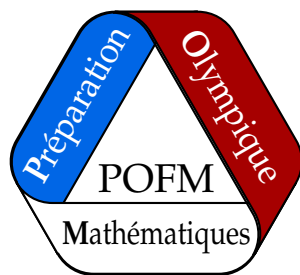


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 19 NOVEMBRE 2025

DURÉE : 4H

Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ Le **groupe Junior** est constitué des élèves nés en 2011 ou après.
Ces élèves doivent traiter les exercices 1 à 4.
- ▷ Le **groupe Senior** est constitué des élèves nés en 2010 ou avant.
Ces élèves doivent traiter les exercices 5 à 7.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées.
Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Énoncés Senior

Exercice 1. Aline joue au *solitaire quadratique*. Pour cela, elle commence par choisir deux entiers a et b non nuls et écrit au tableau l'équation $x^2 + ax + b = 0$ d'inconnue x . Chaque tour, si l'équation écrite au tableau admet deux solutions entières distinctes et non nulles notées u et v , alors Aline efface l'équation du tableau et la remplace, à sa convenance, soit par $x^2 + ux + v = 0$ soit par $x^2 + vx + u = 0$. Sinon, le jeu s'arrête. Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers à partir desquels Aline peut jouer au solitaire quadratique indéfiniment.

SOLUTION DE L'EXERCICE 1

Réponse : Une seule paire est solution, et il s'agit de la paire $(a, b) = (1, -2)$.

On se donne une paire (a, b) d'entiers telle que Aline peut jouer indéfiniment. Dans la suite, on note (a_n, b_n) le couple d'entiers tel que, après n tours de jeux, l'équation écrite au tableau est $x^2 + a_n x + b_n = 0$.

Soit n un indice fixé. Comme a_{n+1} et b_{n+1} sont solutions de $x^2 + a_n x + b_n = 0$, le polynôme $X^2 + a_n X + b_n$ se factorise alors sous la forme $(X - a_{n+1})(X - b_{n+1})$, ce qui, après développement, conduit aux relations de Viète

$$a_{n+1} + b_{n+1} = -a_n \quad \text{et} \quad a_{n+1} b_{n+1} = b_n.$$

En particulier, puisque les nombres considérés sont des entiers, $|b_{n+1}| \leq |a_{n+1} b_{n+1}| = |b_n|$, et cette inégalité est stricte lorsque $|a_{n+1}| \neq 1$. La suite $(|b_n|)$ est ainsi décroissante, mais comme ses termes sont strictement positifs, l'inégalité $|b_{n+1}| < |b_n|$ ne se produit qu'un nombre fini de fois. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'indices n tels que $|a_{n+1}| > 1$. On note alors N un indice tel que $|a_n| = 1$ pour tout $n \geq N$. On a alors plusieurs cas sur les valeurs de a_{n+1} et a_n , à partir desquels on déduit b_{n+1} à l'aide de la relation $a_n = -(a_{n+1} + b_{n+1})$:

- Si $a_{n+1} = 1$ et $a_n = 1$, alors $b_{n+1} = -2$. On déduit $b_n = -2$ et on a donc $(a_{n+1}, b_{n+1}) = (a_n, b_n)$.
- Si $a_{n+1} = 1$ et $a_n = -1$ OU si $a_{n+1} = -1$ et $a_n = 1$, alors $b_{n+1} = 0$, ce qui est exclu.
- Si $a_{n+1} = -1$ et $a_n = -1$, alors $b_{n+1} = 2$. L'équation écrite au tableau est donc $x^2 - x + 2 = 0$, qui n'a pas de solution réelle puisque $x^2 - x + 2 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0$.

On conclut que si Aline joue indéfiniment, alors au bout d'un certain nombre de tours, $(a_n, b_n) = (a_{n+1}, b_{n+1}) = (1, -2)$ et Aline écrit en permanence l'équation $x^2 + x - 2 = 0$. De plus, si $(a_N, b_N) = (1, -2)$, alors l'équation écrite au tour $N - 1$ est $(x + 2)(x - 1) = 0$, soit $x^2 + x - 2 = 0$, de sorte que $(a_{N-1}, b_{N-1}) = (1, -2)$. De proche en proche, on déduit que le couple initial choisi par Aline était également $(1, -2)$, ce qui conclut qu'il s'agit de la seule solution possible.

Réciproquement, si Aline choisit $(1, -2)$, elle peut toujours choisir à chaque tour d'écrire l'équation $x^2 + x - 2 = 0$, ce qui lui assure de jouer indéfiniment.

SOLUTION N°2

Une fois de plus, on note (a_n, b_n) les entiers tels que l'équation écrite au tableau au tour n est $x^2 + a_n x + b_n = 0$. On a toujours les relations de Viète

$$a_{n+1} + b_{n+1} = -a_n \quad \text{et} \quad a_{n+1}b_{n+1} = b_n.$$

Soit n un indice fixé. On commence par noter que si $|b_n| = 1$ pour un certain indice n , alors $|a_{n+1}| = |b_{n+1}| = 1$, donc $a_{n+1}, b_{n+1} \in \{-1, 1\}$. Toutefois, aucune des équations $x^2 \pm x \pm 1 = 0$ n'admet de solution entière, dans la mesure où $x^2 \pm x$ est toujours pair, donc l'entier $x^2 \pm x \pm 1$ est toujours impair. On a donc $|b_n| \geq 2$. On a alors

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 = (a_{n+1} + b_{n+1})^2 - 2a_{n+1}b_{n+1} = a_n^2 - 2b_n < a_n^2 + b_n^2 + 1,$$

où l'on a utilisé l'inégalité $-2b_n < b_n^2 + 1$, équivalente à $(b_n - 1)^2 > 0$, qui est vraie car $|b_n| \neq 1$. On a donc montré l'inégalité $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 \leq a_n^2 + b_n^2$. Notons que s'il y a égalité dans cette inégalité, alors $-2b_n = b_n^2$, ce qui conduit, puisque b_n est supposé non nul, à $b_n = -2$. La suite $(a_n^2 + b_n^2)$ est donc décroissante, mais comme ses termes sont strictement positifs, l'inégalité $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 < a_n^2 + b_n^2$ ne se produit qu'un nombre fini de fois. Il n'y a donc qu'un nombre fini d'indices n tels que $a_{n+1}b_{n+1} = b_n \neq -2$. On note N un indice tel que $b_n = -2$ pour tout $n \geq N$.

Or, si $b_n = b_{n+1} = -2$, alors $a_{n+1} = 1$ donc l'équation écrite au tableau au tour $n + 1$ est $x^2 + x - 2 = 0$, dont les deux solutions sont 1 et -2 .

On conclut que si Aline joue indéfiniment, alors au bout d'un certain nombre de tours, $(a_n, b_n) = (a_{n+1}, b_{n+1}) = (1, -2)$ et Aline écrit en permanence l'équation $x^2 + x - 2 = 0$. On peut alors conclure comme dans la solution précédente.

Commentaire des correcteurs

Le problème a globalement été bien réussi, malgré des soucis de rédaction un peu partout. Voici quelques commentaires plus détaillés sur des problèmes récurrents :

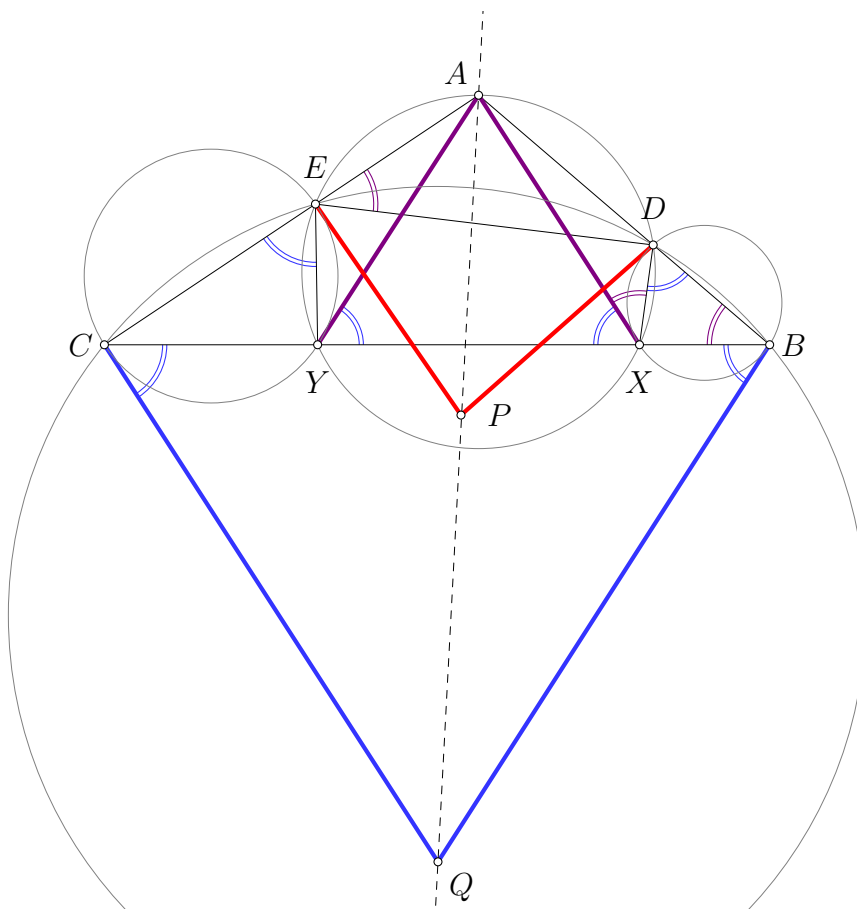
- Pas mal d'élèves se retrouvent sans aucun point à cet exercice. Il est dommage de ne pas avoir testé les petites valeurs de a et b , et surtout de ne pas avoir essayé de regarder si on pouvait garder toujours la même équation écrite. Trouver la solution et montrer qu'elle convenait valait 1 point : il est d'ailleurs dommage que certains élèves n'aient pas vérifié que la solution fonctionnait.
- Parmi les élèves n'ayant pas vraiment avancé, beaucoup ont essayé de faire de l'arithmétique, par exemple en regardant les parités. Vu que le problème 4 avait l'air d'être de l'arithmétique, il était légitime de penser que le problème 1 était plutôt un problème d'algèbre, et se dire que des considérations arithmétiques seules n'allaient pas suffire à résoudre le problème.
- Ici le problème nécessitait de poser des variables de manière propre : par exemple les suites (a_n) et (b_n) . C'est évidemment un bon premier réflexe de poser de telles suites, rien que pour gagner en clarté. De plus, cela aurait évité beaucoup d'imprécisions s'il était fixé par exemple que b_n était le coefficient constant de la n -ème équation.
- Certains élèves ont écrit les relations de Viète, mais que sur a et b . Même si cela était une bonne idée, introduire les deux suites du corrigé est la bonne méthode pour avancer, et c'est à ces suites qu'il fallait appliquer Viète pour avoir 1 point. Écrire les relations de Viète pour a, b, u et v ne rapportait aucun point.

Commentaire des correcteurs

- Certains élèves ont affirmé que comme si on note u et v les racines de $x^2 + ax + b$, alors $uv = b$ d'après les relations de Viète, donc $|u| \leq |b|$ et $|v| \leq |b|$, donc "les racines décroissent". Dire que "les racines décroissent" ne veut rien dire. Typiquement si $a = -1$ et $b = -12$, on trouve $u = 4$ et $v = -3$. Quel sens donner dans ce cas à l'affirmation que $(|a|, |b|)$ est plus grand que $(|u|, |v|)$? Ici, il fallait dire que le maximum décroissait (en le prouvant), ou que le coefficient constant décroissait, mais dire "les racines décroissent donc stationnent ou donc une vaut ± 1 " n'était pas correct, et a été sanctionné.
- On regrette que de nombreux élèves emploient à tort le terme de descente infinie. Une descente infinie, c'est un variant, qui est généralement un entier strictement positif, et qui décroît strictement à chaque étape. Dire "cela décroît" n'est pas faire une descente infinie, et dire qu'un couple ou un n -uplet décroît n'est pas non plus faire une descente infinie (sachant que ça ne veut rien dire). Ici **l'argument à employer, et à connaître, est le suivant : une suite décroissante d'entiers strictement positifs stationne, ce qui veut dire qu'à partir d'un certain rang, elle est constante**. Cela est beaucoup plus fort que le fait de dire qu'il existe une infinité de rangs n pour lesquels $r_n = r_{n+1}$. Par exemple, si on prend la suite $r_n = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, celle-ci ne stationne pas, mais on a toujours $r_{2n} = r_{2n+1}$.
- Certains élèves ont montré qu'il existait une infinité de n tels que $|a_n| = 1$, mais pas qu'à partir d'un certain rang on avait $|a_n| = 1$. Ces élèves ont ensuite supposé qu'il existait 2 ou 3 indices n consécutifs pour lesquels $|a_n| = 1$. Ce n'est malheureusement pas vrai à partir de ce qui était affirmé, donc cela a été sanctionné.
- Certains élèves oublient que les entiers peuvent être négatifs, donc oublient qu'on peut aussi avoir $a_n = -1$.
- Certains élèves montrent qu'on écrit forcément $x^2 + x - 2$, qu'on peut ensuite continuer en recopiant la même équation, et concluent que $(1, -2)$ est solution. Mais il est possible qu'Aline ait écrit plein d'équations différentes avant $x^2 + x - 2$. Il fallait montrer que forcément chaque équation *depuis le début du jeu* écrite était $x^2 + x - 2$, en faisant comme dans le corrigé, sinon cela était sanctionné.
- De nombreux élèves ont fait des erreurs de calcul dans leurs cas particuliers, oublié des cas, ou tout simplement décrété que les cas se traitaient similairement (ce qui n'était en fait pas le cas, par exemple dans le corrigé le cas de $X^2 + X - 2$ et celui de $X^2 - X - 2$ sont sensiblement différents). Il est important de faire particulièrement attention à cela, car cela peut rapidement coûter beaucoup de points.

Exercice 2. Soit ABC un triangle dans lequel l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus. Soient D et E des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ et tels que le quadrilatère $BDEC$ est cyclique. On suppose que le cercle circonscrit au triangle ADE coupe le segment $[BC]$ en deux points X et Y , de sorte que les points B, X, Y et C sont alignés dans cet ordre. On note Ω_B le cercle circonscrit au triangle BDX et Ω_C le cercle circonscrit au triangle CEY . On note P le point d'intersection de la tangente à Ω_B en D et de la tangente à Ω_C en E . On note Q le point d'intersection de la tangente à Ω_B en B et de la tangente à Ω_C en C . Montrer que les points A, P et Q sont alignés.

SOLUTION DE L'EXERCICE 2



La présence des nombreuses tangentes nous invite à montrer que les points A, P et Q sont tous les trois sur l'axe radical des cercles Ω_B et Ω_C . C'est ce que nous allons montrer successivement. On note pour cela $\mathcal{C}_{ADE}$ et $\mathcal{C}_{BCDE}$ les cercles circonscrits au triangle ADE et au quadrilatère $BCDE$.

A est sur l'axe radical de Ω_B et Ω_C : En effet, puisque les points D, B, C et E sont cocycliques, on a par puissance d'un point,

$$\mathcal{P}_{\Omega_B}(A) = AD \cdot AB = AE \cdot AC = \mathcal{P}_{\Omega_C}(A).$$

$AX = AY$: En effet, d'après le théorème de l'angle inscrit dans les cercles $\mathcal{C}_{ADE}$ et $\mathcal{C}_{BCDE}$,

$$\widehat{AXD} = \widehat{AED} = 180^\circ - \widehat{CED} = \widehat{ABX}.$$

On déduit que la droite (AX) est tangente au cercle Ω_B en X . De même, (AY) est tangente au cercle Ω_C en Y . Puisque A est sur l'axe radical des deux cercles, on a alors

$$AX^2 = \mathcal{P}_{\Omega_B}(A) = \mathcal{P}_{\Omega_C}(A) = AY^2.$$

Q est sur l'axe radical de Ω_B et Ω_C : D'après le théorème de l'angle tangent dans Ω_C et le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_{ADE}$,

$$\widehat{QCB} = \widehat{CEY} = 180^\circ - \widehat{YEA} = \widehat{YXA}.$$

Mais on a de même $\widehat{QBC} = \widehat{AYX}$, et puisque $\widehat{AXY} = \widehat{AYX}$, on trouve que le triangle BQC est isocèle, de sorte que

$$\mathcal{P}_{\Omega_B}(Q) = QB^2 = QC^2 = \mathcal{P}_{\Omega_C}(Q).$$

P est sur l'axe radical de Ω_B et Ω_C : Il s'agit là de montrer que $EP = DP$. C'est à nouveau une chasse aux angles. D'après le théorème de l'angle tangent dans Ω_B et le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{BCDE}$,

$$\widehat{EDP} = \widehat{ADP} - \widehat{EDA} = \widehat{DXB} - \widehat{EDA} = \widehat{YAD} - \widehat{ACB}.$$

D'autre part,

$$\widehat{PED} = \widehat{YED} - \widehat{YEP} = \widehat{YAD} - \widehat{ACB}.$$

On déduit bien que le triangle DEP est isocèle et que

$$\mathcal{P}_{\Omega_B}(P) = PD^2 = PE^2 = \mathcal{P}_{\Omega_C}(P).$$

Ceci conclut que les trois points sont alignés sur l'axe radical de Ω_B et Ω_C .

Remarque : Voici une autre façon de voir que $AX = AY$ et que (AX) et (AY) sont tangentes aux cercles Ω_B et Ω_C : on considère l'inversion de centre A et de rayon $r = \sqrt{AE \cdot AC}$ échangeant E et C et, a fortiori, D et B . Celle-ci échange la droite (BC) avec le cercle $\mathcal{C}_{AED}$. Comme les points X et Y sont sur ces deux objets, ils sont fixes par l'inversion. On a donc $AX^2 = AY^2 = r^2 = AE \cdot AC = AD \cdot AB$, ce qui conduit aux deux affirmations annoncées.

Commentaire des correcteurs

Le problème est très bien résolu. On regrette comme souvent dans les exercices de géométrie que de nombreuses copies se perdent en introduisant plusieurs points inutiles, et raisonnent avec ces points plutôt qu'avec ceux de l'énoncé. On note également le nombre très important de bonnes copies qui perdent du temps à redémontrer les propriétés de la puissance d'un point en parlant de triangles semblables alors que par ailleurs la copie parle de puissance d'un point voir d'axe radical à d'autres moments de la preuve. Montrer que A se trouve sur l'axe radical de Ω_B et de Ω_C ne devrait pas prendre 6 ou 7 lignes !

Exercice 3. Soient n et m deux entiers strictement positifs, avec $n \geq 2$. On place sur une table n piles de cailloux, contenant chacune respectivement $a_1, \dots, a_n$ cailloux, de sorte que l'on ait $m \leq a_i \leq i \times m$ pour tout $i = 1, 2, \dots, n$ (en particulier, $a_1 = m$).

Auriane et Edwige jouent au jeu suivant : à chaque minute, tant que cela est possible, Edwige choisit deux piles non vides et retire un certain nombre strictement positif de cailloux de la pile avec le moins de cailloux (en cas d'égalité, elle choisit la pile qu'elle veut). Auriane décide ensuite si elle retire un nombre identique de cailloux dans l'autre pile, ou si elle ajoute les cailloux qu'Edwige a retirés à l'autre pile. Lorsqu'il y a au plus une pile non vide, le jeu s'arrête.

Déterminer le plus petit entier k tel que Auriane peut garantir que, quels que soient les entiers $a_1, \dots, a_n$ et quelles que soient les décisions d'Edwige, à un moment du jeu il y aura au plus k cailloux sur la table.

SOLUTION DE L'EXERCICE 3

Réponse : Le plus petit entier k est $k = m$.

Le problème demande de déterminer le plus petit entier k vérifiant une certaine propriété, il contient donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre qu'Edwige peut s'arranger pour que le nombre de cailloux sur la table soit toujours supérieur à m (cette étape s'appelle *l'analyse*). Dans un second temps, on montre qu'Auriane peut s'arranger pour qu'il y ait au plus m cailloux sur la table à un moment du jeu (cette étape s'appelle *la construction*).

Analyse : Montrons qu'il existe un choix des a_i avec lequel Edwige peut s'arranger pour que le nombre de cailloux sur la table soit toujours supérieur à m .

Considérons le cas où $a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = m$ et $a_n = n \cdot m$ et donnons une stratégie dans laquelle Edwige garantit que la pile n contient toujours au moins m cailloux. Pour cela, Edwige se contente, au tour i , de choisir la pile i et la pile n et de retirer m cailloux de la pile i . Une récurrence immédiate assure que, quels que soient le choix d'Auriane, à l'issue du tour i , la pile i est vide et la pile n contient au moins $(n - i)m$ cailloux. Ainsi, au bout de $n - 1$ tours, le jeu s'arrête et la pile n contient au moins m cailloux, ce qui conclut.

Construction : Montrons que, quels que soient les a_i et les choix d'Edwige, Auriane peut s'arranger pour qu'il y ait au plus m cailloux sur la table.

On considère pour cela le lemme suivant :

Lemme : Pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe des entiers $\varepsilon_j, \dots, \varepsilon_n$ valant tous 1 ou -1 tels que

$$|\varepsilon_j a_j + \dots + \varepsilon_n a_n| \leq j \cdot m.$$

Preuve du Lemme : On procède par récurrence descendante sur j .

Initialisation : Si $j = n$, on a bien, pour tout choix de ε_n , $|\varepsilon_n a_n| \leq n \cdot m$ par hypothèse.

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang j pour $j \geq 2$ fixé. On dispose de $\varepsilon_j, \dots, \varepsilon_n$ des indices tels que $|\varepsilon_j a_j + \dots + \varepsilon_n a_n| \leq j \cdot m$. Quitte à remplacer les ε_i par $-\varepsilon_i$, on peut supposer que $0 \leq \varepsilon_j a_j + \dots + \varepsilon_n a_n \leq j \cdot m$. Alors on vérifie, puisque $-(j-1)m \leq -a_{j-1} \leq -m$,

$$-(j-1)m \leq \varepsilon_j a_j + \dots + \varepsilon_n a_n - a_{j-1} \leq j \cdot m - m = (j-1)m.$$

Ainsi, en choisissant $\varepsilon_{j-1} = -1$, la propriété est vraie pour $j-1$, ce qui achève la récurrence et conclut la preuve du lemme. $\square$

On revient à l'exercice. D'après le lemme pour $j = 1$, on dispose d'entiers $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ valant tous 1 ou -1 tels que

$$|\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n| \leq m.$$

Supposons qu'au tour k , Edwige a choisi les piles de numéro i et j , de taille respectives b_i et b_j et a retiré r cailloux de l'une des piles.

- Si ε_i et ε_j sont de signe contraire, alors Auriane retire r cailloux de l'autre pile. Les tailles b'_i et b'_j des nouvelles piles obtenues vérifient alors $\varepsilon_i b'_i + \varepsilon_j b'_j = \varepsilon_i b_i + \varepsilon_j b_j$.
- Si ε_i et ε_j sont de même signe, Auriane ajoute r cailloux à la plus grande pile. Les tailles b'_i et b'_j des nouvelles piles obtenues vérifient alors aussi $\varepsilon_i b'_i + \varepsilon_j b'_j = \varepsilon_i b_i + \varepsilon_j b_j$.

Avec ce protocole, de proche en proche, on vérifie que, à tout instant du jeu, si $b_1, \dots, b_n$ représentent le nombre de cailloux dans les piles, on a

$$|\varepsilon_1 b_1 + \dots + \varepsilon_n b_n| = |\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n| \leq m.$$

Notons enfin que le jeu termine nécessairement : si le jeu continue indéfiniment, il existe un ensemble S de piles sur lesquelles les joueuses agissent une infinité de fois. On dispose d'un moment t à partir duquel plus aucune pile autre que S n'est choisie par Edwige. On note b le plus petit entier tel qu'il existe une pile de S qui a, au moins une fois au delà de l'instant t , la taille b . On dispose d'un moment $t' \geq t$ où Edwige agit sur b et on note c la taille de l'autre pile choisie par Edwige. Par hypothèse, $b \leq c$, donc Edwige retire des cailloux à une pile de taille b , ce qui contredit la minimalité de b .

Lorsque le jeu se termine, il ne reste plus qu'une seule pile, et d'après le raisonnement ci-dessus, la taille b de la pile vérifie

$$0 \leq |b| = |\varepsilon_1 a_1 + \dots + \varepsilon_n a_n| \leq m.$$

Ceci conclut qu'il existe un moment où au moins une pile est de taille inférieure à m .

Remarque : On peut également montrer que le jeu termine nécessairement de la façon suivante : on note $(c_{1,k}, \dots, c_{k,n})$ la suite ordonnée dans l'ordre croissant des tailles des piles. Lors de chaque opération, la suite $(c_{1,k}, \dots, c_{k,n})$ décroît strictement pour l'ordre lexicographique.

SOLUTION N°2

On propose une deuxième façon de comprendre le lemme, en procédant par algorithme glouton. On propose la reformulation suivante du lemme :

Lemme : Quelles que soient les tailles des piles de cailloux $m \leq a_i \leq i \cdot m$, pour i allant de 1 à n , il est possible de répartir ces piles en deux groupes, notés G_1 et G_2 , qui sont tels que la différence de leurs tailles totales, notées $|G_1|$ et $|G_2|$, vaut au plus m .

Preuve du Lemme : Soient $a_1, \dots, a_n$ des naturels tels que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, $m \leq a_i \leq i \cdot m$. Commençons par assigner le tas de taille a_n à un groupe arbitraire, disons G_1 . Ensuite, lors de l'étape $i \geq 1$, ajoutons le tas non encore assigné et de taille a_{n-i} au groupe ayant la taille totale la plus petite à ce stade de la construction (et à n'importe lequel des deux si leurs tailles coïncident). Après l'étape $n - 1$, nous avons réparti toutes les piles de cailloux entre les groupes G_1 et G_2 . Montrons que cette répartition satisfait la condition voulue.

Supposons sans perte de généralité qu'à la fin de notre procédé, $|G_1| \geq |G_2|$. Soit $k \geq 0$ le plus petit indice tel qu'après l'étape k , l'on ait toujours l'inégalité $|G_1| \geq |G_2|$ jusqu'à la fin.

On note g_1 et g_2 les tailles de G_1 et G_2 avant l'étape k . Si $k \geq 1$, puisque l'indice k est minimal, $g_1 \leq g_2$. Si $k = 0$, alors $g_1 = g_2 = 0$ par définition, donc on a également $g_1 \leq g_2$. Remarquons que lors des étapes $k + 1$ à $n - 1$, nous avons nécessairement assigné à tous les tas le groupe G_2 , et chacun de ces tas contenait au moins m cailloux, tandis que le groupe G_1 a seulement reçu le tas de taille $a_{n-k} \leq (n - k) \cdot m$. On en déduit que :

$$|G_1| - |G_2| = g_1 - g_2 + a_{n-k} - (a_{n-k-1} + \dots + a_1) \leq (n - k) \cdot m - (n - k - 1)m = m,$$

ce qui conclut. □

Commentaire des correcteurs

Ce problème était assez difficile, comme l'atteste le petit nombre de solutions que l'on a reçues (2 solutions parfaites et 3 solutions avec une petite erreur). Le problème a été moyennement abordé.

Le problème était essentiellement divisé en deux parties. La première partie consistait à trouver une stratégie pour Edwige pour forcer au moins m cailloux à la fin du jeu ; tandis que la deuxième, plus dur et longue, consistait à trouver une stratégie pour Auriane pour obtenir moins de m cailloux à la fin du jeu.

Un certain nombre d'élèves ont réussi à trouver la première partie. La deuxième partie demandait de trouver une stratégie difficile pour Auriane que peu d'élèves ont eu. Les correcteurs pensent néanmoins qu'il était possible d'obtenir des points partiels, par exemple en montrant que le jeu finit toujours.

Exercice 4. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$ telles que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout diviseur strictement positif d de n , il existe un diviseur strictement positif e de n tel que n divise $d + f(e)$.

SOLUTION DE L'EXERCICE 4

Réponse : L'unique fonction solution est la fonction définie par $f(n) = -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On vérifie que cette fonction est bien solution : si $n \in \mathbb{N}^*$ et d est un diviseur positif de n , alors n divise $0 = d + f(d)$. On démontre désormais que cette fonction est la seule. On se donne dans la suite f une éventuelle fonction solution. On suppose les diviseurs considérés toujours strictement positifs, et on note $\text{DIV}(n)$ l'ensemble des diviseurs strictement positifs de n .

Étape 1 : Soit n un entier fixé. Pour tout diviseur $e \in \text{DIV}(n)$, il existe un unique diviseur d tel que $n \mid d + f(e)$.

Tout d'abord, considérons un diviseur e de n et supposons qu'il existe deux diviseurs distincts d et d' tels que $n \mid d + f(e)$ et $n \mid d' + f(e)$. Alors n divise la différence $d - d'$. Mais puisque les diviseurs sont distincts et compris entre 1 et $n - 1$, on a $0 < |d - d'| < n$, ce qui implique que $d = d'$.

Ainsi, pour tout diviseur e , il existe au plus un diviseur d tel que $d \equiv -f(e)$. Pour tout d , on considère le diviseur $g(d)$ tel que $n \mid d + f(g(d))$. Le paragraphe ci-dessus démontre que g est une fonction injective de $\text{DIV}(n)$ dans lui-même. La fonction g est donc une bijection de $\text{DIV}(n)$ dans lui-même, d'où l'unicité annoncée.

Étape 2 : La fonction f est injective.

On suppose le contraire et considère e et e' deux entiers distincts tels que $f(e) = f(e')$. On pose $n = ee'$. On dispose, d'après l'étape 1, de deux diviseurs distincts d et d' de n tels que $n \mid d + f(e)$ et $n \mid d' + f(e')$. Alors n divise également la différence $d - d'$, ce qui nous permet de déduire, comme dans l'étape 1, une contradiction puisque $0 < |d - d'| < n$. La fonction f est donc bien injective.

Étape 3 : On montre que $f(n) = -n$ pour tout n .

On commence par le lemme suivant :

Lemme : Pour tout entier n , soit $f(n) = 0$, soit $f(n) = -d$ avec d un diviseur de n .

Preuve : On suppose qu'un entier n ne vérifie pas le lemme. On choisit $p > n + |f(n)|$ un nombre premier et on applique l'énoncé à np . Il existe un entier d tel que $np \mid d + f(n)$. Si p ne divise pas d , alors d est un diviseur de n , mais alors $0 \leq |d + f(n)| < n + |f(n)| < p$, donc $f(n) = -d$. Si p divise d , alors p divise $f(n)$, or $0 \leq |f(n)| < p$, ce qui implique que $f(n) = 0$. D'où la dichotomie annoncée. $\square$

On suppose que $f(n) = 0$ pour un certain entier n . D'après le lemme, $-f(d) \in \text{DIV}(d)$ pour tout diviseur propre de n . Par injectivité de $-f$, $-f$ induit une permutation de $\text{DIV}(d)$ sur lui-même.

Soit désormais p un nombre premier ne divisant pas n . Il existe deux diviseurs e et e' distincts de np tels que $np \mid n + f(e)$ et $np \mid np + f(e')$. On a alors $n \mid f(e)$ et $f(e')$. Si $e \neq n$, alors $-f(e) \mid e$, donc $n \mid e$, si bien que $e \in \{n, np\}$ (et il en est de même pour e'). On déduit que $\{e, e'\} = \{n, np\}$. Comme $np \mid f(n)$, il vient que $np \mid np + f(n)$, si bien que $np \mid n + f(np)$. Comme $-f(np)$ est un diviseur strictement positif de np , on a l'encadrement

$-np < n + f(pn) < n < np$, de sorte que $f(pn) = -n$. Comme c'est vrai pour tout nombre premier p ne divisant pas n , cela contredit l'injectivité de f . On déduit que $f(n) \neq 0$.

On a montré que $-f(n)$ est un diviseur de n pour tout entier n , une récurrence forte permet alors de conclure que $-f(n) = n$ pour tout entier n .

Remarque 1 : L'étape 1 peut être obtenue plus rapidement de la façon suivante : comme pour tout diviseur d il existe un diviseur e tel que $d \equiv -f(e) \pmod{n}$, la fonction $-f$, vue modulo n , induit une surjection de l'ensemble des diviseurs dans lui-même. C'est donc une bijection de l'ensemble des diviseurs de n modulo n .

Remarque 2 : Il existe de nombreuses variantes de la solution précédente. En voici une : une fois le lemme acquis, on pouvait également procéder comme suit. Supposons à présent que $f(n) \neq -n$ pour au moins un entier n , et prenons le plus petit entier n avec cette propriété. Comme tous ses diviseurs propres vérifient $f(d) = -d$ et que f est injective, on a $f(n) = 0$.

Soit désormais p un nombre premier ne divisant pas n . On considère d le diviseur de np tel que $pn \mid n + f(d)$. Comme $pn \mid np + f(n)$, $d \neq n$ (d'après l'étape 1). De même, d n'est pas un diviseur propre de n , car $np \mid d + f(d) = 0$ d'après le lemme. On déduit que $p \mid d$.

Or, $f(d)$ est un diviseur négatif de pn d'après le lemme. On déduit que $n - np \leq n + f(d) \leq n$. Comme le seul multiple de np dans cet intervalle est 0, $f(d) = -n$. Ainsi, p admet un multiple dont l'image par f vaut $-n$. Ceci étant vrai pour tout nombre premier p suffisamment grand, on contredit l'injectivité de f , et cela conclut.

SOLUTION N°2

On suppose acquises les étapes 1 et 2 de la solution précédente. On présente une autre façon de conclure, par récurrence.

Étape 3 : On prouve par récurrence sur le nombre de facteurs premiers de n que $f(n) = -n$ pour tout entier n .

Plus précisément, on prouve par récurrence sur $r \geq 0$ le résultat suivant : pour tout entier n admettant r facteurs premiers (les diviseurs premiers ne sont pas forcément distincts), $f(n) = -n$.

On va appliquer de façon répétée les deux principes suivants, qui découlent de l'existence et de l'unicité établies à l'étape 1 :

1. Si $n \mid d + f(e)$ pour un certain couple (d, e) de diviseurs de n , alors $n \nmid d' + f(e)$ pour tout $d' \in \text{DIV}(n) \setminus \{d\}$, et $n \nmid d + f(e')$ pour tout $e' \in \text{DIV}(n) \setminus \{e\}$.
2. Soit $d, e \in \text{DIV}(n)$ deux diviseurs fixés. Si $n \nmid d' + f(e)$ pour tout $d' \in \text{DIV}(n) \setminus \{d\}$, alors $n \mid d + f(e)$. Si $n \nmid d + f(e')$ pour tout $e' \in \text{DIV}(n) \setminus \{e\}$, alors $n \nmid d + f(e)$.

Hérédité : On suppose que, pour tout nombre m admettant r facteurs premier ou moins, avec r fixé, $f(m) = -m$. On fixe désormais un entier n admettant $r + 1$ facteurs premiers, et l'on cherche à montrer que $f(n) = -n$.

Tout d'abord, puisque $f(d) = -d$ pour tout diviseur strict de n , $n \mid d + f(d)$. On déduit (principe 1) que $n \nmid n + f(d)$ pour $d \in \text{DIV}(n) \setminus \{n\}$ et donc que $n \mid n + f(n)$ (principe 2). Ainsi, $n \mid f(n)$.

Supposons désormais que $f(n) \neq 0$. On fixe p un nombre premier ne divisant pas $f(n)$. On applique la propriété de l'énoncé à pn . Notons e le diviseur de np tel que $pn \mid e + f(n)$. e est soit de la forme pd avec $d \in \text{DIV}(n)$, soit un diviseur de n . Comme $p \nmid f(n)$, e n'est pas divisible par p . Si $d \in \text{DIV}(n)$ et $d \neq n$, on a $np \mid d + f(d) = 0$ par hypothèse de récurrence.

Ainsi, $np \nmid d + f(n)$ (principe 1), donc e n'est pas dans $\text{DIV}(n) \setminus \{n\}$. La seule possibilité est donc que $e = n$, soit $pn \mid n + f(n)$. Ceci étant vrai pour tout nombre premier p , le nombre $n + f(n)$ admet une infinité de diviseur et il est donc nul.

Le paragraphe précédent prouve donc le lemme suivant :

Lemme : Soit n un entier avec $r + 1$ facteurs premiers. Alors $f(n) = -n$ ou $f(n) = 0$.

Il reste donc à traiter un entier n avec $r + 1$ facteurs premiers vérifie $f(n) = 0$. Notons qu'un tel entier n est unique par injectivité de f . On choisit p un nombre premier ne divisant pas n et on applique l'énoncé à pn . Étant donné un diviseur propre $d \neq n$ de pn , d admet $r + 1$ facteurs premiers ou moins, donc par hypothèse de récurrence et d'après le lemme, $f(d) = -d$. Ainsi, $pn \mid d + f(d)$ et par le principe 1, $pn \nmid d + f(np)$. Le principe 2 implique donc que $pn \mid n + f(np)$ ou $pn \mid np + f(np)$. Comme en plus $np \mid np = np + f(n)$, $np \nmid np + f(np)$ par le principe 1. Ceci implique que $np \mid n + f(np)$.

On applique désormais l'énoncé à np^k , avec k un entier quelconque. Soit e le diviseur de np^k tel que $np^k \mid e + f(np)$. Comme $p \mid n + f(np)$, $p \nmid f(np)$, donc $p \nmid e$. Ainsi, e est un diviseur de n . Si $e \neq n$, on a déjà $np^k \mid e + f(e) = 0$, donc $np^k \nmid e + f(n)$ par le principe 1. On déduit que $e = n$, et que $np^k \mid n + f(np)$. Ceci étant vrai pour une infinité d'entiers k , on déduit que $f(np) = -n$. Ceci étant vrai pour une infinité de n , cela contredit l'injectivité de f .

On a montré que $f(n) = -n$ si n admet $r + 1$ facteurs premiers, ceci achève la récurrence et conclut l'exercice.

Remarque : La preuve ne mentionne pas l'initialisation. C'est parce qu'ici, l'initialisation n'est pas nécessaire et l'on peut en fait supposer dans l'hérédité que l'on suppose la propriété vraie pour tout n admettant r diviseurs ou moins, avec $r \geq -1$ fixé, en prenant la convention qu'aucun entier n'admet -1 diviseurs. Cela étant dit, voilà à quoi pourrait ressembler la preuve que $f(1) = -1$, constituant une initialisation pour notre récurrence :

Initialisation : Si $n = 1$, montrons que $f(1) = -1$.

- Supposons d'abord que $f(1) \neq 0$. On choisit p premier tel que $p > 1 + |f(1)|$. On applique l'énoncé à p . On a $\text{DIV}(p) = \{1, p\}$. Vu sa définition et vu que $1 + f(1) \neq 0$, $p \nmid 1 + f(1)$, donc $p \mid p + f(1)$ (principe 2). On déduit que p divise $f(1)$, ce qui est absurde encore une fois vu la définition de p .
- Supposons désormais que $f(1) = 0$. En appliquant de nouveau la propriété à $n = p$ un nombre premier, cette fois-ci, $p \mid p + f(1)$ donc $p \nmid 1 + f(1)$ (principe 1) donc $p \nmid 1 + f(p)$ (principe 2). En particulier, $p \nmid f(p)$. On applique désormais la propriété à p^k avec $k \geq 2$ un entier. On a $\text{DIV}(p^k) = \{p^\ell, 0 \leq \ell \leq k\}$. On dispose d'un entier $\ell \in \llbracket 0, k \rrbracket$ tel que $p^k \mid p^\ell + f(p)$. Or $f(p) \equiv -1 \pmod{p}$, donc $0 \equiv p^\ell + f(p) \equiv p^\ell - 1 \pmod{p}$, ce qui implique que $\ell = 0$. On a donc $p^k \mid f(p) + 1$, et ce pour tout entier k , ce qui implique que $f(p) = -1$. Comme c'est vraie pour tout nombre premier p , cela contredit l'injectivité de f .

En conclusion, on a donc $f(1) = -1$, ce qui donne l'initialisation.

Commentaire des correcteurs

Ce problème très difficile a été résolu entièrement par un élève, et abordé par 36 élèves. Une bonne partie d'entre eux est parvenue à obtenir quelques points en formulant des remarques sur lesquelles pouvait se baser un raisonnement complet : le caractère bijectif de la fonction g , ne serait-ce que dans le cas où n est un nombre premier, et le fait que $f(1)$ soit égal à 0 ou à -1 .

On pourra néanmoins regretter que de multiples élèves se soient fourvoyés en affirmant que nul entier n n'était divisible par une infinité de nombres premiers, puisque c'est le cas de l'entier 0.