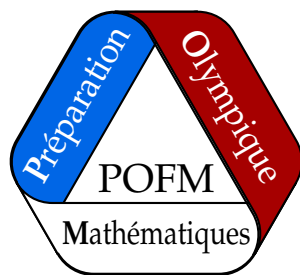


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 14 JANVIER 2026

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Junior

Exercice 1. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} \geq 3.$$

SOLUTION DE L'EXERCICE 1

D'après l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique,

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{bc}{a^3} \cdot \frac{ca}{b^3} \cdot \frac{ab}{c^3}} = 3 \sqrt[3]{\frac{1}{abc}}.$$

D'après l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique encore,

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3} = 1,$$

ce qui implique que

$$3 \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \geq 3 \cdot 1 = 3$$

et donne l'inégalité voulue.

SOLUTION N°2

D'après l'inégalité des mauvais élèves,

$$\frac{bc}{a^3} + \frac{ca}{b^3} + \frac{ab}{c^3} = \frac{bc/a^2}{a} + \frac{ca/b^2}{b} + \frac{ab/c^2}{c} \geq \frac{\left(\frac{\sqrt{bc}}{a} + \frac{\sqrt{ca}}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{c}\right)^2}{a + b + c}.$$

D'après l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique,

$$\frac{\sqrt{bc}}{a} + \frac{\sqrt{ca}}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{c} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{c}} = 3.$$

On déduit, en combinant avec l'hypothèse, que

$$\frac{\left(\frac{\sqrt{bc}}{a} + \frac{\sqrt{ca}}{b} + \frac{\sqrt{ab}}{c}\right)^2}{a + b + c} \geq \frac{3^2}{3} = 3$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

SOLUTION N°3

On met toutes les fractions au même dénominateur. L'inégalité devient

$$\frac{(bc)^4 + (ca)^4 + (ab)^4}{(abc)^3} \geq 3 \Leftrightarrow (bc)^4 + (ca)^4 + (ab)^4 \geq 3(abc)^3.$$

Dans le but de rendre cette inégalité homogène, on multiplie par 3 des deux côtés, en utilisant l'hypothèse de l'énoncé, l'inégalité devient

$$(a + b + c)((bc)^4 + (ca)^4 + (ab)^4) \geq 9(abc)^3.$$

On applique désormais l'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique :

$$(a + b + c)((bc)^4 + (ca)^4 + (ab)^4) \geq 3\sqrt[3]{abc} \cdot 3\sqrt[3]{(bc)^4 \cdot (ca)^4 \cdot (ab)^4} = 9\sqrt[3]{a^9b^9c^9} = 9(abc)^3,$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Remarque : Après avoir pensé à homogénéiser l'équation, on peut également développer le membre de gauche et appliquer l'inégalité de Muirhead, puisque le membre de gauche s'écrit (en reprenant les notations du cours d'inégalités de la POFM)

$$\sum_{sym} a^5b^4 + \frac{1}{2} \sum_{sym} a^4b^4c,$$

et que chacune des somme est supérieure à $6a^3b^3c^3$ par l'inégalité de Muirhead.

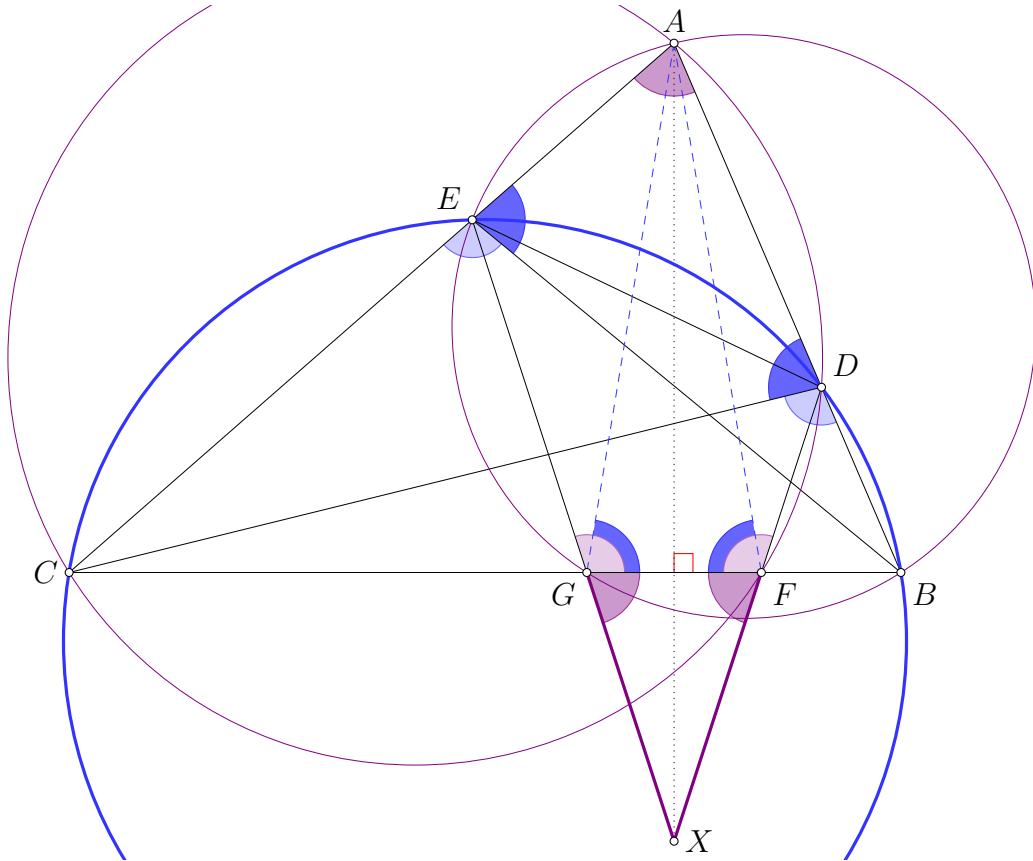
Commentaire des correcteurs

L'exercice est globalement très bien réussi. Beaucoup d'élèves ont eu le réflexe d'appliquer l'inégalité arithmético-géométrique sur le membre de gauche, ce qui est très bien - même si ce n'est pas la seule solution. L'utilisation de la condition $a + b + c = 3$ est sans doute ce qui a posé le plus de problèmes. On rappelle que beaucoup des inégalités que l'on manipule habituellement sont homogènes et donc qu'il peut être intéressant de chercher à homogénéiser l'inégalité (ici en multipliant le membre de gauche par $a + b + c$ et celui de droite par 3). On pouvait aussi utiliser l'inégalité arithmético-géométrique pour trouver $abc \leq 1$, ce qui a été remarqué par un bon nombre d'élèves.

Exercice 2. Soit ABC un triangle et soient D et E des points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que les points B, D, E et C sont cocycliques. Le cercle circonscrit au triangle ADC recoupe le segment $[BC]$ au point F , tandis que le cercle circonscrit au triangle AEB recoupe le segment $[BC]$ au point G .

Montrer que les droites (DF) et (EG) se coupent sur la perpendiculaire à (BC) passant par A .

SOLUTION DE L'EXERCICE 2



Soit X le point d'intersection des droites (DF) et (EG) . En traçant la figure, on constate que la droites (AX) est vraisemblablement la médiatrice du segment $[GF]$, ce qui montrerait qu'il s'agit bien de la perpendiculaire à (BC) passant par A . Nous allons donc montrer cette conjecture.

D'après le théorème de l'angle inscrit dans les cercles passant par B, G, E, A et A, D, F, C ,

$$\widehat{XGF} = 180^\circ - \widehat{BGE} = \widehat{BAE} = \widehat{DAC} = 180^\circ - \widehat{DFC} = \widehat{GF\dot{X}}.$$

Le triangle GFX est donc isocèle en X .

D'autre part, toujours avec le théorème de l'angle inscrit,

$$\widehat{AFG} = \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{CDB} = 180^\circ - \widehat{CEB} = \widehat{BEA} = \widehat{AGB}.$$

Le triangle GFA est donc isocèle en A . Les points A et X sont donc sur la médiatrice du segment $[FG]$ comme annoncé, ce qui conclut le problème.

Commentaire des correcteurs

L'exercice est plutôt bien réussi. Il nécessitait d'être à l'aise avec le théorème de l'angle inscrit ce que beaucoup d'élèves ont montré. Les principales difficultés ont résidé dans la stratégie à adopter pour montrer que des droites sont concourantes ainsi que dans les interprétations géométriques des relations d'angles. En effet, il faut faire attention à ne pas s'enfermer dans le calcul systématique mais comprendre ce que signifient les égalités d'angles démontrées : trop d'élèves n'explicitent pas le fait qu'un triangle avec deux angles égaux est isocèle et donc qu'un certain nombre de ses droites remarquables sont confondues. Enfin, on rappelle encore qu'il est important de faire une belle figure propre lors de la résolution d'un exercice de géométrie, et de faire attention à ne pas dessiner une configuration trop particulière (typiquement il ne fallait pas prendre F et G confondus ici).

Exercice 3. On appelle *note* d'une paire (x, y) d'entiers strictement positifs la quantité $\text{PGCD}(x^2, y^2)$.

Soit $n \geq 3$ un entier. On appelle *arrangement* de n entiers strictement positifs $a_1, \dots, a_n$ le choix de n paires d'entiers de la forme (a_i, a_j) avec $i \neq j$ de sorte que chaque entier a_i appartient à exactement 2 paires. Le *prix* de cet arrangement est la somme des notes de chaque paire.

Un entier $n \geq 3$ est dit *sympathique* si il satisfait la propriété suivante : pour tout entier $m \geq 1$, il existe n entiers et un arrangement de ces n entiers dont le prix est exactement 2025^m .

Déterminer le plus petit et le plus grand entier sympathique.

Par exemple, si $n = 4$, que les quatre entiers choisis sont $a_1 = 2, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 6$ et que l'arrangement est $(a_1, a_2), (a_1, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_2)$, le prix de l'arrangement est $2^2 + 1^2 + 3^2 + 2^2 = 18$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3

Réponse : Le plus petit entier sympathique est $n = 6$ tandis que le plus grand entier sympathique est $n = 2025$.

L'énoncé demande de déterminer le plus petit entier vérifiant une certaine propriété. Il contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si $n \leq 5$ ou $n \geq 2026$, n n'est pas sympathique. Dans un second temps, on montre que $n = 6$ et $n = 2025$ sont sympathiques. La combinaison de ces deux étapes garantit que 6 et 2025 sont respectivement le plus petit et le plus grand entier sympathique.

Étape 1(a) : Si $n \geq 2026$, n n'est pas sympathique.

En effet, quelque soit les n entiers $a_1, \dots, a_n$, $\text{PGCD}(a_i^2, a_j^2) \geq 1$ pour tout $i \neq j$, donc le prix de n'importe quel arrangement est la somme de n nombres supérieurs ou égaux à 1. Un tel prix est donc toujours strictement plus grand que 2025 lorsque $n \geq 2026$. n ne satisfait donc pas la propriété pour $m = 1$.

Étape 1(b) : Si $n \leq 5$, n n'est pas sympathique.

Traitons le cas $n = 5$. Soit $m \geq 1$ et $a_1, \dots, a_n$ des entiers. Supposons que l'on dispose d'un arrangement des a_i dont le prix vaut 2025^m . Pour toute paire (x, y) d'entiers, on vérifie que $\text{PGCD}(x^2, y^2) = \text{PGCD}(x, y)^2$. Ainsi, le prix est la somme de n carrés parfaits notés $b_1^2, \dots, b_5^2$. On a alors

$$b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2 + b_5^2 = 2025^m.$$

En regardant cette équation modulo 8, le membre de droite vaut $2025^m \equiv 1^m = 1 \pmod{8}$. Comme chaque b_i^2 vaut 0, 1 ou 4 modulo 8, exactement un des cinq nombres, disons b_1 , vérifie $b_1^2 \equiv 1 \pmod{8}$ donc exactement un des cinq nombres est impair. Notons a_i et a_j les deux entiers tels que $b_1 = \text{PGCD}(a_i, a_j)$, qui sont donc impairs. Le nombre a_i est présent dans une autre paire de l'arrangement, donc la note de cette paire doit être impaire, et au moins un autre des entiers b_2, b_3, b_4 et b_5 est impair, ce qui est absurde. 5 n'est donc pas sympathique.

L'argument s'adapte pour montrer que 3 et 4 ne sont pas sympathiques, le point clé étant que si la somme de trois ou de quatre carrés vaut 1 modulo 8, exactement l'un de ces carrés est impair.

Étape 2(a) : 2025 est sympathique.

Soit $m \geq 1$ un entier. On pose $a_1 = \dots = a_{2025} = 45^{m-1}$. La note de n'importe quelle paire d'entiers vaut $45^{2m-2} = 2025^{m-1}$, et donc quelque soit l'arrangement choisi, son prix vaut $2025 \cdot 2025^{m-1} = 2025^m$. 2025 est donc sympathique.

Étape 2(b) : 6 est sympathique.

Soit $m \geq 1$ un entier. On pose

$$a_1 = a_2 = 30 \cdot 45^{m-1}, \quad \text{et} \quad a_3 = a_4 = a_5 = a_6 = 15 \cdot 45^{m-1}.$$

On choisit l'arrangement constitué des paires $(a_1, a_2), (a_2, a_3), (a_3, a_4), (a_4, a_5), (a_5, a_6), (a_6, a_1)$. La note de (a_1, a_2) vaut $900 \cdot 2025^{m-1}$ et la note des cinq autres paires vaut $225 \cdot 2025^{m-1}$, et la somme de ces notes vaut bien $2025 \cdot 2025^{m-1}$. 6 est donc sympathique.

Remarque : Pour deviner la construction du cas $n = 6$, on peut commencer par chercher une construction pour $m = 1$ et remarquer que le prix est une expression homogène de degré 2. Ainsi, si on dispose de 6 entiers $a_1, \dots, a_6$ et d'un arrangement dont le prix vaut 2025, alors les le même arrangement appliqué aux six entiers $45^{m-1}a_1, \dots, 45^{m-1}a_6$ aura un prix de 2025^{m-1} .

Commentaire des correcteurs

Problème difficile, très peu d'élèves sont parvenus à obtenir la note maximale. Beaucoup d'élèves passent à côté de points faciles à obtenir notamment dans la preuve que 2025 est le plus grand entier sympathique ce qui était accessible à tous. La démonstration de la minimalité de 6 comme entier sympathique constituait le cœur de la preuve, et reposait sur l'étude des valeurs prises par les carrés modulo 4 et 8. Cette étude doit devenir un réflexe chez l'élève qui vise de concourir aux JBMO. Enfin, il est regrettable que certains élèves fassent encore des erreurs dans la lecture de l'énoncé, et parviennent avec des exemples d'arrangements ou de prix sans avoir compris l'exemple donné dans l'énoncé. Plusieurs élèves ont reproché le fait que $\text{PGCD}(x^2, y^2) = \text{PGCD}(x, y)^2$: ce fait là étant connu, il n'était pas la peine de le prouver.

Exercice 4. On considère une rangée de n fleurs, numérotées de 1 à n de gauche à droite (la fleur la plus à gauche étant numérotée 1, celle la plus à droite numérotée n), avec $n \geq 3$ un entier. Maïa l'abeille butine les fleurs en suivant la règle suivante :

Maïa commence par butiner la fleur sur laquelle elle se trouve au début. Si Maïa vient de butiner la fleur de numéro k , son déplacement consiste en k mouvements d'une fleur vers une fleur adjacente. Elle commence déjà par se déplacer vers la droite. Si elle atteint la fleur n , et qu'il lui reste des mouvements, elle se déplace alors vers la gauche. Si elle atteint la fleur 1, et qu'il lui reste des mouvements, elle utilise les mouvements restants pour se déplacer vers la droite. L'ensemble de ces trajets constitue un *déplacement*. Maïa butine *uniquement* la fleur sur laquelle elle atterrit au bout du k -ème trajet.

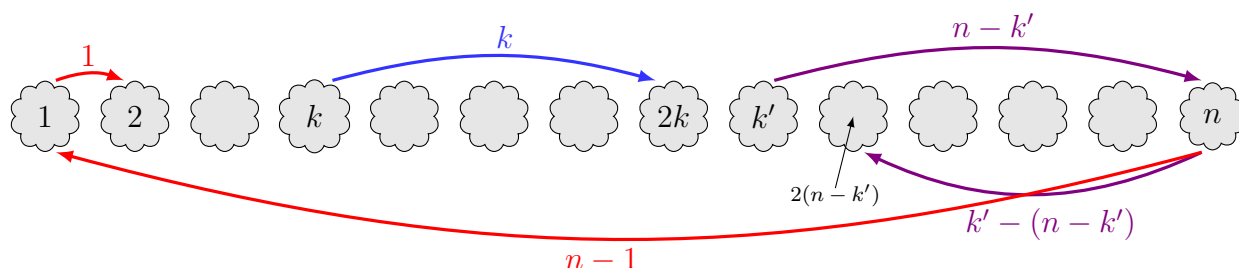
Maïa butine ainsi indéfiniment. Une fleur est dite *surexposée* si, quelle que soit la fleur sur laquelle Maïa démarre son aventure, elle butinera cette fleur au bout d'un nombre fini de déplacements. Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe exactement une fleur surexposée.

Par exemple, si $n = 8$ et que Maïa butine la fleur 3, elle effectue trois mouvements vers la droite, donc butine ensuite la fleur 6. Ensuite elle effectue deux déplacements vers la droite, puis comme elle a atteint la fleur 8, effectue les quatre mouvements restants vers la gauche, et butine la fleur 4. Ensuite, elle effectue quatre mouvements vers la droite et butine la fleur 8. Ensuite, comme elle a déjà atteint la fleur 8, elle effectue 7 mouvements vers la gauche. Elle a alors atteint la fleur 1, donc effectue 1 mouvement vers la droite, et butine la fleur 2. Ainsi si Maïa butine la fleur 3, les quatre fleurs qu'elle butinera ensuite seront les fleurs de numéro 6, 4, 8 et 2, dans cet ordre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4

Réponse : Les entiers n pour lesquels il existe exactement une fleur surexposée sont les entiers n de la forme $n = 3 \cdot 2^\ell$ avec $\ell \geq 0$. On peut deviner cette réponse en regardant l'énoncé pour des petites valeurs de n .

Notations : Étant donné un entier k , on pose $f(k)$ le numéro de la fleur que Maïa butine après avoir butiné la fleur k .



- Si $k \leq n/2$, alors Maïa se déplace toujours vers la droite, et $f(k) = 2k$.
- Si $n/2 < k \leq n - 1$, Maïa se déplace de $n - k$ fleurs vers la droite, ce qui l'amène sur la fleur n , depuis laquelle elle effectue $k - (n - k) = 2k - n$ trajets vers la gauche, ce qui l'amène à la fleur $n - (2k - n)$, de sorte que $f(k) = 2(n - k)$.
- Si $k = n$, Maïa effectue $n - 1$ trajets vers la gauche, ce qui l'amène sur la fleur 1, depuis laquelle elle effectue un trajet vers la droite. On a donc $f(n) = 2$.

En résumé

$$f(k) = \begin{cases} 2k & \text{si } k \leq n/2 \\ 2(n - k) & \text{si } n/2 < k \leq n - 1 \\ 2 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Dans la suite, on note u_m la m -ème fleur que Maïa butine. On a donc $u_{m+1} = f(u_m)$ pour tout indice m .

Soit n un entier solution et a est le numéro de la fleur surexposée.

Si n est solution, alors $3 \mid n$ et $a = 2n/3$.

Soit u_0 la fleur de départ sur laquelle se trouve Maïa. Par définition de a , il existe un indice i tel que $u_i = a$. Alors $u_{i+1} = f(u_i) = f(a)$. Ainsi, $f(a)$ est surexposé. Par unicité, on a donc $f(a) = a$. Cette égalité est impossible lorsque $a \leq n/2$ et lorsque $a = n$, donc $n/2 < a \leq n-1$, et $2(n-a) = a$, soit $a = 2n/3$. Ceci implique le résultat annoncé.

Réciproquement, si 3 divise n et si Maïa démarre depuis la fleur $a = 2n/3$, elle ne la quittera jamais, donc aucune autre fleur n'est surexposée. L'entier n est donc solution si toute fleur de départ amène Maïa à butiner un jour la fleur $a = 2n/3$.

Résolution de l'exercice : Posons $n = 3 \cdot 2^\ell \cdot x$ avec x impair.

- Si $x = 1$ et $n = 3 \cdot 2^\ell$: On montre que toute suite (u_m) est constante égale à a à partir d'un certain rang. Comme $f(a) = a$, si $u_i = a$, alors la suite (u_{m+i}) est constante égale à a par récurrence immédiate. Il suffit donc de montrer que la suite (u_m) atteint la valeur a .

Maïa finit par butiner la fleur a si elle part d'une puissance de 2. Elle finit donc également par la butiner si elle passe par la fleur n .

Sinon, si la suite (u_m) ne passe pas par n , on montre que pour tout indice m , $v_2(u_{m+1}) \geq v_2(u_m) + 1$. Il suffit en effet de faire la disjonction de cas sur les valeurs de k . Si $u_m < n/2$, $f(u_m) = 2u_m$ donc $v_2(f(u_m)) = v_2(u_m) + 1$, ce qui implique le résultat. Si $n/2 < u_m \leq n-1$, puisque $v_2(u_m) \leq v_2(n)$, $2^{v_2(u_m)} \mid n - u_m$ et

$$v_2(f(u_m)) = v_2(2(n - u_m)) = 1 + v_2(n - u_m) \geq 1 + v_2(u_m).$$

Ainsi, la suite $(v_2(u_m))$ est une suite strictement croissante d'entiers, tout en étant majorée par ℓ , ce qui est absurde. On conclut donc que $n = 3 \cdot 2^\ell$ est solution.

- Si $x > 1$: Notons que $a = 2^{\ell+1}x$. Montrons que si x ne divise pas k , alors x ne divise pas $f(k)$. Déjà notons que k ne peut valoir n , sinon x diviserait 2. Si $k \leq n/2$, comme x est impair et ne divise pas k , x ne divise pas $2k = f(k)$. Si $n/2 < x \leq n-1$, x divise $2n$ mais pas $2k$, donc ne divise pas $2(n-k)$, d'où le résultat.

Ainsi si le point de départ de Maïa n'est pas divisible par x (par exemple en commençant en 1), aucune des fleurs visitée ensuite l'est, donc l'abeille ne passe jamais par a , qui n'est pas surexposée. Ainsi n n'est pas solution.

Remarque 1 : Dans le cas $x = 1$, plutôt que d'étudier la croissance de $v_2(u_m)$, on peut aussi remarquer que, lorsque $1 \leq k \leq n-1$, que $f(k) \equiv \pm 2k \pmod{2n}$. Par conséquent, pour tout entier $m \geq 0$, et tant que la fleur n n'apparaît pas parmi les fleurs $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$, on sait que $u_m \equiv \pm 2^m u_0 \pmod{2n}$. En particulier, puisque $2^{\ell+1}$ divise $2n$, on déduit que $u_{\ell+1} \equiv \pm 2^{\ell+1} u_0 \equiv 0 \pmod{2^{\ell+1}}$. Puisque a est la seule fleur de numéro divisible par $2^{\ell+1}$, Maïa la butine donc malgré tout.

Remarque 2 : Avec l'observation de la remarque 1, on propose une autre manière de conclure dans le cas $x > 1$. Si $x > 1$ et si Maïa part de la fleur 1, puisque x divise $a = 2n/3$ et n mais aucune puissance de 2, une récurrence sur m indique que $u_m \equiv \pm 2^m \pmod{2n}$ n'est égal ni à n , ni à a . Maïa ne butinera donc jamais la fleur a .

SOLUTION N°2

Dans cette solution, on procède par récurrence en comparant les trajectoires de Maïa dans des champs de tailles n et $2n$. On note $f_n(k)$ le numéro de la fleur que Maïa butine après avoir butiné la fleur k dans un champ de n fleurs. L'expression de f_n a été donnée dans la solution 1.

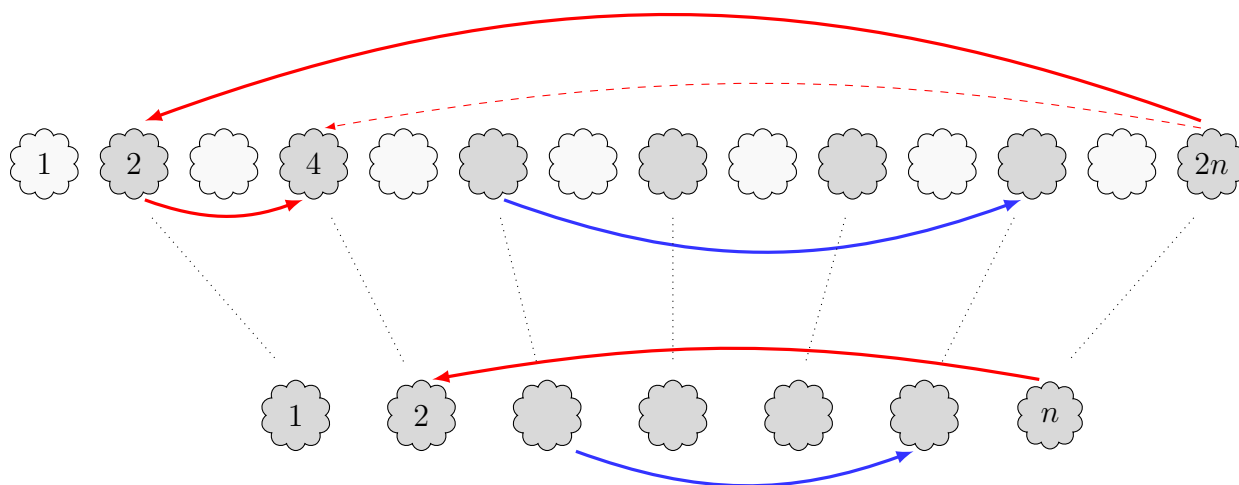
De même que dans la solution précédente, on montre que n est solution précisément lorsque 3 divise n et la fleur $a = 2n/3$ est surexposée, puis on pose $a = 2^{\ell+1} \times x$ et $n = 3 \times 2^\ell \times x$.

On s'intéresse d'abord au cas où $\ell = 0$, c'est-à-dire où n est impair. Les seuls entiers k tels que $f_n(k) = a$ sont a lui-même, ainsi que $k = a/2$, voire $k = n$ lorsque $n = 3$. Ces deux entiers sont impairs, alors que f_n est à valeurs paires. Par conséquent, Maïa n'atteint la fleur a que si elle est partie de $a/2$, a ou éventuellement n . Cela fait au plus trois fleurs de départ, donc $n \leq 3$, et on vérifie bien que $n = 3$ est solution.

On regarde maintenant le cas où $\ell \geq 1$. Puisque f_n est à valeurs paires, il s'agit pour Maïa d'atteindre la fleur a en partant de n'importe quelle fleur paire.

Or, au vu des définitions de f_n et $f_{n/2}$, la trajectoire qu'elle suit dans son champ de taille n en partant de la fleur $2k$ est la même que celle qu'elle aurait suivie dans un champ de taille $n/2$ en partant de la fleur k , à deux détails près :

- cette nouvelle trajectoire s'obtient en divisant par 2 les fleurs butinées le long de l'ancienne trajectoire ;
- si Maïa passe par les fleurs n puis 2 et 4 sur l'ancienne trajectoire, la nouvelle trajectoire nous fait oublier de passer par la fleur $1 = 2/2$.



Cela dit, puisque $n \neq 3$, $a \neq 2$, et la fleur 1 n'est pas égale à $a/2$. Par conséquent, l'ancienne trajectoire contient la fleur a si et seulement si la nouvelle trajectoire contient la fleur $a/2$.

En particulier, la fleur $2n/3$ appartient à toutes les trajectoires de Maïa dans un champ de taille n (qu'elles partent d'une fleur paire ou pas) si et seulement si la fleur $n/3$ appartient à toutes les trajectoires de Maïa dans un champ de taille $n/2$. Autrement dit, n est solution si et seulement si $n/2$ est solution. En itérant, on déduit que si x est un entier impair, l'entier $2^\ell \times 3 \times x$ est solution si et seulement si $3 \times x$ est solution. D'après notre étude du cas où n est impair, cela se produit si et seulement si $x = 1$, d'après notre observation du cas n impair ci-dessus.

En conclusion, les solutions sont les entiers de la forme $n = 3 \times 2^\ell$.

Commentaire des correcteurs

Le quatrième problème était difficile à mener jusqu'au bout en toute rigueur. Une première étape valorisée et vue dans un certain nombre de copies consiste à reformuler le problème et montrer que si une fleur existe, elle doit être un point fixe et calculer sa valeur (pour en déduire que 3 divise n). Il fallait bien comprendre que les mouvements de l'abeille étaient de 3 sortes possibles. Pour montrer ensuite que l'on a bien une solution si $n = 3 \cdot 2^n$, et pour montrer que l'on n'en a pas dans le cas contraire (par exemple avec un cycle non complet infini), un bon outil est l'introduction des valuations 2-adiques, mais il faut faire attention au passage de la fleur n à 2, ce qui a parfois été oublié.

Énoncés Senior

Exercice 5. On considère une rangée de n fleurs, numérotées de 1 à n de gauche à droite (la fleur la plus à gauche étant numérotée 1, celle la plus à droite numérotée n), avec $n \geq 3$ un entier. Maïa l'abeille butine les fleurs en suivant la règle suivante :

Maïa commence par butiner la fleur sur laquelle elle se trouve au début. Si Maïa vient de butiner la fleur de numéro k , son déplacement consiste en k mouvements d'une fleur vers une fleur adjacente. Elle commence déjà par se déplacer vers la droite. Si elle atteint la fleur n , et qu'il lui reste des mouvements, elle se déplace alors vers la gauche. Si elle atteint la fleur 1, et qu'il lui reste des mouvements, elle utilise les mouvements restants pour se déplacer vers la droite. L'ensemble de ces trajets constitue un *déplacement*. Maïa butine *uniquement* la fleur sur laquelle elle atterrit au bout du k -ème trajet.

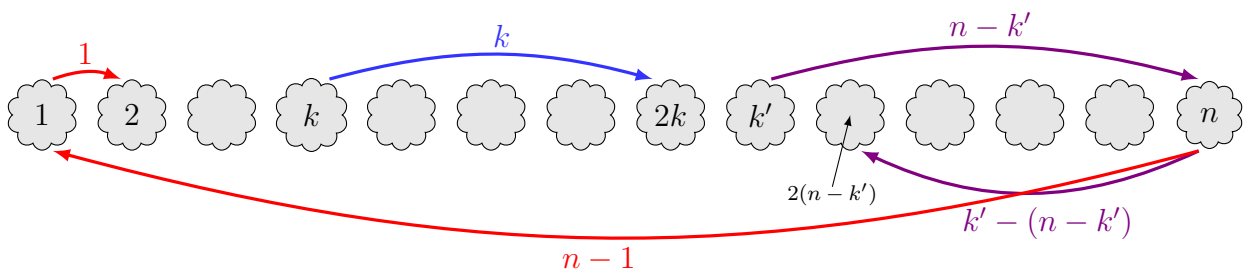
Maïa butine ainsi indéfiniment. Une fleur est dite *surexposée* si, quelle que soit la fleur sur laquelle Maïa démarre son aventure, elle butinera cette fleur au bout d'un nombre fini de déplacements. Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe exactement une fleur surexposée.

Par exemple, si $n = 8$ et que Maïa butine la fleur 3, elle effectue trois mouvements vers la droite, donc butine ensuite la fleur 6. Ensuite elle effectue deux déplacements vers la droite, puis comme elle a atteint la fleur 8, effectue les quatre mouvements restants vers la gauche, et butine la fleur 4. Ensuite, elle effectue quatre mouvements vers la droite et butine la fleur 8. Ensuite, comme elle a déjà atteint la fleur 8, elle effectue 7 mouvements vers la gauche. Elle a alors atteint la fleur 1, donc effectue 1 mouvement vers la droite, et butine la fleur 2. Ainsi si Maïa butine la fleur 3, les quatre fleurs qu'elle butinera ensuite seront les fleurs de numéro 6, 4, 8 et 2, dans cet ordre.

SOLUTION DE L'EXERCICE 5

Réponse : Les entiers n pour lesquels il existe exactement une fleur surexposée sont les entiers n de la forme $n = 3 \cdot 2^\ell$ avec $\ell \geq 0$. On peut deviner cette réponse en regardant l'énoncé pour des petites valeurs de n .

Notations : Étant donné un entier k , on pose $f(k)$ le numéro de la fleur que Maïa butine après avoir butiné la fleur k .



- Si $k \leq n/2$, alors Maïa se déplace toujours vers la droite, et $f(k) = 2k$.
- Si $n/2 < k \leq n - 1$, Maïa se déplace de $n - k$ fleurs vers la droite, ce qui l'amène sur la fleur n , depuis laquelle elle effectue $k - (n - k) = 2k - n$ trajets vers la gauche, ce qui l'amène à la fleur $n - (2k - n)$, de sorte que $f(k) = 2(n - k)$.
- Si $k = n$, Maïa effectue $n - 1$ trajets vers la gauche, ce qui l'amène sur la fleur 1, depuis laquelle elle effectue un trajet vers la droite. On a donc $f(n) = 2$.

En résumé

$$f(k) = \begin{cases} 2k & \text{si } k \leq n/2 \\ 2(n-k) & \text{si } n/2 < k \leq n-1 \\ 2 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Dans la suite, on note u_m la m -ème fleur que Maïa butine. On a donc $u_{m+1} = f(u_m)$ pour tout indice m .

Soit n un entier solution et a est le numéro de la fleur surexposée.

Si n est solution, alors $3 \mid n$ et $a = 2n/3$.

Soit u_0 la fleur de départ sur laquelle se trouve Maïa. Par définition de a , il existe un indice i tel que $u_i = a$. Alors $u_{i+1} = f(u_i) = f(a)$. Ainsi, $f(a)$ est surexposé. Par unicité, on a donc $f(a) = a$. Cette égalité est impossible lorsque $a \leq n/2$ et lorsque $a = n$, donc $n/2 < a \leq n-1$, et $2(n-a) = a$, soit $a = 2n/3$. Ceci implique le résultat annoncé.

Réciproquement, si 3 divise n et si Maïa démarre depuis la fleur $a = 2n/3$, elle ne la quittera jamais, donc aucune autre fleur n'est surexposée. L'entier n est donc solution si toute fleur de départ amène Maïa à butiner un jour la fleur $a = 2n/3$.

Résolution de l'exercice : Posons $n = 3 \cdot 2^\ell \cdot x$ avec x impair.

- Si $x = 1$ et $n = 3 \cdot 2^\ell$: On montre que toute suite (u_m) est constante égale à a à partir d'un certain rang. Comme $f(a) = a$, si $u_i = a$, alors la suite (u_{m+i}) est constante égale à a par récurrence immédiate. Il suffit donc de montrer que la suite (u_m) atteint la valeur a .

Maïa finit par butiner la fleur a si elle part d'une puissance de 2. Elle finit donc également par la butiner si elle passe par la fleur n .

Sinon, si la suite (u_m) ne passe pas par n , on montre que pour tout indice m , $v_2(u_{m+1}) \geq v_2(u_m) + 1$. Il suffit en effet de faire la disjonction de cas sur les valeurs de k . Si $u_m < n/2$, $f(u_m) = 2u_m$ donc $v_2(f(u_m)) = v_2(u_m) + 1$, ce qui implique le résultat. Si $n/2 < u_m \leq n-1$, puisque $v_2(u_m) \leq v_2(n)$, $2^{v_2(u_m)} \mid n - u_m$ et

$$v_2(f(u_m)) = v_2(2(n - u_m)) = 1 + v_2(n - u_m) \geq 1 + v_2(u_m).$$

Ainsi, la suite $(v_2(u_m))$ est une suite strictement croissante d'entiers, tout en étant majorée par ℓ , ce qui est absurde. On conclut donc que $n = 3 \cdot 2^\ell$ est solution.

- Si $x > 1$: Notons que $a = 2^{\ell+1}x$. Montrons que si x ne divise pas k , alors x ne divise pas $f(k)$. Déjà notons que k ne peut valoir n , sinon x diviserait 2. Si $k \leq n/2$, comme x est impair et ne divise pas k , x ne divise pas $2k = f(k)$. Si $n/2 < k \leq n-1$, x divise $2n$ mais pas $2k$, donc ne divise pas $2(n-k)$, d'où le résultat.

Ainsi si le point de départ de Maïa n'est pas divisible par x (par exemple en commençant en 1), aucune des fleurs visitée ensuite l'est, donc l'abeille ne passe jamais par a , qui n'est pas surexposée. Ainsi n n'est pas solution.

Remarque 1 : Dans le cas $x = 1$, plutôt que d'étudier la croissance de $v_2(u_m)$, on peut aussi remarquer que, lorsque $1 \leq k \leq n-1$, que $f(k) \equiv \pm 2k \pmod{2n}$. Par conséquent, pour tout entier $m \geq 0$, et tant que la fleur n n'apparaît pas parmi les fleurs $u_0, u_1, \dots, u_{m-1}$, on sait que $u_m \equiv \pm 2^m u_0 \pmod{2n}$. En particulier, puisque $2^{\ell+1}$ divise $2n$, on déduit que $u_{\ell+1} \equiv \pm 2^{\ell+1} u_0 \equiv 0 \pmod{2^{\ell+1}}$. Puisque a est la seule fleur de numéro divisible par $2^{\ell+1}$, Maïa la butine donc malgré tout.

Remarque 2 : Avec l'observation de la remarque 1, on propose une autre manière de conclure dans le cas $x > 1$. Si $x > 1$ et si Maïa part de la fleur 1, puisque x divise $a = 2n/3$ et n mais aucune puissance de 2, une récurrence sur m indique que $u_m \equiv \pm 2^m \pmod{2n}$ n'est égal ni à n , ni à a . Maïa ne butinera donc jamais la fleur a .

SOLUTION N°2

Dans cette solution, on procède par récurrence en comparant les trajectoires de Maïa dans des champs de tailles n et $2n$. On note $f_n(k)$ le numéro de la fleur que Maïa butine après avoir butiné la fleur k dans un champ de n fleurs. L'expression de f_n a été donnée dans la solution 1.

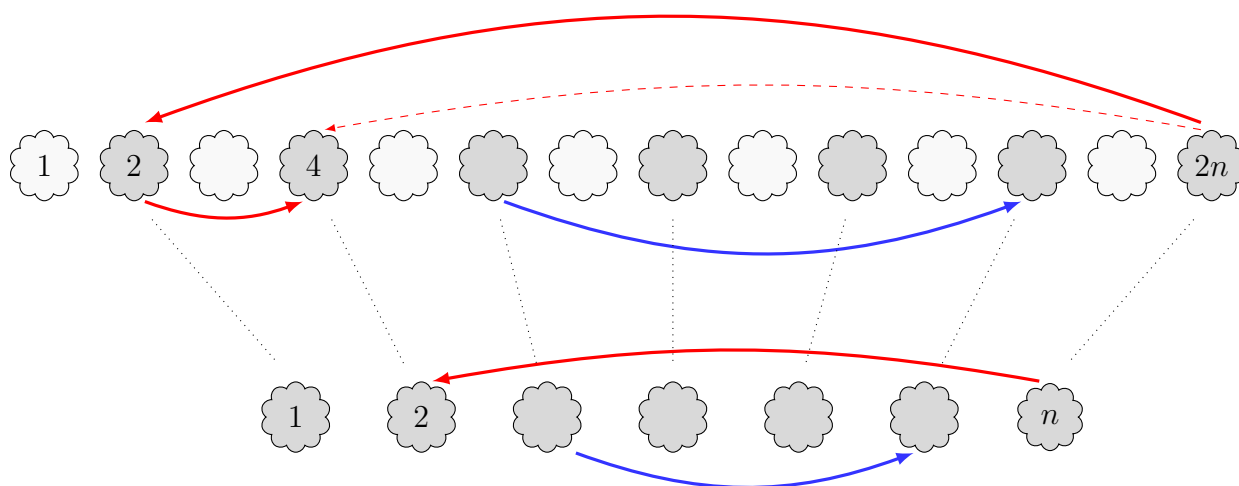
De même que dans la solution précédente, on montre que n est solution précisément lorsque 3 divise n et la fleur $a = 2n/3$ est surexposée, puis on pose $a = 2^{\ell+1} \times x$ et $n = 3 \times 2^\ell \times x$.

On s'intéresse d'abord au cas où $\ell = 0$, c'est-à-dire où n est impair. Les seuls entiers k tels que $f_n(k) = a$ sont a lui-même, ainsi que $k = a/2$, voire $k = n$ lorsque $n = 3$. Ces deux entiers sont impairs, alors que f_n est à valeurs paires. Par conséquent, Maïa n'atteint la fleur a que si elle est partie de $a/2$, a ou éventuellement n . Cela fait au plus trois fleurs de départ, donc $n \leq 3$, et on vérifie bien que $n = 3$ est solution.

On regarde maintenant le cas où $\ell \geq 1$. Puisque f_n est à valeurs paires, il s'agit pour Maïa d'atteindre la fleur a en partant de n'importe quelle fleur paire.

Or, au vu des définitions de f_n et $f_{n/2}$, la trajectoire qu'elle suit dans son champ de taille n en partant de la fleur $2k$ est la même que celle qu'elle aurait suivie dans un champ de taille $n/2$ en partant de la fleur k , à deux détails près :

- cette nouvelle trajectoire s'obtient en divisant par 2 les fleurs butinées le long de l'ancienne trajectoire ;
- si Maïa passe par les fleurs n puis 2 et 4 sur l'ancienne trajectoire, la nouvelle trajectoire nous fait oublier de passer par la fleur $1 = 2/2$.



Cela dit, puisque $n \neq 3$, $a \neq 2$, et la fleur 1 n'est pas égale à $a/2$. Par conséquent, l'ancienne trajectoire contient la fleur a si et seulement si la nouvelle trajectoire contient la fleur $a/2$.

En particulier, la fleur $2n/3$ appartient à toutes les trajectoires de Maïa dans un champ de taille n (qu'elles partent d'une fleur paire ou pas) si et seulement si la fleur $n/3$ appartient à toutes les trajectoires de Maïa dans un champ de taille $n/2$. Autrement dit, n est solution si et seulement si $n/2$ est solution. En itérant, on déduit que si x est un entier impair, l'entier

$2^\ell \times 3 \times x$ est solution si et seulement si $3 \times x$ est solution. D'après notre étude du cas où n est impair, cela se produit si et seulement si $x = 1$, d'après notre observation du cas n impair ci-dessus.

En conclusion, les solutions sont les entiers de la forme $n = 3 \times 2^\ell$.

Commentaire des correcteurs

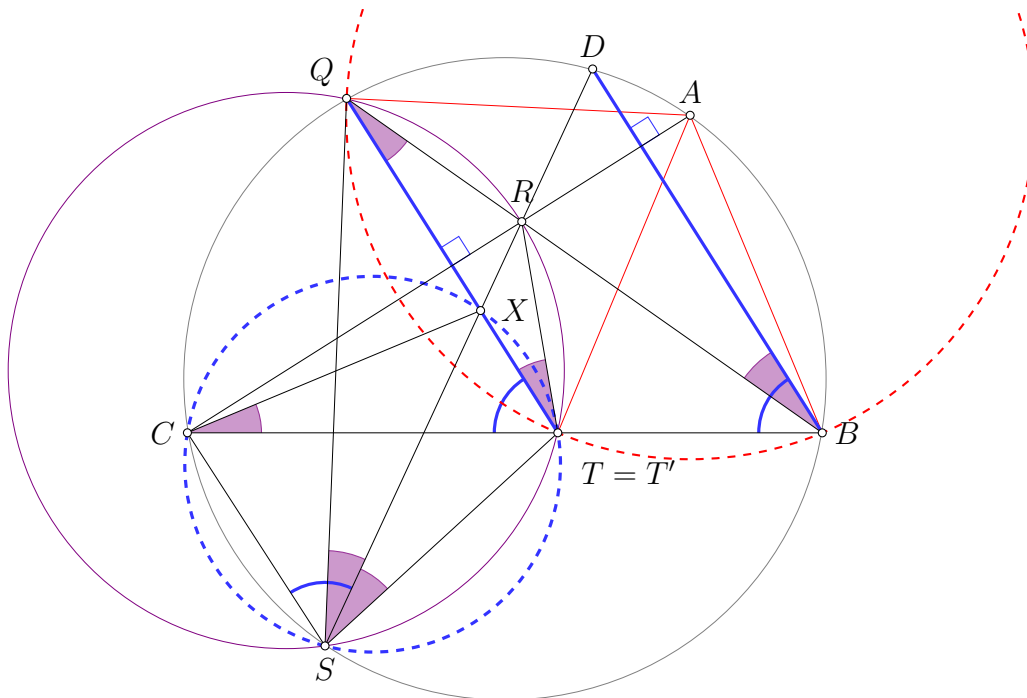
Le problème a été plutôt bien résolu : une quarantaine de personnes ont obtenu une solution complète, une cinquantaine de personnes ont quasiment résolu le problème. Quelques erreurs récurrentes :

- Un certain nombre d'élève prétend avoir une preuve du fait que n est solution si et seulement si $n = 3 \times 2^k$. Donner des bouts d'argument n'est pas faire une preuve, et faire semblant d'avoir une preuve n'est pas une bonne stratégie : au mieux, le correcteur l'ignorera, au pire lorsqu'il aura le doute sur un point, voyant des affirmations fausses, il risque de ne pas le donner. Il ne faut pas pour autant rien écrire quand on ne trouve pas un problème, mais écrire ce qu'on a trouvé, indiquer quand on pense qu'un raisonnement n'est pas correct.
- Pas mal d'élèves ont quand même réussi la première partie de la preuve : montrer que si n vérifie l'énoncé, alors 3 divise n et la fleur surexposée est $2n/3$. Cela valait 1 point.
- Certains élèves ont oublié qu'à priori, l'abeille pouvait aller en n , puis jusqu'à 1, puis repartir. Il était important de voir que cela se passait uniquement lorsque l'abeille était en n , et ne pas oublier que si l'abeille était en n , elle se retrouvait en 2 ensuite (ce qui était souvent un cas pénible à gérer dans plusieurs parties de la preuve).
- Certains ont essayé de suivre la solution 2 en comparant les trajectoires de l'abeille pour n et $2n$. Pour cela il fallait une explication claire de ce qui se passait, et comme dans le corrigé faire attention aux passages en n et en $2n$ qui engendraient des problèmes.
- L'égalité $v_2(a - b) = \min(v_2(a), v_2(b))$ n'est vraie que si $v_2(a) \neq v_2(b)$. Ici par chance utiliser cette égalité, au lieu de l'inégalité $v_2(a - b) \geq \min(v_2(a), v_2(b))$ suffisait, mais dans un autre problème cela aurait pu énormément impacter la preuve.

Exercice 6. Soit ABC un triangle aux angles aigus dans lequel $AB < AC$ et Γ son cercle circonscrit. La perpendiculaire à (AC) passant par B recoupe le cercle Γ au point D . Soit Q le point de Γ , autre que B , vérifiant $AQ = AB$. Les droites (BQ) et (AC) se coupent au point R . La droite (DR) recoupe le cercle Γ au point S . On note T le point d'intersection du cercle circonscrit au triangle QRS et du segment $[BC]$. Les droites (QT) et (RS) se coupent au point X .

Montrer que les droites (CX) et (AB) sont perpendiculaires.

SOLUTION DE L'EXERCICE 6



Pour tracer Q , on trace le cercle de centre A de rayon AB . Sur la figure, ce cercle semble passer par T . Cette première conjecture guide notre résolution.

Soit T' le second point d'intersection du segment $[BC]$ avec le cercle de centre A passant par B , de sorte que $AT' = AB$. D'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle circonscrit à ATQ ,

$$\widehat{T'QB} = \frac{1}{2}\widehat{TAB} = \frac{1}{2}(180^\circ - 2\widehat{ABT'}) = 90^\circ - \widehat{ABC}.$$

D'autre part,

$$\widehat{DBQ} = \widehat{QBA} - \widehat{DBA} = \widehat{BQA} - (90^\circ - \widehat{BAC}) = \widehat{ACB} + \widehat{BAC} - 90^\circ = 90^\circ - \widehat{ABC}.$$

Ainsi, $\widehat{T'QB} = \widehat{QBD}$ et les droites (QT') et (DB) sont parallèles.

On déduit que les droites (AC) et (QT') sont perpendiculaires. Dans le triangle AQT' isocèle en A , la droite (AC) est donc la hauteur issue de A et de fait la médiatrice du segment $[QT']$. En particulier, le triangle QRT' est isocèle en R . On a donc

$$\widehat{RT'Q} = \widehat{RQT'} = \widehat{DBQ} = \widehat{DSQ} = \widehat{RSQ}.$$

Les points Q, R, T' et S sont donc cocycliques, ce qui implique que $T = T'$.

On a alors, avec le parallélisme des droites (DB) et (QT) , $\widehat{XSC} = \widehat{DSC} = \widehat{DBC} = \widehat{XTC}$. Les points X, T, S et C sont donc cocycliques. Il vient finalement

$$\widehat{TCX} = \widehat{XST} = \widehat{RST} = \widehat{RQT} = \widehat{BQT} = 90^\circ - \widehat{ABC}.$$

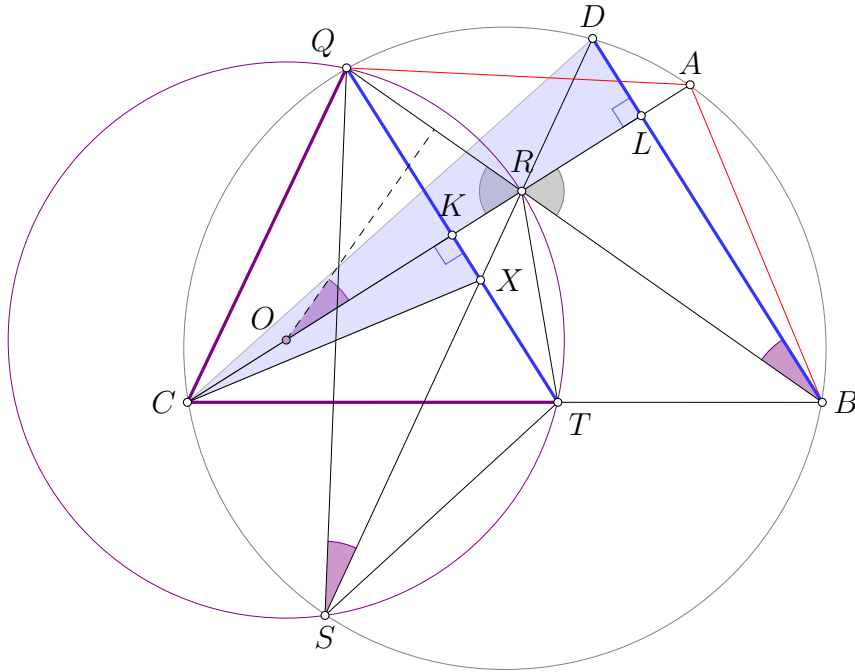
Ceci prouve que l'angle formé par les droites (CX) et (AB) vaut 90° .

Remarque : On pouvait aussi définir T' comme le symétrique de Q par rapport à (AC) . Avec cette définition, la droite (AC) est la médiatrice de (QT') , donc (QT') et (BD) sont parallèles. On a alors en plus

$$\widehat{T'CR} = \widehat{RCQ} = \widehat{QBA} = \widehat{BQA} = \widehat{BCA},$$

ce qui justifie que B, T' et C sont alignés. On peut alors conclure comme dans la solution précédente, en notant qu'il faut encore calculer $\widehat{TQB} = 90^\circ - \widehat{ABC}$.

SOLUTION N°2



Dans cette preuve, on ne redéfinit pas le point T et on n'utilise pas que $AT = AB$. En revanche, on introduit de nouveaux points pour raisonner à l'aide de triangles semblables.

Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle QRS . Lorsqu'on trace ce cercle, on remarque que O semble appartenir à (AC) . On va donc le montrer. D'après le théorème de l'angle au centre et le théorème de l'angle inscrit,

$$\widehat{QRO} = 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{QOR} = 90^\circ - \widehat{QSR} = 90^\circ - \widehat{QDB} = \widehat{ARB},$$

ce qui signifie que les points O , R et A sont alignés. Le point O appartient donc à la droite (AC) . Puisque $AQ = AB$, A est le pôle Sud de C dans le triangle QCB et la droite (AC) est la bissectrice de $\widehat{QCB}$. Or O est sur cette bissectrice, mais aussi sur la médiatrice de $[QT]$ et n'est pas le pôle Sud de C dans CQT (il est à l'intérieur du triangle CQT). Ainsi, la bissectrice de $\widehat{CQT}$ et la médiatrice de $[QT]$ sont confondus et les droites (AC) et (QT) sont perpendiculaires. Ceci donne notamment que les droites (QT) et (DB) sont parallèles.

Notons L le point d'intersection de (DB) avec (AC) et K le point d'intersection de (QT) et (AC) . D'après le paragraphe précédent, K est également le milieu de $[QT]$. D'après le théorème de Thalès, on a

$$\frac{KX}{LD} = \frac{KR}{LR} = \frac{KQ}{LB} = \frac{KT}{LB} = \frac{KC}{LC}.$$

Combinée, avec l'égalité $\widehat{XKC} = \widehat{DLB} = 90^\circ$, cette égalité de rapports montre que les triangles DLC et CKX sont semblables. On déduit notamment que

$$\widehat{XCK} = \widehat{LCD} = 90^\circ - \widehat{CDB} = 90^\circ - \widehat{CAB},$$

ce qui reprouve que les droites (CX) et (AB) sont perpendiculaires.

Commentaire des correcteurs

Le problème 6 était difficile. Pour preuve 4 personnes ont donné une solution complète et 19 élèves seulement ont réussi à obtenir des points partiels, avec une grande majorité de 1/7.

Pour résoudre ce problème, il était impératif (tout du moins dans toutes les solutions connues des correcteurs) de conjecturer des propriétés additionnelles satisfaites par le point T (e.g. $AT = BT$ ou T symétrique de Q par (AC) etc...). Au contraire de beaucoup de problèmes de géométrie, où une conjecture est nécessaire à la résolution, il n'était cette fois-ci pas si facile de démontrer les propriétés de T une fois que l'on les avait devinées. D'ailleurs les rares élèves ayant réussi cette étape ont en fait résolu complètement le problème. L'astuce, pourtant pas si inconnue, était de redéfinir le point T pour ensuite démontrer qu'il correspondait exactement à la définition de l'énoncé. Il est un peu étonnant et décevant que peu d'élèves y aient pensé.

Les correcteurs ont cependant apprécié la myriade de conjectures (juste!) faites dans les copies.

Beaucoup ont supposé les propriétés que T avait sans arriver à les démontrer. C'était une stratégie qui a pu s'avérer payante. On déplore cependant un trop grand nombre d'élèves qui auraient dû poser leurs hypothèses/conjectures plus clairement. En plus de faciliter la vie des correcteurs, cela permet souvent de se mettre les idées en place.

On souhaite également rappeler deux consignes de rédaction en géométrie :

- Il faut définir les points supplémentaires introduits par vos soins. On ne saurait se contenter de les placer sur la figure. À titre d'exemple, tiré de l'exercice, comment faire la différence sur une figure entre l'orthocentre et l'intersection de la droite (CX) avec la droite (BD) ?
- Une chasse aux angles ne peut se retrouver seulement sur une figure. En effet, une chasse aux angles est une suite logique de raisonnements qui se traduisent par des égalité d'angles. En particulier, elle a un ordre qu'un correcteur ne peut pas lire sur une figure.

Ces deux derniers commentaires n'ont, cette fois-ci, pénalisés personne. Néanmoins, il se pourrait que cela arrive à un moment auquel cas, des points bêtes seraient perdus...

Exercice 7. Soit S un ensemble non vide (fini ou infini) d'entiers strictement positifs, tel qu'aucun entier strictement plus grand que 1 ne divise tous les éléments de S . Déterminer toutes les suites non périodiques $a_1, a_2, a_3, \dots$ d'entiers strictement positifs telles que, pour tout entier $n \geq 1$,

- $a_n \leq |a_{n+\ell} - \ell|$ pour tout entier ℓ dans S ,
- $a_n = |a_{n+\ell} - \ell|$ pour au moins un entier ℓ dans S .

Une suite $b_1, b_2, b_3, \dots$ est dite *périodique* s'il existe un entier $t \geq 1$ tel que, pour tout entier $n \geq 1$, $b_{n+t} = b_n$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 7

Réponse : Les seules suites solutions sont les suites de la forme $a_n = n + c$ pour tout entier n , avec $c \geq 0$ un entier.

Ces suites sont bien sûr solution, puisqu'alors pour tout entier $n \geq 1$ et tout entier $\ell \geq 0$ (et donc en particulier pour tout ℓ dans S), $a_n = n + c = |n + \ell + c - \ell| = |a_{n+\ell} - \ell|$. Le problème consiste donc à montrer que ces suites sont les seules solutions.

La solution est divisée en deux cas, selon que la suite est bornée ou non.

Étape 1 : Si la suite (a_n) est bornée, elle est périodique. L'idée de cette étape est d'appliquer le principe des tiroirs, non pas à la suite (a_n) mais à des k -uplets $(a_n, \dots, a_{n+k})$, pour en générer une infinité qui prennent la même valeur, avec k suffisamment grand pour pouvoir caractériser a_{n-1} en fonction des k termes suivants.

Soit $C > 0$ une constante telle que $1 \leq a_n \leq C$ pour tout indice n . Tout entier $\ell \in S$ tel que $\ell \geq 2C$ vérifie alors

$$a_n < \ell - a_{n+\ell} = |a_{n+\ell} - \ell|.$$

On déduit que les entiers ℓ de S tels que $a_n = |a_{n+\ell} - \ell|$ vérifient $\ell \leq 2C$.

Posons $L_n = (a_n, \dots, a_{n+2C-1})$. Comme chaque a_k peut prendre au plus C valeurs, il y a au plus C^{2C} $2C$ -uplets distincts. D'après le principe des tiroirs infinis, il existe (au moins) un $2C$ -uplet L tel que $L_n = L$ pour une infinité d'indices n , que l'on note dans l'ordre $n_1, n_2, \dots$

On prouve à présent que (a_n) est périodique. Fixons deux indices $m < m'$ tels que $L_m = L_{m'}$. Les conditions de l'énoncé et la remarque plus haut impliquent

$$\begin{cases} a_{m-1} \leq |a_{m+\ell-1} - \ell| & \text{pour tout } \ell \geq 1 \text{ de } S \\ a_{m-1} = |a_{m+\ell-1} - \ell| & \text{pour un } 1 \leq \ell \leq 2C \end{cases} \quad \text{donc } a_{m-1} = \min_{1 \leq \ell \leq 2C, \ell \in S} |a_{m+\ell-1} - \ell|.$$

Comme on a aussi $a_{m'-1} = \min_{1 \leq \ell \leq 2C, \ell \in S} |a_{m'+\ell-1} - \ell|$, on déduit que $a_{m-1} = a_{m'-1}$, soit $L_{m-1} = L_{m'-1}$. Une récurrence immédiate conduit à $L_{m-r} = L_{m'-r}$ pour tout entier $r \leq m$. En particulier, pour $r = n_i - n_{i-1}$, on a

$$L_{n_{i+1}-(n_i-n_{i-1})} = L_{n_i-(n_i-n_{i-1})} = L_{n_{i-1}} = L.$$

Puisque $n_{i-1} < n_{i+1} - (n_i - n_{i-1}) < n_{i+1}$, on déduit que $n_{i+1} - (n_i - n_{i-1}) = n_i$ et $n_{i+1} - n_i = n_i - n_{i-1}$. On déduit que la suite $(n_{i+1} - n_i)$ est constante égale à un entier p . On a donc $n_i = n_0 + ip$ et $L_{n_0} = L_{n_0+ip}$. Combinée avec l'égalité $L_{n_i-r} = L_{n_{i+1}-r}$ vraie pour tout r , on obtient que la suite (L_n) est périodique, ce qui implique que la suite (a_n) est périodique elle aussi.

On déduit qu'aucune suite bornée n'est solution du problème.

Étape 2 : Si la suite est non bornée, elle est de la forme $a_n = n + c$. Dans cette étape, après avoir montré que la suite prend de grandes valeurs à partir d'un certain rang (sous-étape (a)), on montre une relation de la forme $a_n \geq n + c$ pour tout n suffisamment grand (sous-étape (b)), et on construit une infinité d'indices n pour lesquels il y a égalité (sous-étape (c)). Conclure à partir de ces deux informations est plus technique que difficile (sous-étapes (d) et (e)).

Sous-étape 0 : Mise en place.

On commence par exhiber un sous-ensemble T fini de S dont les éléments sont premiers entre eux dans leur ensemble. Notons $s_1, s_2, \dots$ les éléments de S et $d_k = \text{PGCD}(s_1, \dots, s_k)$. La suite (d_k) est une suite décroissante d'entiers positifs, donc elle est constante à partir d'un certain rang k . Comme cette constante divise tous les éléments de S , elle vaut 1 par hypothèse. Ainsi, $T = \{s_1, \dots, s_k\}$ convient.

Dans la suite, on va utiliser le résultat suivant, qui est prouvé en annexe :

Propriété : Puisque les entiers $s_1, \dots, s_k$ sont premiers entre eux, il existe un entier K tel que, pour tout entier $n \geq K$, il existe des entiers positifs $n_1, \dots, n_k$ tels que $n = n_1 s_1 + \dots + n_k s_k$.

Sous-étape (a) : Soit $M = \max\{s_1, \dots, s_k, K\}$. Il existe un rang N tel que $a_n > M$ pour tout $n \geq N$.

Supposons qu'au contraire, $a_n \leq M$ pour une infinité d'entiers n . Étant donné un tel n , pour tout s de T , $a_{n-s} \leq |a_n - s| \leq M$ (a_n et s sont tous les deux dans $\llbracket 1, M \rrbracket$). Il vient par récurrence que $a_{n-(t_1+\dots+t_r)} \leq M$ pour tous $t_1, \dots, t_r$ dans T . Prenons alors m un indice et $n \geq K + m$ tel que $a_n \leq M$ (ce qui existe par hypothèse). D'après la proposition, comme $n - m \geq K$, le nombre $n - m$ s'écrit comme somme $t_1 + \dots + t_r$ d'éléments (non nécessairement distincts) de T . On a donc $a_m = a_{n-(t_1+\dots+t_r)} \leq M$. Comme c'est vrai pour tout indice m , on a montré que la suite est bornée, ce qui contredit l'hypothèse de départ.

Sous-étape (b) : Pour tout entier $n \geq N + K$, on a $a_n \geq n + a_N - N$.

Notons que pour tout $n \geq N$ et $\ell \in T$, $|a_{n+\ell} - \ell| = a_{n+\ell} - \ell$ car $a_{n+\ell} \geq M \geq \ell$.

Soit $n \geq N + K$. D'après la propriété, il existe des éléments $t_1, \dots, t_r$ de T (non nécessairement distincts) tels que $n - N = t_1 + \dots + t_r$. On a alors d'après la première condition de l'énoncé,

$$a_n - (n - N) = a_n - (t_1 + \dots + t_r) \geq a_{n-t_1} - (t_2 + \dots + t_r) \geq \dots \geq a_{n-(t_1+\dots+t_r)} = a_N.$$

Ceci donne l'inégalité.

Sous-étape (c) : On construit une suite strictement croissante $N = n_1 < n_2 < \dots$ d'indices tels que $a_{n_i} = n_i + a_N - N$ pour tout i .

On a $n_1 = N$. Supposons avoir construit $n_1 < \dots < n_r$. D'après la deuxième condition de l'énoncé, il existe $\ell \in S$ tel que $a_{n_r} = |a_{n_r+\ell} - \ell|$. Si $\ell \leq K$, alors $a_{n_r+\ell} \geq M \geq K \geq \ell$ et alors $|a_{n_r+\ell} - \ell| = a_{n_r+\ell} - \ell$. Si $\ell > K$, alors $n_r + \ell \geq N + K$ donc par l'inégalité annoncée plus haut, $a_{n_r+\ell} \geq n_r + \ell + a_N - N \geq \ell + a_N > \ell$, de sorte qu'on a de nouveau $|a_{n_r+\ell} - \ell| = a_{n_r+\ell} - \ell$. Dans tous les cas, $a_{n_r+\ell} = a_{n_r} + \ell = n_r + \ell + a_N - N$ donc $n_{r+1} = n_r + \ell$ convient.

Sous-étape (d) : On prouve que $a_n = n + a_N - N$ pour tout $n \geq N + K$ en combinant (b) et (c).

Soit $n \geq N + K$ et soit i un indice tel que $n_i \geq n + K$. D'après la proposition, il existe des éléments $t_1, \dots, t_r$ de T (non nécessairement distincts) tels que $n_i - n = t_1 + \dots + t_r$. On a alors, en utilisant la même suite d'inégalités que dans (b), l'encadrement

$$n + a_N - N \leq a_n = a_{n_i - (n_i - n)} \leq a_{n_i} - (t_1 + \dots + t_r) = n_i + a_N - N - (t_1 + \dots + t_r) = n + a_N - N.$$

On a donc bien $a_n = n + a_N - N$.

Sous-étape (e) : Notons c tel que $a_n - n = c$ pour tout n à partir d'un certain rang. Alors $c \geq 0$ et $a_n = n + c$ pour tout indice n .

La procédure standard est de considérer le plus petit indice $r \geq 1$ tel que, pour tout $n \geq r$, $a_n = n + c$ et supposer par l'absurde que $r > 1$. D'après la seconde condition du problème, il existe $\ell \in S$ tel que $a_{r-1} = |a_{r+\ell-1} - \ell|$. Comme $a_r - r = a_N - N = c$, on a $a_{r+\ell-1} - \ell = r + \ell - 1 + c - \ell = a_r - 1 \geq 0$, où on a utilisé que $a_r > 0$. On a donc $a_{r-1} = |a_{r+\ell-1} - \ell| = a_{r+\ell-1} - \ell = r - 1 + c$. Ceci contredit la minimalité de r et justifie que $r = 1$. On a alors, puisque $a_1 > 0$, que $c = a_1 - 1 \geq 0$. On a bien montré que $a_n = n + c$ pour tout $n \geq 1$.

Annexe : Preuve de la propriété.

D'après le théorème de Bezout, il existe des entiers $a_1, \dots, a_k$ (pas forcément positifs) tels que $a_1 s_1 + \dots + a_k s_k = 1$.

Soit désormais $K = (s_1 + \dots + s_k)^2 + 1$ et $n \geq K$. On a $n = na_1 s_1 + \dots + na_k s_k$, ce qui donne au moins une écriture de n comme combinaison linéaire des s_i . Parmi toutes ces écritures, prenons celle où la somme des coefficients négatifs est minimal, et on l'écrit $n = b_1 s_1 + \dots + b_k s_k$. Supposons qu'il y ait un indice i tel que $b_i < 0$. Puisque $n > (s_1 + \dots + s_k)^2$, il existe un indice j tel que $b_j > s_i$. On remplace (b_i, b_j) par $(b_i + s_j, b_j - s_i)$, ce qui donne une autre écriture de n , mais avec une somme des coefficients négatifs strictement plus petite, ce qui est une contradiction. Ainsi, n n'a que des coefficients positifs dans son écriture.

SOLUTION N°2

Cette solution est une variante de l'étape 2 de la solution précédente. Dans celle-ci, on étudie la suite $(a_n - n)$ et on montre qu'elle est constante à partir d'un certain rang. Le même raisonnement standard permet alors de conclure qu'elle est constante.

Sous-étape (a') : Soit $M = \max\{s_1, \dots, s_k\}$. Il existe un rang N tel que $a_n > M$ pour tout $n \geq N$.

Cette preuve est la même que la preuve de la sous-étape (a).

Sous-étape (b') : Pour tout $n \geq N$ et tout $k \geq K$, $a_n - n \leq a_{n+k} - (n + k)$.

Notons que pour tout $n \geq N$ et $\ell \in T$, $|a_{n+\ell} - \ell| = a_{n+\ell} - \ell$ car $a_{n+\ell} \geq M \geq \ell$.

Soit $n \geq N$ et $k \geq K$. D'après la proposition, il existe des éléments $t_1, \dots, t_r$ de T (non nécessairement distincts) tels que $k = t_1 + \dots + t_r$. On a alors d'après la première condition de l'énoncé,

$$a_{n+k} - k = a_{n+k} - (t_1 + \dots + t_r) \geq a_{n+k-t_1} - (t_2 + \dots + t_r) \geq \dots \geq a_{n+k-(t_1+\dots+t_r)} = a_n.$$

Ceci donne l'inégalité.

Sous-étape (c') : Soit $b_n = a_n - n$. S'il existe B tel que $b_m \leq B$ pour une infinité de m , alors (b_n) est bornée. (Autrement dit, si une sous-suite de (b_n) est bornée, toute la suite (b_n) est bornée)

Soit $n > N$. Il existe par hypothèse un entier $m > n + K$ tel que $b_m \leq B$. Mais alors d'après l'étape (b), $b_n \leq b_{n+(m-n)} = b_m < B$. Ainsi, la suite (b_n) est bornée par $\max(B, b_1, \dots, b_N)$.

Sous-étape (d') : La suite $(a_n - n)$ est constante à partir d'un certain rang.

Supposons qu'on n'est pas dans les hypothèses de l'énoncé de l'étape (c), c'est-à-dire que, pour tout B , il existe un rang L tel que $b_n > B$ pour tout $n > L$ et $b_n \leq B$ pour $n \leq L$. Prenons $B \geq \max(b_1, 1)$. Il existe un entier $\ell \in S$ tel que $a_L = |a_{L+\ell} - \ell| = |b_{L+\ell} + L|$. Comme $b_{L+\ell} \geq B > 0$ par hypothèse, $a_L = b_{L+\ell} + \ell$, ce qui se réécrit $b_L = b_{\ell+L}$. Pourtant, $b_{\ell+L} > B \geq b_L$, ce qui est absurde.

On a donc montré qu'on était dans les conditions de (c'), ce qui implique que la suite (b_n) est bornée. Si elle n'était pas constante à partir d'un certain rang, comme elle est bornée, elle prendrait deux valeurs une infinité de fois, contredisant l'étape (b').

Sous-étape (e') : La suite $(a_n - n)$ est constante et positive.

Il s'agit du même raisonnement de l'étape (e).

Commentaire des correcteurs

Problème peu abordé, et où une seule personne a réussi à avancer significativement. On regrette des erreurs de manipulations d'inégalités et de valeur absolue. Un nombre choquant et trop important de copies a supposé que le ℓ qui réalisait l'égalité était le même pour tout n . Cela a toujours mené ces élèves droit dans le mur. Attention à lire attentivement les énoncés.