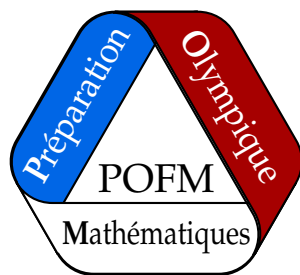


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 18 FÉVRIER 2026

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

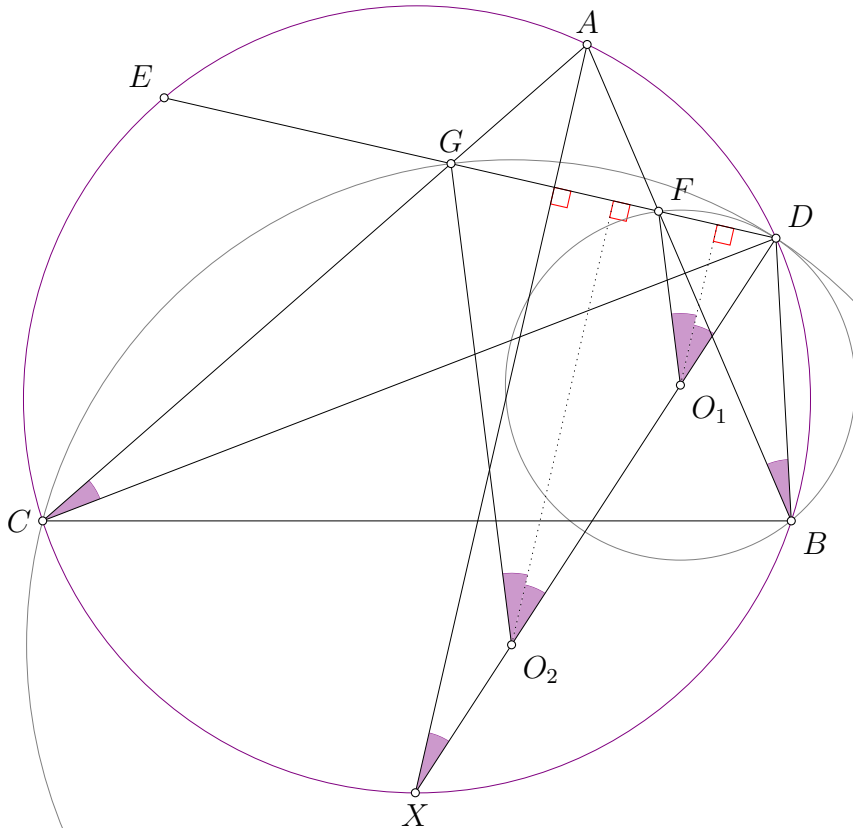
Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. Soit D un point sur l'arc AB ne contenant pas C et E un point sur l'arc AC ne contenant pas B . La droite (DE) coupe le segment $[AB]$ en F et le segment $[AC]$ en G . On note O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles DFB et DGC . On note ℓ la perpendiculaire à (DE) passant par A .

Montrer que les droites (O_1O_2) et ℓ se coupent sur un point de Ω .

SOLUTION DE L'EXERCICE 1



En traçant la droite (O_1O_2) , on constate qu'elle passe par le point D , on entreprend donc de le démontrer.

D'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle circonscrit au triangle DBF ,

$$\widehat{FDO_1} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{DO_1F} = 90^\circ - \widehat{DBF} = 90^\circ - \widehat{DBA}.$$

De même, en travaillant dans le cercle circonscrit au triangle DCG ,

$$\widehat{GDO_2} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{GO_2D} = 90^\circ - \widehat{GCD} = 90^\circ - \widehat{ACD}.$$

Comme $\widehat{DBA} = \widehat{ACD}$ d'après le théorème de l'angle inscrit, on trouve que $\widehat{FDO_1} = \widehat{GDO_2}$, ce qui signifie que les points D, O_1 et O_2 sont alignés.

On montre désormais l'exercice. Soit X le second point d'intersection de la droite (O_1O_2) avec le cercle Ω . Pour montrer que les droites (FG) et (AX) sont perpendiculaires, il suffit de montrer que $\widehat{DXA} + \widehat{EDX} = 90^\circ$. Or, en reprenant les calculs précédents,

$$\widehat{AXD} = \widehat{ABD} = 90^\circ - \widehat{FDO_1} = 90^\circ - \widehat{EDX}.$$

Ceci conclut.

Commentaire des correcteurs

Exercice bien réussi, qui se résolvait en deux parties : remarquer puis montrer que D, O_1, O_2 étaient alignés, et conclure à partir de là. Nous conseillons vivement aux élèves de faire des grandes figures où apparaissent tous les objets de l'énoncé : cela est crucial pour faire les bonnes conjectures, ici l'alignement. Certains élèves ont tendance à annoncer une conjecture sans la démontrer. Bien que cela leur permet de gagner des points en utilisant leur conjecture non prouvée pour résoudre l'exercice, il n'est pas possible d'en rester là et d'annoncer avoir résolu le problème. En effet, comme d'habitude, toute affirmation doit être clairement démontrée, même si "ça se voit sur la figure". Nous tenons tout de même à souligner la bonne acquisition des méthodes permettant de montrer des alignements ou plus généralement que 3 objets se coupent au même endroit, ces démarches étaient la plupart du temps envisagée quand bien même l'élève n'arrivait pas à les mettre en place ce qui est déjà un bon début.

Exercice 2. Maryam écrit les puissances de deux $2, 4, 8, \dots, 2^{2024}$ au tableau. Chaque minute, elle effectue l'une des trois opérations suivantes :

- Elle choisit un nombre pair écrit au tableau, disons $2k$, l'efface et écrit le nombre k à la place,
- Elle choisit un nombre impair écrit au tableau, disons $2k+1$, l'efface et écrit les nombres k et 1 à la place,
- Elle choisit deux nombres écrits au tableau, disons k et ℓ (les valeurs de k et ℓ ne sont pas forcément distinctes), les efface et écrit (une seule fois) le nombre $k + \ell \cdot 2^k$. Par exemple, si le tableau contient les nombres $1, 3, 5$, Maryam peut choisir $k = 5$ et $\ell = 1$, et après son opération le tableau contiendra les nombres $3, 37$.

Déterminer, pour chacun des deux entiers n suivants, s'il existe une suite d'opérations au bout de laquelle l'entier n est le seul nombre écrit au tableau :

(a) $n = 2^{2025} - 1$?

(b) $n = 2^{2025} - 3$?

SOLUTION DE L'EXERCICE 2

Réponse : Il n'est pas possible d'obtenir $2^{2025} - 1$ mais il est possible d'obtenir $2^{2025} - 3$.

Le problème est manifestement un problème d'invariant. L'invariant, qui peut être intuité en examinant la troisième opération, est le suivant : si on écrit tous les nombres en base 2, la somme des chiffres (autrement dit le nombre de 1 que l'on obtient) reste inchangée quelles que soient les opérations effectuées par Maryam. En effet :

- Si $2k$ est un entier, son écriture en base 2 étant de la forme $b_r b_{r-1} \dots b_1 0$ avec les $b_i \in \{0, 1\}$, l'écriture en base 2 de k est alors $b_r b_{r-1} \dots b_1$. Donc remplacer $2k$ par k ne change pas la somme des chiffres en base 2 des nombres au tableau.
- Si $2k+1$ est un entier, son écriture en base 2 étant de la forme $b_r b_{r-1} \dots b_1 1$ avec les $b_i \in \{0, 1\}$, l'écriture en base 2 de k est alors $b_r b_{r-1} \dots b_1$. Donc remplacer $2k+1$ par k et 1 ne change pas la somme des chiffres en base 2 des nombres au tableau.
- Si Maryam choisit k et ℓ , dont on note $a_r a_{r-1} \dots a_0$ et $b_s b_{s-1} \dots b_0$ les écritures en base 2, puisque $k \leq 2^r$, $r \leq k$ et l'écriture en base 2 de $k + \ell \cdot 2^k$ est $b_s b_{s-1} \dots b_0 0 \dots 0 a_r a_{r-1} \dots a_0$ (avec $k - r$ zéros). Donc remplacer k et ℓ par $k + \ell \cdot 2^k$ ne change pas la somme des chiffres en base 2 des nombres au tableau.

Réolvons à présent l'exercice. Dans la suite, les nombres considérés sont écrits en base 2. Ainsi, on dira que les nombres écrits au tableau sont $10, 100, 1000, \dots, 100 \dots 00$.

(a) Au départ, le nombre de 1 au tableau vaut 2024. Or l'écriture de $2^{2025} - 1$ est $1111 \dots 11$ avec 2025 chiffres 1. Ce nombre ne peut donc pas être le dernier nombre au tableau (il ne peut même pas être écrit du tout).

(b) Le nombre qu'on souhaite obtenir a pour écriture $11 \dots 1101$, (avec 2025 chiffres en tout, dont 2024 chiffres 1). La première opération consiste à supprimer un 0 à droite dans l'écriture d'un nombre. On applique cette opération de façon répétée à tous les nombres sauf 10, de sorte que les nombres écrits au tableau sont $10, 1, 1, \dots, 1$. La troisième opération consiste à concaténer (ou "coller") les écritures de deux nombres (avec éventuellement un certain nombre de zéros). On applique cette opération de manière répétée aux deux nombres les plus à gauche du tableau

$$(k, \ell) = (1, 11 \dots 1) \longrightarrow 2^1 \cdot \ell + 1 = 11 \dots 10 + 1 = 11 \dots 11,$$

jusqu'à ce que les nombres écrits au tableau soient $10, 1, 11 \dots 11$ (où le dernier nombre possède 2022 chiffres 1). On concatène ensuite $11 \dots 11$ avec 10, les nombres écrits deviennent $1, 11 \dots 1110$. Et enfin on concatène ces deux nombres pour obtenir le nombre $11 \dots 1101$.

Commentaire des correcteurs

Ce problème a été beaucoup abordé par les élèves mais peu réussi. On déplore que seule une poignée d'élèves aie trouvé l'invariant de l'exercice, alors qu'il n'était pas possible de faire sans pour répondre à la première question. Trop d'élèves partent trop vite vers une approche gloutonne qui consiste à réfléchir aux possibilités de Maryam de proche en proche, ce qui est très compliqué à faire puisqu'elle dispose de bien trop de d'alternatives. L'exercice récompensait les élèves capables de prendre du recul sur la situation en analysant les propriétés des opérations plutôt que les choix de jeu de Maryam.

Exercice 3. Soit $n \geq 1$ un entier et $a_1, \dots, a_{2n}$ des réels strictement positifs dont la somme vaut 2. On suppose que

$$\min(a_1, a_2) + \min(a_2, a_3) + \min(a_3, a_4) + \dots + \min(a_{2n}, a_1) \leq 1.$$

Déterminer, en fonction de n , la plus petite valeur que peut prendre l'expression

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2n}^2.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 3

Réponse : La plus petite valeur est $\frac{5}{2n}$.

Le problème possède deux étapes : dans un premier temps on montre que l'expression est toujours supérieure ou égale à $\frac{5}{2n}$. Dans un second temps, on donne l'exemple de $2n$ réels strictement positifs vérifiant la contrainte de l'énoncé et dont la somme des carrés vaut $\frac{5}{2n}$.

Étape 1 : Montrons que $a_1^2 + \dots + a_{2n}^2 \geq \frac{5}{2n}$.

L'idée clé de cette étape est l'identité $\min(x, y) = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}$. La contrainte sur les minima devient

$$1 \geq \min(a_1, a_2) + \dots + \min(a_{2n}, a_1) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \dots + \frac{a_{2n} + a_1}{2} - \frac{|a_1 - a_2|}{2} - \dots - \frac{|a_{2n} - a_1|}{2}.$$

Puisque chaque a_i apparaît dans deux fractions différentes,

$$\frac{a_1 + a_2}{2} + \dots + \frac{a_{2n} + a_1}{2} = \frac{2(a_1 + \dots + a_{2n})}{2} = 2.$$

On déduit, en multipliant par deux l'inégalité ci-dessus et en réarrangeant les termes, que

$$|a_1 - a_2| + \dots + |a_{2n} - a_1| \geq 2(2 - 1) = 2.$$

Pour relier cette hypothèse à l'expression à majorer, on utilise l'identité $x^2 + y^2 = \frac{1}{2}((x+y)^2 + (x-y)^2)$. On peut réécrire la quantité recherchée comme

$$\begin{aligned} 2(a_1^2 + \dots + a_{2n}^2) &= (a_1^2 + a_2^2) + \dots + (a_{2n}^2 + a_1^2) \\ &= \frac{(a_1 + a_2)^2 + (a_1 - a_2)^2}{2} + \dots + \frac{(a_{2n} + a_1)^2 + (a_{2n} - a_1)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} [(a_1 + a_2)^2 + \dots + (a_{2n} + a_1)^2] + \frac{1}{2} [(a_1 - a_2)^2 + \dots + (a_{2n} - a_1)^2]. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité des moyennes arithmétique et quadratique (ou l'inégalité de Cauchy-Schwarz),

$$(a_1 + a_2)^2 + (a_2 + a_3)^2 + \dots + (a_{2n} + a_1)^2 \geq \frac{((a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2n} + a_1))^2}{n} = \frac{4^2}{2n} = \frac{8}{n},$$

$$(a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + \dots + (a_{2n} - a_1)^2 \geq \frac{(|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \dots + |a_{2n} - a_1|)^2}{n} \geq \frac{2^2}{2n} = \frac{2}{n}.$$

On déduit, en réinjectant ces deux inégalités dans l'expression précédente, que

$$2(a_1^2 + \dots + a_{2n}^2) \geq \frac{8/n}{2} + \frac{2/n}{2} = \frac{5}{n}.$$

On a donc $a_1^2 + \dots + a_{2n}^2 \geq \frac{5}{2n}$.

Étape 2 : On trouve un exemple de $a_1, \dots, a_{2n}$ pour lesquels il y a égalité.

On s'inspire du cas d'égalité des inégalités précédentes. On pose alors $a_1 = a_3 = \dots = a_{2n-1} = \frac{1}{2n}$ et $a_2 = a_4 = \dots = a_{2n} = \frac{3}{2n}$. On vérifie que $a_1 + \dots + a_{2n} = 2$, que

$$\min(a_1, a_2) + \min(a_2, a_3) + \dots + \min(a_{2n-1}, a_{2n}) = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = 1,$$

et que

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2n-1}^2 + a_{2n}^2 = \frac{1}{4n^2} + \frac{9}{4n^2} + \dots + \frac{1}{4n^2} + \frac{9}{4n^2} = \frac{10n}{4n^2} = \frac{5}{2n}.$$

Les réels donnés sont donc bien un cas d'égalité.

Remarque : La borne $5/N$ reste vraie en considérant N réels (avec N pair ou impair), mais le fait que N soit pair dans l'exercice facilite l'étape 2.

SOLUTION N°2

Dans cette solution, on introduit les nombres $\max(a_i, a_{i+1})$, et on tire parti de l'identité $\max(x, y) + \min(x, y) = x + y$.

Posons $A = \min(a_1, a_2) + \dots + \min(a_{2n}, a_1)$ et $B = \max(a_1, a_2) + \dots + \max(a_{2n}, a_1)$. L'hypothèse de l'énoncé implique que $A + B = 2(a_1 + \dots + a_{2n}) = 4$, tandis que l'expression à minimiser est

$$\begin{aligned} 2(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2n}^2) &= ((a_1^2 + a_2^2) + \dots + (a_{2n}^2 + a_1^2)) \\ &= [\min(a_1^2, a_2^2) + \dots + \min(a_{2n}^2, a_1^2)] + [\max(a_1^2, a_2^2) + \dots + \max(a_{2n}^2, a_1^2)]. \end{aligned}$$

Notons que $\min(xy^2) = (\min(x, y))^2$ et que $\max(x^2, y^2) = (\max(x, y))^2$. L'inégalité des moyennes arithmétique et quadratique/l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$\min(a_1^2, a_2^2) + \dots + \min(a_{2n}^2, a_1^2) \geq \frac{1}{2n} (\min(a_1, a_2) + \dots + \min(a_{2n}, a_1))^2 = \frac{A^2}{2n},$$

$$\max(a_1^2, a_2^2) + \dots + \max(a_{2n}^2, a_1^2) \geq \frac{1}{2n} (\max(a_1, a_2) + \dots + \max(a_{2n}, a_1))^2 = \frac{B^2}{2n}.$$

On a donc $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2n}^2 \geq \frac{A^2 + B^2}{4n}$. Il s'agit donc de minorer cette dernière fraction en fonction de $A + B = 4$ et de A qui vérifie $A \leq 1$. Observons qu'alors $B = 4 - A \geq 3$. En découpant B^2 en 9 fois $B^2/9$, l'inégalité des moyennes arithmétique et quadratique/de Cauchy-Schwarz donne alors

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 &= A^2 + \frac{B^2}{9} + \dots + \frac{B^2}{9} \geq \frac{(A + \frac{B}{3} + \dots + \frac{B}{3})^2}{10} \\ &= \frac{(A + 3B)^2}{10} = \frac{(4 + 2B)^2}{10} \geq \frac{(4 + 2 \times 3)^2}{10} = 10. \end{aligned}$$

On retrouve bien que $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{2n}^2 \geq \frac{A^2 + B^2}{4n} \geq 10/4n = 5/2n$.

Commentaire des correcteurs

Le problème était difficile, et n'a été résolu entièrement que par un élève. Quelques commentaires :

- Certains élèves ont directement utilisé l'inégalité arithmético-quadratique, Cauchy Schwarz, ou l'inégalité des mauvais élèves pour montrer que la somme des carrés valait au moins $2n$, et affirmé que c'était donc la valeur minimale. Notez qu'il est un peu naïf de se dire que pour un problème 3, une inégalité donne immédiatement le résultat. De plus, ici on ne pouvait pas avoir égalité : pour avoir égalité, il fallait que tous les x_i soient égaux, ce qui était incompatible avec les deux contraintes.
- Certains élèves ont affirmé que la valeur minimale était $5n/2$ sans donner de construction, ou donné la construction sans mentionner la valeur qu'elle donnait. Il est dommage que ceux-ci n'aient pas pris le temps de mentionner à la fois la construction et la borne car il fallait ces deux informations écrites pour avoir un point.
- Traiter les petits cas ici était un réflexe très important : traiter par exemple le cas $n = 1$ donnait une idée de la réponse pour n quelconque, et permettait de prouver un certain nb d'inégalités allant dans le bon sens (par exemple, en avançant sur la dernière partie de la solution).
- Comme d'habitude, les élèves considèrent que tout inégalité est symétrique. Ici le problème n'est pas du tout symétrique : la contrainte sur les maximum change énormément si on échange a_1 et a_4 . Donc avant d'affirmer qu'un problème est symétrique, il faut vraiment le vérifier.

Exercice 4. Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que

$$\frac{1! \times 2! \times 3! \times \dots \times 2024!}{n!}$$

est le carré d'un entier.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4

Réponse : L'unique n solution est $n = 1012$.

On peut s'attendre à ce qu'il y ait très peu de solutions. Les conseils généraux pour déterminer si un nombre qui dépend de factorielles est un carré parfait sont :

- Rassembler les facteurs égaux d'une factorielle à l'autre, pour réécrire le nombre sous la forme X^2q , de sorte qu'il suffit de déterminer si q est un carré parfait.
- Chercher un nombre premier qui pourrait diviser ce nombre un nombre impair de fois. C'est d'autant plus facile si l'on peut se concentrer sur le nombre q .

Une fois cette stratégie engagée, la difficulté du problème est de repérer l'unique solution et, dans les autres cas, d'exhiber un tel nombre premier.

Notons A la fraction. Commençons par appliquer le premier conseil :

$$\begin{aligned} A &= 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 2024! = (1! \cdot 2!)(3! \cdot 4!) \dots (2023! \cdot 2024!) \\ &= 2(1!)^2 \cdot 4 \cdot (3!)^2 \dots 2024(2023!)^2 \\ &= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (2023!)^2 \cdot (2 \cdot 1)(2 \cdot 2) \dots (2 \cdot 1012) \\ &= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (2023!)^2 \cdot 2^{1012} \cdot (1012)! \end{aligned}$$

Il découle de cette écriture que si $n = 1012$, alors $\frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \dots \cdot 2024!}{n!}$ vaut $(1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (2023!)^2 (2^{506})^2$ qui est un carré donc $n = 1012$ est solution.

On découpe la suite en plusieurs cas. On pose $B^2 = (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (2023!)^2 (2^{506})^2$.

- Si $n \leq 1011$, alors $A = B^2 \frac{1012!}{n!}$. Cette fraction est un carré si et seulement si $\frac{1012!}{n!}$ est un carré.
 - Si $n \leq 1008$, $\frac{1012!}{n!} = 1012 \cdot 1011 \cdot 1010 \cdot 1009 \cdot \dots \cdot (n+1)$. On constate que le nombre premier 1009 divise une seule fois ce produit, donc A n'est pas un carré parfait.
 - Si $n = 1009$, $\frac{1012!}{n!} = 1012 \cdot 1011 \cdot 1010$ n'est pas un carré parfait (il est divisible par 3 mais pas par 9).
 - Si $n = 1010$, $\frac{1012!}{n!} = 1012 \cdot 1011$ n'est pas un carré parfait (il est divisible par 3 mais pas par 9).
 - Si $n = 1011$, $\frac{1012!}{n!} = 1012$ n'est pas un carré parfait.

Donc aucun entier $n \leq 1011$ n'est solution.

- Si $n \geq 1013$, alors $A = \frac{B^2}{1013 \cdot \dots \cdot n}$.

- Si $n < 2026$, alors 1013, qui est premier, divise exactement une fois le dénominateur et un nombre pair de fois le numérateur, il divise donc un nombre impair de fois A . Ainsi, aucun entier $1013 \leq n < 2026$ n'est solution.

- Si $n \geq 2027$ alors 2027 divise le dénominateur mais pas le numérateur de A , donc A n'est pas entier et n n'est pas solution.
- Si $n = 2026$, 1019 qui est premier divise une fois le dénominateur mais un nombre pair de fois de numérateur, donc A n'est pas un carré.

Donc aucun entier $n \geq 1013$ n'est solution.

Commentaire des correcteurs

Exercice bien traité par rapport à sa position.

- Beaucoup d'élèves ont le réflexe de factoriser le produit sous forme $1^{2024} \times 2^{2023} \times \dots \times 2024^1$ et c'est un bon début. L'étape d'après, suivie par un nombre non négligeable d'élèves, était de factoriser les facteurs carrés pour se ramener à quelque chose de la forme $A^2 k$.
- Beaucoup on affirmé que si $\frac{A^2 \cdot 1012!}{n!}$ est un carré, alors $\frac{1012!}{n!}$ est un carré et donc en particulier entier. Attention, cela n'est vrai que si $\frac{1012!}{n!}$ est entier ! Les élèves en question ont donc affirmé que nécessairement $n \leq 1012$ puisque $\frac{1012!}{n!}$ doit être entier, et n'ont alors pas traité les autres cas.
- Il y a quelques confusions entre valuation p -adique et nombre d'apparitions dans un produit : dans 3×6 , 3 apparaît une seule fois mais la valuation 3-adique du produit est 2. Ainsi, il est vrai que chaque nombre impair a un exposant pair dans $1^{2024} \times 2^{2023} \times \dots \times 2024^1$ mais on ne peut pas en déduire que chaque nombre premier impair a une valuation p -adique paire dans le produit.
- La clé de l'exercice était de regarder les valuation p -adiques, ce qui n'aura pas échappé aux élèves, mais appliquées à des nombres premiers de taille convenable. En particulier, ont été récompensés ceux qui ont décrit un nombre premier convenable sans l'expliciter (par exemple, dire que l'on dispose d'un nombre premier p entre 1012 et 2024 puis faire le même raisonnement que celui du corrigé pour écarter $1013 \leq n \leq 2025$).

Énoncés Senior

Exercice 5. On considère une grille de $n \times n$ cases. On numérote les lignes de 1 à n du bas vers le haut et les colonnes de 1 à n de la gauche vers la droite. Pour toute paire (i, j) d'indices, avec $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on place $\text{PGCD}(i, j)$ bonbons la case située sur la i -ème ligne et la j -ème colonne. Edwige souhaite partir du coin inférieur gauche pour se rendre au coin supérieur droit de la grille. Pour cela, à chaque minute, elle se déplace sur la case adjacente située à droite ou au-dessus de la case où elle se trouve. Edwige récupère les bonbons de chaque case par laquelle elle est passée (y compris la case de départ).

Déterminer le nombre maximal de bonbons qu'Edwige peut récupérer.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5

Réponse : Le nombre maximum est $N = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}$.

Le problème demande de trouver le plus grand entier vérifiant une propriété. Il contient donc nécessairement deux parties. D'une part, on montre que le nombre de bonbons qu'Edwige peut manger est toujours inférieur à N , cette étape s'appelle *l'analyse*. D'autre part, on donne un exemple de parcours dans lequel Edwige mange exactement N bonbons, cette étape s'appelle *la construction*.

Construction :

Commençons par proposer un exemple de chemin dans lequel Edwige mange exactement $\frac{n^2 + 3n - 2}{2}$ bonbons. On considère le parcours suivant, dans lequel Edwige alterne entre la case à droite et la case au-dessus de la case où elle se trouve.

							n
						$n-1$	1
					$\ddots$	1	
				$\ddots$	1		
			$\ddots$	1			
		3	1				
	2	1					
1	1						

Dans ce parcours, Edwige passe par chaque case de la diagonale principale du carrée (couleur claire) et sur chaque case de la diagonale inférieure à celle-ci (couleur foncée). Sur la i -ème case de la diagonale principale, il y a $\text{PGCD}(i, i) = i$ bonbons, tandis que sur la i -ème case de la diagonale inférieure, il y a $\text{PGCD}(i+1, i) = 1$ bonbons. Ainsi, le nombre de bonbons récupérés par Edwige à la fin du parcours est

$$(1 + 2 + \dots + n) + \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n-1 \text{ termes}} = \frac{n(n+1)}{2} + n - 1 = N.$$

Analyse :

Considérons un parcours quelconque et montrons qu'il contient moins de N bonbons. Notons (i_k, j_k) les coordonnées de la k -ème case parcouru. Au vu des mouvements autorisés, à chaque étape, on $(i_{k+1}, j_{k+1}) = (i_k + 1, j_k)$ ou $(i_{k+1}, j_{k+1}) = (i_k, j_k + 1)$.

En particulier, par récurrence immédiate, on déduit que $i_k + j_k = k + 1$: la quantité $i_k + j_k - 1$ correspond aux nombres de pas effectués au bout de k minutes.

L'idée principale, dont on décline plusieurs variantes, est de majorer le nombre de bonbons pris aux temps k et $k + 1$. Plus précisément, on montre le lemme suivant :

Lemme : Soit $k \geq 2$. Alors

$$\text{PGCD}(i, j) + \text{PGCD}(i + 1, j) \leq \left\lceil \frac{i + j}{2} \right\rceil + 1 \quad \text{et} \quad \text{PGCD}(i, j) + \text{PGCD}(i, j + 1) \leq \left\lceil \frac{i + j}{2} \right\rceil + 1.$$

Supposons le lemme vrai. Le nombre de bonbons mangés est alors

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(i_1, j_1) + \dots + \text{PGCD}(i_n, j_n) &= 1 + \sum_{k=2}^{2n-1} \text{PGCD}(i_k, j_k) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \text{PGCD}(i_{2k}, j_{2k}) + \text{PGCD}(i_{2k+1}, j_{2k+1}) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\lceil \frac{i_{2k} + j_{2k}}{2} \right\rceil + 1 \right) = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left\lceil \frac{2k + 1}{2} \right\rceil + 1 \right) \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (k + 2) = N. \end{aligned}$$

Il s'agit donc désormais de démontrer le lemme.

Preuve du lemme : Au vu de la symétrie de l'énoncé, il suffit de montrer la première inégalité. Posons $d_i = \text{PGCD}(i, j)$ et $d_{i+1} = \text{PGCD}(i + 1, j)$. Puisque i et $i + 1$ sont premiers entre eux, d_i et d_{i+1} sont également premiers entre eux. Comme ils divisent tous les deux j , leur produit divise j .

- Si $d_i = 1$: notons que $d_{i+1} = \text{PGCD}(i + j + 1, j)$. d_{i+1} est donc un diviseur propre de $i + j + 1$, puisque il divise $i + j + 1$ mais est inférieur à j . On déduit que $d_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{i + j + 1}{2} \right\rfloor = \left\lceil \frac{i + j}{2} \right\rceil$. La dernière égalité provient d'une disjonction de cas sur la parité de n . On déduit bien dans ce cas que $d_i + d_{i+1} \leq 1 + \left\lceil \frac{i + j}{2} \right\rceil$.
- Si $d_{i+1} = 1$: de la même façon que précédemment, on a $d_i = \text{PGCD}(i + j, i)$, de sorte que $d_i \leq \left\lfloor \frac{i + j}{2} \right\rfloor \leq \left\lceil \frac{i + j}{2} \right\rceil$. On conclut alors l'inégalité comme dans le cas précédent.
- On suppose que $d_i, d_{i+1} \geq 2$. Notons qu'on a dans ce cas $i \geq 2$. On a alors

$$0 \leq (d_i - 2)(d_{i+1} - 2) \Leftrightarrow 2(d_i + d_{i+1}) \leq d_i d_{i+1} + 4.$$

De $d_i d_{i+1} \mid j$ on déduit $d_i d_{i+1} \leq j \leq j + i - 2$. On déduit alors $d_i + d_{i+1} \leq \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor + 1$, ce qui implique l'inégalité attendue. $\square$

Remarque : D'autres énoncés du lemme nécessitent une analyse moins fine de la quantité $\text{PGCD}(i, j) + \text{PGCD}(i + 1, j)$. Par exemple, en s'intéressant directement aux couplages des

cases aux temps $2k$ et $2k + 1$ ou des cases aux temps $2k - 1$ et $2k$, on peut montrer avec la même technique les inégalités

$$\text{PGCD}(i_{2k}, j_{2k}) + \text{PGCD}(i_{2k+1}, j_{2k+1}) \leq k+2, \quad \text{PGCD}(i_{2k-1}, j_{2k-1}) + \text{PGCD}(i_{2k}, j_{2k}) \leq k+1.$$

SOLUTION N°2

La première preuve s'appuie sur une estimation de $\text{PGCD}(i, j) + \text{PGCD}(i+1, j)$ symétrique en i et j . On propose cette fois-ci une estimation ne dépendant que de l'un des deux indices, et on montre comment conclure l'analyse à partir de cela.

On reprend les notations de la question précédente : (i_k, j_k) représente la case sur laquelle se trouve Edwige au k -ème mouvement. On prouve alors le lemme suivant :

Lemme : On a les deux inégalités :

$$\text{PGCD}(i, j) + \text{PGCD}(i+1, j) \leq j+1 \quad \text{et} \quad \text{PGCD}(i, j) + \text{PGCD}(i, j+1) \leq i+1.$$

Preuve : On se contente de prouver la première inégalité. Tout comme dans la première solution, posons $d_i = \text{PGCD}(i, j)$ et $d_{i+1} = \text{PGCD}(i+1, j)$. Puisque i et $i+1$ sont premiers entre eux, d_i et d_{i+1} sont également premiers entre eux. Comme ils divisent tous les deux j , $d_i d_{i+1} \mid j$ et $d_i d_{i+1} \leq j$. On a donc

$$0 \leq (d_i - 1)(d_{i+1} - 1) \iff d_i + d_{i+1} \leq d_i d_{i+1} + 1,$$

ce qui est l'inégalité désirée. □

Pour conclure, il suffit de remarquer que, pour tout indice k ,

$$\text{PGCD}(i, j) + \text{PGCD}(i+1, j) \leq (i+1)j - ij + 1, \quad \text{PGCD}(i, j) + \text{PGCD}(i, j+1) \leq i(j+1) - ij + 1.$$

Dans tous les cas, on déduit l'inégalité suivante,

$$\text{PGCD}(i_k, j_k) + \text{PGCD}(i_{k+1}, j_{k+1}) \leq i_{k+1}j_{k+1} - i_kj_k + 1.$$

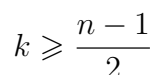
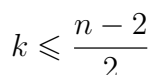
Puisque $(i_{2n-1}, j_{2n-1}) = (n, n)$ et $(i_1, j_1) = (1, 1)$, un télescopage conduit alors à

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{2n-1} \text{PGCD}(i_k, j_k) &= \frac{\text{PGCD}(1, 1) + \text{PGCD}(n, n)}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-2} (\text{PGCD}(i_k, j_k) + \text{PGCD}(i_{k+1}, j_{k+1})) \\ &\leq \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n-2} (i_{k+1}j_{k+1} - i_kj_k + 1) \\ &= \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} (2n-2 + n^2 - 1) = N. \end{aligned}$$

SOLUTION N°3

On donne une troisième preuve, par récurrence sur n , pour montrer qu'Edwige ne peut pas manger plus de N bonbons.

Pour lui rendre service, observant que $\text{PGCD}(i, j) \leq \min\{i, j, |i-j|\}$ lorsque $i \neq j$, son amie Aline décide de rajouter des bonbons dans certaines cases : la case (i, j) contient désormais $c_{i,j}$ bonbons, où l'on a posé $c_{i,j} = i$ si $i = j$, et $c_{i,j} = \min\{i, j, |i-j|\}$ sinon.



Si $(n-1)/2 \leq k \leq n-2$, Edwige a mangé A bonbons après avoir quitté la case $(n-1, k)$, où

$$A = \sum_{\ell=k}^n c_{n,\ell} \leq \sum_{\ell=k}^{n-1} (n-\ell) + n = (n-k)(n-k+1)/2 + n.$$

$$B = \sum_{\ell=k+1}^n c_{n-1,\ell} + c_{n,n} = \sum_{\ell=k+1}^{n-2} (n-1-\ell) + (n-1) + 1 + n = (n-k-2)(n-k-1)/2 + 2n.$$

C'est donc ce qu'elle entreprend de faire, et puisqu'elle choisit déjà un chemin optimal pour arriver en la case $(n-1, n-1)$, une récurrence sur n indique qu'elle ne peut pas faire mieux que d'alterner entre les cases (k, k) et $(k, k+1)$, ce qui lui permet précisément de manger N bonbons.

Commentaire des correcteurs

Le problème n'a pas été beaucoup résolu pour sa position. Le prototype de solution consistait à estimer d'une façon ou d'une autre le nombre de bonbons de deux cases consécutives.

- Les élèves qui ont réussi à produire une majoration similaire à la solution 1 ont réussi à conclure.
- Les élèves qui ont produit une majoration similaire à la solution 2 ne sont pas toujours parvenus à justifier comment conclure avec cette majoration. Il fallait systématiquement introduire un double comptage.

Par ailleurs, les élèves qui ont tenté une récurrence sont très rarement parvenus à conclure puisque ce raisonnement nécessitait de majorer $\text{PGCD}(i, j)$ par $\min i, j, |i - j|$. La plupart ont voulu comparer le chemin sur la diagonale avec un chemin particulier d'Edwige, oubliant beaucoup d'autres chemins possibles, pour lesquels leur raisonnement ne s'appliquait pas.

Dans l'ensemble la rigueur est bonne pour un problème de combinatoire, en revanche certaines parties non essentielles auraient pu être abrégées : plusieurs élèves mettent plus d'une page à justifier qu'on peut supposer que le chemin d'Edwige est entièrement sous la diagonale principale. D'autres mettent plus d'une page à expliquer pourquoi le chemin en escalier donne la borne voulue. Il faut identifier les éléments qu'il est essentiel de détailler.

Exercice 6. On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers positifs ou nuls. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction non bornée et telle que, pour toute paire (m, n) d'entiers positifs ou nuls vérifiant

$$f(m+n) = \max\{f(0), \dots, f(m+n)\},$$

on a

$$f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs A, B, C et D tels que, pour tout entier positif n , on a $f(An + B) = Cn + D$.

Une fonction est dite non bornée si, pour tout entier $N \geq 0$, il existe un entier positif ou nul n tel que $f(n) \geq N$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6

On dira qu'un entier a est un *pic* si $f(a) \geq f(c)$ pour tout $c < a$

On remarque que $f(0) = \max\{f(0)\}$. Ainsi, $f(0) = f(0) + f(0)$, ce qui donne que $f(0) = 0$.

On commence par montrer qu'il existe une infinité de pics. f possède au moins un pic, à savoir 0. On pose $a_0 = 0$ et on définit, pour tout indice $n \geq 0$, a_{n+1} comme le plus petit entier strictement supérieur à a_n tel que $f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$ (qui existe bien puisque la fonction f est non bornée). Par construction, la suite (a_n) est une suite de pics pour f .

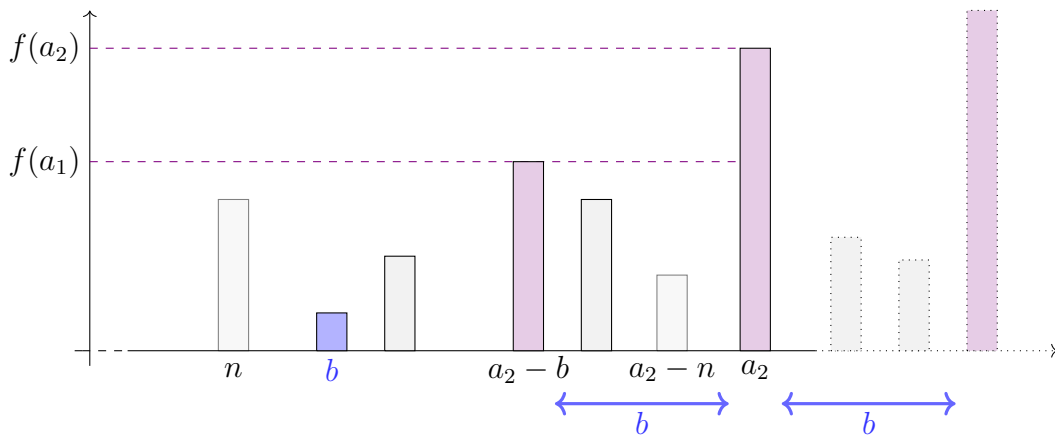
Tout pic a vérifie $f(a) = f(c) + f(a-c)$ pour tout entier $0 \leq c \leq a$.

On note m le minimum de f sur l'ensemble des entiers strictement positifs, et on note b le plus petit antécédent strictement positif de m . On considère $a_1, a_2 \geq b$ deux pics consécutifs.

On montre que $a_1 = a_2 - b$: Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$f(b) + f(a_2 - b) = f(n) + f(a_2 - n) = f(a_1) + f(a_2 - a_1).$$

Par définition de b , $f(b) \leq f(a_2 - n)$, donc $f(a_2 - b) \geq f(n)$. On déduit que $f(a_2 - b) = \max\{f(1), \dots, f(a_2 - 1)\}$. En particulier, $a_2 - b$ est un pic, donc $a_2 - b \leq a_1$. On déduit que $f(a_2 - b) \leq f(a_1)$. En revenant à l'égalité ci-dessus, on déduit que $f(a_2 - a_1) \leq f(b)$. Par minimalité de $f(b)$, $f(a_2 - a_1) = f(b)$ et, par minimalité de b , on déduit que $a_2 - a_1 \geq b$. En combinant avec l'inégalité précédente, on déduit bien que $a_2 - b = a_1$.



On déduit par récurrence que les pics de f supérieurs à b sont les entiers de la forme $a_1 + nb$. Pour tout entier n , on a $f(a_1 + nb) = f(b) + f(a_1 + (n-1)b)$, et par récurrence immédiate, $f(a_1 + nb) = f(a_1) + nf(b)$. On conclut alors en prenant $(A, B, C, D) = (b, a_1, f(b), f(a_1))$. On vérifie bien que $f(a_1) \geq f(b) \geq 1$ puisque, si $f(b) = 0$, on trouverait que $f(a_1 + nb) = f(a_1)$, donc les valeurs de f en les pics seraient constantes, contredisant le caractère borné de f .

Remarque : La dernière étape de la preuve montre que si a est un pic et b un antécédent du minimum m de f sur $\mathbb{N}$, alors $a - b$ est également un pic et, par récurrence descendante, que $a - \ell b$ est un pic pour tout ℓ et tout pic a . On peut alors conclure comme suit :

D'après le principe des tiroirs, il existe un reste r tel qu'une infinité de pics ont le même reste dans leur division euclidienne par b . Autrement dit, on dispose d'une infinité de pics de la forme $qb + r$ avec q un entier. Étant donné un entier n , prenons $q > n$ tel que $qb + r$ est un pic. D'après l'étape précédente, $nb + r = qb + r - (q - n)b$ est également un pic. Ainsi, tous les entiers de la forme $nb + r$ sont des pics.

Puisque, pour tout entier n , $f(nb + r) = f(b) + f((n-1)b + r)$, on déduit par récurrence que $f(nb + r) = nf(b) + f(r)$, ce qui conclut l'exercice en prenant $(A, B, C, D) = (b, r, f(b), f(r))$.

SOLUTION N°2

De même que dans la solution 1, on montre que $f(0) = 0$ et qu'il existe une infinité de pics pour f . On note (a_k) la suite des pics de f .

On rappelle la construction de la suite (a_n) , à savoir que a_n est le plus petit entier $a \geq a_{n-1}$ tel que $f(a) \geq f(a_{n-1})$. Ainsi, si un entier $a_{k-2} < a < a_k$ satisfait $f(a) \geq f(a_{k-1})$, alors $a = a_{k-1}$.

Pour tout entier $k \geq 2$, l'énoncé appliqué au pic a_k implique que

$$f(a_k) = f(a_k - a_{k-1}) + f(a_{k-1}) = f(a_{k-1} - a_{k-2}) + f(a_k - (a_{k-1} - a_{k-2})).$$

Comme $a_{k-2} < a_k - a_{k-1} + a_{k-2} < a_k$, on a $f(a_k - (a_{k-1} - a_{k-2})) \leq f(a_{k-1})$. On déduit alors de l'égalité ci-dessus que $f(a_k - a_{k-1}) \leq f(a_{k-1} - a_{k-2})$.

La suite $(f(a_k - a_{k-1}))_{k \geq 2}$ est alors une suite décroissante d'entiers positifs, elle est donc constante égale à C à partir d'un certain rang ℓ : pour tout $k \geq \ell$, $f(a_k - a_{k-1}) = C$.

Pour un indice $k \geq \ell + 1$, l'égalité $f(a_k - a_{k-1}) = f(a_{k-1} - a_{k-2})$ implique que $f(a_{k-1}) = f(a_k - (a_{k-1} - a_{k-2}))$. On déduit que $a_{k-1} = a_k - a_{k-1} + a_{k-2}$. On a donc montré que la suite $(a_k - a_{k-1})$ est égale à une constante A à partir du rang $\ell + 1$. L'égalité ci-dessus se réécrit alors comme $f(a_{k-1} + A) = C + f(a_{k-1})$.

En itérant cette égalité, on a pour tout entier n que $f(An + a_\ell) = nf(A) + f(a_\ell)$, ce qui permet de conclure en prenant $(A, B, C, D) = (A, a_\ell, f(A), f(a_\ell))$.

SOLUTION N°3

Une variation de la solution 2 est la suivante. De la même manière que dans la solution, on observe que a_k est le plus petit entier $n \geq a_{k-1}$ tel que $f(n) \geq f(a_{k-1})$. Posons alors $d_k = a_k - a_{k-1}$.

Si un entier n vérifie $0 < n < d_k$, alors $a_{k-1} < a_k - n < a_k$. Cela implique que $f(a_k - n) < a_{k-1}$. Il vient que

$$f(n) = f(a_k) - f(a_k - n) > f(a_k) - f(a_{k-1}) = f(d_k).$$

En particulier, si on a deux indices $k > k'$ tels que $d_{k'} < d_k$, alors $f(d_{k'}) > f(d_k)$. Il vient que si la suite (d_k) admet une sous-suite infinie $(d_{k_n})_n$ strictement croissante, la suite $(f(d_{k_n}))_n$

est strictement décroissante et à valeurs dans $\mathbb{N}$, ce qui est absurde. On déduit que la suite $(d_k)_k$ est bornée.

D'après le principe des tiroirs, il existe un entier A tel que $d_k = A$ pour une infinité d'indices k .

Soit $\ell \geq 0$ un entier et k un indice tel que $a_{k-1} \geq \ell$ et $d_k = A$. En calculant $f(a_k)$ de deux façons différentes, on a

$$f(a_{k-1} - \ell) + f(d_k + n) = f(a_k) = f(a_{k-1}) + f(d_k) = f(n) + f(a_{k-1} - \ell) + f(d_k).$$

En simplifiant, on trouve que $f(A + \ell) = f(\ell) + f(A)$. Une récurrence immédiate donne alors $f(nA + \ell) = f(\ell) + nf(A)$. On peut donc conclure en posant $(A, B, C, D) = (A, n, f(A), f(\ell))$, en vérifiant que $f(A) \neq 0$ (dans le cas contraire, on aurait $f(\ell + A) = f(\ell)$ pour tout ℓ , ce qui impose que f est périodique et donc bornée).

Commentaire des correcteurs

L'exercice était à la fois abordable (deux tiers des élèves ont obtenu des points) et difficile : les solutions présentées ont l'air simples, mais les trouver était difficile, et il était possible de formuler beaucoup de remarques mathématiquement pertinentes sans qu'elles n'aident à avancer vers une solution. Voici quelques observations de la part des correcteurs :

- De nombreux élèves ont mal compris l'énoncé : l'identité $f(m + n) = f(m) + f(n)$ n'était pas assurée quels que soient m et n , mais uniquement lorsque $f(m + n) = \max\{f(0), \dots, f(m + n)\}$.
- Par contraste, le premier point de ce problème était très accessible : il nécessitait de mentionner qu'il existait une infinité d'entiers k vérifiant l'égalité $f(k) = \max\{f(0), \dots, f(k)\}$. Beaucoup d'élèves ont mentionné ce résultat, mais un certain nombre sont passés à côté. C'est dommage, car ce résultat était un premier pas commun à toutes les preuves, et que l'on pouvait anticiper : en effet, si l'hypothèse de l'énoncé n'est satisfaite que pour un nombre fini d'entiers m et n , dire des choses pertinentes sur le comportement de f à l'infini risque d'être très compliqué.
- La fonction f définie par $f(n) = n$ lorsque n est pair et $f(n) = n + 2$ lorsque n est impair satisfait les contraintes de l'énoncé. En effet, la relation $f(k) = \max\{f(0), \dots, f(k)\}$ est satisfaite si et seulement si k est nul ou impair. Mais, si k est impair, l'égalité $m + n = k$ n'est possible que si m et n sont de parités opposées, de sorte que $f(m + n) = k + 2 = m + n = f(m) + f(n)$.

En particulier, toute preuve du fait que $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \geq 0$ était vouée à l'échec. De plus, si cela avait été vrai, il aurait probablement été demandé de trouver toutes les fonctions vérifiant l'égalité de l'énoncé.

Exercice 7. Elsa veut placer des bonbons sur une grille de taille 1000×1000 . Au départ, toutes les cases de la grille sont vides. Chaque minute, Elsa choisit une case vide appartenant à une ligne ou une colonne contenant un nombre de bonbons qui est divisible par 3, et Elsa place un bonbon sur cette case.

Déterminer le plus grand nombre de bonbons qu'Elsa peut placer dans la grille.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7

Réponse : Le plus grand nombre est 3995. De manière générale, si n désigne la longueur d'un côté de la grille, Elsa peut placer au plus $4n - 5$ bonbons. Dans la suite, on continue de noter n la longueur du côté de la grille.

Analyse : On montre que, quels que soient les choix d'Elsa, le nombre de bonbons qu'elle place est toujours inférieur à $4n - 5$.

Pour tout indice i et tout t , on pose $\ell_i(t)$ le reste de la division par 3 du nombre de bonbons dans la *ligne* i au bout de t minutes. On pose également $c_i(t)$ le reste de la division par 3 du nombre de bonbons dans la *colonne* i au bout de t minutes. On pose $P_0(t)$, $P_1(t)$ et $P_2(t)$ respectivement le nombre de 0, 1 et 2 parmi les nombres $\ell_1(t), \dots, \ell_n(t), c_1(t), \dots, c_n(t)$. On a notamment $P_0(t) + P_1(t) + P_2(t) = n$ et $(P_0(0), P_1(0), P_2(0)) = (2n, 0, 0)$.

Pour tout temps t , si Elsa place un bonbon sur la case située sur la i -ème ligne et la j -ème colonne, on a soit $\ell_i(t) = 0$ soit $c_j(t) = 0$. On répartit les mouvements d'Elsa en trois types :

- Un A-mouvement est un mouvement où $\ell_i(t) = c_j(t) = 0$. On a alors $\ell_i(t+1) = c_j(t+1) = 1$ et $(P_0(t+1), P_1(t+1), P_2(t+1)) = (P_0(t) - 2, P_1(t) + 2, P_2(t))$,
- Un B-mouvement est un mouvement où $\{\ell_i(t), c_j(t)\} = \{0, 1\}$. On a alors $\{\ell_i(t+1), c_j(t+1)\} = \{1, 2\}$ et $(P_0(t+1), P_1(t+1), P_2(t+1)) = (P_0(t) - 1, P_1(t), P_2(t) + 1)$,
- Un C-mouvement est un mouvement où $\{\ell_i(t), c_j(t)\} = \{0, 2\}$. On a alors $\{\ell_i(t+1), c_j(t+1)\} = \{0, 1\}$ et $(P_0(t+1), P_1(t+1), P_2(t+1)) = (P_0(t), P_1(t) + 1, P_2(t) - 1)$.

Notons a , b et c respectivement le nombre de A-mouvements, B-mouvements et C-mouvements. Notons aussi N le nombre total de bonbons qu'Elsa place sur la grille.

$$P_0(N) - 2n = P_0(N) - P_0(0) = \sum_{t=0}^{N-1} (P_0(t+1) - P_0(t)) = -2a - b.$$

De même on trouve $P_1(N) = 2a + c$ et $P_2(N) = b - c$. On a alors

$$N = a + b + c = a + (2n - 2a - P_0(N)) + (P_1(N) - 2a) = 2n - 3a - P_0(N) + P_1(N).$$

On effectue alors une disjonction de cas.

- Si $a \geq 2$, on a $N \leq 2n - 3a + P_1(N) \leq 2n - 3a + 2n < 4n - 5$ (on a utilisé que $P_1(N) \leq 2n$).
- Si $a = 1$ et $P_1(N) \leq 2N - 2$, alors $N \leq 2n - 3a + P_1(N) \leq 2n - 3 + (2n - 2) = 4n - 5$.
- On suppose que $a = 1$ et $P_1(N) \geq 2n - 1$. Cela signifie qu'au moins $2n - 1$ des nombres $\ell_1(N), \dots, \ell_n(N), c_1(N), \dots, c_n(N)$ valent 1. Comme en plus $\ell_1(N) + \dots + \ell_n(N) \equiv c_1(N) + \dots + c_n(N) \pmod{3}$, cela veut dire que tous les $\ell_i(N)$ et $c_i(N)$ sont égaux à 1. Au vu des effets des trois types de mouvements, cela implique que le dernier mouvement d'Elsa était un A-mouvement, ce qui est absurde car $a = 1$ et le premier mouvement d'Elsa était déjà un A-mouvement.

On a donc bien $N \leq 4n - 5$ dans tous les cas.

Construction : Dans le tableau suivant, le numéro inscrit dans une case correspond à la minute à laquelle Elsa place un bonbon dans cette case.

	3	4		...				
$4n - 5$	$4n - 6$	5	6	...				
	$4n - 7$	$4n - 8$	7	...				
		$4n - 9$	$4n - 10$	...				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
				...	$2n + 4$	$2n - 5$	$2n - 4$	
				...	$2n + 3$	$2n + 2$	$2n - 3$	$2n - 2$
2	1			...		$2n + 1$	$2n$	
				...			$2n - 1$	

SOLUTION N°2

On fournit une autre preuve de l'analyse. On note toujours N le nombre total de bonbons sur la grille à la fin du jeu. On appelle *mouvement-ligne* un mouvement où Elsa place un bonbon dans une rangée dont le nombre de bonbons était un multiple de 3, et on note ℓ_i le nombre de mouvements-lignes dans la ligne i . De manière analogue, on définit un mouvement-colonne et la notation c_i . Notons qu'un même mouvement peut être un mouvement-ligne et un mouvement-colonne en même temps.

On note $L = \ell_1 + \dots + \ell_n$ et $C = c_1 + \dots + c_n$. On suppose de plus que le dernier mouvement d'Elsa est un mouvement-ligne. Comme chaque mouvement est soit -ligne soit -colonne et que le premier mouvement est -ligne et -colonne, $N + 1 \leq L + C$.

On fixe désormais une ligne i . Exactement ℓ_i des bonbons de la ligne i ont été placés pendant un mouvement-ligne. Entre deux tels mouvements-lignes, il y a eu au moins 2 bonbons (toujours sur la ligne i) qui ont été placés lors d'un mouvement-colonne. Un tel mouvement-colonne, à savoir un mouvement colonne plaçant un bonbon sur la ligne i entre deux mouvements-lignes, est appelé *i-mouvement-colonne d'assistance* (MCA_i). Comme aucun MCA_i n'a pu être le premier mouvement d'Elsa, le nombre de MCA_i pour $i = 1, \dots, n$ est d'au plus $C - 1$. Et comme entre deux mouvements-lignes sur la ligne i , il y a eu au moins deux MCA_i ,

$$C - 1 \geq 2(\ell_1 - 1) + \dots + 2(\ell_n - 1) = 2L - 2n.$$

Le même raisonnement s'applique pour obtenir $L - 1 \geq 2C - 2n$. Toutefois, comme le dernier mouvement d'Elsa est un mouvement-ligne, il y a deux mouvements-lignes qui ne peuvent pas être des mouvements d'assistance. On a donc l'inégalité raffinée $L - 2 \geq 2C - 2n$. On déduit en sommant les deux inégalités que

$$L + C - 3 \geq 2(L + C) - 4n,$$

soit $N + 1 \leq L + C \leq 4n - 3$, ce qui donne $N \leq 4n - 4$. Pour avoir égalité, il faut avoir égalité dans toutes les inégalités utilisées, c'est-à-dire $C - 1 = 2L - 2n$ et $L - 2 = 2C - 2n$. Mais alors $2C - L + 2 = 2n = 2L - C + 1$, soit $3(C - L) = 1$, ce qui est absurde. On ne peut donc pas avoir égalité et, à nouveau, $N \leq 4n - 5$.

Commentaire des correcteurs

Exercice difficile assez mal traité. Un certain nombre d'élèves ont fait un raisonnement qui ressemble à ce qui suit :

"On distingue trois types de coups, selon la congruence mod 3 de la deuxième ligne/colonne, puis on remarque que le nombre de lignes congrues à 0 est décroissant, et donc on veut le faire décroître le plus lentement possible. On remarque ensuite que les coups "A" (avec la notation du corrigé) sont très mauvais puisque le nombre de 0 diminue de 2, le coup "C" est très bon mais n'est possible qu'après un coup "B" lui correspondant. Il faut donc au moins autant de coup B que de coup C et le moins possible de coups A."

Un tel raisonnement est intéressant comme première approche, il permet d'approcher la bonne borne ($4 \times 1000 - 5$, le -5 correspondant à quelques impossibilités supplémentaires). Cependant, il n'est pas raisonnable de le rédiger tel quel dans une copie, il faut faire des inégalités écrites rigoureusement pour justifier proprement les résultats obtenus et éviter les écueils du type *"clairement il est stupide de faire des A-mouvements, donc supposons qu'on en fait aucun/un seul au début"* qui n'est pas un raisonnement valable pour une preuve. De toutes façons, l'exercice demandait une précision dans les inégalités telle qu'il était essentiellement impossible de le trouver sans écrire soigneusement ses équations.

On regrette également que plusieurs copies, y compris de bonnes copies, aient bêtement perdu des points potentiels sur la construction en oubliant la contrainte d'au plus un bonbon par case. La lecture soigneuse de l'énoncé reste toujours importante.

Énoncés EGMO

Exercice 8. Dans chaque case d'un tableau 10×10 , on inscrit un nombre réel. On suppose que pour chaque rectangle horizontal 1×3 , la somme des réels inscrits dans les cases du rectangle est négative ou nulle. On suppose également que pour chaque rectangle vertical 3×1 , la somme des réels inscrits dans les cases du rectangle est positive ou nulle.

Déterminer le nombre maximal de nombres réels strictement positifs parmi les 100 réels inscrits dans le tableau.

SOLUTION DE L'EXERCICE 8

Réponse : Il y a au plus 67 nombres strictement positifs dans le tableau.

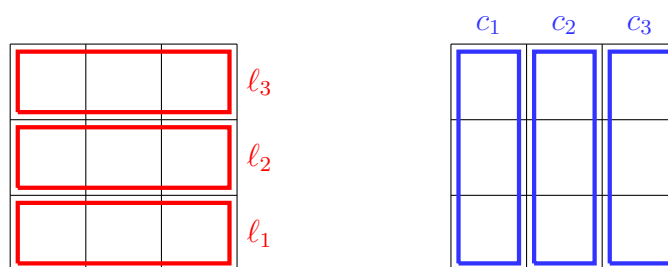
Le problème demande trouver le plus grand entier vérifiant une certaine propriété. Il contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que tout tableau vérifiant l'énoncé contient au plus 67 réels strictement positifs (cette étape s'appelle *l'analyse*). Dans un second temps, on donne un exemple de tableau vérifiant l'énoncé et contenant exactement 67 réels strictement positifs (cette étape s'appelle *la construction*).

Analyse :

Considérons un tableau vérifiant les propriétés de l'énoncé. Considérons un sous-tableau T de taille 3×3 du tableau 10×10 . Les réels du tableau T peuvent être répartis dans trois rectangles horizontaux 1×3 dont on nomme ℓ_1, ℓ_2 et ℓ_3 les sommes, avec $\ell_i \leq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ par hypothèse. Ces mêmes réels peuvent aussi être répartis dans trois rectangles verticaux 3×1 dont on nomme c_1, c_2 et c_3 les sommes, avec $c_i \geq 0$ pour $i = 1, 2, 3$ par hypothèse. En calculant la somme s des réels dans le tableau selon les deux pavages, on déduit

$$0 \leq c_1 + c_2 + c_3 = s = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 \leq 0.$$

On déduit notamment que $s = 0$, puis, puisque les c_i sont de même signe et les ℓ_i sont de même signe, $c_1 = c_2 = c_3 = \ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = 0$.



Ainsi, la somme des réels de n'importe quel rectangle du tableau T est nulle. Comme n'importe quel rectangle de taille 3×1 ou 1×3 appartient à un sous-tableau de taille 3×3 , la somme des réels de n'importe quel rectangle 3×1 ou 1×3 est nulle.

On déduit en particulier que tout rectangle de taille 1×3 ou 3×1 contient au plus deux réels strictement positifs (sinon la somme du rectangle ne serait pas nulle). On considère alors le pavage suivant (Figure gauche) de la grille 10×10 , en rectangle de 3 cases consécutives. Comme chacun des 33 rectangles contient au plus 2 réels strictement positifs, et que la case violette contient éventuellement un réel strictement positif, le tableau contient au plus $2 \times 33 + 1 = 67$ réels strictement positifs.

1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1
1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1
-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1
1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1
-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1
1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1
-2	1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2
1	1	-2	1	1	-2	1	1	-2	1

Construction : On propose un tableau vérifiant l'énoncé et dans lequel il y a exactement 67 réels strictement positifs. C'est le cas du tableau de la figure de droite, dans lequel chaque rectangle de trois cases est de somme nulle, de sorte qu'il vérifie bien la propriété.

Commentaire des correcteurs

Ce problème a été très bien traité dans l'ensemble, bravo! Il est cependant dommage que de nombreuses élèves aient perdu des points en omettant un argument crucial à la fin. Une fois qu'il a été montré que tous les rectangles 1×3 et 3×1 contiennent au moins un nombre négatif au sens large, il reste à exhiber un pavage du carré 10×10 par 33 tels rectangles et un carré 1×1 pour conclure. Nous tenons également à rappeler qu'il faut se méfier des arguments d'optimisation locale sur un problème plus complexe. Par exemple, il n'y a pas de raison à priori que dans une configuration atteignant la borne optimale sur le carré 10×10 , chaque carré 3×3 contienne le nombre maximal de réels strictement positifs.

Exercice 9. Soient k et m deux entiers strictement positifs tels que $k \geq 3$. On suppose qu'il existe au moins k entiers $n \geq 2$ distincts vérifiant la propriété suivante : la somme de n et du plus grand diviseur de n différent de n est égale à m . Montrer que $m > 3^{2^{k-2}}$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 9

Pour tout entier n solution, on lui associe le couple (d, p) , où d est son plus grand diviseur propre et p son plus petit diviseur premier, de sorte que $n = dp$. On a donc $m = dp + d = d(p + 1)$. Notons que si deux entiers n et n' sont solutions, et si (d, p) et (d', p') sont les couples associés, alors $d(p + 1) = m = d'(p' + 1)$, donc si $d = d'$ ou si $p = p'$ alors $n = n'$.

Considérons $n_1, \dots, n_k$ les k entiers donnés par l'énoncé et notons $d_1, \dots, d_k$ leur plus grand diviseurs respectifs et $p_1, \dots, p_k$ leur plus petit diviseur premier respectif. Comme les p_i sont deux à deux distincts, on peut, quitte à renuméroter les n_i , supposer que $2 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Pour un indice i fixé, comme p_i est le plus petit diviseur de n , d_i ne possède pas de facteur premier inférieur à p_i et n'est divisible par aucun des $p_1, \dots, p_{i-1}$.

Fixons un indice $i \geq 2$, afin que p_i et p_{i+1} soient impairs et que $p_{i+1} \geq p_i + 2$. On considère l'égalité

$$d_i(p_i + 1) = d_{i+1}(p_{i+1} + 1).$$

Comme d_{i+1} n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à p_{i+1} et que les diviseurs premiers de $p_i + 1$ sont tous inférieurs à p_i , d_{i+1} est premier avec $p_i + 1$. On déduit que $p_i + 1 \mid p_{i+1} + 1$.

Cette première divisibilité donne $m \geq p_k + 1 \geq 2(p_{k-1} + 1) \geq \dots \geq 2^{k-2}(p_2 + 1) \geq 3 \cdot 2^{k-2}$. Mais cette estimation n'est pas suffisante pour conclure. Il faut donc aller plus loin.

On reprend l'équation ci-dessus. Celle-ci devient

$$d_{i+1} \frac{p_{i+1} + 1}{p_i + 1} = d_i.$$

Comme le plus petit facteur premier de d_i est supérieur à p_i , c'est aussi le cas du plus petit facteur premier de $\frac{p_{i+1} + 1}{p_i + 1}$, donc $p_{i+1} + 1 \geq p_i(p_i + 1)$. On a donc $p_{i+1} \geq p_i^2 + p_i - 1 > p_i^2$. On déduit que $p_k > p_{k-1}^2 > \dots > p_2^{2^{k-2}} \geq 3^{2^{k-2}}$. Comme $p_k + 1$ divise m , on a donc bien $m > 3^{2^{k-2}}$.

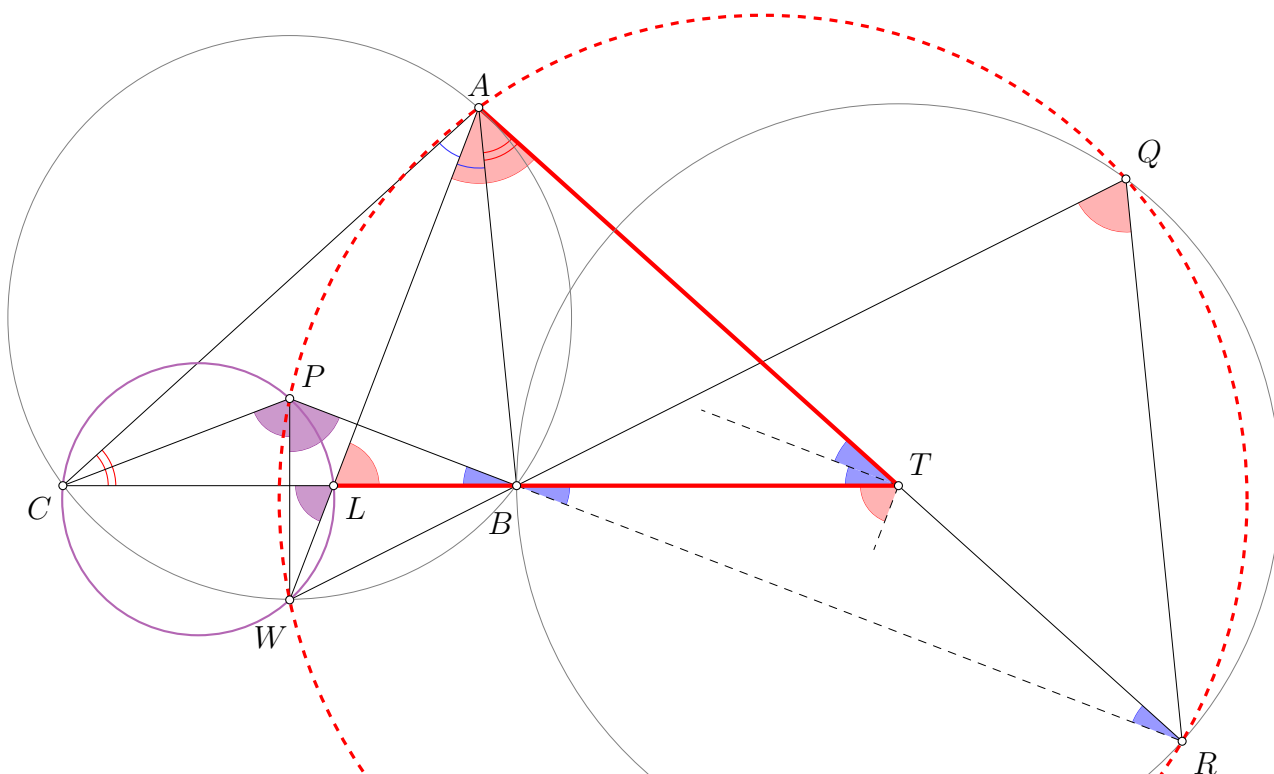
Commentaire des correcteurs

L'exercice a été très peu abordé, et seules 3 personnes ont vraiment avancé dessus (et une seule personne a résolu l'exercice en entier). Il est dommage que peu d'élèves aient réussi à montrer que les p_i étaient distincts.

Exercice 10. Soit ABC un triangle dans lequel $AB < AC$ et soit Ω son cercle circonscrit. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ intersecte le segment $[BC]$ au point L et recoupe le cercle Ω au point W . Soit P un point distinct de W sur le cercle circonscrit au triangle WLC tel que $BP = CP$. La tangente au cercle Ω au point A coupe la droite (BC) au point T . Soit Q un point sur la droite (BW) tel que $TB = TQ$.

Montrer que les points Q, A, P et W sont cocycliques.

SOLUTION DE L'EXERCICE 10



Une méthode pour montrer que quatre points sont cocycliques est de procéder en deux temps en trouvant un cinquième point appartenant au cercle. Ici, on introduit R le point d'intersection de la droite (AT) avec le cercle de centre T et de rayon TB (et situé à l'extérieur du segment $[AT]$). On va montrer que $APWR$ et $AWRQ$ sont cycliques, ce qui implique qu'ils sont inscrits dans le même cercle.

Remarquons que le triangle LAT est isocèle : En effet, cela vient du fait que $\widehat{ALB} = \widehat{ACB} + \widehat{CAL} = \widehat{BAT} + \widehat{LAB} = \widehat{TAL}$ d'après le théorème de l'angle tangent.

Montrons que W, A, R et Q sont cocycliques : D'après le théorème de l'angle au centre,

$$\widehat{WQR} = \widehat{BQR} = \frac{1}{2}\widehat{BTR} = \frac{1}{2}(180^\circ - \widehat{ATB}) = \widehat{LAT} = \widehat{WAR},$$

où la dernière égalité d'angle vient du fait que ALT est isocèle. Ceci montre que W, A, Q et R sont cocycliques.

Montrons que P, B et R sont alignés : C'est la chasse aux angles pour montrer que W, P, A et R sont cocycliques qui nous ramène à démontrer cet alignement. On montre que $\widehat{BPC} = \widehat{BTR}$. Comme les triangles BPC et BTR sont isocèles, cette égalité d'angle implique qu'ils sont semblables et que $\widehat{PBC} = \widehat{RBT}$.

Puisque (PW) est la médiatrice de $[BC]$, et d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{CPB} = 2\widehat{CPW} = 2\widehat{CLW} = 2\widehat{ALB}$. D'autre part, $\widehat{BTR} = 180^\circ - \widehat{ATB} = \widehat{ALB} + \widehat{TAL} = 2\widehat{ALB}$, comme voulu.

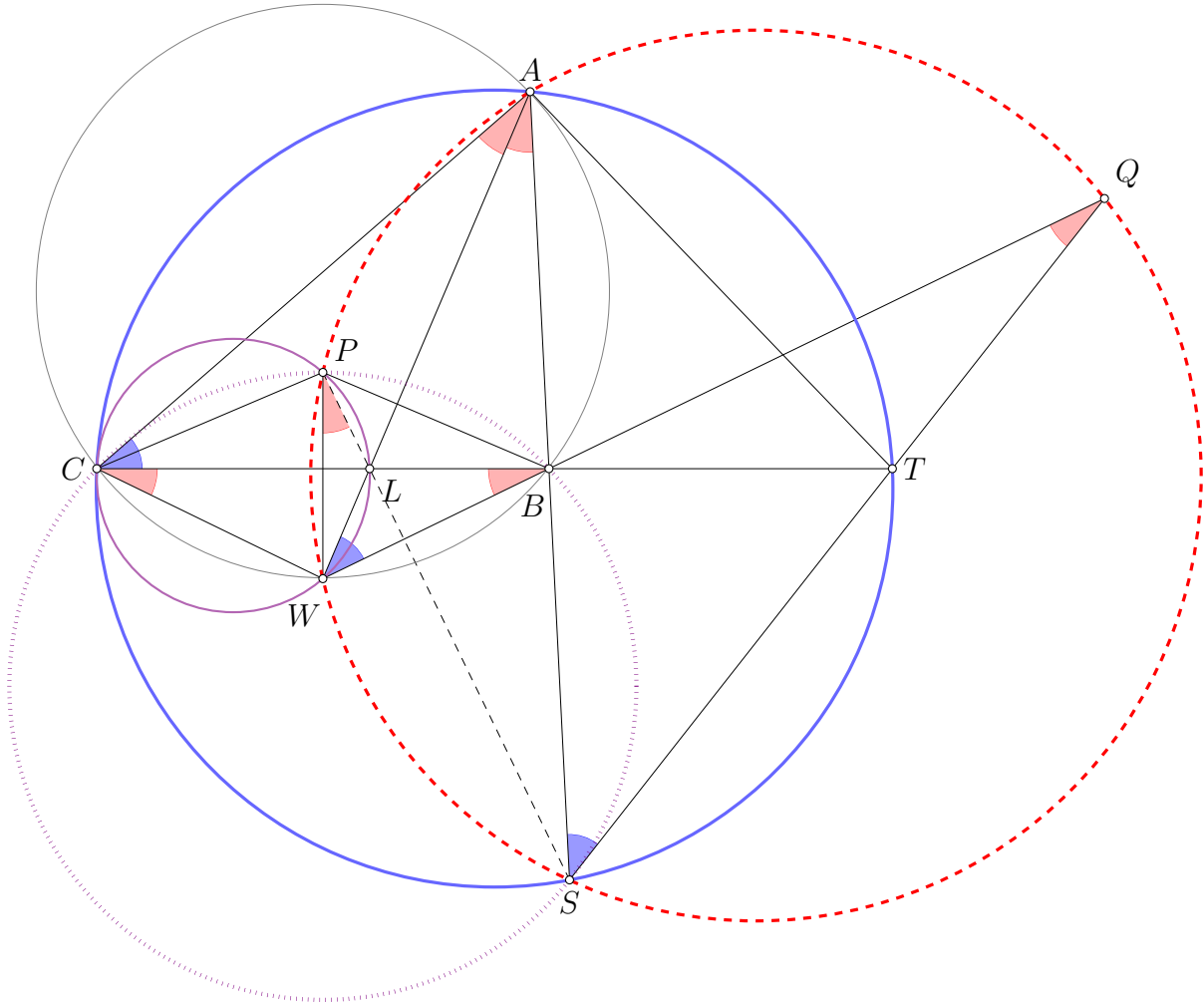
On conclut que W, P, A et R sont cocycliques : En effet,

$$\widehat{WPR} = \widehat{WPC} = \widehat{CLW} = \widehat{ALT} = \widehat{LAT} = \widehat{WAR}.$$

Ceci conclut.

SOLUTION N°2

Dans cette solution, on ne travaille plus avec le point R . On introduit le point S d'intersection de (QT) avec (AB) .



Soit S le point d'intersection des droites (AB) et (QT) . On montre successivement que A, Q, W et S sont cocycliques, que A, T, S et C sont cocycliques, que S, L et P sont alignés et enfin que A, P, W et S sont cocycliques. On note toujours α, β et γ les angles du triangle ABC .

Les points A, Q, W et S sont cocycliques : Puisque les triangles CWB et BTQ sont isocèles, $\widehat{BQT} = \widehat{QBT} = \widehat{CBW} = \alpha/2$. Ceci implique que $\widehat{WQS} = \widehat{WAS} = \alpha/2$ et que les points A, Q, W et S sont cocycliques.

Les points A, T, S et C sont cocycliques : D'après la cocyclicité précédente, $\widehat{ASQ} = \widehat{AWQ} = \widehat{AWB} = \widehat{ACB}$, ce qui donne $\widehat{AST} = \widehat{ACT}$, d'où la cocyclicité annoncée.

Si les points S, L et P sont alignés, alors les points A, P, W et S sont cocycliques : En effet, on aurait alors $\widehat{WPS} = \widehat{WPL} = \widehat{WCL} = \alpha/2 = \widehat{WAS}$.

Les points S, L et P sont alignés : On commence par montrer que C, P, B et S sont cocycliques. En effet,

$$180^\circ - \widehat{CSB} = 180^\circ - \widehat{CSA} = 180^\circ - \widehat{CTA} = 2\widehat{ALT} = 2\widehat{CLW} = 2\widehat{CPW} = \widehat{BPC}.$$

On a alors $\widehat{CPS} = \widehat{CBS} = 180^\circ - \widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{CWL} = \widehat{CPL}$, ce qui prouve que les points sont alignés.

Remarque : De nombreuses variantes de cette solution avec le point S existent, vu qu'il y a beaucoup de façons de définir le point S .

Une façon alternative de prouver que P, L et S sont alignés est de remarquer que $\widehat{SCB} = \widehat{SAT} = \widehat{ACB}$, donc (CL) est la bissectrice de $\widehat{ACS}$. Le point L est donc le centre du cercle inscrit du triangle ACS . On déduit que

$$\widehat{BLS} = \widehat{SCL} + \widehat{CSL} = 90^\circ - \widehat{CAL} = \widehat{PWC} = \widehat{PLC}.$$

Commentaire des correcteurs

Le problème, bien qu'utilisant uniquement de la chasse aux angles, nécessitait d'introduire un point pour pouvoir des avancées significatives, ce que très peu d'élèves ont cherché à faire. Lorsqu'aucune autre idée semble permettre d'avancer dans le problème, chercher quels autres points intéressants semblent être sur l'objet étudié peut être fructueux.