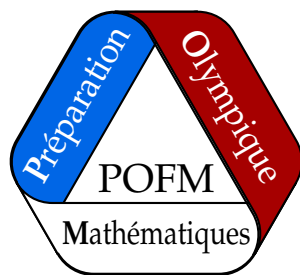


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 25 MARS 2026

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Déterminer tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs pour lesquels l'entier $ab + bc + ca$ est un nombre premier et un diviseur de $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1

Réponse : Le seul triplet solution est $(1, 1, 1)$.

Soit (a, b, c) un triplet solution. On note $p = ab + bc + ca$. L'hypothèse de l'énoncé implique que

$$p \mid a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = (ab + bc + ca)^2 - 2(ab \times bc + bc \times ca + ca \times ab) = p^2 - 2abc(a + b + c).$$

On déduit que p divise $2abc(a + b + c)$. Puisque $a, b, c \geq 1$, on a $p \geq 3$ et $p > a, b, c$. Ainsi, puisque p est premier, il est premier avec $2, a, b$ et c . D'après le lemme de Gauss, on déduit que $p \mid a + b + c$ et en particulier $p \leq a + b + c$.

Or, puisque $a, b, c \geq 1$, on a

$$p = ab + bc + ca \geq a \times 1 + b \times 1 + c \times 1 = a + b + c.$$

On a donc égalité dans les inégalités précédentes, et on déduit que $a = b = c = 1$.

Réciproquement, si $(a, b, c) = (1, 1, 1)$, alors $ab + bc + ca = 3$ est bien un nombre premier qui divise $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3$, donc il s'agit bien d'un triplet solution.

Commentaire des correcteurs

L'exercice est plutôt bien résolu. Il s'agissait de manipuler les quantités de l'énoncé pour trouver une relation de divisibilité plus exploitable : l'énoncé faisant apparaître $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$, il était judicieux de penser à calculer $(ab + bc + ca)^2$ puis chercher une combinaison linéaire astucieuse. De nombreux élèves aboutissent à la bonne forme, à savoir $2abc(a + b + c)$, mais ne pensent pas à la factoriser, ce qui devrait être un réflexe quand on travaille avec des divisibilités. En effet, cela permettait ici d'appliquer le lemme d'Euclide et d'avancer dans l'exercice. On regrette que de trop nombreux élèves affirment que $ab + bc + ca$ ne peut pas diviser 2 ou a par exemple sans donner d'argument. De même, on attendait un argument pour justifier soigneusement que $a + b + c \leq ab + bc + ca$ avec égalité uniquement pour $(1, 1, 1)$. Il est également à noter que très peu d'élèves ont pensé à vérifier leur solution, notamment en calculant explicitement $ab + bc + ca$ et en affirmant que 3 est bien un nombre premier : cela n'a pas été pénalisé cette fois-ci, mais aurait tout aussi bien pu coûter un point.

Exercice 2. Soient a, b, c et d des entiers positifs ou nuls tels que $a > b > c > d$ et $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 < 2025$. Déterminer la plus grande valeur que peut prendre $a + b + c + d$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2

Réponse : La plus grande valeur que peut prendre $a + b + c + d$ est 1010.

Pour montrer que 1010 est le plus grand réel demandé par l'énoncé, il y a nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que $a + b + c + d \geq 1010$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on donne un exemple de quatre entiers vérifiant les conditions de l'énoncé et tels que $a + b + c + d = 1010$, cette étape s'appelle *la construction*.

Analyse : Puisque $a > b > c > d$ et que a, b, c et d sont des entiers, on a $a \geq b+1 \geq c+2 \geq d+3$. En particulier $a - c \geq 2$ et $b - d \geq 2$. Puisque $a^2 + b^2 - c^2 - d^2$ est entier, la contrainte implique que

$$2024 \geq (a^2 - c^2) + (b^2 - d^2) = (a - c)(a + c) + (b - d)(b + d) \geq 2(a + c) + 2(b + d) = 2(a + b + c + d).$$

On a donc $a + b + c + d \leq 1012$.

En cherchant le cas d'égalité, on se rend compte que cette valeur n'est pas atteignable. Il faut donc raffiner l'inégalité ci-dessus. On distingue plusieurs cas :

➤ Si $a - c = 2$ et $b - d = 2$, alors puisque $a > b > c = a - 2$, on a que $b = a - 1$. Il vient que $(a, b, c, d) = (a, a - 1, a - 2, a - 3)$. On a donc $a + b + c + d = 4a - 10$. En particulier, $a + b + c + d \equiv 2 \pmod{4}$, et comme $a + b + c + d \leq 1012$, on obtient que $a + b + c + d \leq 1010$.

➤ Si $a - c \geq 3$, alors l'inégalité ci-dessus implique

$$2024 \geq 3(a + c) + 2(b + d) = a + c + 2(a + b + c + d),$$

et $a + b + c + d \leq 1012 - \frac{a + c}{2}$. Comme $a + c \geq 2c + 3 \geq 5$, on trouve $a + b + c + d < 1009$.

➤ Si $b - d \geq 3$, alors on a de même

$$2024 \geq 2(a + c) + 3(b + d) = b + d + 2(a + b + c + d),$$

et $a + b + c + d \leq 1012 - \frac{b + d}{2}$. Comme $a + c \geq 2d + 3 \geq 5$, on trouve $a + b + c + d < 1009$.

Dans tous les cas, on a $a + b + c + d \leq 1010$, ce qui achève l'analyse.

Synthèse :

Réciproquement, en posant $(a, b, c, d) = (254, 253, 252, 251)$, on a bien $a + b + c + d = 1010$ et ce triplet respecte bien la condition puisque

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = (a - c)(a + c) + (b - d)(b + d) = 2 \times (254 + 252) + 2 \times (253 + 251) = 2020 < 2025.$$

SOLUTION N°2

On propose une autre preuve pour l'analyse.

De même que dans la première solution, l'encadrement $a > b > c > d$ implique que $a \geq b + 1 \geq c + 2 \geq d + 3$. On a donc en premier lieu $a + b + c + d \leq a + 3b - 3$.

D'autre part, la contrainte de l'énoncé implique que

$$(b + 1)^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 < 2025 + c^2 + d^2 \leq 2025 + (b - 1)^2 + (b - 2)^2.$$

Après développement et simplification, cette inégalité devient $8b < 2030$. Ceci implique que $b < \frac{2030}{8}$, et puisque b est un entier, on déduit que $b \leq 253$.

En reprenant l'inégalité de la contrainte, on trouve que

$$a^2 < 2025 - b^2 + (b - 1)^2 + (b - 2)^2 = 2030 + b^2 - 6b = 2021 + (b - 3)^2.$$

En utilisant que $b \leq 253$, on déduit que

$$a^2 \leq 2021 + 250^2 < 10 \cdot 250 + 5^2 + 250^2 = 255^2,$$

et donc que $a \leq 254$. On a alors $a + 3b - 3 \leq 254 + 3 \times 253 - 3 = 1010$.

On a donc $a + b + c + d \leq a + 3b - 3 \leq 1010$.

Remarque 1 : On aurait également pu formuler les choses de la manière suivante. On remarque que si (a, b, c, d) vérifie $a < b < c < d$ et la contrainte $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 < 2025$, alors le couple $(a, b, b - 1, b - 2)$ la vérifie également. De plus, remplacer c et d par $b - 1$ et $b - 2$ augmente la somme $a + b + c + d$. On peut donc supposer, quitte à faire ce remplacement, que $c = b - 1$ et $d = b - 2$. On peut donc supposer que $c = b - 1$ et $d = b - 2$, et réinjecter cette égalité dans le problème.

Remarque 2 : Après avoir ramené le problème à trouver a et b tels que $a^2 < 2021 + (b - 3)^2$ et maximisant $a + 3b - 3$, on peut terminer comme suit. Si (a, b) vérifie l'inégalité $a^2 < 2021 + (b - 3)^2$, alors il en est de même du couple $(a - 1, b + 1)$. De plus, remplacer (a, b) par $(a - 1, b + 1)$ augmente strictement la somme $a + 3b - 3$. On déduit que si $a + 3b - 3$ est maximal, un tel remplacement n'est pas possible, c'est-à-dire que $a - 1 \leq b + 1$, soit $a \leq b + 2$ et $a = b + 1$ ou $a = b + 2$.

Si $a = b + 1$, l'inégalité $a^2 < 2021 + (b - 3)^2$ devient après développement et simplification $8b < 2029$, ce qui implique que $b \leq 253$. On a alors $a + 3b - 3 \leq 254 + 3 \times 253 - 3 = 1010$.

Si $a = b + 2$, l'inégalité $a^2 < 2021 + (b - 3)^2$ devient après développement et simplification $10b < 2026$, soit $b \leq 202$, ce qui conduit à $a + 3b - 3 \leq 203 + 3 \times 202 - 3 = 806$.

On retrouve bien que la valeur maximum est 1010.

Commentaire des correcteurs

Cet exercice a été très mal réussi : seules une dizaine d'élèves ont une solution essentiellement complète.

- Le fait que a, b, c, d étaient entiers était crucial ici. Les élèves ayant oublié ce fait, et fait des inégalités classiques ont obtenu 0 point, car cela n'aboutissait pas à une solution.
- Un certain nombre d'élève n'ont pas trouvé la solution optimale : il est dommage de ne pas avoir cherché des nombres consécutifs vérifiant $a^2 + b^2 - c^2 - d^2 < 2025$ et maximisant $a + b + c + d$. Trop d'élèves ont affirmé directement que le mieux était d'avoir a, b, c, d consécutifs sans aucun réel argument. Nous vous invitons à voir la solution 2 ou la solution 3 pour voir comment partir sur cette idée proprement, sans juste supposer cela. Toute copie de ce type avait au plus 2 points, car le cas général est bien plus compliqué que cela.
- Certains élèves ont tenté de justifier cela par une technique de rapprochement : par exemple, en enlevant 1 à a et rajoutant 1 à c ou d . Ceci pouvait marcher. Mais la plupart du temps, les élèves ayant fait cela ont oublié la contrainte $a > b > c > d$. Par exemple, si $a = b + 1 = c + 2$ ou $b = c + 1 = d + 2$, on ne peut plus effectuer de telles opérations.

Exercice 3. Anna et Eva jouent au jeu suivant. Au début du jeu, Anna choisit un entier a dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ et Eva choisit un entier b différent de a dans ce même ensemble. Ensuite, chacune à leur tour, en commençant par Anna, les deux joueuses choisissent un entier dans l'ensemble $\{a, b\}$ et l'écrivent au tableau. Si, après le tour de l'une d'entre elles, la somme de tous les nombres écrits au tableau est divisible par 1111, la dernière joueuse à avoir joué est déclarée gagnante.

Déterminer si l'une des deux joueuses possède une stratégie gagnante, et si oui laquelle.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3

Réponse : Anna possède une stratégie gagnante.

Anna peut gagner en choisissant $a = 1$ ou en choisissant $a = 2$. On détaille dans les deux solutions chacune des deux stratégies. Dans une remarque finale, on montre que si Anna choisit un autre entier que 1 ou 2, c'est Eva qui dispose d'une stratégie gagnante.

Dans la suite, on note A_n la somme des entiers écrits au tableau après le n -ème tour d'Anna. On note B_n la somme des entiers écrits au tableau après le n -ème tour d'Eva.

Une fois les entiers a et b choisis, Anna va appliquer la stratégie suivante : elle choisit un entier $A_1 \in \{a, b\}$ puis, à chacun de ses tours, elle choisit l'entier de $\{a, b\}$ qu'Eva n'a pas choisi au tour précédent. On a alors $A_{n+1} = A_n + (a+b)$ pour tout n et, de proche en proche, $A_n = A_1 + (n-1)(a+b)$, donc la suite (A_n) parcourt l'ensemble des entiers naturels congrus à A_1 modulo $(a+b)$. L'idée est alors pour Anna de choisir A_1 de sorte que 1111, 2222 ou 3333 soit congru à A_1 modulo $(a+b)$ (ce qui implique qu'au bout d'un certain tour n , A_n est égal à l'un de ces multiples).

Puisque $B_n = A_n + a$ ou $B_n = A_n + b$ pour tout entier n , on a que $B_n \equiv A_1 + a \pmod{a+b}$ ou $B_n \equiv A_1 + b \pmod{a+b}$. Pour s'assurer qu'Eva n'a pas pu écrire un multiple de 1111 plus petit avant Anna, il suffit donc de vérifier que ces multiples ne sont pas congrus à $A_1 + a$ ou $A_1 + b$ modulo $(a+b)$. On notera en particulier que si Anna parvient à écrire 1111, Eva n'aura pas pu écrire un multiple de 1111 avant.

Montrons que si Anna choisit $a = 1$, elle peut appliquer la stratégie ci-dessus pour gagner. On récapitule dans le tableau suivant la valeur de A_1 à choisir en fonction de la valeur de b choisie par Eva :

b	$a+b$	A_1	valeur de A_n	Conclusion
2	3	1	$3(n-1) + 1$	$A_{371} = 3 \times 370 + 1 = 1111$, donc Anna gagne.
3	4	3	$4(n-1) + 3$	$A_{278} = 4 \times 277 + 3 = 1111$, donc Anna gagne.
4	5	1	$5(n-1) + 1$	$A_{223} = 5 \times 222 + 1 = 1111$, donc Anna gagne.
5	6	1	$6(n-1) + 1$	$A_{186} = 6 \times 185 + 1 = 1111$, donc Anna gagne.
6	7	1	$7(n-1) + 1$	$3333 \equiv 1 \pmod{7}$, donc un A_n vaut 3333. Or $1111 \equiv 5 \pmod{7}$, $2222 \equiv 3 \pmod{7}$, tandis que $B_n \equiv 0, 2 \pmod{7}$ pour tout n , donc Anna gagne.
7	8	7	$8(n-1) + 7$	$A_{229} = 8 \times 128 + 7 = 1111$, donc Anna gagne.
8	9	8	$9(n-1) + 8$	$2222 \equiv 8 \pmod{9}$ donc un A_n vaut 2222. Or $1111 \equiv 4 \pmod{9}$, tandis que $B_n \equiv 0, 7 \pmod{9}$ pour tout n , donc Anna gagne.

SOLUTION N°2

Montrons que si Anna choisit $a = 2$, elle peut également appliquer la stratégie ci-dessus pour gagner. On récapitule dans le tableau suivant la valeur de A_1 à choisir en fonction de la valeur de b choisie par Eva.

b	$a + b$	A_1	valeur de A_n	Conclusion
1	3	1	$3(n - 1) + 1$	$A_{371} = 3 \times 370 + 3 = 1111$, donc Anna gagne.
3	5	2	$5(n - 1) + 2$	$2222 \equiv 2 \pmod{5}$ donc un A_n vaut 2222. Or $1111 \equiv 1 \pmod{5}$, tandis que $B_n \equiv 0, 3 \pmod{5}$ pour tout n , donc Anna gagne.
4	6	2	$6(n - 1) + 2$	$2222 \equiv 2 \pmod{5}$ donc un A_n vaut 2222. Or $1111 \equiv 1 \pmod{6}$, tandis que $B_n \equiv 0, 4 \pmod{6}$ pour tout n , donc Anna gagne.
5	7	5	$7(n - 1) + 5$	$A_{159} = 7 \times 158 + 5 = 1111$, donc Anna gagne.
6	8	6	$8(n - 1) + 6$	$2222 \equiv 6 \pmod{8}$, donc un A_n vaut 2222. Or $1111 \equiv 7 \pmod{8}$, tandis que $B_n \equiv 0, 4 \pmod{8}$ pour tout n , donc Anna gagne.
7	9	7	$9(n - 1) + 7$	$4444 \equiv 7 \pmod{9}$, donc un A_n vaut 4444. Or $1111 \equiv 4 \pmod{9}$, $2222 \equiv 8 \pmod{9}$, $3333 \equiv 3 \pmod{9}$ tandis que $B_n \equiv 0, 5 \pmod{8}$ pour tout n , donc Anna gagne.
8	10	8	$10(n - 1) + 2$	$2222 \equiv 2 \pmod{10}$ donc un A_n vaut 2222. Or $1111 \equiv 1 \pmod{10}$, tandis que $B_n \equiv 0, 4 \pmod{10}$ pour tout n , donc Anna gagne.

Remarque : Si Anna choisit un autre entier a , alors Eva dispose d'une stratégie gagnante. En effet, lorsque $a \geq 3$, Eva peut choisir l'entier $b = 11 - a$. Puis, lors de son tour, Eva choisit l'entier de $\{a, b\}$ qu'Anna n'a pas choisi au tour précédent. De cette façon, pour tout entier n , $B_n = (a + b)n = 11n$. Ainsi, $B_{101} = 101 \times 11 = 1111$, ce qui permet à Eva de gagner.

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été plutôt réussi pour sa position. Quelques commentaires :

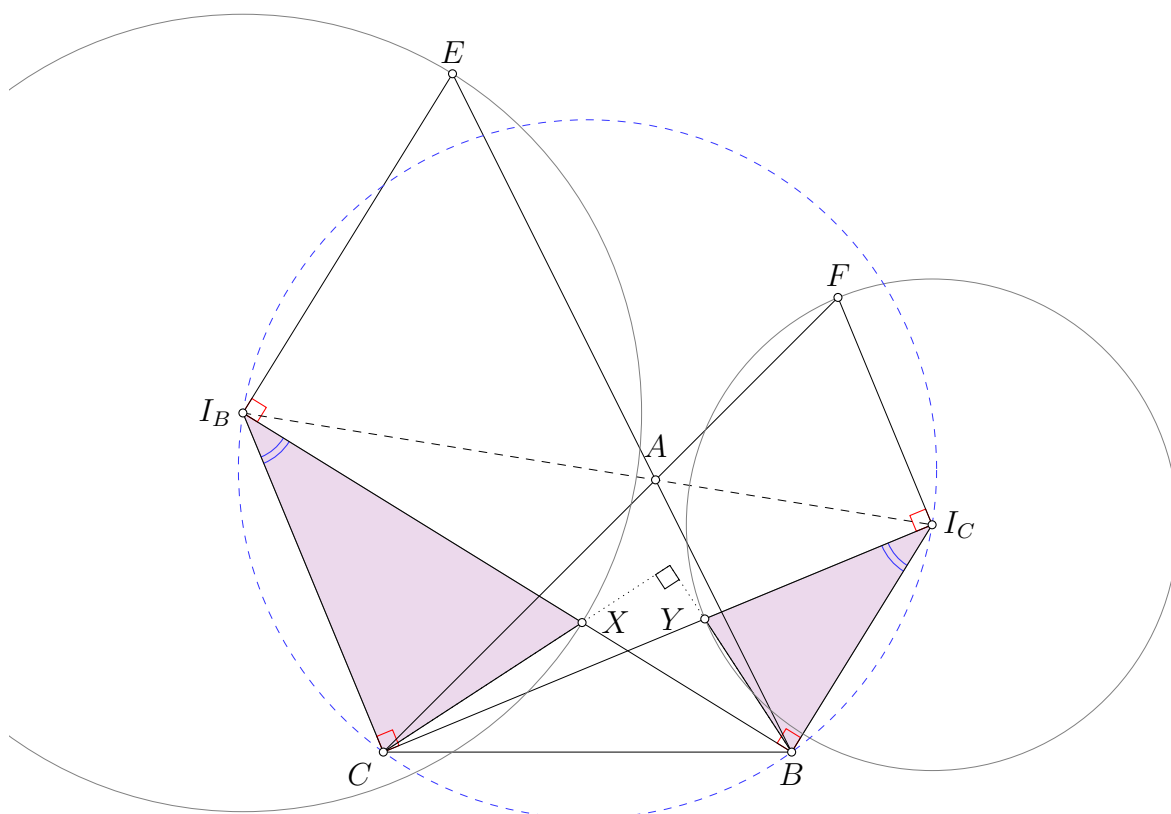
- Certains élèves ont mal lu l'énoncé, par exemple en ne comprenant pas qu'il n'est pas possible d'écrire tous les nombres entre 1 et 8 au troisième tour. Lire plusieurs fois l'énoncé, surtout pour un problème de combinatoire, est absolument nécessaire.
- Ici, il fallait comprendre qui pouvait ou non gagner. Le premier pas était de voir si pour certains a , Eva gagnait à coup sûr. Notez que pour cela, il ne faut pas traiter tous les cas (a, b) , puisqu'Eva étant maline, elle peut choisir en fonction de a le b qui l'arrange le plus : par exemple, pour a entre 3 et 8, il suffisait d'étudier un seul b . Faire cela proprement rapportait 2 points (non cumulables avec le reste), ce qui était généreux.
- Montrer qu'Anna gagnait pour 1 ou pour 2 était long et nécessitait d'être méticuleux. En effet, les cas n'étaient pas du tout tous similaires (cf le tableau présent dans la correction). Il fallait à la fois donner une stratégie pour Anna (en indiquant le premier chiffre choisi), montrer qu'elle tombait sur un multiple de 1111 avec un vrai argument, en indiquant le multiple concerné, et montrer qu'avec cette stratégie, Eva ne tombait pas sur les multiples précédents (ce qui était automatique lorsqu'Anna tombait sur 1111, mais n'était pas toujours vérifié). Il était important d'être précis sur ces différents cas, surtout les cas où Anna ne tombait pas sur 1111.

Exercice 4. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. On note I_B et I_C les centres respectifs des cercles B -exinscrit et C -exinscrit au triangle ABC . Soit E un point sur la droite (AB) tel que $\widehat{BI_BE} = 90^\circ$ et soit F un point sur la droite (AC) tel que $\widehat{CI_CF} = 90^\circ$. Le cercle de centre I_B et de rayon I_BE coupe le segment $[BI_B]$ en X et le cercle de centre I_C de rayon I_CF coupe le segment $[CI_C]$ en Y .

Montrer que les droites (BY) et (CX) sont perpendiculaires.

Le cercle B -exinscrit du triangle ABC est le cercle tangent au segment $[AC]$ et aux demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ en des points en dehors des segments $[BA]$ et $[BC]$. Le cercle C -exinscrit est défini de façon similaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4



Tout d'abord, la droite $(I_B I_C)$ est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$, les points I_B , A et I_C sont alignés. Ensuite, puisque les droites (BI_B) et (BI_C) correspondent respectivement à la bissectrice intérieure et à la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ABC}$, on a $\widehat{I_B B I_C} = 90^\circ$. On a de même $\widehat{I_B C I_C} = 90^\circ$. Les points I_B , C , B et I_C sont donc cocycliques. On déduit que $\widehat{CI_C B} = \widehat{CI_B B}$.

On montre à présent que les triangles $I_B X C$ et $I_C B Y$ sont semblables. Pour cela, au vu de l'égalité d'angles précédente, il suffit de montrer l'égalité de rapports $\frac{I_B X}{I_B C} = \frac{I_C B}{I_C Y}$.

Puisque les droites $(I_B E)$ et $(I_C B)$ sont perpendiculaires à (BI_B) , elles sont parallèles. Il en est de même pour les droites $(I_C F)$ et $(I_B C)$. Le théorème de Thalès implique donc

$$\frac{I_C B}{I_B E} = \frac{I_C A}{I_B A}, \quad \frac{I_C F}{I_B C} = \frac{I_C A}{I_B A}.$$

En combinant et en utilisant les égalités $I_C F = I_C Y$ et $I_B E = I_B X$, on trouve

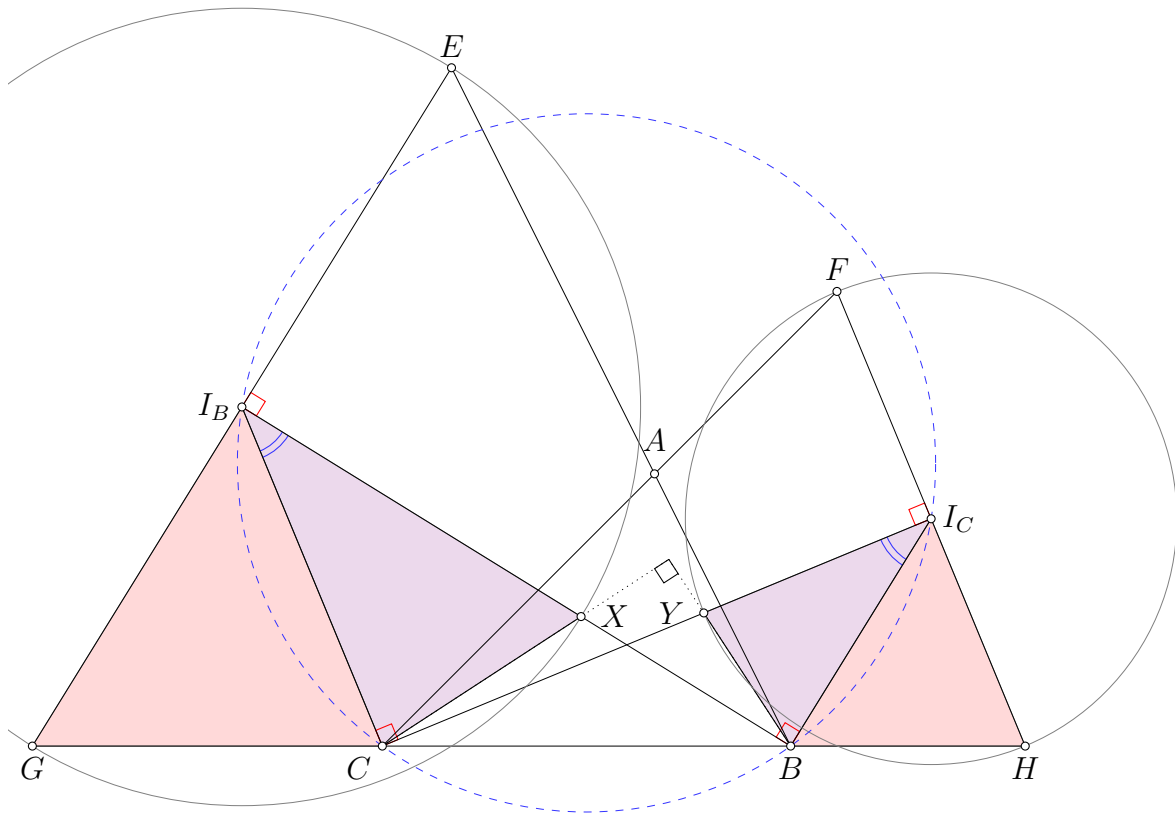
$$\frac{I_B X}{I_B C} = \frac{I_C F}{I_B C} = \frac{I_C A}{I_B A} = \frac{I_C B}{I_B E} = \frac{I_C B}{I_C Y}.$$

Ainsi, les triangles $I_B X C$ et $I_C B Y$ sont semblables. On peut alors conclure : si on note Z le point d'intersection des droites (BY) et (CX) , la similitude implique

$$\widehat{ZXB} + \widehat{ZBX} = \widehat{I_BXC} + \widehat{ZBX} = \widehat{YBI_C} + \widehat{YBX} = \widehat{I_CBI_B} = 90^\circ,$$

ce qui conduit bien à $\widehat{XZB} = 90^\circ$, comme voulu.

SOLUTION N°2



On propose une deuxième façon de montrer l'égalité de rapports $\frac{I_B X}{I_B C} = \frac{I_C B}{I_C Y}$, notamment qui ne nécessite pas de remarquer l'alignement des points I_B, A et I_C . Dans cette solution, on s'appuie sur la motivation suivante : lorsque l'on a un rayon d'un cercle, il est intéressant de le prolonger en un diamètre. Ceci incite à introduire deux nouveaux points G et H .

On note G le second point d'intersection de la droite (EI_B) avec le cercle de centre I_B de rayon $I_B E$ et H le second point d'intersection de la droite (FI_C) avec le cercle de centre I_C de rayon $I_C F$.

Les droites (BE) et (BC) sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, et les points E et G sont symétriques par rapport à I_B (et donc par rapport à l'axe $(I_B B)$). On déduit que les points B, C et G sont alignés sur le symétrique de la droite (BE) par rapport à l'axe $(I_B B)$. De même, les points B, C et H sont alignés.

Les droites (FH) et $(I_B C)$ sont perpendiculaires à la droite $(I_C C)$, donc elles sont parallèles. De même, les droites (EG) et $(I_C B)$ sont parallèles. On déduit es égalités d'angles

correspondants $\widehat{I_CHB} = \widehat{I_BCG}$ et $\widehat{I_BGC} = \widehat{I_CBH}$. Les triangles I_BGC et I_CBH sont donc semblables. On peut conclure à nouveau

$$\frac{I_BX}{I_BC} = \frac{I_BG}{I_BC} = \frac{I_CB}{I_CH} = \frac{I_CB}{I_CY}.$$

Commentaire des correcteurs

L'exercice de géométrie était en dernière position et assez difficile. Peu d'élèves l'ont abordé et aucun n'a reçu plus de 1 point. Le barème, assez sévère, s'est aligné sur celui des seniors. Une première étape, considérée comme classique, consistait à interpréter les centres des cercles ex-inscrits comme intersections de bissectrices plutôt que d'introduire les points de tangence (qui ont plutôt mené à de fausses pistes). Nous invitons les élèves à regarder le corrigé.

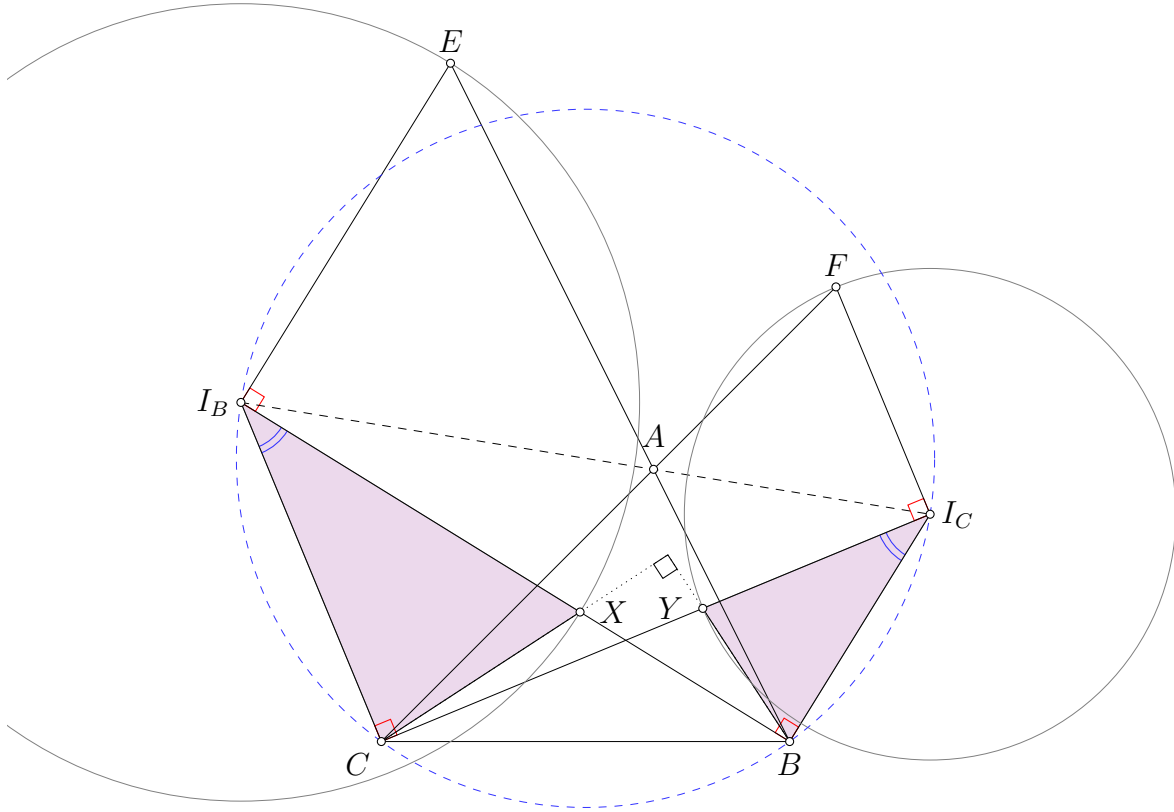
Énoncés Senior

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. On note I_B et I_C les centres respectifs des cercles B -exinscrit et C -exinscrit au triangle ABC . Soit E un point sur la droite (AB) tel que $\widehat{BI_BE} = 90^\circ$ et soit F un point sur la droite (AC) tel que $\widehat{CI_CF} = 90^\circ$. Le cercle de centre I_B et de rayon I_BE coupe le segment $[BI_B]$ en X et le cercle de centre I_C de rayon I_CF coupe le segment $[CI_C]$ en Y .

Montrer que les droites (BY) et (CX) sont perpendiculaires.

Le cercle B -exinscrit du triangle ABC est le cercle tangent au segment $[AC]$ et aux demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ en des points en dehors des segments $[BA]$ et $[BC]$. Le cercle C -exinscrit est défini de façon similaire.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5



Tout d'abord, la droite $(I_B I_C)$ est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{BAC}$, les points I_B , A et I_C sont alignés. Ensuite, puisque les droites (BI_B) et (BI_C) correspondent respectivement à la bissectrice intérieure et à la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ABC}$, on a $\widehat{I_B B I_C} = 90^\circ$. On a de même $\widehat{I_B C I_C} = 90^\circ$. Les points I_B , C , B et I_C sont donc cocycliques. On déduit que $\widehat{C I_C B} = \widehat{C I_B B}$.

On montre à présent que les triangles $I_B X C$ et $I_C B Y$ sont semblables. Pour cela, au vu de l'égalité d'angles précédente, il suffit de montrer l'égalité de rapports $\frac{I_B X}{I_B C} = \frac{I_C B}{I_C Y}$.

Puisque les droites $(I_B E)$ et $(I_C B)$ sont perpendiculaires à (BI_B) , elles sont parallèles. Il en est de même pour les droites $(I_C F)$ et $(I_B C)$. Le théorème de Thalèse implique donc

$$\frac{I_C B}{I_B E} = \frac{I_C A}{I_B A}, \quad \frac{I_C F}{I_B C} = \frac{I_C A}{I_B A}.$$

En combinant et en utilisant les égalités $I_C F = I_C Y$ et $I_B E = I_B X$, on trouve

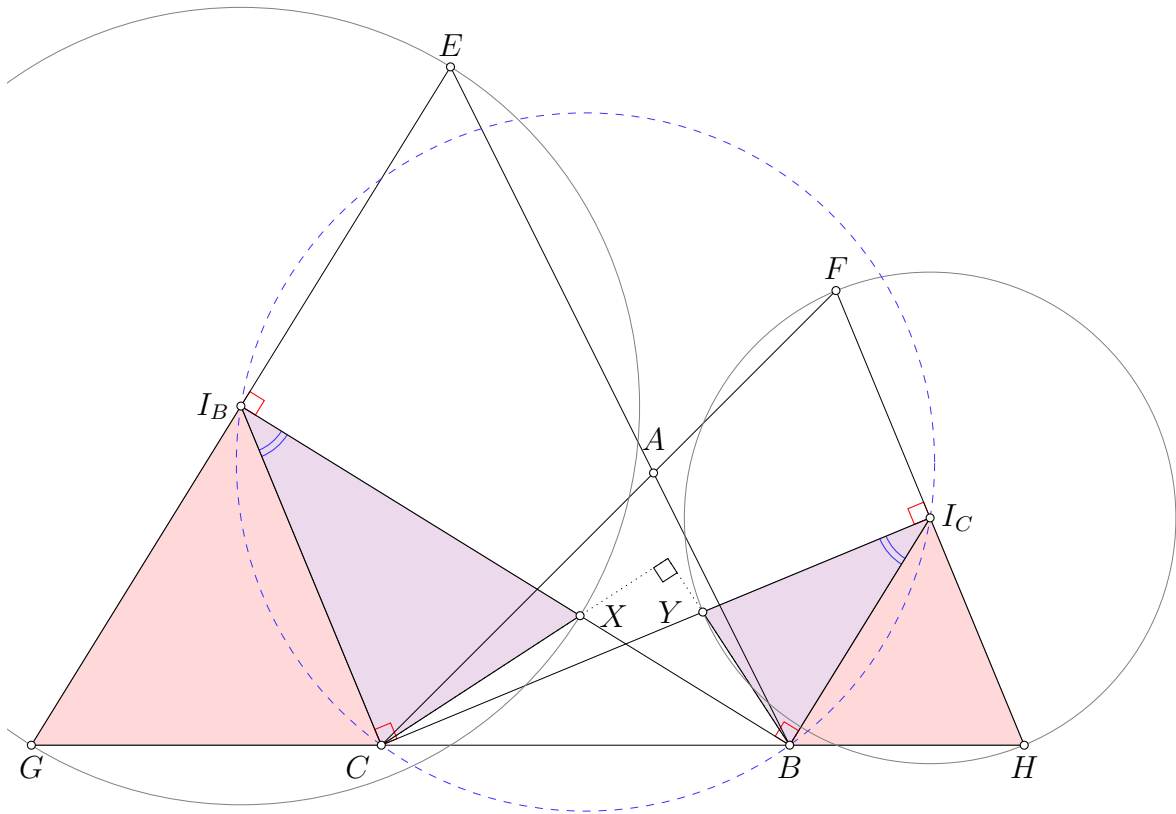
$$\frac{I_B X}{I_B C} = \frac{I_C F}{I_B C} = \frac{I_C A}{I_B A} = \frac{I_C B}{I_B E} = \frac{I_C B}{I_C Y}.$$

Ainsi, les triangles $I_B X C$ et $I_C B Y$ sont semblables. On peut alors conclure : si on note Z le point d'intersection des droites (BY) et (CX) , la similitude implique

$$\widehat{ZXB} + \widehat{ZBX} = \widehat{I_B X C} + \widehat{ZBX} = \widehat{Y B I_C} + \widehat{Y B X} = \widehat{I_C B I_B} = 90^\circ,$$

ce qui conduit bien à $\widehat{XZB} = 90^\circ$, comme voulu.

SOLUTION N°2



On propose une deuxième façon de montrer l'égalité de rapports $\frac{I_B X}{I_B C} = \frac{I_C B}{I_C Y}$, notamment qui ne nécessite pas de remarquer l'alignement des points I_B, A et I_C . Dans cette solution, on s'appuie sur la motivation suivante : lorsque l'on a un rayon d'un cercle, il est intéressant de le prolonger en un diamètre. Ceci incite à introduire deux nouveaux points G et H .

On note G le second point d'intersection de la droite (EI_B) avec le cercle de centre I_B de rayon $I_B E$ et H le second point d'intersection de la droite (FI_C) avec le cercle de centre I_C de rayon $I_C F$.

Les droites (BE) et (BC) sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, et les points E et G sont symétriques par rapport à I_B (et donc par rapport à l'axe $(I_B B)$). On

déduit que les points B, C et G sont alignés sur le symétrique de la droite (BE) par rapport à l'axe (I_BB) . De même, les points B, C et H sont alignés.

Les droites (FH) et (I_BC) sont perpendiculaires à la droite (I_CC) , donc elles sont parallèles. De même, les droites (EG) et (I_CB) sont parallèles. On déduit les égalités d'angles correspondants $\widehat{I_CHB} = \widehat{I_BCG}$ et $\widehat{I_BGC} = \widehat{I_CBH}$. Les triangles I_BGC et I_CBH sont donc semblables. On peut conclure à nouveau

$$\frac{I_BX}{I_BC} = \frac{I_BG}{I_BC} = \frac{I_CB}{I_CH} = \frac{I_CB}{I_CY}.$$

Commentaire des correcteurs

Problème plutôt difficile, mais tout de même réussi par un nombre satisfaisant d'élèves. La clé était de conjecturer que les triangles XI_CB et YI_CB étaient semblables, ce qui ensuite donnait la marche à suivre. Plusieurs points très intéressants pouvaient être introduits comme ceux de la solution 2 du corrigé. Quelques élèves ont proposé des solutions (ou ébauches) analytiques, certaines élégantes et astucieuses visant souvent à calculer le produit scalaire de $\vec{BY}$ et $\vec{CX}$ mais certains se sont perdus dans des calculs sans fin. Nous rappelons à cette occasion qu'une solution analytique non aboutie n'est pas récompensée.

Exercice 6. Soit $n \geq 1$ un entier strictement positif et soit $(a_1, \dots, a_n)$ un n -uplet d'entiers strictement positifs et deux à deux distincts. Une *inversion* est une couple (i, j) d'entiers tel que $1 \leq i < j \leq n$ et $a_i > a_j$. Une inversion est dite *impaire* si $j - i$ est impair. On note A le nombre d'inversions et B le nombre d'inversions impaires.

Montrer que $A \leq 5B$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6

La stratégie est de partitionner l'ensemble $\mathcal{A}$ des inversions en cinq sous-ensembles dont les cardinaux sont chacun inférieurs ou égaux à B .

On dira dans la suite qu'une inversion qui n'est pas impaire est *paire*. On considère les cinq ensembles suivants :

1. $\mathcal{B}_1$ l'ensemble des inversions impaires,
2. $\mathcal{B}_2$ l'ensemble des inversions (i, j) vérifiant $i \equiv j + 2 \pmod{4}$ et $a_i > a_{(i+j)/2}$,
3. $\mathcal{B}_3$ l'ensemble des inversions (i, j) vérifiant $i \equiv j + 2 \pmod{4}$ et $a_i < a_{(i+j)/2}$,
4. $\mathcal{B}_4$ l'ensemble des inversions (i, j) vérifiant $i \equiv j \pmod{4}$ et $a_i > a_{(i+j)/2-1}$,
5. $\mathcal{B}_5$ l'ensemble des inversions (i, j) vérifiant $i \equiv j \pmod{4}$ et $a_i < a_{(i+j)/2-1}$.

On note en outre $B_i = |\mathcal{B}_i|$ le cardinal de l'ensemble $\mathcal{B}_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4, 5$. Comme $B_1 = B$, on cherche désormais à montrer que $B_i \leq B$ pour tout indice $i \geq 2$.

i) On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}_2 & \longrightarrow & \mathcal{B}_1 \\ (i, j) & \longmapsto & (i, \frac{i+j}{2}) \end{array} .$$

La fonction f est injective : si $f(i, j) = f(i', j') = (i, \frac{i+j}{2}) = (i', \frac{i'+j'}{2})$, alors $i = i'$ puis $j = j'$ en comparant la première puis la deuxième coordonnée du couple. De plus, la paire $(i, \frac{i+j}{2})$ est bien une inversion à cause de la condition $a_i > a_{(i+j)/2}$ et est impaire à cause de la condition $i \equiv j + 2 \pmod{4}$. On déduit que $B_2 = |\mathcal{B}_2| \leq |\mathcal{B}_1| \leq B$.

ii) On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}_3 & \longrightarrow & \mathcal{B}_1 \\ (i, j) & \longmapsto & (\frac{i+j}{2}, j) \end{array} .$$

La fonction f est injective, de même que précédemment. La paire $(\frac{i+j}{2}, j)$ est bien une inversion puisque $a_j < a_i < a_{(i+j)/2}$ et est impaire à cause de la condition $i \equiv j + 2 \pmod{4}$. On déduit que $B_3 = |\mathcal{B}_3| \leq |\mathcal{B}_1| \leq B$.

iii) On considère à nouveau l'injection

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{B}_4 & \longrightarrow & \mathcal{B}_1 \\ (i, j) & \longmapsto & (i, \frac{i+j}{2} - 1) \end{array} .$$

La paire $(i, \frac{i+j}{2} - 1)$ est bien une inversion à cause de la condition $a_i > a_{(i+j)/2-1}$ et est impaire à cause de la condition $i \equiv j \pmod{4}$. On déduit que $B_4 = |\mathcal{B}_4| \leq |\mathcal{B}_1| \leq B$.

iv) On considère enfin l'injection

$$f: \mathcal{B}_4 \longrightarrow \mathcal{B}_1 \\ (i, j) \longmapsto \left(\frac{i+j}{2} - 1, j\right).$$

La paire $\left(\frac{i+j}{2} - 1, j\right)$ est bien une inversion puisque $a_j < a_i < a_{(i+j)/2-1}$ et est impaire à cause de la condition $i \equiv j \pmod{4}$. On déduit que $B_5 = |\mathcal{B}_5| \leq |\mathcal{B}_1| \leq B$.

La combinaison de ces inégalités permet de conclure.

SOLUTION N°2

On reprend les notations précédentes, et on propose ici un algorithme pour *marquer* les inversions, de sorte que :

1. à chaque étape de l'algorithme, si l'on marque k inversions paires, on marque au moins $k/2$ inversions impaires;
2. à la fin de l'algorithme, toute inversion paire a été marquée au moins une fois, et toute inversion impaire a été marquée au plus deux fois.

Notre processus est itératif : tant qu'il existe une permutation paire $(i, i + 2d)$ non marquée, on en choisit une de sorte que d soit maximal, puis on marque toutes les inversions $(i, i + k)$ ou $(i + k, i + 2d)$ pour lesquelles $1 \leq k \leq 2d$; chaque inversion $(i, i + k)$ sera marquée en rouge et chaque inversion $(i + k, i + 2d)$ sera marquée en bleu, une inversion pouvant supporter des marquages des deux couleurs.

La propriété 1 est bien vérifiée, car après avoir choisi une permutation paire $(i, i + 2d)$, on marque au plus $2d - 1$ permutations paires, tandis que l'on marque au moins une permutation impaire $(i, i + k)$ ou $(i + k, i + 2d)$ pour chacun des d entiers impairs $k \leq 2d$. En outre, chaque inversion impaire $(i, i + k)$ est marquée au plus une fois par couleur, ce qui démontre la propriété 2. En effet, par exemple, la première fois que l'on marque $(i, i + k)$ en rouge, on vient de choisir une inversion $(i, i + 2d)$ non marquée pour laquelle d est maximal. Dès lors, on marque instantanément toutes les inversions $(i, i + 2\delta)$, donc on ne pourra plus marquer de nouveau $(i, i + k)$ en rouge.

En conclusion des propriétés 1 et 2, si C désigne le nombre d'inversions paires, on a effectué au plus $2C$ marquages de permutations impaires, donc au plus $4C$ marquages de permutations paires, de sorte que $B \leq 4C$, donc que $A = B + C \leq 5B$.

Commentaire des correcteurs

Ce problème était très difficile, puisque seuls cinq élèves l'ont résolu. Pour plusieurs d'entre eux, il s'agissait seulement du premier ou du second problème de test qu'ils ont résolu dans l'année : les correcteurs se sont fort réjouis de constater que réussir un problème même difficile ne nécessite pas d'avoir déjà résolu beaucoup d'exercices auparavant, et que la ténacité de ces élèves leur ait ici permis de briller. Nous encourageons donc tous les élèves à continuer à s'accrocher et à ne pas avoir peur des problèmes que nous leur proposerons.

Par ailleurs, les élèves ont rarement commis des erreurs mathématiques ou stratégiques évitables. On pourra toutefois s'étonner que plusieurs aient cru démontrer une inégalité de la forme $A \leq 3B$ voire $A \leq 2B$, beaucoup plus forte que les inégalités demandées. S'agissant d'un problème conçu pour être difficile et proposé en tant que tel, si de telles inégalités avaient été abordables, ce serait celles-ci que nous aurions demandé de démontrer.

Exercice 7. Étant donné deux entiers strictement positifs k et n , on note $f_k(n)$ le reste de la division euclidienne de n par $2^k - 1$. Un entier n est dit *ascendant* si

$$f_1(n) \leq f_2(n) \leq f_3(n) \leq f_4(n) \leq \dots,$$

autrement dit si la suite $(f_k(n))_{k \geq 1}$ est croissante.

- (a) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers ascendants.
- (b) Montrer qu'il existe un entier strictement positif M tel qu'il existe au plus $M/2025^{2025}$ entiers ascendants inférieurs ou égaux à M .

SOLUTION DE L'EXERCICE 7

(a) En regardant les petits cas à la main (par exemple $k \leq 5$ et $n \leq 40$), on peut en venir à formuler les hypothèses suivantes, que l'on s'empressera ensuite de vérifier.

Disons qu'un entier n est (a, b) -ascendant lorsque $f_a(n) \leq f_{a+1}(n) \leq \dots \leq f_b(n)$. On peut espérer trouver des entiers n et k tels que $n \leq 2^{k+1} - 2$ et pour lesquels n est $(1, k)$ -ascendant; on aura ensuite $f_i(n) \leq f_{i+1}(n) = n$ pour tout $i \geq k$, et n sera bien ascendant.

Pour trouver des entiers (a, b) -ascendants, on peut soit commencer par regarder les entiers $(a, a+1)$ -ascendants, puis identifier parmi eux les entiers $(a, a+2)$ -ascendants, etc. Ou alors partir des entiers $(b-1, b)$ -ascendants, puis identifier les entiers $(b-2, b)$ -ascendants, etc.

En suivant cette seconde approche, on constate empiriquement que l'intervalle $\{2^b - 1, \dots, 2^{b+1} - 2\}$ contient $2^a - 1$ entiers (a, b) -ascendants consécutifs, dont le premier est un multiple de $2^a - 1$. Le résultat souhaité correspond à cette propriété pour $a = 1$. En essayant de démontrer cette propriété par récurrence descendante sur a , et en notant x_a le plus petit élément de cette suite de $2^a - 1$ entiers consécutifs, on aboutit au raisonnement suivant.

On fixe un entier $k \geq 1$ et on construit la suite $x_k \leq x_{k-1} \leq \dots \leq x_1$ de la façon suivante : $x_k = 2^k - 1$ et, pour tout indice $i \leq k$, x_i est le plus petit entier supérieur ou égal à x_{i+1} et divisible par $2^{i+1} - 1$. Montrons que l'entier $n = x_1$ obtenu est ascendant.

Pour tout i , on note m_i l'entier tel que $x_i = (2^i - 1)m_i$, de sorte que, puisque $x_k \leq x_{k-1} \leq \dots \leq x_1$,

$$(2^k - 1)m_k \leq (2^{k-1} - 1)m_{k-1} \leq \dots \leq m_1 = x_1.$$

D'autre part, l'hypothèse de minimalité sur x_i implique que $x_i \leq x_{i+1} + 2^i - 2$. Par télescopage, on trouve que, pour tout indice $i \geq 1$,

$$x_1 \leq x_i + (2^1 - 2) + (2^2 - 2) + \dots + (2^{i-1} - 2) = x_i + 2^i - 2i < (2^i - 1)(m_i + 1).$$

En résumé, pour tout indice i , x_1 satisfait l'encadrement $x_i = (2^i - 1)m_i \leq x_1 < (2^i - 1)(m_i + 1)$, ce qui implique que $\boxed{f_i(n) = x_1 - x_i}$. Puisque la suite des x_i est croissante, la suite des $f_i(n)$ est croissante, comme voulu.

Enfin, si $\ell > k$, on trouve que $x_1 < (2^k - 1)(m_k + 1) = 2(2^k - 1) < 2^\ell - 1$, ce qui implique que $\boxed{f_\ell(n) = n}$. On a donc $f_1(n) \leq \dots \leq f_k(n) \leq f_{k+1}(n) = f_{k+2}(n) = \dots$, ce qui implique bien que n est ascendant.

Comme ce processus, initialisé à $x_k = 2^k - 1$ donne un entier ascendant inférieur à $2^{k+1} - 1$ quel que soit l'entier k , on obtient ainsi une infinité d'entiers ascendants.

(b) L'affirmation clé, que l'on peut deviner en observant la répartition des entiers ascendants parmi les premiers entiers (chercher à travailler en base 2 peut ici être utile), est la suivante :

Lemme : Soit $k \geq 1$ et $2^k \leq n < 2^{k+1}$ un entier ascendant. Alors $n \geq 2^{k+1} - 3 \cdot 2^{k/2}$.

Dans la pratique, une fois que l'on a conjecturé une borne de ce type, on peut commencer par regarder si elle permet de conclure le problème. Supposons ici le lemme démontré et montrons l'exercice.

Soit $M = 2^{b+1}$. D'après le lemme, pour tout entier $k \leq b$, le nombre d'entiers ascendants compris entre 2^k et $2^{k+1} - 1$ est inférieur à $2^{k/2}$. Ainsi, le nombre total de nombres ascendants inférieurs ou égaux à M est inférieur à

$$3 \sum_{k=0}^b 2^{k/2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2^{b+1}} - 1}{\sqrt{2} - 1} < \frac{3}{\sqrt{2} - 1} 2^{\frac{b+1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2} - 1} \sqrt{M}.$$

Lorsque M est suffisamment grand, on a $\frac{3}{\sqrt{2} - 1} \sqrt{M} < \frac{M}{2025^{2025}}$, de sorte que le nombre d'entiers ascendants inférieurs à M est bien plus petit que $\frac{M}{2025^{2025}}$.

On passe à la preuve du lemme :

Preuve du lemme : Notons $x_k, x_{k-1}, \dots, x_1$ la suite définie dans la question (a) et prenons n un entier ascendant. L'idée est d'une part de montrer que $x_i \leq n - f_i(n)$ et d'autre part de montrer que x_i est grand lorsque $i \geq k/2$, ce qui permet de conclure.

Prouvons par récurrence descendante sur i que $x_i \leq n - f_i(n)$ pour tout $i \leq k$.

Initialisation : Puisque $n > 2^k - 1$, on a que $n \geq 2^k - 1 + f_k(n)$, donc $n - f_k(n) \geq 2^k - 1 = x_k$.

Hérédité : Supposons avoir démontré que $n - f_{i+1}(n) \geq x_{i+1}$ pour un certain $i < k$. Par ascendance de n , $n - f_i(n) \geq n - f_{i+1}(n) \geq x_{i+1}$. Donc $n - f_i(n)$ est un multiple de $2^i - 1$ qui est supérieur à x_{i+1} . Par minimalité de x_i pour cette propriété, on trouve $n - f_i(n) \geq x_i$, ce qui achève la récurrence.

On a donc bien $\boxed{x_i \leq n - f_i(n) \text{ pour tout } i \leq k}$.

Montrons à présent que $x_i = (2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1)$ pour tout $k/2 \leq i \leq k$. On procède également par récurrence descendante sur k .

Initialisation : On a $x_k = (2^k - 1)(2^1 - 1)$.

Hérédité : Supposons avoir montré que $x_{i+1} = (2^{i+1} - 1)(2^{k-i} - 1)$ pour un certain $i < k$. On observe que

$$(2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1) - x_{i+1} = (2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1) - (2^{i+1} - 1)(2^{k-i} - 1) = 2^i - 2^{k-i}.$$

Puisque $k/2 \leq i$, $0 \leq 2^i - 2^{k-i} < 2^i - 1$, ce qui signifie que $(2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1)$ est le plus petit multiple de $2^i - 1$ supérieur à x_{i+1} , d'où $\boxed{x_i = (2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1)}$, ce qui achève la récurrence.

Ainsi, pour $i = \lceil k/2 \rceil$, on trouve

$$n \geq n - f_{\lceil k/2 \rceil} \geq x_{\lceil k/2 \rceil} = (2^{\lceil k/2 \rceil} - 1)(2^{k+1-\lceil k/2 \rceil} - 1).$$

Après développement, pour montrer que $n \geq 2^{k+1} - 3 \cdot 2^{k/2}$, il suffit de montrer que $2^{\lceil k/2 \rceil} + 2^{k+1-\lceil k/2 \rceil} \leq 3 \cdot 2^{k/2}$. Lorsque k est pair, on a en fait égalité. Lorsque $k = 2\ell + 1$ est impair, on a bien $2^{\ell+1} + 2^{\ell+1} = 2\sqrt{2} \cdot 2^{\ell+1/2}$. L'inégalité annoncée est donc vraie, ce qui conclut le lemme. $\square$

SOLUTION N°2

On propose une seconde preuve de la partie (b), basée sur l'heuristique suivante.

Supposons naïvement que les restes $f_i(n)$ d'un entier n pris « au hasard » soient indépendants. Dès lors, n a une probabilité environ $1/4$ de satisfaire l'inégalité $f_i(n) > f_{i+1}(n)$. En effet, il faut tout d'abord que $f_{i+1}(n) < 2^i - 1$, et ensuite que, les entiers $f_i(n)$ et $f_{i+1}(n)$ étant pris au hasard parmi $0, 1, \dots, 2^i - 2$, le premier soit plus grand que le second. Plus généralement, et pour les mêmes raisons, n a une probabilité environ $1/2^{k+1}$ de satisfaire l'inégalité $f_i(n) > f_{i+k}(n)$.

Dès lors, il s'agit simplement de donner un sens à cette notion de hasard, puis à évaluer précisément les probabilités concernées. Ici, il s'agit de s'assurer que les entiers $a_i = 2^i - 1$ et $b_i = 2^{i+k} - 1$ considérés sont premiers entre eux, ce qui permettra d'utiliser le théorème des restes Chinois ; choisir un entier « au hasard » reviendra à choisir ses restes modulo a_i et b_i indépendamment, c'est-à-dire à choisir n modulo le produit des entiers a_i et b_i .

Mettons maintenant en œuvre l'heuristique ci-dessus. On dit qu'un reste $0 \leq r \leq d - 1$ est *bloquant modulo d* si aucun entier ascendant n ne vérifie $n \equiv r \pmod{d}$, et qu'il n'est pas bloquant sinon.

Lemme : Soient $a < b$ deux entiers premiers entre eux. Il y a au moins $\binom{2^a-1}{2}$ restes bloquants modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$.

Preuve du lemme : Il est classique que $\text{PGCD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{PGCD}(a,b)} - 1$, ce qui ici implique que $\text{PGCD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 1$.

Soient $0 \leq j < i \leq 2^a - 2$ deux entiers. Si n est ascendant, il ne peut donc vérifier $n \equiv i \pmod{2^a - 1}$ et $n \equiv j \pmod{2^b - 1}$. D'après le théorème des restes chinois, il existe un unique entier r modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$ tel que $r \equiv i \pmod{2^a - 1}$ et $r \equiv j \pmod{2^b - 1}$, et cet entier est donc bloquant.

Ainsi, puisqu'à toute paire ordonnée (i, j) d'entiers de $\llbracket 0, 2^a - 2 \rrbracket$, on peut associer de façon injective un reste bloquant modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$, il y a au moins $\binom{2^a-1}{2}$ restes bloquants modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$. $\square$

Notons que le lemme implique que si a et b sont premiers entre eux, la proportions de restes non bloquants modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$ est au plus

$$1 - \frac{\frac{(2^a-1)(2^a-2)}{2}}{(2^a-1)(2^b-1)} = 1 - \frac{2^{a-1} - 1}{2^b - 1}.$$

Il faut désormais choisir $d_i = (2^{a_i} - 1)(2^{b_i} - 1)$ pour $i = 1, \dots, \ell$, de sorte que a_i et b_i soient premiers entre eux et proches et de sorte que les d_i soient premiers entre eux deux à deux. On propose pour cela la construction suivante.

On choisit $(a_i, b_i) = (2k_i - 1, 2k_i + 1)$ (a_i et b_i sont donc premiers entre eux) et pour que les d_i soient premiers entre eux, on choisit $k_1 = 2$ et, pour tout indice $i \geq 2$, l'entier k_i comme

$$k_i = (2k_1 - 1)(2k_1 + 1) \dots (2k_{i-1} - 1)(2k_{i-1} + 1),$$

de sorte que si $j < i$, $2k_j \pm 1$ est premier avec $2k_i \pm 1$. Toujours puisque $\text{PGCD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\text{PGCD}(a,b)} - 1$, on déduit que les $2^{2k_i \pm 1} - 1$ sont premiers entre eux deux à deux, ce qui implique que les d_i sont également premiers entre eux deux à deux.

On pose donc

$$M = d_1 \dots d_\ell = (2^{2k_1-1} - 1)(2^{2k_1+1} - 1) \dots (2^{2k_\ell-1} - 1)(2^{2k_\ell+1} - 1),$$

et on observe que, pour tout i , la proportion de restes non bloquants modulo d_i vaut au plus

$$1 - \frac{2^{2k_i-2} - 1}{2^{2k_i+1} - 1} = 1 - \frac{1}{8 + \frac{7}{4^{k_i-1} - 1}} \leq \frac{28}{31}.$$

D'après le théorème des restes chinois, la proportion de restes non bloquants modulo M est alors inférieure ou égale à $\left(\frac{28}{31}\right)^\ell$. Lorsque ℓ est suffisamment grand pour vérifier $\left(\frac{28}{31}\right)^\ell < 2025^{-2025}$, on déduit qu'il y a au plus $M/2025^{2025}$ restes non bloquants modulo M et donc au plus $M/2025^{2025}$ entiers ascendants inférieurs à M .

Commentaire des correcteurs

L'exercice a été traité par une quinzaine d'élèves, deux ayant trouvé plus ou moins la première question (sur 3 points), et un la seconde (sur 4 points). L'exercice était difficile, mais la clé était de regarder les petits cas, comme le suggère l'heuristique de la question a), que l'on pouvait également voir comme suit : étant donnée une séquence de $2^n - 1$ restes commençant par $0 \bmod 2^n - 1$, montrer qu'il y a une sous séquence de celle-ci constituée de $2^{n-1} - 1$ restes consécutifs $\bmod 2^{n-1} - 1$, et itérer, le nombre alors présent dans la séquence de $2^1 - 1$ restes consécutifs modulo 1 est alors ascendant, sous réserve qu'il soit plus petit que $2^{n+1} - 1$, ce qu'on peut garantir en choisissant comme première séquence les nombres de $2^n - 1$ à $2^{n+1} - 2$. Cette vision du problème donnait également un début de piste pour la partie suivante. On aimerait souligner l'importance de bien lire l'énoncé. Une bonne compréhension de l'énoncé est essentiel à la résolution de celui-ci, pour ne pas partir sur de mauvaises pistes ou essayer de montrer un énoncé qui n'est pas demandé.