, et revenir à son point de départ. Il s'autorise à passer plusieurs fois par la même ville, mais jamais deux fois par la même route, même dans des sens différents.
Quelle est la valeur minimale de k pour laquelle Théo peut organiser son voyage à vélo ?

Solution de l'exercice 12 Montrons que la réponse est $k = 7$. Pour cela, on va montrer que si n convient, alors $k \geqslant 7$, puis que $n = k$ convient.

Si k convient, alors $k \geqslant 7$: Déjà notons que pour $k = 2, 3, 4, 5$ il y a $1, 3, 6, 10$ routes, donc pas assez pour que Théo puisse faire son voyage.

Pour $k = 6$, notons que comme le parcours de Théo part d'une ville et revient à cette même ville, pour chaque ville v, Théo emprunte autant de fois une route en direction de v qu'une route partant de v, donc il a utilisé un nombre pair de routes en partant de chaque ville. Ainsi pour chaque ville, il existe une route partant de cette ville non empruntée. Ainsi, on a au moins $6/2 = 3$ routes non utilisées.

Or au total il y a 15 routes, donc Théo ne peut utiliser 13 routes.

Le nombre $k = 7$ convient : Si on note A, B, C, D, E, F, G les villes, il suffit que Théo fasse le parcours suivant : $A - B - C - D - E - F - G - A - C - E - G - B - D - A$. ce voyage emprunte bien 13 routes et revient à son point de départ.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été bien réussi, et la plupart des élèves ont réussi à obtenir des points dessus. Pour résoudre ce problème, il fallait tout de même éviter quelques écueils :

- Il fallait tout d'abord bien lire l'énoncé. Notamment, Théo était obligé de finir sur sa ville de départ, et était autorisé à repasser sur sa ville de départ au cours de son voyage.
- De nombreux élèves ont remarqué à juste titre que s'il n'y avait pas au moins 13 routes, alors Théo ne pouvait pas réaliser son voyage. Toutefois, s'il y a suffisamment de routes, Théo n'est pas sûr de pouvoir réaliser son voyage : c'est notamment le cas s'il y a 6 villes.
- Introduire un schéma pour présenter le voyage de Théo était une très bonne idée, mais il fallait s'assurer que ce dernier demeurait lisible, par exemple en numérotant les routes empruntées.
- Résoudre ce problème se faisait en deux temps : montrer qu'il fallait au moins 7 villes pour que Théo puisse réaliser son voyage, et montrer qu'avec 7 villes Théo pouvait effectivement réaliser son voyage. Ces deux étapes étaient nécessaires, et les élèves ayant négligé l'une d'elle ont été systématiquement pénalisés.

Exercice 13. Déterminer tous les nombres entiers strictement positifs n tels que $\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{10}{\sqrt{n}}$ est un nombre entier.

Solution de l'exercice 13 On procède par analyse-synthèse : lors de l'analyse on suppose que n vérifie l'énoncé pour en déduire les valeurs possibles de n, puis lors de la synthèse on vérifie que les n obtenus sont bien solution.

Analyse : Soit n un entier strictement positif vérifiant l'énoncé. Comme $\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{10}{\sqrt{n}}$ est un entier, en élevant au carré, on obtient que

$$\left(\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{10}{\sqrt{n}}\right)^2 = \frac{n}{4} + 2\frac{\sqrt{n}}{2}\frac{10}{\sqrt{n}} + \frac{100}{n} = \frac{n}{4} + \frac{100}{n} + 10 = \frac{n^2+400}{4n} + 10.$$

En particulier, on a que $4n$ divise $n^2 + 400$. En particulier, 4 divise $n^2 + 400$. Comme il divise aussi 400 il divise $n^2 + 400 - 400$ donc n^2. Ainsi n^2 est pair, donc forcément n est pair.

Comme n est pair, posons $n = 2k$. On a que $4n = 8k$ est un multiple de 8, donc 8 divise $n^2 + 400$. Or 8 divise $400 = 8 \times 5$, donc 8 divise $n^2 + 400 - 400 = n^2$. Ainsi 8 divise $4k^2$, donc 2 divise k^2, donc k est pair : n est donc multiple de 4.

Comme n est un multiple de 4, $4n$ divise n^2. Donc comme $4n$ divise également $n^2 + 400$, $4n$ divise $n^2 + 400 - n^2 = 400$. Ainsi n divise $100 = 2^2 \times 5^2$. Comme n est un multiple de 4, on a que $n = 4, 4 \times 5 = 20$ ou $4 \times 5^2 = 100$.

Synthèse : Testons désormais si $n = 4, 20, 100$ sont solution.

- ▷ Pour $n = 4$, on a que $\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{2}{2} + \frac{10}{2} = 1 + 5 = 6$ donc $n = 4$ est bien solution.
- ▷ Pour $n = 20$, on a que $\sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = 2\sqrt{5}$. Ainsi

$$\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{5}}{2} + \frac{10}{2\sqrt{5}} = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{5}^2}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}.$$

  Si $2\sqrt{5}$ est entier, alors $\sqrt{5}$ est rationnel, ce qui est absurde car 5 n'est pas un carré. Ainsi $n = 20$ n'est pas solution.
- ▷ Pour $n = 100$, on a que $\frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{10}{\sqrt{n}} = \frac{10}{2} + \frac{10}{10} = 5 + 1 = 6$ donc $n = 4$ est bien solution.

Ainsi les solutions sont $n = 4$ et $n = 100$.

Solution alternative n°1 On commence par montrer que n est un carré parfait. Soit $a = \frac{\sqrt{n}}{2} + \frac{10}{\sqrt{n}}$. On a alors $2a\sqrt{n} = n + 20$ donc

$$\sqrt{n} = \frac{n+20}{2a}$$

Clairement a est non nul car n est strictement positif. Ainsi, $\sqrt{n}$ est rationnel. On en déduit que n doit être un carré parfait.

Écrivons $n = m^2$ où $m \in \mathbb{N}^*$. On sait alors que $\frac{m}{2} + \frac{10}{m}$ est entier, donc

$$2m | m^2 + 20$$

En particulier, $m^2 + 20$ est pair donc m est pair. En écrivant $m = 2k$, on obtient

$$k | k^2 + 5$$

donc $k|5$. Il y a alors deux possibilités : $k = 1$ ou $k = 5$, soit $n = 4$ ou $n = 100$. Il ne reste plus qu'à vérifier ces deux solutions comme fait dans la première solution.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est plutôt bien réussi pour sa position, mais de nombreux élèves vont être déçus par leur note, car de trop nombreuses grosses erreurs ont été commises :

- ▷ Supposer sans aucun argument que $\sqrt{n}$ est entier. Cela n'est pas du tout clair vu l'énoncé. Toute telle supposition (ou manque de preuve) entraînait une note d'au plus 3.
- ▷ Faire des divisibilités avec des $\sqrt{n}$. Le nombre réel $\sqrt{n}$ n'étant pas un entier, cela n'a pas de sens. De même que précédemment, dire que $2\sqrt{n}$ divise $n+20$ implique $\sqrt{n}$ entier entraînait une note d'au plus 3.
- ▷ Affirmer que $\frac{n+20}{2\sqrt{n}}$ est entier, puis en déduire, comme $n+20$ est entier, que $\sqrt{n}$ est entier. Certes l'affirmation est vraie, mais repose sur la propriété bien particulière que $\sqrt{n}$ n'est jamais rationnel. Ceci rapportait au plus 5 points (car l'argument était plus proche d'un argument correct que ceux mentionnés préalablement). Notons que $2/(2/3)$ est bien un entier, alors que $2/3$ n'est pas entier.
- ▷ Affirmer que quand une somme de deux fractions est entière, chacun des fractions est entières. C'est complètement faux : par exemple $\frac{1}{2}+\frac{10}{4}$ est entier. Certains ont d'ailleurs couplé cela avec le premier faux argument en affirmant que si n vérifiait l'énoncé, alors $\sqrt{n}$ était un entier multiple de 2 et diviseur de 10 (ce qui entraînait une note d'au plus 1).
- ▷ Affirmer sans preuve que $\frac{10}{\sqrt{n}}$ n'avait jamais une partie décimale de $0,5$. C'est faux pour $n=4$, vrai pour n impair, mais méritait d'être prouvé.
- ▷ Laisser des cas au lecteur en disant qu'après vérification, telles quantité sont solution ou non. Certains élèves ont montré que n divisait 100, puis pris la liberté d'affirmer qu'au brouillon les 15 cas avaient été testé, et que seuls 4 et 100 fonctionnaient. Cela n'est à priori pas correct : le correcteur ne peut deviner si les calculs sont faits et si ceux-ci sont corrects. Dans de tels cas (et dans le cas où les solutions n'étaient pas vérifiées, et la vérification n'était pas immédiate vu les calculs précédents, un à trois points ont été enlevés.
- ▷ Affirmer que n ne divise pas $\sqrt{n}$, qu'il divise $\sqrt{n}(n+20)$ donc divise $n+20$. Ceci est en fait faux en toute généralité : par exemple 6 divise 2×3, ne divise pas 2, mais ne divise pas 3

Cet exercice témoigne aussi du fait que les prérequis ne sont malheureusement pas assez lus par les élèves : le fait que $\sqrt{n}$ est irrationnel si n n'est pas un carré parfait était dans les prérequis, et donc il n'était pas nécessaire de le reprouver (souvent mal), et il était important de l'utiliser explicitement.

Exercice 14. Antoine choisit quatre nombres réels strictement positifs x, y, z et t distincts et écrit au tableau les 12 fractions

$$\frac{x}{y}, \frac{x}{z}, \frac{x}{t}, \frac{y}{x}, \frac{y}{z}, \frac{y}{t}, \frac{z}{x}, \frac{z}{y}, \frac{z}{t}, \frac{t}{x}, \frac{t}{y}, \frac{t}{z}.$$

Montrer qu'Antoine peut entourer deux de ces fractions, notées a et b, telles que $|a-b| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{30}}$.

Solution de l'exercice 14 Supposons par l'absurde que pour tout choix de deux fractions a et b on a $|a-b| \geqslant \frac{1}{\sqrt{30}}$. Comme x, y, z, t sont distincts, et que chaque paire de nombres donne deux fractions qui sont inverses l'une de l'autre : une strictement inférieure à 1, et l'autre strictement, on a 6 fractions $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5 \leqslant a_6$ inférieures strictement à 1, et leurs inverses, qui sont strictement plus grands que 1.

Vu que l'énoncé est faux, les différences a_6-a_5, a_5-a_4, a_4-a_3, a_3-a_2, a_2-a_1 valent toutes strictement plus que $\frac{1}{\sqrt{30}}$. En particulier, en sommant, $a_6 - a_1 \geqslant \frac{5}{\sqrt{30}}$, donc $a_6 > \frac{5}{\sqrt{30}}$.

De plus, $\frac{1}{a_6}$ est une des fractions écrites, et est plus grande que 1, donc que a_6. On a donc par hypothèse $\frac{5}{\sqrt{30}} \leqslant \frac{1}{a_6} - a_6$. Or

$$\frac{1}{a_6} - a_6 \leqslant \frac{\sqrt{30}}{5} - \frac{5}{\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{30}^2 - 5^2}{5\sqrt{30}} = \frac{5}{5\sqrt{30}} = \frac{1}{\sqrt{30}},$$

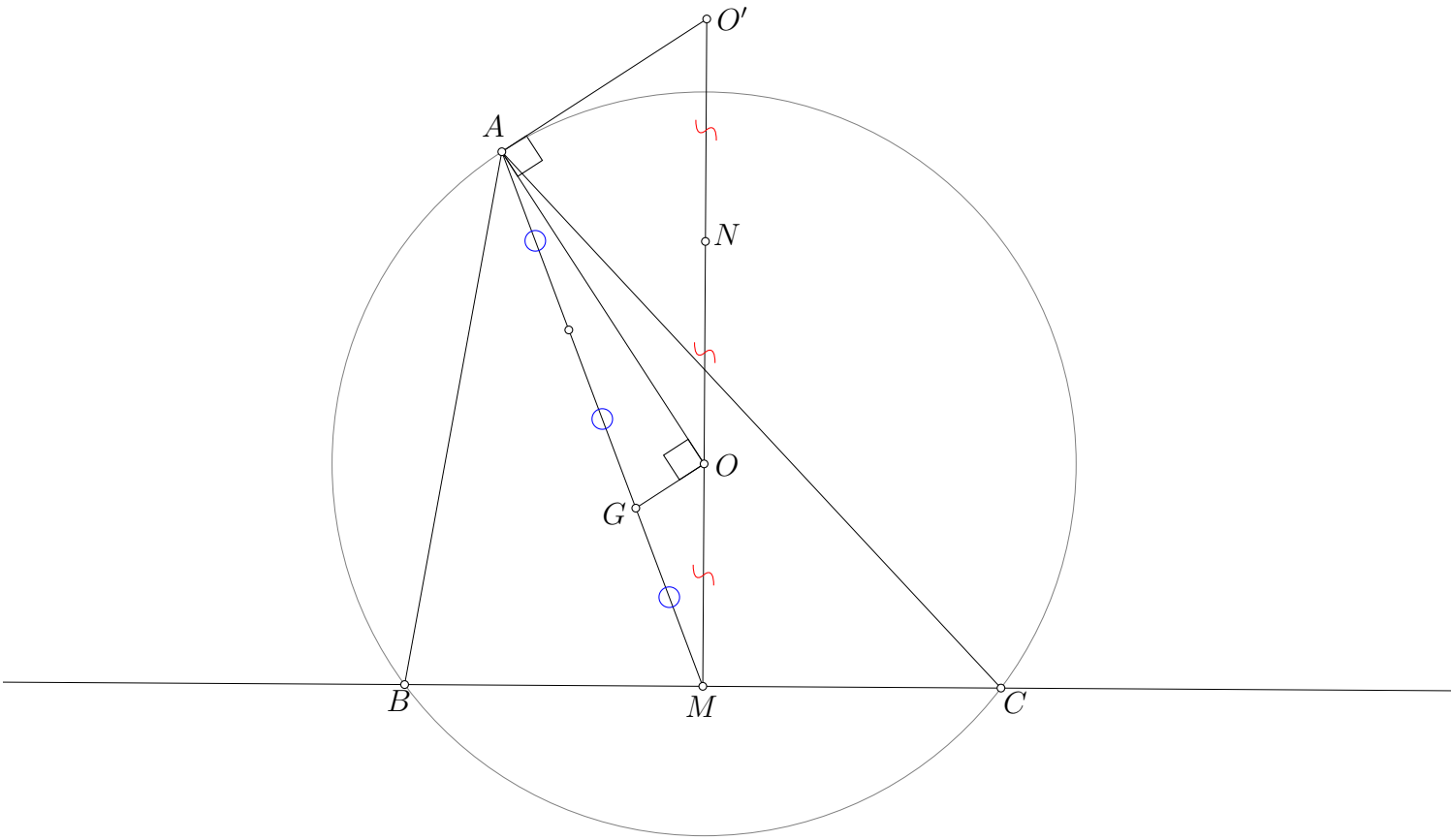
ce qui contredit l'inégalité précédente. On a donc bien une absurdité, l'énoncé est bien vérifié.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été réussi par une cinquantaine de personnes. Il est dommage que très peu de gens n'aient eu des points partiels. En effet, il est naturel de commencer par remplacer $\frac{1}{\sqrt{30}}$ par des quantités plus naturelles, typiquement $\frac{1}{5}$, et de s'intéresser aux 6 fractions plus petites que 1 (ce qui rapportait un point que peu ont eu). Une fois compris comment on pouvait avoir cette borne de $\frac{1}{5}$, il suffisait d'adapter un petit peu la preuve : la sixième fraction doit être très proche de 1, son inverse aussi, et cela donne la solution du corrigé.

NB : La constante $\frac{1}{\sqrt{30}}$ n'est pas optimale. Il était possible de faire mieux que la borne de l'énoncé du problème 14.

Exercice 15. Soit ABC un triangle dont on note O le centre du cercle circonscrit et G le centre de gravité. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et N le symétrique du point M par rapport au point O. On suppose que $NO = NA$.
Montrer que $\widehat{AOG} = 90°$.

Solution de l'exercice 15



Considérons O' le symétrique de O par rapport à N. Comme par hypothèse $O'N = NO$ et $NO = OM$, on a que $\frac{OM}{MO'} = \frac{1}{3} = \frac{MG}{MA}$, donc les droites (AO') et (OG) sont parallèles. Ainsi $\widehat{AOG} = \widehat{OAO'}$.

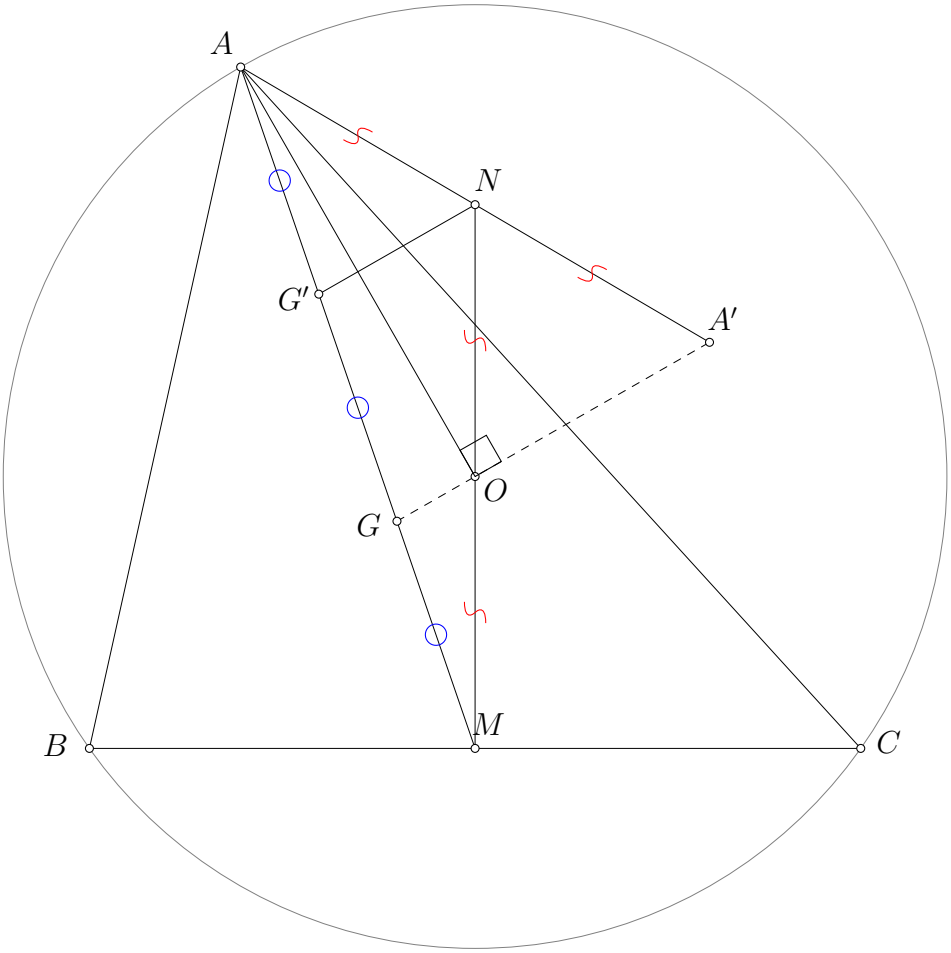
De plus, comme $NO = NA = NO'$, N est le centre du cercle circonscrit au triangle AOO', mais c'est aussi le milieu du segment $[OO']$. Donc le triangle $AO'O$ est rectangle en A, ainsi $\widehat{O'AO} = 90°$, donc $\widehat{AOG} = 90°$.

Solution alternative n°1 Voici une solution en nombres complexes. Quitte à appliquer une homothétie, on peut supposer que O est d'affice 0 et A, B, C d'affixe a, b, c de module 1. L'affixe de M vaut $\frac{b+c}{2}$, celle de N vaut $\frac{-b-c}{2}$.

On veut montrer que $\widehat{AOG}$ est droit. Or l'affixe de G est $\frac{a+b+c}{3}$. On veut donc montrer que $\frac{a+b+c}{3a}$ est imaginaire pur, donc que $\frac{a+b+c}{a}$ est imaginaire pur. Posons $\alpha = \frac{a+b+c}{a}$

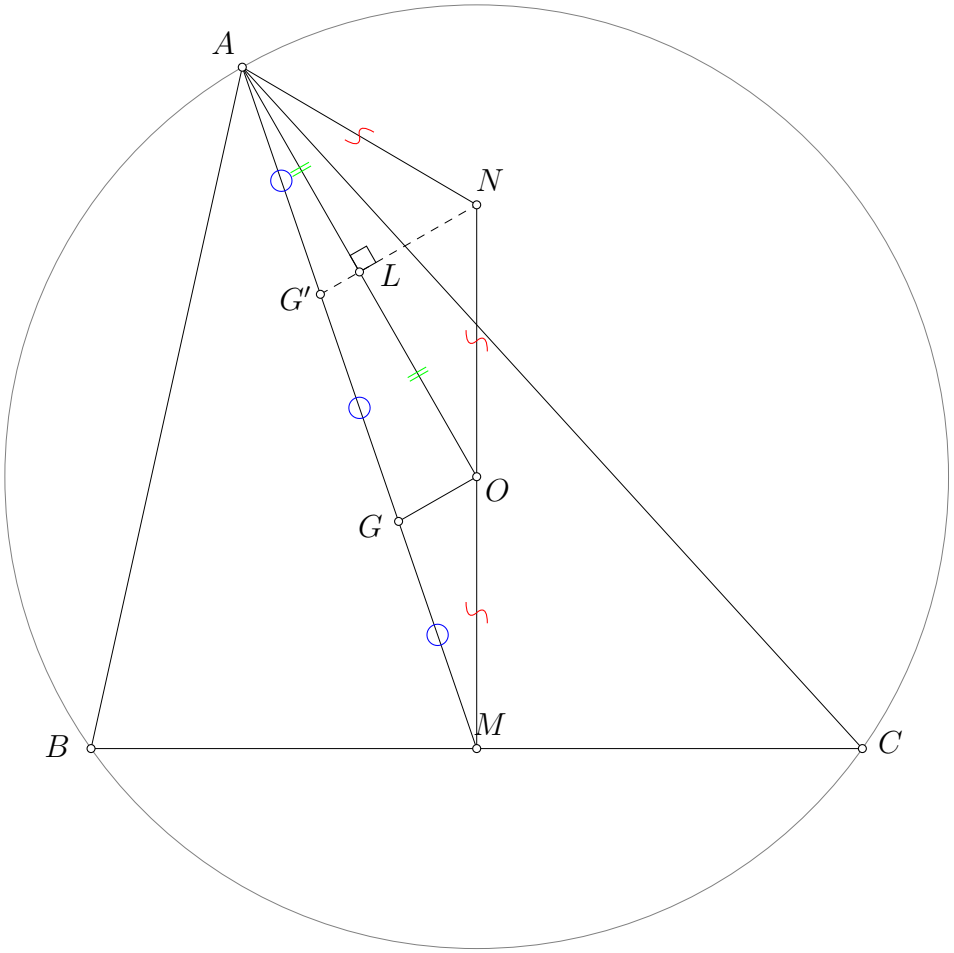
Comme $NO = NA$, on a que $|\frac{2a+b+c}{2}| = |\frac{b+c}{2}|$, donc $|2a+b+c| = |b+c|$. On a donc $|a+\alpha a| = |\alpha a - a|$, donc $|\alpha - 1| = |\alpha + 1|$. En particulier, α est sur la médiatrice de -1 et de 1, donc a une partie réelle nulle, ce qui conclut.

Solution alternative n°2



Soit A' le symétrique de A par rapport à N. On a $NA = NA' = NO$ et N est le milieu de AA' donc AA' est un diamètre du cercle circonscrit à $AA'O$ et $\widehat{AOA'} = 90°$.
Notons G' le milieu de AG. NG' est une droite des milieux dans le triangle $AA'G$ donc $NG'//A'G$.
D'un autre côté, OG est une droite des milieux dans le triangle MNG' donc $OG//NG'$.
Ainsi, $OG//A'G$ donc G, O et A' sont alignés. On a montré que $\widehat{AOA'} = 90°$, donc $\widehat{AOG} = 90°$, ce qui conclut.

Solution alternative n°3



Soit L le milieu de AO et G' le milieu de AG. LG' est une droite des milieux dans AOG donc $LG'//OG$. $G'N$ est une droite des milieux dans MNG' donc $NG'//GO$. Ainsi, $LG'//NG'$ donc N, L, G' sont alignés.
$NA = NO$ et $LA = LO$ donc NL est la médiatrice de AO. Ainsi, G' est sur la médiatrice de AO. On a alors $G'A = G'O = G'G$: AG est un diamètre du cercle circonscrit à AGO donc $\widehat{AOG} = 90°$.

Commentaire des correcteurs : Les correcteurs et correctrices ont été agréablement surpris.es par le nombre élevé d'élèves ayant réussi l'exercice.
Il y avait de nombreuses approches possibles permettant de le résoudre, que ce soit en introduisant des points auxiliaires ou en passant par des calculs de vecteurs.
L'e problème peut sembler impressionnant de prime abord, mais les premiers points du barème étaient accessibles. On rappelle donc qu'il est important de passer quelques minutes sur le dernier problème du sujet : il y a toujours des points abordables.