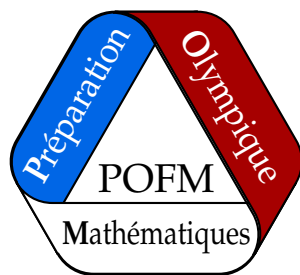


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 12 MAI 2026

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Les nombres de 1 à 2025 sont écrits au tableau. Anaïs effectue 674 fois l'opération suivante : elle choisit deux entiers encore écrits au tableau dont la différence vaut 1 et les efface.

Montrer que la somme des entiers encore écrits au tableau à la fin des 674 opérations n'est pas divisible par 6 mais que le produit de ces entiers est divisible par 6.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1

Commençons par montrer que 6 ne divise pas la somme des entiers restants, somme que l'on note S . Comme à chaque opération, Anaïs efface deux entiers dont la somme est impaire, la parité de la somme change à chaque opération. Comme Anaïs effectue un nombre pair d'opération, la parité de S est la même que la parité de la somme de départ, à savoir $1 + 2 + \dots + 2025$. Comme cette expression contient un nombre impair de nombre impair, elle est impaire. Ainsi S est impaire donc en particulier non divisible par 6.

Montrons que le produit des entiers restants est divisible par 6. Il suffit pour cela de vérifier que, parmi les entiers restants, il y a un multiple de 2 et un multiple de 3.

Or il y a 1012 multiples de 2 dans $\{1, \dots, 2025\}$, et chaque opération d'Anaïs en efface exactement 1. Donc il reste $1012 - 674 = 338$ entiers pairs parmi les entiers restants.

De plus, il y a 675 multiples de 3 dans $\{1, \dots, 2025\}$ et chaque opération d'Anaïs en efface au plus 1. Donc il reste au moins un multiple de 3 parmi les entiers restants.

Commentaire des correcteurs

Ce problème a été très bien traité, avec une grande majorité de solutions complètes. Certains arguments auraient pu être présentés de façon plus brève, en effectuant les calculs modulo 2 par exemple. Il est également à noter que pour un tel exercice, une preuve par l'absurde est inutile et complique la démonstration.

Exercice 2. Un entier $n \geq 1$ est dit *dynamique* s'il existe une infinité de carrés parfaits qui sont la somme de n entiers consécutifs strictement positifs.

Déterminer le nombre d'entiers dynamiques n tels que $1 \leq n \leq 2048$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2

Réponse : Les entiers dynamiques sont les entiers n qui sont impairs et des entiers n de la forme $n = 2^{2\alpha-1}b$ avec b un entier impair. En conséquence, il y a 1707 tels entiers.

Dans la suite, pour tout entier $k \geq 1$, on note $v_2(k)$ la valuation 2-adique de k , c'est-à-dire la plus grande puissance de 2 divisant k . Commençons par démontrer la caractérisation annoncée.

Soit n un entier dynamique. On distingue deux cas.

- Si n est impair : on peut poser $n = 2k + 1$ avec $k \geq 0$. Il s'agit de trouver un entier a et un entier $m \geq k + 1$ tels que

$$a^2 = (m - k) + \dots + (m - 1) + m + (m + 1) + \dots + (m + k) = (2k + 1)m.$$

Or en choisissant $m = (2k + 1)b^2$ avec $b \geq 1$ et $a = (k + 1)b$, l'égalité ci-dessus est bien vérifiée. On peut donc bien construire une infinité de carrés parfaits avec la propriété voulue lorsque n est impair.

- Si n est pair : on peut poser $n = 2k$ avec $k \geq 1$. On dispose d'un entier a et d'un entier $m \geq k$ tels que

$$a^2 = (m - k + 1) + \dots + (m - 1) + m + (m + 1) + \dots + (m + k - 1) + (m + k) = 2km + k = (2m + 1)k.$$

Puisque $2m + 1$ est impair, il vient que $2v_2(a) = v_2(a^2) = v_2(k) = v_2(n/2) = v_2(n) - 1$. Cela implique que $v_2(n)$ est impair.

Réciproquement, si $v_2(n)$ est impair, on exhibe une infinité de couples (a, m) solutions de l'équation ci-dessus. Soit $\alpha \geq 1$ l'entier tel que $v_2(n) = 2\alpha - 1$ et b l'entier impair tel que $n = 2^{2\alpha-1}b$. Pour tout entier $\ell \geq 2^{\alpha-1}$ impair, on peut par exemple choisir m tel que $2m + 1 = b\ell^2$ et $a = 2^{\alpha-1}b\ell$. On a en effet que $m \geq 2^{2(\alpha-1)}b \geq k$ et $(2m + 1)k = b\ell^2 \cdot 2^{2\alpha-2}b = a^2$.

On peut donc bien construire une infinité de carrés parfaits avec la propriété voulue lorsque n est de la forme $2^{2\alpha-1}b$ avec $\alpha \geq 1$ et b impair.

Cette disjonction de cas conclut la caractérisation annoncée. Il reste à dénombrer les entiers dynamiques inférieurs à 2048. Comme $2^{11} = 2048$ est la plus grande puissance de 2 de l'ensemble, les entiers de $\llbracket 1, 2048 \rrbracket$ ont une valuation 2-adique inférieure ou égale à 11. Pour tout $k \leq 11$, il y a $2048/2^k$ entiers n tels que $v_2(n) \geq k$. Par soustraction, il y a $\frac{2048}{2^k} - \frac{2048}{2^{k+1}} = \frac{2048}{2^{k+1}}$ entiers n tels que $v_2(n) = k$ lorsque $k \leq 10$. Enfin, il y a un unique entier n tel que $v_2(n) = 11$. Ainsi, le nombre d'entiers dynamiques de $\llbracket 1, 2048 \rrbracket$ est

$$\frac{2048}{2^1} + \frac{2048}{2^2} + \frac{2048}{2^4} + \frac{2048}{2^6} + \frac{2048}{2^8} + \frac{2048}{2^{10}} + 1 = 1024 + 512 + 128 + 32 + 8 + 2 + 1 = \boxed{1707}.$$

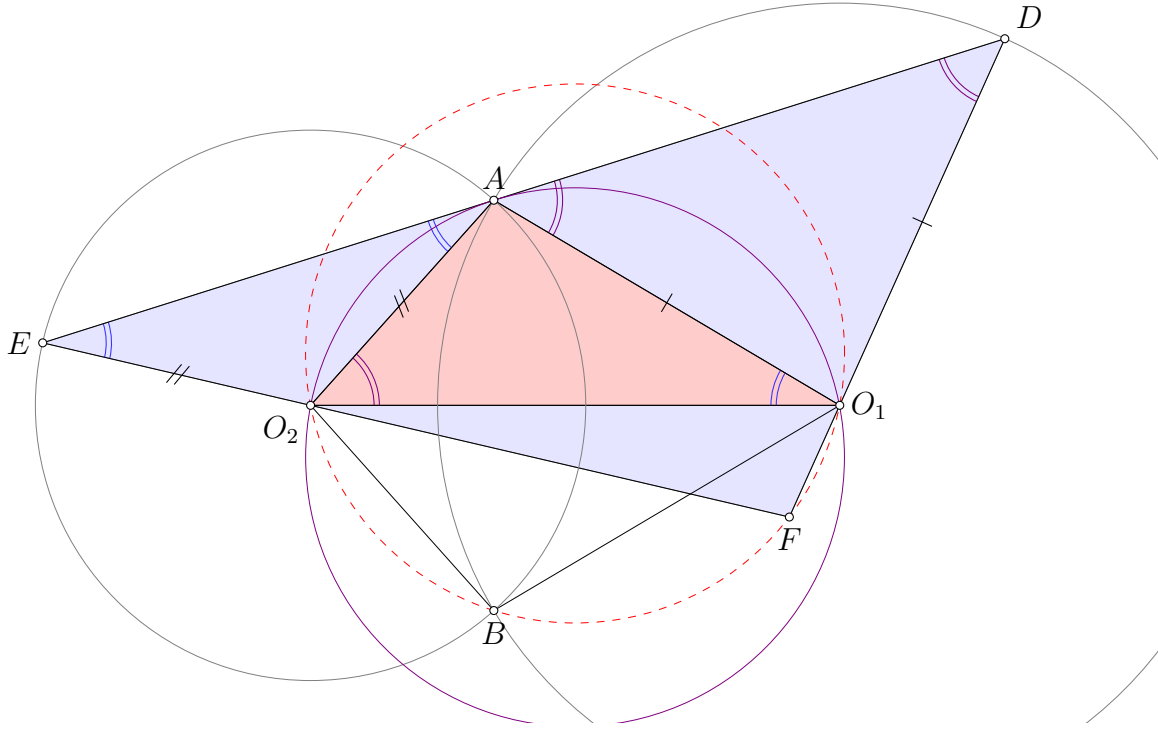
Commentaire des correcteurs

- Certains élèves ont affirmé que, dans le cas n impair, tout multiple de $n = 2\ell + 1$ est la somme de n entiers consécutifs strictement positifs avec la "preuve" suivante : soit $k \geq 1$, on a $(k - \ell) + (k - \ell + 1) + \dots + (k + \ell) = (2\ell + 1)k = nk$. Le problème ici est qu'il n'y a pas de raison que $k - \ell$ soit positif. Plus généralement, de nombreux élèves ont oublié la condition de stricte positivité, et en cas de solution complète ont perdu 1 point.
- Beaucoup d'élèves ont pensé à utiliser la moyenne des n entiers consécutifs comme paramètre pour calculer la somme des n entiers consécutifs, ce qui était une bonne idée, et simplifiait énormément les calculs.
- Attention aux erreurs classiques d'arithmétique : n divise a^2 n'implique pas n divise a , ni que n est un carré et $\sqrt{n}$ divise a . Ce n'est pas parce que $ab = cd$ que $a = c$ ou $a = d$ (ou même que a divise c ou d), surtout quand c et d ne sont pas entiers.

Exercice 3. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 et se coupant en deux points A et B distincts. La tangente en A au cercle circonscrit au triangle AO_1O_2 recoupe le cercle ω_1 en D et le cercle ω_2 en E .

Montrer que les points D et E sont à égale distance du centre du cercle circonscrit au triangle BO_1O_2 .

SOLUTION DE L'EXERCICE 3



Notons O le centre du cercle circonscrit au triangle BO_1O_2 , cercle que l'on note $\mathcal{C}$. Une façon (systématique) de montrer que $OD = OB$ est de montrer que les points D et E ont la même puissance par rapport au cercle $\mathcal{C}$. En effet la puissance $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(X)$ d'un point X quelconque par rapport au cercle ω vérifie $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(X) = XO^2 - OB^2$. Ainsi, si $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(D) = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(E)$ c'est le cas, alors $OD^2 = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(D) + OB^2 = \mathcal{P}_{\mathcal{C}}(E) + OB^2 = OE^2$. Cette technique permet d'effacer le point O de la figure.

On pose F le point d'intersection des droites (DO_1) et (EO_2) . D'après le théorème de l'angle tangent et puisque le triangle AO_1D est isocèle en O_1 ,

$$\widehat{O_1O_2A} = \widehat{O_1AD} = \widehat{EDF}.$$

De même, $\widehat{O_2O_1A} = \widehat{FED}$. Les triangles FED et AO_1O_2 sont donc semblables. En particulier, puisque A et B sont symétriques par rapport à $[O_1O_2]$,

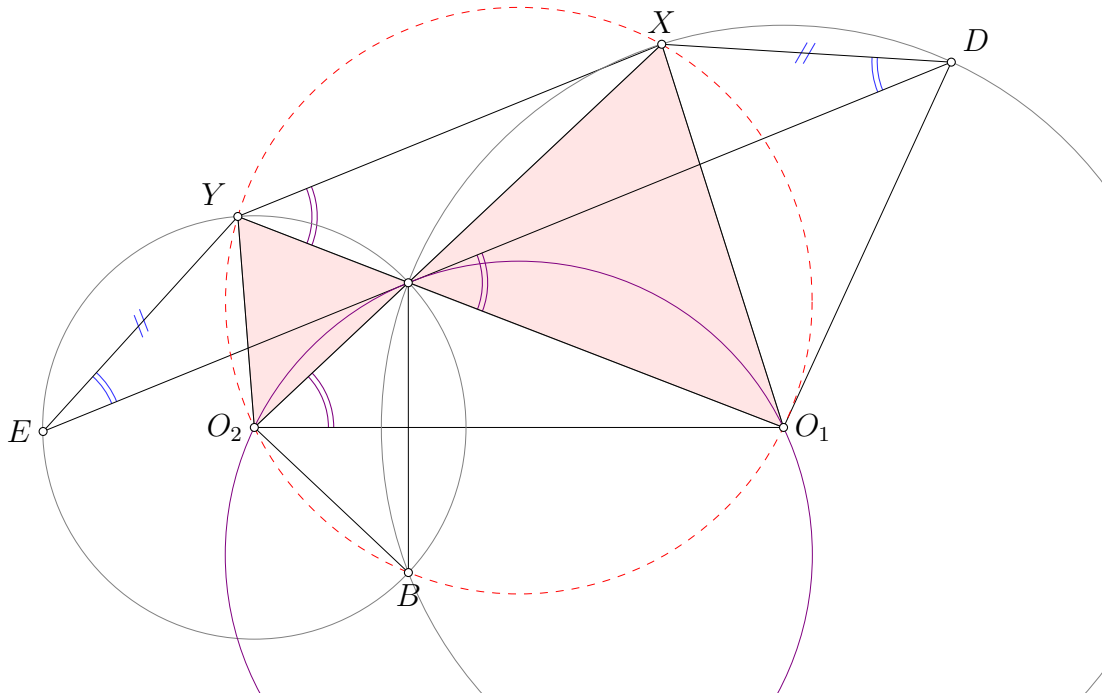
$$\widehat{O_2FO_1} = \widehat{EFD} = \widehat{O_2AO_1} = \widehat{O_2BO_1}.$$

Cela signifie que F est sur le cercle $\mathcal{C}$. Puisque les triangles FED et AO_1O_2 sont semblables, on a

$$\frac{\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(D)}{\mathcal{P}_{\mathcal{C}}(E)} = \frac{DO_1 \times DF}{EO_2 \times EF} = \frac{AO_1}{AO_2} \times \frac{DF}{EF} = 1,$$

ce qui est le résultat voulu.

SOLUTION N°2



Notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle BO_1O_2 .

On note désormais X le second point d'intersection de la droite (O_2A) avec le cercle ω_1 et Y le second point d'intersection de la droite (O_1A) avec le cercle ω_2 . Les triangles XAO_1 et YAO_2 sont isocèles et les angles $\widehat{XAO_1}$ et $\widehat{YAO_2}$ sont égaux car opposés par le sommet. On déduit que ces deux triangles sont semblables et qu'en particulier, $\widehat{YO_2X} = \widehat{XO_1Y}$. De plus, d'après le théorème de l'angle au centre,

$$\widehat{XBY} = \widehat{XBA} + \widehat{ABY} = \frac{1}{2}\widehat{XO_1A} + \frac{1}{2}\widehat{YO_2A} = \widehat{XO_1Y}.$$

Les points X et Y sont donc sur le cercle $\mathcal{C}$. D'après le théorème de l'angle tangentiel, on a alors

$$\widehat{O_1YX} = \widehat{O_1O_2A} = \widehat{O_1AD}.$$

Cela signifie que les droites (XY) et (DE) sont parallèles. Comme de plus, avec le théorème de l'angle inscrit,

$$\widehat{XDE} = \widehat{XO_1A} = \widehat{AO_2Y} = \widehat{YDE},$$

le quadrilatère $XDEY$ est un trapèze isocèle. Les segments $[XY]$ et $[DE]$ partagent donc la même médiatrice. Comme le centre O du cercle $\mathcal{C}$ appartient à la médiatrice de $[XY]$, il appartient aussi à la médiatrice de $[DE]$, comme voulu.

Commentaire des correcteurs

Le problème était difficile et n'a pas eu beaucoup de solutions complètes. Peu d'élèves ont pensé à introduire des points supplémentaires à la figure, essentiels à la résolution du problème. Mais un certain nombre d'élèves ont fait des observations initiales pertinentes.

Exercice 4. Le *prix* d'une suite $a_1, \dots, a_{100}$ d'entiers (non nécessairement positifs) est défini comme le plus grand des entiers de la forme

$$|(a_1 + \dots + a_i) - a_j|$$

où i et j sont des entiers de $\{1, 2, \dots, 100\}$.

Déterminer le plus petit prix parmi toutes les suites $a_1, \dots, a_{100}$ d'entiers deux à deux distincts.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4

Réponse : Le plus petit prix possible est $C = 75$.

Le problème demande de trouver la plus petite valeur vérifiant une certaine propriété, il contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que le prix de n'importe quelle suite est supérieur à 75, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on donne un exemple de suite dont le prix est exactement 75, cette étape s'appelle *la construction*. Une fois n'est pas coutume, nous allons commencer par la construction, que l'on peut intuitivement en calculant le prix de certaines suites particulières.

Notations : On note $S_k = a_1 + \dots + a_k$ la somme des k premiers termes.

Construction : Considérons la suite

$$1, -2, 3, -4, \dots, -48, 49, -50, 50, -49, \dots, -3, 2, -1.$$

Autrement dit, $a_{2k-1} = 2k - 1$, $a_{2k} = -2k$, $a_{100-(2k-1)} = -(2k - 1)$ et $a_{100-2k} = 2k$ pour $k \leq 25$. On vérifie que $S_{2k-1} = k$, $S_{2k} = -k$, $S_{50+2k-1} = 25 - k$ et $S_{50+2k} = -(25 - k)$ pour $k \leq 25$. En particulier, $|S_k| \leq 25$ pour tout indice k . D'autre part, tous les termes vérifient $|a_i| \leq 50$. Ainsi, pour tout k, j ,

$$|S_k - a_j| \leq |S_k| + |a_j| \leq 25 + 50 = 75,$$

avec égalité par exemple pour $k = 51$ et $j = 50$. Ceci donne bien que le prix de la suite est 75.

Analyse : Soit $(a_1, \dots, a_{100})$ une suite quelconque d'entiers et soit C son prix. Soient m et M respectivement le minimum et le maximum de la suite $(a_1, \dots, a_{100})$. Notons également s et S respectivement le minimum et le maximum de la suite $(S_1, \dots, S_{100})$. Pour toute paire (i, j) d'indices,

$$|(a_1 + \dots + a_i) - a_j| \leq (a_1 + \dots + a_i) - a_j \leq S - m \quad \text{si } (a_1 + \dots + a_i) - a_j \geq 0,$$

$$|(a_1 + \dots + a_i) - a_j| = a_j - (a_1 + \dots + a_i) \leq M - s \quad \text{si } (a_1 + \dots + a_i) - a_j \leq 0.$$

Comme les valeurs $S - m$ et $s - M$ sont bien atteintes (en prenant les indices i et j associés aux valeurs maximales et minimales des suites (a_i) et (S_i)), on déduit que $C \geq \max\{S - m, M - s\}$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$2C \geq S - m + M - s = S - s + M - m.$$

Il s'agit désormais d'estimer $S - s$ et $M - m$.

Comme les 100 termes sont compris dans l'intervalle $\llbracket m, M \rrbracket$ et qu'ils sont deux à deux distincts, on a $M - m \geq 99$. On estime désormais $S - s$.

Supposons d'abord que $|a_i| \leq 49$ pour tout $i \geq 2$. Comme $[-49, 49]$ contient 99 entiers, on a $\{a_2, \dots, a_{100}\} = \{-49, \dots, 49\}$. On déduit que $|a_1| \geq 50$. Quitte à considérer la suite $(-a_1, \dots, -a_{100})$, ce qui ne change pas son prix, on peut supposer que $a_1 \geq 50$. Soit alors j l'indice tel que $a_j = -49$. On a $|a_1 - a_j| \geq 99$, ce qui implique que $C \geq 99$.

On suppose désormais qu'il existe un indice $i \geq 2$ tel que $|a_i| \geq 50$, et une fois encore on peut supposer que $a_i \geq 50$ quitte à changer le signe de tous les termes. On a alors

$$S - s \geq (a_1 + \dots + a_i) - (a_1 + \dots + a_{i-1}) = a_i \geq 50.$$

Il vient, en combinant $M - m \geq 99$ et $S - s \geq 50$,

$$2C \geq M - m + S - s \geq 99 + 50 = 149.$$

Ceci conduit, comme C est un entier, que $C \geq 75$.

SOLUTION N°2

On donne une seconde solution pour l'analyse. Tout comme dans la solution précédente, on considère une suite $(a_1, \dots, a_{100})$ et on note C son prix et m et M respectivement le minimum et le maximum de la suite. On introduit les indices u et v tels que $m = a_u$ et $M = a_v$. Quitte à considérer $(-a_1, \dots, -a_{100})$, ce qui change le signe de $m + M$, on peut supposer que $m + M \geq 0$. La solution consiste à faire une disjonction de cas.

➤ Si $m \geq -49$:

$$C \geq |a_1 + \dots + a_{100} - a_u| \geq a_1 + \dots + a_{100} - a_u.$$

Puisque les entiers sont deux à deux distincts,

$$C \geq a_1 + \dots + a_{100} - a_u \geq m + (m+1) + \dots + (m+99) - m = 99(m+50) \geq 99.$$

➤ Si $m \leq -50$ et $v = 1$:

$$C \geq |a_1 - a_v| = a_1 - a_v = M - m \geq 99.$$

➤ Si $m \leq -50$ et $v \geq 2$: on a les deux inégalités

$$C \geq |(a_1 + \dots + a_{v-1}) - a_v| \geq a_v - (a_1 + \dots + a_{v-1}),$$

$$C \geq |(a_1 + \dots + a_v) - a_u| \geq (a_1 + \dots + a_v) - a_u,$$

ce qui une fois sommées donne

$$2C \geq (a_1 + \dots + a_v) - (a_1 + \dots + a_{v-1}) + a_v - a_u = 2M - m = 2(M+m) - 3m \geq 0 - (-150).$$

On a alors $C \geq 75$.

On retrouve que, dans tous les cas, $C \geq 75$.

Commentaire des correcteurs

Ce problème difficile a été peu abordé, et on ne peut que féliciter les deux élèves qui l'ont résolu. Un écueil qui a stoppé beaucoup d'élèves était de se rendre compte que la première construction qu'ils ont trouvée, et qui aboutissait la plupart du temps à un score de 99, n'avait a priori aucune raison d'être optimale.

Par ailleurs, on ne peut que conseiller aux élèves de se méfier des notations ... quand le motif à utiliser n'est pas clair. Par exemple, plusieurs élèves ont proposé une variante de la suite $-25, 50, -50, 49, -49, \dots$: les ... cachent-ils le motif invalide $26, -26, 25, -25, 24, -24$ ou bien l'un des motifs valides $26, -26, 25, 24, -24$ ou $26, -26, 24, -24$? En cas de doute raisonnable, comme c'était le cas ici, les correcteurs ne peuvent pas prendre de risque, et sont obligés de constater que l'élève a pu avoir en tête le premier motif (invalide).

Énoncés Senior

Exercice 5. Le *prix* d'une suite $a_1, \dots, a_{100}$ d'entiers (non nécessairement positifs) est défini comme le plus grand des entiers de la forme

$$|(a_1 + \dots + a_i) - a_j|$$

où i et j sont des entiers de $\{1, 2, \dots, 100\}$.

Déterminer le plus petit prix parmi toutes les suites $a_1, \dots, a_{100}$ d'entiers deux à deux distincts.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5

Réponse : Le plus petit prix possible est $C = 75$.

Le problème demande de trouver la plus petite valeur vérifiant une certaine propriété, il contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que le prix de n'importe quelle suite est supérieur à 75, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on donne un exemple de suite dont le prix est exactement 75, cette étape s'appelle *la construction*. Une fois n'est pas coutume, nous allons commencer par la construction, que l'on peut intuitivement en calculant le prix de certaines suites particulières.

Notations : On note $S_k = a_1 + \dots + a_k$ la somme des k premiers termes.

Construction : Considérons la suite

$$1, -2, 3, -4, \dots, -48, 49, -50, 50, -49, \dots, -3, 2, -1.$$

Autrement dit, $a_{2k-1} = 2k - 1$, $a_{2k} = -2k$, $a_{100-(2k-1)} = -(2k - 1)$ et $a_{100-2k} = 2k$ pour $k \leq 25$. On vérifie que $S_{2k-1} = k$, $S_{2k} = -k$, $S_{50+2k-1} = 25 - k$ et $S_{50+2k} = -(25 - k)$ pour $k \leq 25$. En particulier, $|S_k| \leq 25$ pour tout indice k . D'autre part, tous les termes vérifient $|a_i| \leq 50$. Ainsi, pour tout k, j ,

$$|S_k - a_j| \leq |S_k| + |a_j| \leq 25 + 50 = 75,$$

avec égalité par exemple pour $k = 51$ et $j = 50$. Ceci donne bien que le prix de la suite est 75.

Analyse : Soit $(a_1, \dots, a_{100})$ une suite quelconque d'entiers et soit C son prix. Soient m et M respectivement le minimum et le maximum de la suite $(a_1, \dots, a_{100})$. Notons également s et S respectivement le minimum et le maximum de la suite $(S_1, \dots, S_{100})$. Pour toute paire (i, j) d'indices,

$$|(a_1 + \dots + a_i) - a_j| \leq (a_1 + \dots + a_i) - a_j \leq S - m \quad \text{si } (a_1 + \dots + a_i) - a_j \geq 0,$$

$$|(a_1 + \dots + a_i) - a_j| = a_j - (a_1 + \dots + a_i) \leq M - s \quad \text{si } (a_1 + \dots + a_i) - a_j \leq 0.$$

Comme les valeurs $S - m$ et $s - M$ sont bien atteintes (en prenant les indices i et j associés aux valeurs maximales et minimales des suites (a_i) et (S_i)), on déduit que $C \geq \max\{S - m, M - s\}$. Ainsi, par inégalité triangulaire,

$$2C \geq S - m + M - s = S - s + M - m.$$

Il s'agit désormais d'estimer $S - s$ et $M - m$.

Comme les 100 termes sont compris dans l'intervalle $\llbracket m, M \rrbracket$ et qu'ils sont deux à deux distincts, on a $M - m \geq 99$. On estime désormais $S - s$.

Supposons d'abord que $|a_i| \leq 49$ pour tout $i \geq 2$. Comme $\llbracket -49, 49 \rrbracket$ contient 99 entiers, on a $\{a_2, \dots, a_{100}\} = \{-49, \dots, 49\}$. On déduit que $|a_1| \geq 50$. Quitte à considérer la suite $(-a_1, \dots, -a_{100})$, ce qui ne change pas son prix, on peut supposer que $a_1 \geq 50$. Soit alors j l'indice tel que $a_j = -49$. On a $|a_1 - a_j| \geq 99$, ce qui implique que $C \geq 99$.

On suppose désormais qu'il existe un indice $i \geq 2$ tel que $|a_i| \geq 50$, et une fois encore on peut supposer que $a_i \geq 50$ quitte à changer le signe de tous les termes. On a alors

$$S - s \geq (a_1 + \dots + a_i) - (a_1 + \dots + a_{i-1}) = a_i \geq 50.$$

Il vient, en combinant $M - m \geq 99$ et $S - s \geq 50$,

$$2C \geq M - m + S - s \geq 99 + 50 = 149.$$

Ceci conduit, comme C est un entier, que $C \geq 75$.

SOLUTION N°2

On donne une seconde solution pour l'analyse. Tout comme dans la solution précédente, on considère une suite $(a_1, \dots, a_{100})$ et on note C son prix et m et M respectivement le minimum et le maximum de la suite. On introduit les indices u et v tels que $m = a_u$ et $M = a_v$. Quitte à considérer $(-a_1, \dots, -a_{100})$, ce qui change le signe de $m + M$, on peut supposer que $m + M \geq 0$. La solution consiste à faire une disjonction de cas.

➤ Si $m \geq -49$:

$$C \geq |a_1 + \dots + a_{100} - a_u| \geq a_1 + \dots + a_{100} - a_u.$$

Puisque les entiers sont deux à deux distincts,

$$C \geq a_1 + \dots + a_{100} - a_u \geq m + (m + 1) + \dots + (m + 99) - m = 99(m + 50) \geq 99.$$

➤ Si $m \leq -50$ et $v = 1$:

$$C \geq |a_1 - a_v| = a_1 - a_v = M - m \geq 99.$$

➤ Si $m \leq -50$ et $v \geq 2$: on a les deux inégalités

$$C \geq |(a_1 + \dots + a_{v-1}) - a_v| \geq a_v - (a_1 + \dots + a_{v-1}),$$

$$C \geq |(a_1 + \dots + a_v) - a_u| \geq (a_1 + \dots + a_v) - a_u,$$

ce qui une fois sommées donne

$$2C \geq (a_1 + \dots + a_v) - (a_1 + \dots + a_{v-1}) + a_v - a_u = 2M - m = 2(M + m) - 3m \geq 0 - (-150).$$

On a alors $C \geq 75$.

On retrouve que, dans tous les cas, $C \geq 75$.

Commentaire des correcteurs

- Certains élèves ont cru que la bonne réponse était 99. Il est dommage de ne pas avoir assez testé les petits cas : par exemple si on remplace 100 dans l'énoncé par 5, la bonne réponse est 3. Donc à priori, si on remplace 100 par n dans l'énoncé initial, la réponse n'est pas $n - 1$ (et en voyant cela, on se dit probablement que 99 n'est pas la meilleure chose à faire). En poussant les calculs pour résoudre le cas où 100 est remplacé par 6, on peut se faire une bonne idée de la construction, qui se généralise forcément à 100. Ainsi passer du temps à traiter les petits cas permet d'éviter de partir dans une piste qui avait de bonnes chances de rapporter très peu de points (puisque ni la construction d'une suite ayant pour prix 99, ni des arguments ne permettant pas d'avancer pour montrer que le prix vaut au moins 75 ne pouvaient être valorisées).
- Peu d'élèves ont explicitement relié le prix d'une suite au maximum/minimum de la suite et des sommes de la forme $a_1 + \dots + a_i$. C'était pourtant une étape assez naturelle, et très abordable, même sans avoir compris que 75 était la bonne valeur.
- Beaucoup d'élèves ont affirmé qu'il existait i tel que $|a_i| \geq 50$, puis en ont "déduit" comme dans la solution 1 que $S - s \geq 50$. Cependant, la preuve n'est correcte que si $i \geq 2$, par exemple la suite $50, -49, 49, \dots, -1, 1, 0$ ne vérifie pas $S - s \geq 50$ puisque $S = 50$, et $s = 1$. Cet oubli était pénalisé de 2 points (1 seul point si l'élève avait bien remarqué le cas $i = 1$, sans être apte à le traiter). En effet, celui-ci nécessitait un nouvel argument.
- Certains élèves ont oublié dans leur construction qu'il fallait avoir des entiers distincts. C'est dommage car cela fausse entièrement la construction.
- Certains élèves ont jugé que la suite suivante : $25, -50, 50, \dots, -1, 1, 0$ était une construction satisfaisante. Ici, il n'est pas du tout clair si l'élève a mis 25 et -25 dans la suite.
- Dans leur exemple de suite avec un prix minimal, certains élèves ont tenus à tout prix à avoir une suite explicite (par exemple, en définissant un peu de cette façon $a_i = i$ si i pair et $i \leq 50$, $-i$ si i impair et $i \leq 50$, $101 - i$ si $i \geq 51$ et i pair, $i - 101$ si $i \geq 51$ et i est impair). C'est la meilleure chose à faire pour se tromper dans les indices et écrire une suite qui ne fonctionne pas. Même si cela peut-être un réflexe scolaire, il est plus que conseillé d'écrire directement les nombres de la suite de manière compréhensible : par exemple écrire la suite $1, -2, 3, -4, \dots, 49, -50, 50, -49, 48, -47, \dots, 2, -1$ est bien plus compréhensible.

Exercice 6. La suite de triplets d'entiers strictement positifs $(a_0, b_0, c_0), (a_1, b_1, c_1), \dots, (a_{2025}, b_{2025}, c_{2025})$ vérifie les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} a_{i+1} &= a_i + \text{PGCD}(b_i, c_i), \\ b_{i+1} &= b_i + \text{PGCD}(c_i, a_i), \\ c_{i+1} &= c_i + \text{PGCD}(a_i, b_i) \end{cases}$$

pour tout entier i vérifiant $0 \leq i \leq 2024$.

Déterminer la plus petite valeur que peut prendre a_{2025} .

Le nombre $\text{PGCD}(x, y)$ désigne le plus grand commun diviseur de x et y .

SOLUTION DE L'EXERCICE 6

Réponse : La valeur minimale de $a_{2025} = 3 \cdot 2^{2025/3} = 3 \cdot 2^{675}$.

Le problème demande de déterminer le plus petit entier vérifiant une propriété, il contient donc nécessairement deux parties. D'une part, on montre que, quel que soit le triplet (a_0, b_0, c_0) de départ, a_{2025} est toujours supérieur à $3 \cdot 2^{675}$, cette étape s'appelle *l'analyse*. D'autre part, on donne un exemple de triplet (a_0, b_0, c_0) pour lequel $a_{2025} = 3 \cdot 2^{675}$, cette étape s'appelle *la construction*.

Analyse :

En testant l'énoncé pour des petits indices et des valeurs particulières de (a_0, b_0, c_0) , on s'aperçoit qu'à partir d'un certain rang k , les trois entiers du triplet (a_k, b_k, c_k) sont divisibles par 2. Cette observation nous laisse penser qu'à fortiori, à partir d'un certain rang, les entiers des triplets seront tous divisibles par une grande puissance de deux.

On note $v_2(x)$ la valuation 2-adique de x . On prouve le lemme suivant :

Lemme : Soit $k \geq 0$ un indice. Alors $v_2(\text{PGCD}(a_{k+3}, b_{k+3}, c_{k+3})) \geq 1 + v_2(\text{PGCD}(a_k, b_k, c_k))$.

Preuve : On pose $x = v_2(\text{PGCD}(a_k, b_k, c_k))$. Une récurrence immédiate donne que 2^x divise $\text{PGCD}(a_j, b_j, c_j)$ pour tout indice $j \geq k$. Pour tout $j \geq k$, on note $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ les entiers tels que $a_j = 2^x \alpha_j, b_j = 2^x \beta_j$ et $c_j = 2^x \gamma_j$. La suite $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ vérifie alors la même relation de récurrence que la suite (a_j, b_j, c_j) . Pour prouver le lemme, il suffit de montrer que $\alpha_{k+3}, \beta_{k+3}$ et γ_{k+3} sont pairs.

Le triplet $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ contient zéro, un ou deux nombres pairs. Comme la relation de récurrence est symétrique en les trois suites, on peut supposer que les éventuels nombres pairs du triplet $(\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ sont α_k et β_k . Les trois tableaux qui donnent les restes modulo 2 des suites α, β, γ aux rangs $k+1, k+2$ et $k+3$ en fonction des restes au rang k :

rang	α	β	γ
k	1	1	1
$k+1$	0	0	0
$k+2$	0	0	0
$k+3$	0	0	0

rang	α	β	γ
k	0	1	1
$k+1$	1	0	0
$k+2$	1	1	1
$k+3$	0	0	0

rang	α	β	γ
k	0	0	1
$k+1$	1	1	1
$k+2$	0	0	0
$k+3$	0	0	0

Pour compléter les tableaux, on a utilisé que le PGCD de deux nombres pairs vaut 0 mod 2 et que le PGCD d'un nombre impair avec un autre nombre vaut 1 mod 2. On voit que, quels que soient les restes au rang k , $\alpha_{k+3}, \beta_{k+3}$ et γ_{k+3} sont toujours pairs, ce qui conclut. $\square$

On revient à l'exercice. Notons pour tout indice $k \geq 0$, $x_k = v_2(\text{PGCD}(a_k, b_k, c_k))$. La suite (x_k) est croissante et vérifie $x_{k+3} \geq x_k + 1$. Par récurrence immédiate, on déduit que $x_{3k}, x_{3k+1}, x_{3k+2} \geq k$. Puisque $2^{x_k} \mid \text{PGCD}(a_k, b_k, c_k)$, alors $2^{x_k} \mid \text{PGCD}(b_k, c_k)$ et en particulier $2^{x_k} \leq \text{PGCD}(b_k, c_k)$. On a alors

$$\begin{aligned} a_{2025} &= a_0 + \sum_{k=0}^{2024} \text{PGCD}(b_k, c_k) \geq a_0 + \sum_{k=0}^{2024} 2^{x_k} = a_0 + \sum_{k=0}^{674} (2^{x_{3k}} + 2^{x_{3k+1}} + 2^{x_{3k+2}}) \\ &\geq a_0 + 3 \sum_{k=0}^{674} 2^k = a_0 + 3(2^{675} - 1). \end{aligned}$$

D'autre part, comme $x_{2025} \geq 675$ et $2^{x_{2025}} \mid a_{2025}$, on déduit que a_{2025} est un multiple de 2^{675} supérieur à $3 \cdot 2^{675} - 3$. Ainsi, $a_{2025} \geq 3 \cdot 2^{675}$.

Construction :

Pour réaliser la construction, on veut des égalités dans les inégalités de l'analyse. On souhaite donc $a_{3k} = 3 \cdot 2^k$ et $x_{3k} = x_{3k+1} = x_{3k+2} = k$ pour tout indice k . Les tableaux de congruence de l'analyse suggèrent qu'il faut pour cela qu'exactement un des nombres $v_2(b_{3k}), v_2(c_{3k})$ soit égal à k . Le tâtonnement permet alors d'obtenir la construction suivante.

On pose $(a_0, b_0, c_0) = (3, 5, 6)$. On vérifie que $(a_3, b_3, c_3) = (2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 2 \cdot 6)$ et une récurrence immédiate donne $(a_{3k}, b_{3k}, c_{3k}) = (2^k \cdot 3, 2^k \cdot 5, 2^k \cdot 6)$. On trouve alors bien $a_{2025} = 3 \cdot 2^{675}$.

Remarque : Une autre construction possible part du triplet $(a_0, b_0, c_0) = (3, 4, 9)$, avec une preuve similaire.

Commentaire des correcteurs

Cet exercice difficile a été entièrement résolu par 8 élèves : bravo à eux ! Une fois n'est pas coutume, la phase de construction, bien qu'élémentaire, s'est avérée difficile, au point que la trouver sans avoir déjà effectué une partie substantielle du travail d'analyse (disant que les valuations 2-adiques devaient augmenter toutes les 3 étapes) était quasiment impossible. Par ailleurs, les correcteurs se sont étonnés de constater que plus de la moitié des élèves ayant démontré que 2^{675} divisait a_{2025} et que $a_{2025} \geq 3 \times 2^{675} + a_0 - 3$ aient eu l'idée de procéder à une laborieuse disjonction de cas sur la valeur de a_0 au lieu d'observer immédiatement que $a_{2025} > 2 \times 2^{675}$, et donc que $a_{2025} \geq 3 \times 2^{675}$. Cela montre bien qu'il est à la fois pertinent et difficile de prendre du recul sur les problèmes que l'on étudie, mais que le jeu peut assurément en valoir la chandelle.

Exercice 7. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dans lequel $\widehat{ADC} > 90^\circ$. On suppose qu'il existe des points X et Y sur le segment $[AC]$ tels que

$$\widehat{ADX} = \widehat{YDC} = 90^\circ, \quad \widehat{CAD} = \widehat{CBX} \quad \text{et} \quad \widehat{DCA} = \widehat{YBA}.$$

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle BXY . On suppose que O n'est pas sur la médiatrice du segment $[AC]$. La parallèle à (AC) passant par O coupe la médiatrice du segment $[AC]$ au point R .

Montrer que la droite (OR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{DRB}$.

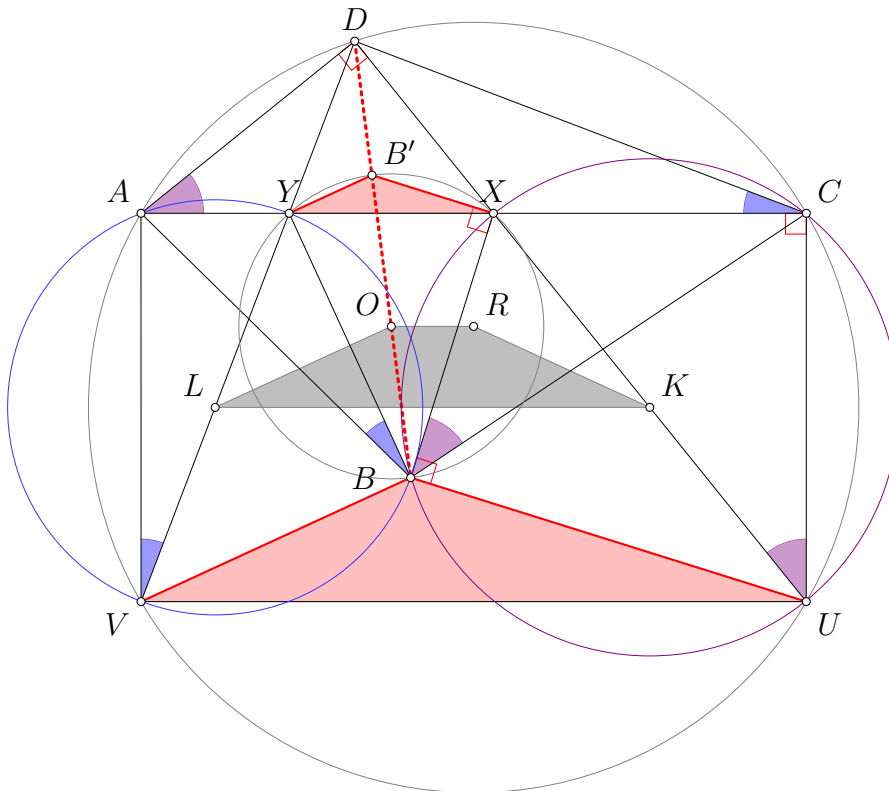
SOLUTION DE L'EXERCICE 7

Dans la suite, pour tout triangle ABC , on notera $\mathcal{C}_{ABC}$ son cercle circonscrit.

Commençons par décrire comment tracer la figure. Dans cet exercice, trouver comment tracer la figure exacte conduit à introduire des points supplémentaires, qui sont en fait utiles pour la résolution.

Face à des hypothèses d'angles, il peut être utile d'introduire des points intermédiaires. Par exemple, pour exploiter l'égalité $\widehat{CAD} = \widehat{CBX}$, on peut introduire le second point U d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{CAD}$ et $\mathcal{C}_{CBX}$, puisque celui-ci satisfait $\widehat{XUC} = \widehat{XBC} = \widehat{CAD} = \widehat{CUD}$, ce qui implique que D, X et U sont alignés. Comme en plus $90^\circ = \widehat{ADX} = \widehat{ADU} = \widehat{ACU}$, le segment $[AU]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_{CAD}$.

On peut donc tracer la figure comme suit : on place A, D et C , on construit U le point diamétralement opposé à A dans $\mathcal{C}_{CAD}$ et V le point diamétralement opposé à C dans $\mathcal{C}_{CAD}$. On construit alors X et Y comme les points d'intersection respectifs de (DU) et (DV) avec (AC) . Enfin, on construit B comme le bon point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{XCU}$ et $\mathcal{C}_{YAV}$.



Notons U le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{BCX}$ et $\mathcal{C}_{ACD}$ et V le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{ABY}$ et $\mathcal{C}_{ADC}$. D'après les hypothèses d'angles, $\widehat{DUC} = \widehat{DAC} = \widehat{XBC} = \widehat{XUC}$, donc les points D, X et U sont alignés. De la même manière, les points D, Y et V sont alignés.

On note K et L les centres des cercles $\mathcal{C}_{BCX}$ et $\mathcal{C}_{ABY}$. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{XCU} = \widehat{ACU} = \widehat{ADU} = \widehat{ADX} = 90^\circ$. On déduit que le segment $[XU]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}_{XCB}$, de sorte que les points D, X, K et U sont alignés. Il en est de même des points D, Y, L et V . On déduit également que le quadrilatère $ACUV$, dont les deux diagonales sont des diamètres de $\mathcal{C}_{ACD}$, est un rectangle.

La suite du problème se décompose en plusieurs étapes.

Étape 1 : Les points D, O et B sont alignés.

On note B' le symétrique du point B par rapport au point O . Le segment $[BB']$ est donc un diamètre du cercle $\mathcal{C}_{BXY}$. Puisque $\widehat{UBX} = 90^\circ = \widehat{B'XB}$, les segments $[BU]$ et $[B'X]$ sont parallèles. Il en est de même des segments $[YB']$ et $[VB]$. Comme en plus (UV) et (XY) sont parallèles, les triangles UBV et $XB'Y$ sont homothétiques. Les droites (UX) , (VY) et (BB') sont alors concourantes en le centre de cette homothétie. On déduit que la droite (BB') passe par D , ce qui implique que D, O et B sont alignés.

Étape 2 : Si R appartient à $\mathcal{C}_{OKL}$, alors (OR) est la bissectrice de $\widehat{DRB}$.

Comme O, K et L sont les milieux des segments $[BB']$ et $[XU]$ et $[YV]$, on a les parallélismes $(KL) \parallel (UV) \parallel (XY)$, $(OK) \parallel (BU)$ et $(OL) \parallel (BV)$. D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{KB}{KD} = \frac{KU}{KD} = \frac{OD}{OB} = \frac{LV}{LD} = \frac{LB}{LD}.$$

On déduit que les points K et L appartiennent au cercle d'Apollonius du triplet de points B, O, D , c'est-à-dire au cercle correspondant à l'ensemble des points P tels que $PB/PD = OD/OB$.

Ainsi, si R est sur ce cercle, R vérifie également $RD/RB = OD/OB$. Le théorème de la bissectrice permet alors de conclure que la droite (OR) est la bissectrice de $\widehat{DRB}$.

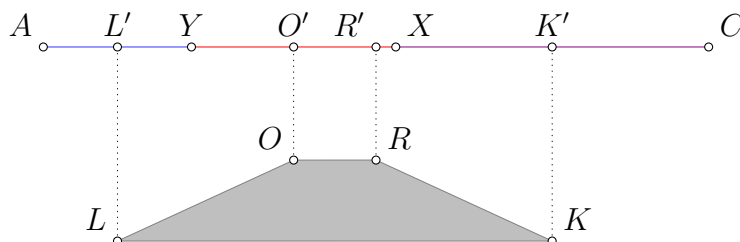
Étape 3 : Les points O, R, K et L sont cocycliques.

Puisque les droites (OR) et (KL) sont parallèles à (XY) , le quadrilatère $ORKL$ est un trapèze. Il suffit dès lors de montrer qu'il s'agit d'un trapèze isocèle.

Notons K', R', O' et L' les projetés orthogonaux respectifs des points K, R, O et L sur la droite (AC) . Il s'agit également des milieux respectifs des segments $[CX]$, $[AC]$, $[XY]$ et $[AY]$. On a

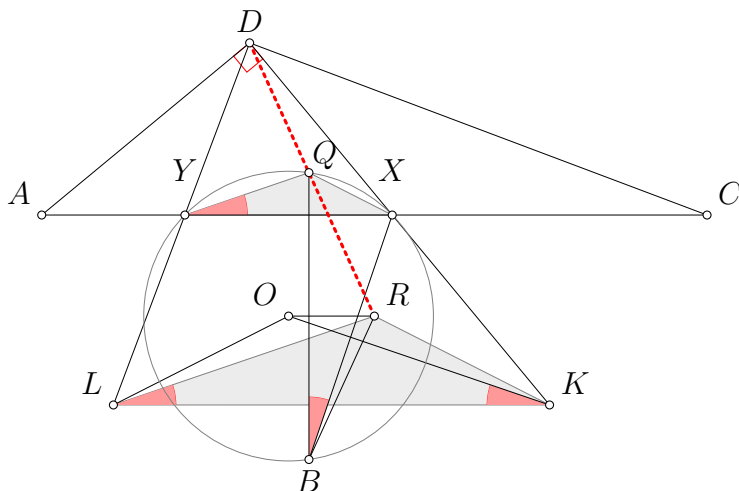
$$K'R' = \frac{1}{2}AC - \frac{1}{2}XC = \frac{1}{2}AX = \frac{1}{2}AY + \frac{1}{2}YX = L'O'.$$

Puisque (OR) et (KL) sont parallèles à (AC) cette égalité implique que $KR = OL$. Que les segments $[KR]$ et $[OL]$ soient les côtés ou les diagonales du trapèze, cette égalité implique que le trapèze est isocèle.



SOLUTION N°2

Cette solution est une variante de la solution 1. Dans cette solution, on introduit également les points U, V, K et L . On note Q le symétrique du point B par rapport à la droite (OR) . Comme $OQ = OB$, le point Q est sur $\mathcal{C}_{BXY}$. Il suffit dès lors de montrer que les points D, Q et R sont alignés, puisque cela implique alors $\widehat{DRO} = \widehat{QRO} = \widehat{BRO}$. Pour cela, les arguments sur Q sont similaires aux arguments sur B' dans la solution précédente.



Étape A : Le quadrilatère $ORKL$ est un trapèze isocèle.

Il s'agit de l'étape 3 de la solution 1.

Étape B : Les triangles QXY et RKL sont semblables.

Comme la droite (BQ) est perpendiculaire à (OR) , elle est perpendiculaire à (XY) . D'autre part, comme (OK) est la médiatrice de $[BX]$, les droites (OK) et (BX) sont également perpendiculaires. Il en résulte que $\widehat{QBX} = \widehat{OKL}$. On déduit, avec le théorème de l'angle inscrit et d'après l'étape A,

$$\widehat{QYX} = \widehat{QBX} = \widehat{OKL} = \widehat{RLK}.$$

On obtient de même que $\widehat{QXY} = \widehat{RKL}$.

Étape C : Conclusion.

Puisque (LK) et (XY) sont parallèles, l'étape B implique que les triangles QXY et RKL sont homothétiques. Le centre de l'homothétie correspond au point d'intersection des trois droites (KX) , (LY) et (RQ) , à savoir le point D . Ceci justifie que les points R, Q et D sont alignés.

Commentaire des correcteurs

C'était un exercice difficile et aucun élève ne l'a résolu complètement. Certains élèves ont néanmoins pensé à introduire les points permettant de construire une figure correcte.