STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2026

Animath
Association pour l'animation mathématique

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

cnrs

Jane Street

Avant-propos

Le stage olympique de Valbonne 2026 a été organisé par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler 90 collégiennes, collégiens,
lycéennes et lycéens de la quatrième à la terminale,
de 11 à 17 ans, passionnés de mathématiques
sélectionnés parmi les près de 2000 candidats à la Coupe Animath,
dont certains représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
Olympiades Balkaniques de Mathématiques (BMO),
Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM),
Olympiade Européenne de Mathématiques (EMO).

Un peu plus qu'un tiers des stagiaires a pu découvrir la beauté des mathématiques olympiques,
tandis que les autres, ayant déjà une petite expérience dans ce domaine,
ont pu approfondir leurs connaissances.

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne pour son excellent accueil.

Les animatheurs

Mattéo
ARGENTIN

Mathieu
BARRÉ

Serge
BIDALLIER

Anatole
BOUTON

Félix
BRETON

Hugo
CHARTOIRE

Maxime
CHEVALIER

Lucile
CLOUP

Gaëtan
DAUTZENBERG

Tiphaine
DE BATTISTA

Claire
DELOYE

Antoine
DERIMAY

Erik
DESURMONT

Emilhan
DÜRRÜOGLU

Akin
DÜRRÜOGLU

Héloïse
FAUCHEU

Hadrien
FAUCHEU

Oscar
FISCHLER

Aurélien
FOURRÉ

Noam
ISMAAILI

Eva
JACOB

David
LEI

Théo
LENOIR

Rémi
LESBATS

Arthur
LÉONARD

Hadriel
MILOT

Tristan
NGUYEN

Solal
PIVRON-DJEDDI

Kevin
PRIOL

Antoine
SAEZ-DUMAS

Melvil
TREILLEUX

Lilas
TREILLEUX

Martin
VIDAL OGER

Delta

Epsilon

Les élèves

Ghita
ABOULASSE

Victor
ALLOUCHE

Antoine
ALTHERR

Horia
ANTOHI

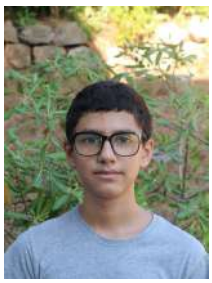
Zacharia
ARRAFI

Mathurin
BACH

Mira
BAH BROCARD

Sodcetsen
BATSAIKHAN

Aminaa
BATSAIKHAN



Waël
BENMEDJDOUB

Stefan
BERCEA

Ulysse
BERSILLON

Oscar
BLANC-TURAL

Tanguy
BONNISSEAU

Nicolas
BONO

Hadrien
BULFON

Louis
CAO

Paul
CARRIOU

Antoine
CARRIOU

Lilian
CHARTON

Alexandru
CHIRIAC

Vlad-Stefan
CONSTANTINESCU

Viet Phong
DANG

Louise
DELOYE

Bennigan
DERRIEN

Matthieu
DIOT

Pierre
DONG

Gautier
DUCHER

Aurèle
DUPUY

Gabriel
DURAND

Octave
ESPINOZA

Iwan
ETILE-ZEPHORIS

Samuel
FAUCHEU

Inès
FISCHLER

Timothée
GIBAULT

Miryam
GROMOV

Ernest
GRULIER

Assem
HAMWI

Dhruv
HARIPRASAD

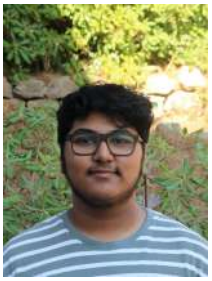
Yousef
JAEDA

Daniil
JARYKAOU

Coraline
KALBFLEISCH

Leon
KEMPE REGEV

Noemi
KEMPE REGEV



Saad
KHAN

Louis
LHÉRITIER

Noé
LI

Agathe
LISSILLOUR

Maël
LIVET YANG

Amandine
LUCAS

Élie
LUCAS

Sarah
MARCELLO

Gabriel
MARTIN-ARNAUD

Achille
MICHEL

Thibault
MONNIER

Colin
MULLER

Ha-Ngan
NGUYEN

Martin
NGUYEN

Victor
PETIT

Clémence
PHAM

Tran Hong Dat
PHAN

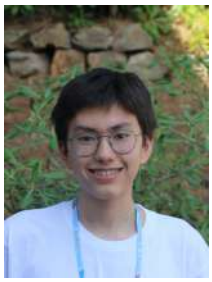
Alexis
PORTES-LAVILLE

Héloïse
PRIVESSE

Lionel
QU

Sahaj
RAJVANSHI

Marin
RENAUDINEAU



Ralph
REYNAUD

Geneviève
ROLET

Lélia
ROMETTI

Lucie
ROQUES

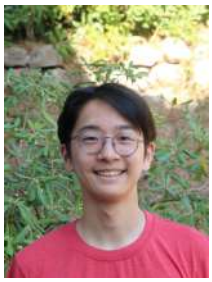
Kyrill
ROVINSKY

Iyed
SAÏDANA

Daniel
SCHACHTER

Yanis
SELVI

Mael
SHAWALY

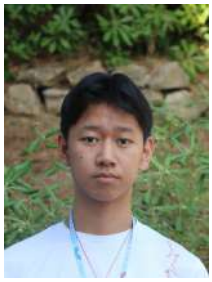


William
SITHISAK

Alicia
STAMULESCU

Emma
SUAU

Colin
SUR-CORTIER



Théo
TAN

Mathurin
TRENTESAUX

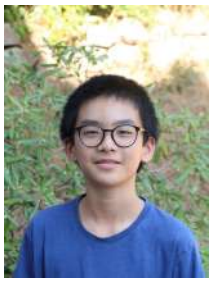
Andreï
VORONTSOV

Juliette
YANG

Michel
YANG

Thaïs
YAO

Maiia
ZARETSKAIA



Charly
ZHANG

Yiang Quentin
ZHANG

Benjamin
ZHENG

Laurent
ZHU

Table des matières

I Déroulement du stage **15**

II Coupe Animath de printemps 2026 **17**

III Groupe A **43**

1 Première partie : Algèbre et Géométrie 44
1 Géométrie : Chasse aux angles 1 (Lilas et Héloïse) 44
2 Algèbre : Découverte (Hadriel) 53
3 Algèbre : Récurrence (Kevin) 54
4 Géométrie : Chasse aux angles 2 (Martin et Aurélien) 63
5 Géométrie : Triangles semblables (Mathieu) 75
6 Algèbre : Inégalités 1 (Théo) 81
7 Algèbre : Inégalités 2 (Héloïse) 86
8 Géométrie : Pot-pourri (Claire et Noam) 93
2 Entraînement de mi-parcours 106
3 Deuxième partie : Combinatoire et Arithmétique 110
1 Combinatoire : Principe des tiroirs (Anatole) 110
2 Arithmétique : PGCD et divisibilité (Antoine D) 116
3 Arithmétique : Nombres premiers (Eva) 120
4 Combinatoire : Invariants et coloriages (Lucile) 126
5 Combinatoire : Principe de l'extremum (Félix) 134
6 Arithmétique : Modulos (Matteo et Rémi) 136
7 Arithmétique : Équations diophantiennes (David) 143
8 Combinatoire : Jeux (Solal) 152
4 Entraînement de fin de parcours 167

IV Groupe B **171**

1 Première partie : Algèbre et Géométrie 172
1 Géométrie : TD de révisions (Claire et Antoine D) 172
2 Algèbre : Inégalités (Noam) 186
3 Algèbre : Équations fonctionnelles 1 (Oscar) 187
4 Géométrie : Configurations (Héloïse) 194
5 Géométrie : Axe radical (Lilas et Melvil) 206
6 Algèbre : Relations de Viète, technique s,p (Martin) 218
7 Algèbre : Équations fonctionnelles 2 (Tristan) 230
8 Géométrie : Pot-pourri (Kevin et Mathieu) 247
2 Entraînement de mi-parcours 258

3 Deuxième partie : Arithmétique et Combinatoire . . . 261
1 Combinatoire : TD de révisions (Arthur) . . . 261
2 Arithmétique : TD de révisions (Eva) . . . 265
3 Arithmétique : Ordre multiplicatif 1 (Hugo) . . . 269
4 Combinatoire : Double comptage (Maxime) . . . 277
5 Combinatoire : Grilles (Tiphaine et Théo) . . . 278
6 Arithmétique : Ordre multiplicatif 2 (Erik) . . . 291
7 Arithmétique : Équations dipohantiennes (Hadrien et Emilhan) . . . 296
8 Combinatoire : Pot-pourri (Lucile et Gaëtan) . . . 305
4 Entraînement de fin de parcours . . . 311

V Groupe C **315**
1 Première partie : Algèbre et Arithmétique . . . 316
1 Algèbre : Polynômes 1 (Mathieu) . . . 316
2 Arithmétique : Problèmes de taille (Akin et Anatole) . . . 321
3 Arithmétique : Ordre multiplicatif (Lilas) . . . 327
4 Algèbre : Polynômes 2 (Théo) . . . 334
5 Algèbre : Équations fonctionnelles 1 (Rémi) . . . 343
6 Arithmétique : Théorème des restes chinois (Tristan et Antoine D) . . . 349
7 Arithmétique : Pot-pourri (Antoine S et Hadriel) . . . 357
8 Algèbre : Équations fonctionnelles 2 (Melvil) . . . 362
2 Entraînement de mi-parcours . . . 374
3 Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie . . . 377
1 Combinatoire : Double Comptage (Hugo) . . . 377
2 Géométrie : Chasse aux rapports (Lucile) . . . 388
3 Géométrie : Axe radical (David et Serge) . . . 389
4 Combinatoire : Récurrence (Félix) . . . 402
5 Combinatoire : Invariants (Eva et Gaëtan) . . . 410
6 Géométrie : Similitudes (Anatole) . . . 415
7 Géométrie : Pot-pourri (Tiphaine et Arthur) . . . 424
8 Combinatoire : Pot-pourri (Antoine D) . . . 430
4 Entraînement de fin de parcours . . . 438

VI Groupe D **443**
1 Première partie : Combinatoire et Géométrie . . . 444
1 Géométrie : Similitudes (Kevin) . . . 444
2 Combinatoire : Algorithmes (Oscar) . . . 457
3 Combinatoire : Géométrie combinatoire (Antoine S) . . . 463
4 Géométrie : Configurations (Antoine D) . . . 470
5 Géométrie : Chasse aux longueurs (Akin) . . . 482
6 Combinatoire : TD de niveau C1/C2 (Anatole et Noam) . . . 490
7 Combinatoire : TD Pot-pourri (Emilhan) . . . 502
8 Géométrie : TD de niveau G1/G2 (Aurélien) . . . 510
2 Entraînement de mi-parcours . . . 511
3 Deuxième partie : Algèbre et Arithmétique . . . 517
1 Algèbre : Nombres complexes (Emilhan) . . . 517
2 Arithmétique : Factorielles (Maxime et Rémi) . . . 528

3 Arithmétique : Polynômes à coefficients entiers (Solal et Théo) 537
4 Algèbre : Équations fonctionnelles (Erik) 563
5 Algèbre : TD de niveau A1/A2 (Hadrien) 572
6 Arithmétique : Divisibilité (Hugo et Serge) 578
7 Arithmétique : TD de niveau N1/N2 (Félix) 588
8 Algèbre : Systèmes d'équations (Matteo) 592
4 Entraînement de fin de parcours 608

VII Groupe E **613**
1 Première partie 614
1 Géométrie : Géométrie dynamique (Aurélien) 614
2 Arithmétique : Fonctions arithmétiques (Théo) 615
3 Algèbre : Équations fonctionnnelles non-classiques (Rémi) 627
4 Algèbre : Polynômes (Melvil et Hadriel) 643
5 Combinatoire : Grilles (Oscar) 650
6 Arithmétique : TD de niveau P1/P2 (Emilhan) 656
7 Combinatoire : Problèmes à goût d'algèbre/d'arithmétique (Anatole) . . . 665
8 Nombres Complexes (Akin) 672
2 Entraînement de mi-parcours 678
3 Deuxième partie 689
1 Combinatoire : Séries génératrices (Théo) 689
2 Géométrie : TD de niveau P1/P2 (Gaëtan) 690
3 Arithmétique : Équations fonctionnelles dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ (Antoine D) 698
4 Combinatoire : TD de niveau P1/P2 (Arthur) 705
5 Géométrie : Petites idées simples (David) 709
6 Arithmétiques : Puissances (Maxime et Solal) 729
7 Algèbre : TD de niveau P1/P2 (Erik et Anatole) 772
8 Géométrie : Inversions (Serge) 779
4 Entraînement de fin de parcours 788

VIII Conférences **799**
1 Conférence du 19 août (Emilhan) 799
2 Conférence du 21 août (Félix) 800

IX Citations mémorables **801**

I. Déroulement du stage

Du jeudi 13 août au lundi 24 août, 90 stagiaires et 33 animatheurs et animathrices se sont réuni.es au Centre International de Valbonne (CIV) pour un stage de mathématiques organisé par la Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM) de l'association Animath. La sélection des participant.es s'est faite via la Coupe Animath. Plus de 1500 candidat.es ont participé au premier tour en ligne et un peu plus de 500 au deuxième tour, dont environ un tiers de filles. In fine ont été sélectionné.es environ 15 quatrièmes, 20 troisièmes, 25 secondes et 30 premières avec un système de bonifications favorisant les filles et les élèves n'ayant pas encore participé à un stage.
Les élèves ont été réparti.es en 5 groupes de niveau en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques. Le stage était divisé en deux périodes de cinq jours, quatre de cours et séances d'exercices suivis d'un un entraînement de type olympique le matin du cinquième jour. Les cours portaient sur les quatre thèmes donnés lors des compétitions internationales : Arithmétique, Algèbre, Combinatoire et Géométrie.
Les élèves ont pu assister à trois conférences au cours du stage, présentées par Thierry Viéville, Emilhan et Félix. Des activités plus ludiques étaient organisées les après-midi des entraînements, et les élèves ont pu profiter de la piscine, de séances de foot, de volley, de soirées astronomie et d'un grand nombre de jeux de société tout au long du stage.
Il est possible de retrouver le compte-rendu du stage au jour le jour sur le site de la POFM.

II. Coupe Animath de printemps 2026

Sujet

Exercices collégiens

Exercice 1
Par combien de 0 se termine l'écriture décimale du nombre $2^{2026} \times 5^{2021}$?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un carré. Soit P le point d'intersection de la demi-droite $[AB)$ avec le cercle de centre A et passant par C.

Combien mesure l'angle $\widehat{PCB}$?

Exercice 3
Sur un tableau sont écrits $n \geqslant 2$ nombres entiers strictement positifs deux à deux distincts. Ceux-ci vérifient la propriété suivante : quels que soient les 2 nombres que l'on choisit parmi ces n nombres, leur somme est un nombre premier.

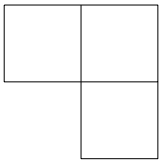
Quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle ceci est possible ?

Exercice 4
Aline écrit au tableau $n \geqslant 3$ nombres réels deux à deux distincts.

Pour quelles valeurs de n est-ce que, peu importe les nombres réels écrits par Aline, Emilhan peut trouver trois nombres réels deux à deux distincts a, b et c parmi les n nombres au tableau tels que $ab + bc + ca \geqslant 0$?

Exercice 5
Maxime écrit des nombres entiers non nécessairement distincts dans chacune des 64 cases d'une grille 8×8. Maxime possède une pièce spéciale, qu'il peut tourner autant qu'il le souhaite, et il a le droit de la poser comme il le veut sur la grille tant que celle-ci ne déborde pas de la grille, et recouvre chaque case soit entièrement, soit pas du tout. Il remarque que chaque fois qu'il fait cela, la somme des nombres inscrits sur les cases qu'il recouvre est la même.

1. Déterminer le nombre maximum de nombres distincts que Maxime a écrit dans la grille si la pièce qu'il possède est la pièce suivante, composée de 3 cases :



2. Déterminer le nombre maximum de nombres distincts que Maxime a écrit dans la grille si la pièce qu'il possède est la pièce suivante, composée de 2 cases :

Exercice 6
Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres entiers (non nécessairement positifs) tels que

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1, \\ y^2 = zx + 1, \\ z^2 = xy + 1. \end{cases}$$

Exercice 7
Soit ABC un triangle tel que $AB < BC$ et soit D le symétrique de A par rapport à B, et E le symétrique de A par rapport à C. Soit P le point d'intersection des droites (DC) et (BE) et soit Q le point d'intersection de la droite (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par E. Soit R le point de la droite (BC) tel que le triangle CQR soit isocèle en R.

Montrer que les droites (AP), (QR) et (DE) s'intersectent en un même point.

Exercices lycéens

Exercice 8
Combien de chiffres composent l'écriture décimale du nombre $2^{2026} \times 5^{2021}$?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Par exemple, l'écriture décimale du nombre 2020 *comporte* 4 *chiffres.*

Exercice 9
Dans une grille 4×4, deux des seize cases sont coloriées en noir et les quatorze autres en blanc. Déterminer le plus grand nombre entier positif k tel que, peu importe quelles cases sont coloriées en noir, on peut toujours trouver un rectangle, formé de k cases entières, dont les côtés sont parallèles aux côtés de la grille et qui ne contienne aucune case noire.

Exercice 10
Soient A et D deux points distincts, et Ω le cercle de diamètre $[AD]$. On note B et C deux points sur le cercle Ω tels que les points A, B, C et D sont distincts deux à deux et se trouvent dans cet ordre sur le cercle. On note X et Y les points d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les droites (BD) et (CD) respectivement.

Montrer que $DX = DY$.

Exercice 11
Théo choisit au moins deux nombres parmi les suivants :

$$-2^{2026}, -2^{2025}, \ldots, -2^2, -2^1, -1, 1, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2025}, 2^{2026}.$$

Il écrit au tableau les nombres qu'il a choisis dans l'ordre croissant, et remarque que la différence entre deux nombres voisins au tableau est toujours la même.

Quel est le nombre maximal de nombres que Théo peut écrire au tableau ?

Exercice 12
Soit ABC un triangle tel que $AB < BC$ et soit D le symétrique de A par rapport à B, et E le symétrique de A par rapport à C. Soit P le point d'intersection des droites (DC) et (BE) et soit Q le point d'intersection de la droite (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par E. Soit R le point de la droite (BC) tel que le triangle CQR soit isocèle en R.

Montrer que les droites (AP), (QR) et (DE) s'intersectent en un même point.

Exercice 13
Déterminer s'il existe une infinité de nombres réels positifs x tels que x^2 est un nombre entier et

$$\lfloor \lfloor x \rfloor^2 \{x\} \rfloor = 1.$$

On rappelle que $\lfloor y \rfloor$ *désigne la partie entière du réel* y*, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à* y*, et on rappelle que* $\{y\}$ *désigne la partie fractionnaire du réel* y*, c'est-à-dire la quantité* $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$*.*

Exercice 14
Baptiste a choisi un nombre entier strictement positif n qui possède exactement 1000 diviseurs

positifs (1 et n inclus). Il écrit tous ces diviseurs au tableau dans l'ordre croissant, et remarque que deux diviseurs consécutifs sont toujours de parités différentes : l'un des deux est pair, l'autre est impair.

Montrer que n a au moins 150 chiffres dans son écriture décimale.

Exercice 15

Le pays d'Animath contient 2026 villes. Certaines de ses villes sont reliées par des routes (qui vont dans les deux sens). On sait que pour tout triplet de villes deux à deux distinctes X, Y et Z, il est possible de trouver une suite de routes allant de X à Z sans passer par Y. On dit que n villes $V_1, \ldots, V_n$ forment, dans cet ordre, un cycle de longueur n si les n villes sont **deux à deux distinctes**, et si pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les villes V_i et V_{i+1} sont reliées, et V_n est reliée à V_1.

Quelle est la plus grande valeur de n telle que, peu importe la manière dont les villes sont reliées, il existe un cycle de longueur au moins n ?

Corrigé commenté

Exercices collégiens

Exercice 1
Par combien de 0 se termine l'écriture décimale du nombre $2^{2026} \times 5^{2021}$?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1
On sait que la multiplication par 10 d'un nombre n revient à ajouter un 0 à la fin du nombre n. Ainsi, le nombre de 0 à la fin d'un nombre est le plus grand entier k tel que 10^k divise n. On écrit

$$2^{2026} \times 5^{2021} = 2^{2021+5} \times 5^{2021} = 10^{2021} \times 2^5.$$

Comme 2^5 n'est pas divisible par 10, on en déduit que le nombre de 0 recherché est 2021.

Commentaire des correcteurs : Problème bien réussi dans l'ensemble, cependant de trop nombreux élèves écrivent que $2^{2026} \times 5^{2021} = 10^{4047}$. De plus, il ne suffisait pas de regarder les derniers chiffres, mais regarder la plus grande puissance de 10 qui divise $2^{2026} \times 5^{2021}$. Même si une justification n'est pas attendue ici, il est intéressant d'expliquer son raisonnement pour avoir des points lorsque la réponse est fausse.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un carré. Soit P le point d'intersection de la demi-droite $[AB)$ avec le cercle de centre A et passant par C.

Combien mesure l'angle $\widehat{PCB}$?

Solution de l'exercice 2

Comme P est sur le cercle de centre A passant C, $AP = AC$, donc APC est isocèle en A. De plus, comme $ABCD$ est un carré, $\widehat{CAP} = \widehat{CAB} = 45$. Donc en faisant la somme des angles dans le triangle APC, on a que $180 = \widehat{PAC} + \widehat{APC} + \widehat{ACP} = 45 + 2\widehat{ACP}$, donc $\widehat{ACP} = \frac{135}{2} = 67,5$. Or $\widehat{ACB} = 45$ car $ABCD$ est un carré, donc $\widehat{BCP} = \widehat{ACP} - \widehat{ACB} = 67,5 - 45 = 22,5$.

Commentaire des correcteurs : Exercice bien traité, de nombreuses copies comprennent les attendus de rigueur et de rédaction d'un tel exercice.
Certaines copies ont trouvé des solutions alternatives, introduisant parfois de nouveaux points, par exemple celui diamétralement opposé à C, ou le symétrique de C par rapport à (AB). Lorsque ce n'était pas pour conclure par angle inscrit, cela n'était pas nécessaire et pouvait allonger le raisonnement. De plus, quelques élèves ont essayé un raisonnement avec des longueurs et ont parfois réussi à trouver la tangente de l'angle $\widehat{BCP}$, mais cela ne permettait pas directement de trouver la valeur de l'angle. En effet, dans un problème de maths olympiques, et surtout lorsque l'on veut chercher un angle, les solutions n'utilisent quasiment jamais de trigonométrie, mais plutôt de simples chasses aux angles.
Parmi les copies présentant une preuve fausse, une majorité n'utilise nulle part l'hypothèse de l'énoncé selon laquelle P est sur le cercle de centre A passant par C. Comme dans presque tous les exercices, toutes les hypothèses étaient ici nécessaires, ne pas en utiliser une devrait mettre la puce à l'oreille qu'une étape est probablement fausse.
On rappelle que fournir une figure où sont placés les angles et objets mentionnés dans la preuve est apprécié, surtout si de nouveaux points sont introduits.

Exercice 3
Sur un tableau sont écrits $n \geqslant 2$ nombres entiers strictement positifs deux à deux distincts. Ceux-ci vérifient la propriété suivante : quels que soient les 2 nombres que l'on choisit parmi ces n nombres, leur somme est un nombre premier.

Quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle ceci est possible ?

Solution de l'exercice 3
Montrons que la plus grande valeur possible est $n = 2$. Pour cela, on va montrer que $n = 2$ convient, et qu'il ne peut pas y avoir $n > 2$ nombres écrits au tableau.

Le nombre $n = 2$ convient : Il est possible d'écrire 2 et 3 au tableau, leur somme fait bien 5 qui est un nombre premier.

Il ne peut pas y avoir $n > 2$ nombres écrits au tableau : Si $n > 2$, alors au moins 3 nombres sont écrits au tableau. Comme les nombres sont soit pair, soit impair, il existe deux nombres ayant la même parité, que l'on note a et b. Quitte à échanger, on peut supposer $a < b$ (car les nombres écrits sont distincts), on a donc $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 2$, donc $a + b \geqslant 3$. Ainsi $a + b$ est un nombre pair, donc divisible par 2, et vaut strictement plus que 2, donc $a + b$ n'est pas premier, ce qui est absurde.

En conclusion, la plus grande valeur de n pour laquelle ceci est possible est $n = 2$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été généralement bien traité, la plupart des copies ont trouvé la solution. Il est vraiment dommage que plusieurs copies oublient de donner une construction pour $n = 2$, ce qui leur a coûté des points. Quelques élèves ont aussi mal lu l'énoncé, qui mentionne des entiers strictement positifs, et ont ajouté 0 aux nombres écrits au tableau. Une autre erreur récurrente a été l'oubli du cas de 2, un nombre premier pair, qui nécessitait un argument un peu différent.

Exercice 4
Aline écrit au tableau $n \geqslant 3$ nombres réels deux à deux distincts.

Pour quelles valeurs de n est-ce que, peu importe les nombres réels écrits par Aline, Emilhan peut trouver trois nombres réels deux à deux distincts a, b et c parmi les n nombres au tableau tels que $ab + bc + ca \geqslant 0$?

Solution de l'exercice 4
On montre que seuls les nombres entiers $n \geqslant 5$ sont tels que Emilhan peut trouver des nombres a, b et c vérifiant les hypothèse de l'exercice.

L'entier $n = 4$ ne convient pas : si $n = 4$ et que Aline choisit les nombres -2, -1, 1 et 2, on peut vérifier que quels que soient les choix d'Emilhan pour les nombres a, b et c on a toujours $ab+bc+ca < 0$. En effet, il y a 4 choix différents possibles pour le triplet $\{a, b, c\}$ (on peut s'en rendre compte en regardant l'unique élément non choisi dans le triplet) qui donnent

$$\begin{aligned}(-1) \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) &= -1 < 0\\ (-2) \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-2) &= -4 < 0\\ (-2) \times (-1) + (-1) \times 2 + 2 \times (-2) &= -4 < 0\\ (-2) \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times (-2) &= -1 < 0.\end{aligned}$$

L'entier $n = 3$ ne convient pas : il suffit de prendre un sous-ensemble de l'exemple précédent. Une autre solution pour Aline est -1, 0, 1.

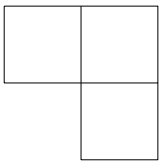
Tout entier vérifiant $n \geqslant 5$ convient : si $n \geqslant 5$, par principe des tiroirs, il est toujours possible pour Emilhan de trouver 3 nombres positifs ou nuls ou bien 3 nombres strictement négatifs. Il choisit a, b et c comme étant 3 nombres de même signe, ainsi $ab \geqslant 0$, $bc \geqslant 0$ et $ca \geqslant 0$, donc $ab + bc + ca \geqslant 0$. Ce qui conclut ce cas là et l'exercice.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été globalement bien traité par les copies l'ayant abordé. On note cependant plusieurs écueils à éviter.

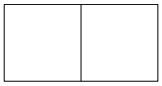
— Presque toutes les copies utilisent le fait qu'il y a forcément trois nombres de même signe si Aline écrit au moins cinq nombres au tableau. Il y a ici une petite subtilité dans le principe des tiroirs, puisqu'il faudrait choisir une convention pour le signe de 0 afin d'être rigoureux (il serait aussi possible de le mettre dans les deux tiroirs). Les correcteurs n'ont cependant pas pénalisé cette imprécision.
— De nombreux.ses élèves affirment que si $ab + bc + ca \geq 0$, alors a, b, c sont tous trois de même signe. Ce n'est cependant pas du tout vrai (par exemple avec $10, 11, -1$). Il s'agissait en général d'une erreur bénigne (puisque peu d'élèves l'ont utilisé dans le reste de leur preuve), mais il convient d'avoir conscience de la différence logique entre une propriété et sa réciproque pour éviter ce genre d'erreur.
— Pour les cas $n = 3$ et $n = 4$ où Aline gagnait, il était nécessaire de fournir une construction pour Aline (voir le corrigé). Certaines copies se contentent d'affirmer que puisque la preuve fournie pour $n \geq 5$ ne marche pas pour $n < 5$, Aline gagne forcément dans ce cas. Ceci n'a aucune raison d'être vrai a priori.
— Enfin, certaines copies proposent une construction où Aline écrit plusieurs fois le même nombre au tableau. C'est dommage de perdre des points pour une telle étourderie dans la mesure où l'énoncé précise explicitement que les nombres écrits par Aline doivent tous être distincts...

Exercice 5
Maxime écrit des nombres entiers non nécessairement distincts dans chacune des 64 cases d'une grille 8×8. Maxime possède une pièce spéciale, qu'il peut tourner autant qu'il le souhaite, et il a le droit de la poser comme il le veut sur la grille tant que celle-ci ne déborde pas de la grille, et recouvre chaque case soit entièrement, soit pas du tout. Il remarque que chaque fois qu'il fait cela, la somme des nombres inscrits sur les cases qu'il recouvre est la même.

1. Déterminer le nombre maximum de nombres distincts que Maxime a écrit dans la grille si la pièce qu'il possède est la pièce suivante, composée de 3 cases :



2. Déterminer le nombre maximum de nombres distincts que Maxime a écrit dans la grille si la pièce qu'il possède est la pièce suivante, composée de 2 cases :



Solution de l'exercice 5

— L'énoncé nous demande de trouver le plus grand nombre vérifiant une certaine propriété. La solution contiendra donc nécessairement deux étapes. Nous allons d'abord montrer qu'un nombre vérifiant la propriété voulue est inférieur ou égal à une certaine valeur, puis exhiber une situation dans laquelle cette valeur est atteinte.

Considérons une grille remplie par Maxime telle que la pièce 'coin' possède la même somme quel que soit l'endroit où on la pose, somme que l'on note S. On considère deux cases C_1 et C_2 qui sont adjacentes (au sens où elles partagent un sommet). On peut alors trouver un carré de taille 2×2 dans la grille qui contient ces deux cases. Soit T la somme des nombres écrits sur les 4 cases du carré 2×2. Par hypothèse, en faisant tourner la pièce coin de $90°$ à trois reprises dans le carré 2×2, on sait que la somme de 3 des 4 cases du carré 2×2 vaut toujours S. En particulier, sur les cases C_1 et C_2 il est écrit le même nombre $T - S$. Nous avons montré que deux cases adjacentes ont toujours le même nombre, donc Maxime a forcément écrit le même nombre sur toutes les cases de la grille.

Réciproquement, si Maxime écrit le nombre 0 dans toutes les cases de la grille 8×8, la somme des nombres inscrits sur les cases qu'il recouvre avec un coin sera toujours 0. La réponse dans ce cas est donc : il a utilisé au maximum un nombre.

— Suivons les mêmes étapes.

Considérons une grille remplie par Maxime telle que la pièce 'domino' possède la même somme quel que soit l'endroit où on la pose, somme que l'on note S. On considère deux cases C_1 et C_3 qui possèdent un coin en commun mais pas de côté en commun. Il existe

alors un coin composé des cases C_1, C_2 et C_3, de sorte que C_2 soit au milieu. Notons T la somme des nombres inscrits sur les trois cases C_1, C_2 et C_3. En posant le domino sur les cases C_1 et C_2, puis sur les cases C_2 et C_3, on voit que le nombre écrit sur la case C_3 est nécessairement $T - S$ puis que le nombre écrit sur la case C_1 est $T - S$ également. Ainsi, les nombres écrit sur deux cases qui sont adjacentes en diagonale sont forcément les mêmes. En particulier, si l'on colorie la grille 8×8 en damier (blanc/noir), toutes les cases de la même couleur ont le même chiffre.

Réciproquement, il est possible que Maxime ait utilisé deux nombres différents : il lui suffit en effet d'écrire 0 sur les cases blanches et 1 sur les cases noires. La somme des nombres écrits sur un domino vaudra alors toujours 1 car un domino possède toujours une case blanche et une case noire.
La réponse dans ce cas est donc : il a utilisé au maximum deux nombres distincts.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été beaucoup abordé, mais peu l'ont résolu entièrement. Un nombre important d'élèves arrivaient à démontrer, par exemple dans la question 1, que toutes les cases d'un carré 2×2 de la grille contenaient le même nombre, et en déduisent sans explication supplémentaire qu'on ne pouvait écrire qu'un seul nombre dans la grille. Ce passage du local à global était assez visuel mais nécessitait au moins une courte justification. Beaucoup d'élèves raisonnent en tâtonnant, par exemple en fixant les valeurs dans un coin de la grille, ou en traitant des cas non exhaustifs (comme supposer qu'il y a exactement 2 valeurs distinctes si il n'y en a pas une seule) : il faut faire attention à ne pas perdre de généralité lorsqu'on fait ce genre de suppositions.

Exercice 6
Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres entiers (non nécessairement positifs) tels que

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1, \\ y^2 = zx + 1, \\ z^2 = xy + 1. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 6
Le raisonnement dans chacune des solutions nécessite deux phases : une phase d'analyse qui à partir du fait que (x, y, z) est solution détermine les (x, y, z), et la synthèse, qui consiste à vérifier que tous les triplets trouvés sont solution.

Analyse : Soit (x, y, z) un triplet solution. On soustrait la deuxième ligne à la première, on obtient que $x^2 - y^2 = -(x - y)z$. Or $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, donc soit $x = y$, soit $x + y = -z$, c'est-à-dire $x + y + z = 0$.

Or le système est symétrique, si on échange deux variables, alors le système reste le même. Donc en particulier, on a $y = z$ ou $x + y + z = 0$, et de même $x = z$ ou $x + y + z = 0$ (on peut également retrouver cela en soustrayant la troisième ligne à la seconde, puis la première à la troisième). Ainsi soit $x + y + z = 0$, soit $x + y + z \neq 0$ et dans ce cas $x = y = z$. Ce cas est rapidement traité, car la première équation devient $x^2 = x^2 + 1$ qui est absurde. Ainsi $x + y + z = 0$.

La première équation devient $yz + 1 = (-y - z)^2 = y^2 + z^2 + 2yz$, donc $y^2 + yz + z^2 = 1$. En faisant de même avec les autres équations (ou par symétrie du système), $x^2 + xz + z^2 = y^2 + yx + x^2 = 1$. Or parmi x, y, z, deux ont même signes (car il y a 3 éléments et deux possibilités pour le signe), disons x et y. L'équation $x^2+y^2+xy = 1$ implique, comme x^2, y^2, xy sont positifs, qu'un des 3 vaut 1, et les autres 0. Si $x^2 = y^2 = 0$, $x = y = 0$ donc $xy = 0$. Ainsi, dans tous les cas $xy = 0$, donc quitte à échanger x et y, $y = 0$.

Dans ce cas, la deuxième équation devient $xz = -1$, donc $x = 1$ et $z = -1$ ou inversement. Ainsi (x, y, z) est, à l'ordre près, égal à $(-1, 0, 1)$.

Synthèse : Montrons que tout triplet valant $(-1, 0, 1)$ à l'ordre près est solution. Déjà comme le système est symétrique, il suffit de le vérifier pour $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$. Dans ce cas on a bien $(-1)^2 = 0 \times 1 + 1 = 1$, $0^2 = -1 \times 1 + 1$ et $1^2 = 0 \times (-1) + 1$, donc les solutions sont exactement les triplets $(-1, 0, 1)$ à permutation près : les solutions sont donc exactement les 6 triplets $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(0, -1, 1)$, $(-1, 0, 1)$ et $(-1, 1, 0)$.

Solution n°2 de l'exercice 6
On propose une autre façon de faire l'analyse. On remarque que si les trois nombres xy, yz et zx sont positifs on a, en multipliant les trois équations

$$\begin{aligned} x^2y^2z^2 &= (yz + 1)(zx + 1)(xy + 1) \\ &= x^2y^2z^2 + yzzx + zxxy + xyyz + yz + zx + xy + 1 \\ &\geqslant x^2y^2z^2 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \\ &= x^2y^2z^2 + 1. \end{aligned}$$

On obtiendrait alors $0 \geqslant 1$ ce qui est manifestement faux.

On peut donc supposer qu'un des nombres de la forme xy, yz ou zx est strictement négatif. Sans perte de généralité, on suppose qu'il s'agit de yz. Comme y et z sont des entiers, on a donc $yz \leqslant -1$ et ainsi $x^2 = yz + 1 \leqslant -1 + 1 = 0$. Le seul nombre entier dont le carré est 0 est 0 lui-même et on obtient donc que $x = 0$. En remplaçant $x = 0$ dans les deux autres équations, on obtient $y^2 = z^2 = 1$, donc y et z valent -1 ou 1. Comme yz est négatif, il faut nécessairement qu'un des nombres, disons y soit égal à -1 et l'autre soit égal à 1. Ainsi à permutation près, (x, y, z) vaut $(-1, 0, 1)$ ce qui conclut.

Solution n°3 de l'exercice 6
On présente une autre façon de faire l'analyse. L'idée de cette preuve est de remarquer que si un nombre est trop grand par rapport aux deux autres, les égalités de l'énoncé ne peuvent pas être vérifiées. Nous voulons donc considérer le nombre qui a la plus grande valeur absolue. Quitte à échanger les nombres x, y et z, supposons sans perte de généralité que x a la plus grande valeur absolue.
Puisque $x^2 \neq \pm x^2 + 1$, on ne peut pas avoir à la fois $|x| = |y|$ et $|x| = |z|$. Ainsi, sans perte de généralité, $|x| > |y|$, en particulier $|x| \geqslant 1$. On trouve alors en réinjectant dans la première équation :

$$x^2 = yz + 1 \leqslant |yz| + 1 \leqslant (|x| - 1) \cdot |x| + 1 = x^2 - |x| + 1.$$

Ainsi, on doit avoir $|x| \leqslant 1$, donc $|x| = 1$.

On trouve

$$x^2 = 1 = yz + 1,$$

donc $yz = 0$. Supposons sans perte de généralité (quitte à échanger y et z) que $y = 0$. On doit alors avoir

$$y^2 = 0 = xz + 1 = z + 1,$$

donc $x = 1$ et $z = -1$ ou inversement. On trouve donc que, à permutation près, $(x, y, z) = (1, 0, -1)$, ce qui conclut.

Solution n°4 de l'exercice 6
On présente une autre façon de faire l'analyse. Sommons toutes les égalités, on obtient que

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz + 3.$$

En multipliant par 2, on obtient que

$$6 = 2(x^2+y^2-z^2-xy-xz-yz) = (x^2-2xy+y^2)+(y^2-2yz+z^2)+(z^2-2xz+x^2) = (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2.$$

En particulier, $|x - y| \leqslant \sqrt{6} < 3$, donc $|x - y| \leqslant 2$, de même pour $|y - z|$ et $|x - z|$. Ainsi $(x - y)^2$ vaut $4, 1$ ou 0, et de même pour les autres carrés. En testant, la seule possibilité pour faire une somme de 6 avec 3 nombres valant $0, 1, 4$ est d'avoir $4 + 1 + 1$. Ainsi il existe deux éléments parmi x, y, z dont la différence vaut ± 2, donc deux éléments dont la différence vaut 2, disons que $z = x + 2$ (par symétrie du système), et la différence entre y et x, et celle entre y et z vaut 1, donc par symétrie $y = x + 1 = z - 1$.

La dernière équation devient $(x + 2)^2 = x(x + 1) + 1$, donc $x^2 + 4x + 4 = x^2 + x + 1$, donc $3x = -3$, donc $x = -1$. On a donc $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$ ou une permutation de ce triplet.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été bien abordé pour sa position dans le sujet et de nombreux élèves ont su y trouver des points, ce qui est très positif. Il était possible de l'approcher de beaucoup de façons différentes, comme en témoigne la variété de solutions proposées par les élèves.
D'un autre côté, il est dommage de constater qu'une proportion très faible des élèves ayant manifestement compris les idées essentielles du problème obtiennent la note maximale. En particulier on rappelle à cet effet que :

— Une résolution de système appelle à une synthèse : il faut expressément vérifier que les solutions potentielles trouvées sont bien solution (et le signaler).

— Attention à ne pas diviser par 0 : pour pouvoir simplifier l'égalité $(x-y)(x+y) = z(y-x)$ par $x-y$ il faut traiter à part le cas où $x = y$.

— L'inégalité $x \geqslant y \geqslant z$ n'implique pas $x^2 \geqslant yz$ comme en témoigne le contre exemple $(x, y, z) = (3, -5, -5)$. En particulier il faut être prudent lors de la manipulation d'inégalité avec des réels potentiellement négatif, et préférer plutôt travailler avec leurs valeurs absolues.

— Avoir une équation comme $x^2 + xy + y^2 = 1$ et affirmer que cela implique par exemple que $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$ sans preuve n'est pas correct. Tout ce qui est affirmé doit être prouvé, surtout quand les équations ne peuvent pas être résolues directement. Idem pour les solutions de $x^3 - x = y^3 - y$.

Finalement il est à noter que ce problème présentait une symétrie en les variables x, y et z, ainsi que par la transformation $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Certaines copies auraient donc pu s'épargner de traiter trop de cas essentiellement identiques en le remarquant !

Exercice 7
Soit ABC un triangle tel que $AB < BC$ et soit D le symétrique de A par rapport à B, et E le symétrique de A par rapport à C. Soit P le point d'intersection des droites (DC) et (BE) et soit Q le point d'intersection de la droite (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par E. Soit R le point de la droite (BC) tel que le triangle CQR soit isocèle en R.

Montrer que les droites (AP), (QR) et (DE) s'intersectent en un même point.

Solution de l'exercice 7
On va montrer que les trois droites passent toutes par le milieu du segment $[DE]$.

Tout d'abord, on remarque que dans le triangle ADE, les droites (DC) et (BE) sont les médianes des côtés AE et AD. Or, on sait que les trois médianes d'un triangle sont concourantes, donc dans le triangle ADE, ce point de concours est P. Cela implique que la droite (AP) est une médiane et donc qu'elle coupe le segment $[DE]$ en son milieu.

Comme les points B et C sont les milieux des côtés AD et AE respectivement dans le triangle ADE, on en déduit également que les droites (BC) et (DE) sont parallèles par la droite des milieux ou directement pour le théorème de Thalès.

On note M' l'intersection de la droite (QR) et de la droite (DE). Comme montré précédemment, on sait que $(BC) \parallel (DE)$ et grâce au théorème de Thalès appliqué aux triangles QCR et QDM' que

$$\frac{QR}{QM'} = \frac{CR}{DM'}.$$

Le triangle QCR est isocèle en R donc $RC = RQ$ et donc, d'après l'identité précédente, on sait que $QM' = M'D$. Ainsi, le point M' est sur la médiatrice de $[DQ]$. Soit M le milieu de $[DE]$. Comme l'angle $\widehat{DQE}$ est droit on en déduit que M est le centre du cercle circonscrit à DQE et donc sur la médiatrices de $[DQ]$. Les points M et M' sont donc tous deux intersections de la médiatrice de $[DQ]$ avec (DE) et comme ces deux droites ne sont pas confondues on en déduit que $M = M'$. Cela conclut l'exercice.

Solution n°2 de l'exercice 7
On propose une autre manière de conclure à partir de l'introduction de M'.

$$\begin{aligned}
\widehat{M'QE} &= \widehat{RQE} \\
&= \widehat{CQE} - \widehat{CQR} \\
&= \widehat{DQE} - \widehat{QCR} \qquad RCQ \text{ est isocèle en } R \\
&= 90 - \widehat{BCD} = 90 - \widehat{QDE} \qquad \text{car } (BC) \text{ et } (DE) \text{ sont parallèles} \\
&= \widehat{DEQ} \qquad \text{car } QED \text{ est rectangle en } Q \qquad\qquad = \widehat{M'EQ}.
\end{aligned}$$

Ainsi $M'EQ$ est isocèle en M'. Soit M le milieu de $[DE]$. Comme l'angle $\widehat{DQE}$ est droit on en déduit que M est le centre du cercle circonscrit à DQE et donc sur la médiatrices de $[EQ]$. Les points M et M' sont donc tous deux intersections de la médiatrice de $[EQ]$ avec (DE) et comme ces deux droites ne sont pas confondues on en déduit que $M = M'$. Cela conclut l'exercice.

Commentaire des correcteurs : La plupart des élèves qui ont avancé dans le problème ont soit trouvé le parallélisme soit remarqué que (AP) passe par le milieu de $[DE]$. Les so-

lutions complètes étaient très variées, en passant par les solutions officielles, ou même en utilisant des astuces avec des homothéties par exemple.
Attention, beaucoup d'élèves ont supposé d'emblée l'existence d'un point d'intersection commun aux trois droites, ce qui revient à admettre ce que l'on cherche précisément à démontrer.

Exercices lycéens

Exercice 8
Combien de chiffres composent l'écriture décimale du nombre $2^{2026} \times 5^{2021}$?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Par exemple, l'écriture décimale du nombre 2020 *comporte* 4 *chiffres.*

Solution de l'exercice 8
On sait que

$$2^{2026} \times 5^{2021} = 2^5 \times 2^{2021} \times 5^{2021} = 32 \times 10^{2021}.$$

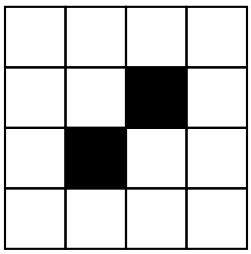
Ce nombre est donc composé des chiffres 3, 2, puis de 2021 chiffres 0. Il possède donc 2023 chiffres au total.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien résolu dans l'ensemble. Toutefois, un certain nombre d'élèves a donné une réponse fausse sans justification, les empêchant d'obtenir des points, ce qui est dommage. Une source d'erreur importante a été d'oublier que 10^{2021} a 2022 chiffres et pas 2021. Nous rappelons aussi que le nombre de chiffres du produit de deux nombres n'est pas la somme des nombres de chiffres des facteurs (par exemple : $10 \times 10 = 100$ a 3 chiffres et non 4).

Exercice 9
Dans une grille 4×4, deux des seize cases sont coloriées en noir et les quatorze autres en blanc. Déterminer le plus grand nombre entier positif k tel que, peu importe quelles cases sont coloriées en noir, on peut toujours trouver un rectangle, formé de k cases entières, dont les côtés sont parallèles aux côtés de la grille et qui ne contienne aucune case noire.

Solution de l'exercice 9
L'énoncé nous demande de trouver le plus grand nombre vérifiant une certaine propriété. La solution contiendra donc nécessairement deux étapes. Nous allons d'abord montrer que le nombre recherché vaut au plus 4, puis montrer que le nombre 4 vérifie bien la propriété annoncée.

Considérons la situation où deux cases centrales diagonalement adjacentes de la grille 4×4 sont coloriées en noir. Dans ce cas, on peut vérifier qu'il n'y a pas de rectangles possédant strictement plus de 4 cases et ne contenant aucune case noire. Donc $k \leqslant 4$.



Réciproquement, remarquons que quel que soit le coloriage de la grille 4×4, il y a forcément une ligne 1×4 qui ne contient aucune case noire (puisqu'il y a 4 lignes et deux cases noires). Donc $k \geqslant 4$. Nous avons donc bien montré que la réponse est 4.

Commentaire des correcteurs : Un grand nombre d'élèves a traité le problème, correctement pour la majorité d'entre eux.
Beaucoup ont réussi à montrer que $k \geqslant 4$, même si une grande partie des élèves a rencontré des difficultés pour l'autre partie, qui consistait à montrer que $k \leqslant 4$. Les erreurs venaient principalement de la méthode de raisonnement : les exemples ne suffisent pas à montrer une généralité, on attendait donc des arguments indépendants de la configuration pour justifier qu'on pouvait toujours former un rectangle de 4 cases. Les raisonnements par disjonction de cas peuvent conclure mais il faut alors redoubler de vigilance pour s'assurer que tous les cas sont en effet traités. Plusieurs élèves essaient de traiter les deux parties en une, en expliquant comment trouver la situation "la plus restrictive", afin de directement trouver un extremum pour k. Raisonner en parlant de 'pire cas' est souvent un piège où notre intuition nous souffle la réponse sans que nous sachions comment prouver le résultat.

Exercice 10
Soient A et D deux points distincts, et Ω le cercle de diamètre $[AD]$. On note B et C deux points sur le cercle Ω tels que les points A, B, C et D sont distincts deux à deux et se trouvent dans cet ordre sur le cercle. On note X et Y les points d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les droites (BD) et (CD) respectivement.

Montrer que $DX = DY$.

Solution de l'exercice 10
On sait que le segment $[AD]$ est le diamètre du cercle Ω, ainsi on a $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90°$. Ainsi les triangles BXA et AYC sont rectangles respectivement en B et C, donc $\widehat{BXA} = 180 - \widehat{XBA} - \widehat{BAX} = 90 - \widehat{BAX}$ et de même $\widehat{DYA} = 90 - \widehat{YAC}$.

Or comme X et Y sont sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAX} = \widehat{YAC}$, donc $\widehat{BXA} = \widehat{CAY}$. ainsi $\widehat{BXA} = 90 - \widehat{BAX} = 90 - \widehat{YAC} = \widehat{AYC}$. Comme par angles correspondants, $\widehat{BXA} = \widehat{YXD}$, on a $\widehat{YXD} = \widehat{XYD}$. Ainsi le triangle DXY est isocèle en D, donc $DX = DY$.

Solution n°2 de l'exercice 10
Par théorème du pôle sud, (AX) (qui est la bissectrice de $\widehat{BAC}$ recoupe Ω en E le milieu de l'arc BC. De même, la bissectrice de $\widehat{CDB}$ recoupe également Ω en E. Comme $[AD]$ est un diamètre, $\widehat{DEA} = 90°$. Ainsi X et Y sont échangés par la symétrie d'axe (DE), et donc $DX = DY$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup abordé et très bien réussi. Nous n'avons pas remarqué d'erreur trop souvent récurrente, les élèves assez familiers en géométrie n'ont souvent pas eu trop de problème avec l'exercice.

Exercice 11
Théo choisit au moins deux nombres parmi les suivants :

$$-2^{2026}, -2^{2025}, \ldots, -2^2, -2^1, -1, 1, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2025}, 2^{2026}.$$

Il écrit au tableau les nombres qu'il a choisis dans l'ordre croissant, et remarque que la différence entre deux nombres voisins au tableau est toujours la même.

Quel est le nombre maximal de nombres que Théo peut écrire au tableau ?

Solution de l'exercice 11
On va montrer que la réponse est 3, ce qui va être fait en deux étapes : on montre d'abord que Théo peut écrire 3 nombres, puis que Théo ne peut écrire strictement plus que 3 nombres.

Théo peut écrire trois nombres au tableau : il lui suffit d'écrire $-2, 1, 4$, les différences entre deux nombres voisins valent bien toujours 3.

Théo ne peut écrire strictement plus de trois nombres au tableau. On va montrer le résultat suivant, qu'on utilisera pendant toute la solution : **Lemme :** si b, c, d sont trois entiers positifs tels que $2^b = 2^c + 2^d$, alors $c = d = b - 1$.

Preuve : Soit b, c, d trois entiers positifs tels que $2^b = 2^c + 2^d$. Comme $2^b > 2^c$, $c < b$, donc $c \leqslant b - 1$, de même $d \leqslant b - 1$. Ainsi $2^b + 2^c \leqslant 2 \times 2^{b-1} = 2^b$. On a donc égalité dans l'inégalité donc $c = d = b - 1$ ce qui conclut.

Autre preuve du lemme : De même que dans la preuve précédente, $b > c$ et $b > d$. Quitte à échanger c et d, on suppose $c \leqslant d$. Si $c < d$, 2^{c+1} divise 2^d et 2^b, il divise donc aussi $2^d - 2^b = 2^c$ ce qui est absurde. Ainsi $c = d$, donc $2^b = 2^{c+1}$ donc $c = d = b - 1$.

Supposons que Théo puisse écrire trois nombres positifs au tableau, il existe donc trois nombres positifs voisins écrits au tableau, disons $2^a, 2^e$ et 2^f dans cet ordre (avec $a < e < f$). On a alors $2^f - 2^e = 2^e - 2^a$, donc $2^f + 2^a = 2 \times 2^e = 2^{e+1}$. Ainsi d'après le lemme, $a = e = f$ ce qui est absurde. Ainsi Théo peut écrire au plus 2 nombres positifs. De même il peut écrire au plus deux nombres négatifs. Donc Théo peut écrire au plus 4 nombres.

Si Théo arrive à écrire 4 nombres, deux sont positifs et deux négatifs. Disons que les quatre nombres écrits dans l'ordre sont $-2^p, -2^q, 2^r, 2^s$. On a $2^s - 2^r = 2^r + 2^q$, donc $2^s = 2^{r+1} + 2^q$, donc d'après le lemme, $s - 1 = r + 1 = q$. Ainsi les nombres écrits au tableau sont $-2^p, -2^{r+1}, 2^r, 2^{r+2}$. De même, on a $2^p - 2^{r+1} = 2^{r+1} + 2^r$, donc $2^p = 2^{r+2} + 2^r$, donc $p - 1 = r + 2 = r$ ce qui est absurde. Ainsi Théo peut écrire au plus 3 nombres au tableau, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été résolu de manière mitigée. Quelques commentaires :

— Un certain nombre d'élèves ont conjecturé que la réponse était 2. Il est dommage que ceux-ci n'aient pas testé les petits cas : $-2, 1, 4$ est une solution qu'on trouve assez rapidement, et qui contredit tout argument montrant qu'il y a au plus 2 nombres écrits.
— Beaucoup d'élèves ont essayé de résoudre des équations de la forme $2^b - 2^c = 2^c \pm 2^d$. Il est dommage que souvent, l'ensemble des solutions soit admis. Par exemple, affirmer que $2^n - 1$ n'était jamais une puissance de 2 sauf pour $n = 1$ sans preuve coûtait un point, idem pour $2^n + 1$ (sauf $n = 0$), il fallait invoquer l'imparité. Affirmer que si $2^b + 2^c$ est une puissance de 2, alors $b = c$ coûtait plus de points.
— De manière plus grave que le commentaire précédent, beaucoup d'élèves ont oublié que $2^n + 1$ et $2^n - 1$ peuvent être des puissances de 2. Cela faisait souvent louper un nombre

important de points (non pas parce que l'erreur était pénalisée fortement, mais parce que les cas à traiter après (cf la solution officielle) ne pouvaient pas être traités).

— De manière plus générale que dans les deux précédents points, un manque global de justifications s'est fait sentir sur ce problème. Il est important de justifier toutes ses affirmations.

— Certains élèves ont fait des erreurs de calcul facilement évitables : relire sa copie est crucial pour éviter toute erreur, qui peut rapidement coûter beaucoup de point.

Exercice 12
Soit ABC un triangle tel que $AB < BC$ et soit D le symétrique de A par rapport à B, et E le symétrique de A par rapport à C. Soit P le point d'intersection des droites (DC) et (BE) et soit Q le point d'intersection de la droite (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par E. Soit R le point de la droite (BC) tel que le triangle CQR soit isocèle en R.

Montrer que les droites (AP), (QR) et (DE) s'intersectent en un même point.

Solution de l'exercice 12
On va montrer que les trois droites passent toutes par le milieu du segment $[DE]$.

Tout d'abord, on remarque que dans le triangle ADE, les droites (DC) et (BE) sont les médianes des côtés AE et AD. Or, on sait que les trois médianes d'un triangle sont concourantes, donc dans le triangle ADE, ce point de concours est P. Cela implique que la droite (AP) est une médiane et donc qu'elle coupe le segment DE en son milieu.

Comme les points B et C sont les milieux des côtés AD et AE respectivement dans le triangle ADE, on en déduit également que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

On note M' l'intersection de la droite (QR) et de la droite (DE). Comme montré précédemment, on sait que $(BC) \parallel (DE)$ et grâce au théorème de Thalès appliqué aux triangles QCR et QDM' que

$$\frac{QR}{QM'} = \frac{CR}{DM'}.$$

Le triangle QCR est isocèle en R donc $RC = RQ$ et donc, d'après l'identité précédente, on sait que $QM' = M'D$. Ainsi, le point M' est sur la médiatrice de $[DQ]$. Soit M le milieu de $[DE]$. Comme l'angle $\widehat{DQE}$ est droit on en déduit que M est le centre du cercle circonscrit à DQE et donc sur la médiatrices de $[DQ]$. Les points M et M' sont donc tous deux intersections de la médiatrices de $[DQ]$ avec (DE) et comme ces deux droites ne sont pas confondues on en déduit que $M = M'$. Cela conclut l'exercice.

Commentaire des correcteurs : Nous avons reçu beaucoup de copies sur cet exercice et il a été très bien résolu. Lorsqu'il s'agit de montrer la concourance de trois droites il y a plusieurs méthodes possibles. La plus répandue est de nommer l'intersection de deux des trois droites et essayer de montrer qu'elle se trouve sur la dernière. Lors de cet exercice, l'approche naturelle (et que toutes les personnes ayant réussi l'exercice ont utilisée) est de montrer que les trois droites s'intersectaient sur un point particulier du segment $[DE]$, son milieu. Il fallait ensuite traiter les deux droites séparément. Montrer que la droite (AP) passait par le milieu de $[DE]$ a été considéré comme plus facile par les correcteurs car la deuxième concourance nécessitait plus d'étape.

Nous avons très peu d'erreurs à remarquer. Certains élèves confondent hauteurs, médiane ou bissectrice. Cela est dommage car cela peut vous induire en erreur. On rappelle également qu'il est vraisemblable que toutes les hypothèses de l'énoncé soient utiles (ici ce n'était d'ailleurs pas le cas, on pouvait remplacer la définition de D et E comme les symétriques de A par rapport à B et C et l'exercice restait correct). Par exemple, une copie qui n'utilisait jamais le fait que $\widehat{CED} = 90°$ n'avait aucune chance de conclure correctement

Exercice 13
Déterminer s'il existe une infinité de nombres réels positifs x tels que x^2 est un nombre entier et

$$\lfloor \lfloor x \rfloor^2 \{x\} \rfloor = 1.$$

On rappelle que $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière du réel y, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à y, et on rappelle que $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire du réel y, c'est-à-dire la quantité $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$.

Solution de l'exercice 13
Montrons qu'il existe un nombre fini de x vérifiant l'énoncé.

Soit x vérifiant l'énoncé, notons qu'on ne peut avoir $\lfloor x \rfloor = 0$. Ainsi $\lfloor x \rfloor \geqslant 1$, posons $\alpha = \lfloor x \rfloor^2 \{x\}$ qui est dans $[1, 2[$. On a alors $\{x\} = \frac{\alpha}{\lfloor x \rfloor^2}$.

Ainsi

$$x^2 = (\lfloor x \rfloor + \{x\})^2 = \left(\lfloor x \rfloor + \frac{\alpha}{\lfloor x \rfloor^2} \right)^2 = \lfloor x \rfloor^2 + \frac{2\alpha}{\lfloor x \rfloor} + \frac{\alpha^2}{\lfloor x \rfloor^4}.$$

Or comme α est entre 1 et 2, cette quantité est strictement plus grande que $\lfloor x \rfloor^2$ et strictement plus petite que $\lfloor x \rfloor^2 + \frac{4}{\lfloor x \rfloor} + \frac{4}{\lfloor x \rfloor^4}$. Comme x^2 est entier, et $\lfloor x \rfloor^2$ aussi, on a donc $x^2 \geqslant \lfloor x \rfloor^2 + 1$, donc (comme $\lfloor x \rfloor^2 \geqslant \lfloor x \rfloor$ car la partie entière de x vaut au moins 1)

$$1 \leqslant \frac{4}{\lfloor x \rfloor} + \frac{4}{\lfloor x \rfloor^4} \leqslant \frac{8}{\lfloor x \rfloor}.$$

Ainsi si x est solution, $\lfloor x \rfloor \leqslant 8$, donc $x < 9$. Donc $x^2 < 81$, ainsi comme x^2 est entier, x^2 peut uniquement prendre un nombre fini de valeurs, donc x aussi, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Malgré un grand nombre de copies reçus, cet exercice a été résolu par moins d'un tiers des copies reçues. Cet exercice nécessitait de bien comprendre les hypothèses données et d'en déduire des propriétés algébriques. Par exemple, le nombre x^2 étant entier et x ne l'étant pas, il pouvait être intéressant de considérer la décomposition de x comme $\lfloor x \rfloor + \{x\}$ pour faire apparaître les deux termes de l'équation principale. De manière générale, il est fortement encouragé d'écrire et de réinterpréter les hypothèses de l'énoncé. C'était, dans ce problème, la première étape clef dans la résolution. Il est également conseillé d'utiliser les opérations $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\{\cdot\}$ avec beaucoup de soin. En particulier, le fait de les réécrire comme des inégalités est souvent très utile.

Exercice 14
Baptiste a choisi un nombre entier strictement positif n qui possède exactement 1000 diviseurs positifs (1 et n inclus). Il écrit tous ces diviseurs au tableau dans l'ordre croissant, et remarque que deux diviseurs consécutifs sont toujours de parités différentes : l'un des deux est pair, l'autre est impair.

Montrer que n a au moins 150 chiffres dans son écriture décimale.

Solution de l'exercice 14
Notons $d_1 < \cdots < d_k$ les diviseurs impairs de n. Déjà notons que comme n a un diviseur pair, il est pair. En particulier, $2d_1 < \cdots < 2d_k$ sont des diviseurs pairs de n. Comme les diviseurs de n commencent par 1 et finissent par n qui est pair, on a une alternance de 500 diviseurs impairs et 500 diviseurs pairs : ainsi $k = 500$, et les seuls diviseurs pairs de n sont $2d_1, \ldots, 2d_k$.

De plus, comme les diviseurs pairs et impairs alternent, les diviseurs écrits sont, dans l'ordre, $1 = d_1, 2d_1, d_2, 2d_2, \ldots, d_{500}, 2d_{500} = n$. Ainsi $d_{500} = n/2$. De plus, on a que $d_2 > 2d_1$, $d_3 > 2d_2 > 4d_1$, donc en itérant on en déduit que $d_{500} > 2^{499}d_1$. Ainsi $n = 2d_{500} > 2^{500}$.

Pour montrer que n a au moins 150 chiffres dans son écriture décimale, il suffit de montrer que $2^{500} \geqslant 10^{150}$, ce qui en prenant la racine 50-ème équivaut à $2^{10} > 10^3$. Or $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Ce problème a été abordé par de nombreux élèves mais assez peu l'ont traité entièrement.
Beaucoup de copies réussissent à montrer que n n'est pas un multiple de 4 : ce fait n'est pas indispensable pour résoudre le problème mais est utilisé dans certaines preuves. Dans tous les cas, les élèves ont eu raison de prouver ce résultat intermédiaire et ont été récompensés : il faut toujours indiquer sur sa copie ses pistes de recherches.
Ensuite, de nombreuses copies ont cru que raisonner uniquement sur les diviseurs de n et non sur leur ordre permettait de conclure. En substance, ces élèves essayaient de montrer que tout nombre à 1000 diviseurs avec 500 pairs et 500 impairs présentait au moins 150 chiffres dans son écriture décimale. Remarquons d'une part que cela est faux ($2 \times 3^{24} \times 5^{19}$ a bien 500 diviseurs pairs et 500 impairs mais est plus petit que 10^{149}) et d'autre part qu'une telle stratégie de preuve n'utilise pas une hypothèse forte de l'énoncé : les diviseurs alternent en parité.
Les tentatives de démonstration reposaient sur l'exploitation de la formule donnant le nombre de diviseurs d'un entier : il est heureux que de nombreux élèves la connaissent (même si elle n'était pas nécessaire à la résolution de l'exercice, car absente des prérequis de la coupe, elle pouvait être utile). Cependant, son utilisation a souvent conduit à des raisonnements faux (voire absents) pour trouver le plus petit nombre à 1000 diviseurs : le cas optimal n'est pas de prendre le plus petit facteur premier (3 dans le contexte du problème) à chaque étape car il faut alors le prendre de nombreuses fois, ainsi $2 \times 3^{24} \times 5^{19}$ est une solution inférieure à 2×3^{499} que de nombreuses copies n'ont pas vue. Signalons aussi que le plus petit nombre à 1000 diviseurs n'a pas nécessairement $1, 2, 3, \ldots, 1000$ pour diviseurs. De façon générale, rappelons qu'une preuve de minimalité doit être rigoureuse et qu'un choix optimal à chaque étape ne garantit pas d'aboutir à la configuration optimale parmi toutes celles possibles. Quelques copies affirment que n est divisible par le produit de ses diviseurs : cela n'est vrai que pour des diviseurs deux-à-deux premiers entre eux.
Concernant la solution de l'exercice, l'étape clef était de prouver que les diviseurs de n étaient dans l'ordre $d_1 < 2d_1 < d_2 < \cdots < d_{500} < 2d_{500}$: ce point contenait la plus grande difficulté de

l'exercice et devait donc être démontré soigneusement alors que beaucoup de copies furent trop imprécises. Il y avait de nombreuses preuves de ce résultat : une approche par récurrence était possible, exploitant le fait que si $d \mid n$ avec d impair alors $2d \mid n$, mais il fallait alors justifier en détail pourquoi il ne pouvait pas y avoir de diviseurs entre d et $2d$ dans l'ordre croissant. Trop d'élèves utilisent le fait (peut-être même sans s'en rendre compte) que les seuls diviseurs de n sont ses diviseurs impairs et leurs doubles sans le préciser ni le prouver.
Une fois cette inégalité obtenue, finir l'exercice devenait plus accessible mais tous les arguments devaient encore une fois être présents. En particulier, l'inégalité $2^{500} \geqslant 10^{150}$ ne saute pas aux yeux : il est dommage que de bonnes copies perdent des points parce qu'elles ne la démontrent pas alors qu'elles en étaient certainement capables.

Exercice 15
Le pays d'Animath contient 2026 villes. Certaines de ses villes sont reliées par des routes (qui vont dans les deux sens). On sait que pour tout triplet de villes deux à deux distinctes X, Y et Z, il est possible de trouver une suite de routes allant de X à Z sans passer par Y. On dit que n villes $V_1, \dots, V_n$ forment, dans cet ordre, un cycle de longueur n si les n villes sont **deux à deux distinctes**, et si pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les villes V_i et V_{i+1} sont reliées, et V_n est reliée à V_1.

Quelle est la plus grande valeur de n telle que, peu importe la manière dont les villes sont reliées, il existe un cycle de longueur au moins n ?

Solution de l'exercice 15
Montrons que la réponse est 4 : pour cela, il faut prouver qu'il existe une situation vérifiant l'énoncé pour lequel le plus grand cycle est de longueur 4, ce qui montrera que tout n vérifiant l'énoncé vérifie $n \leqslant 4$, et montrer que quelque soit la manière dont les villes sont reliées, il y a un cycle de longueur au moins 4.

Il existe une configuration où tout cycle est de longueur au plus 4 :
Regardons la configuration suivante avec deux villes A et B qui sont reliées aux 2024 autres (sans aucune autre route). Si on retire une arête, disons l'arête entre A et V_1 où V_1 est une des 2024 villes, il est toujours possible d'aller d'une ville à l'autre.

— Si $Y = A$ ou B, disons A par symétrie, alors si X, Z sont B et une des 2024 autres villes, elles sont directement reliées par une route, sinon X, Z sont deux villes parmi les 2024, et il est possible de passer de l'une à l'autre en passant par B.
— Si Y est une des 2024 autres villes, si X et Z sont deux des 2024 autres villes, elles sont reliées en passant par A. Si X et Z sont A et B, elles sont reliées en passant par n'importe laquelle des 2024 autres villes autre que Y. Sinon, X et Z sont A ou B, et une des 2024 autres villes différentes de Y, et sont reliées directement.

De plus, ici tout cycle alterne entre une ville parmi les 2024 différentes de A et B, et soit A soit B, donc doit être de longueur paire, et ne peut comporter 6 villes ou plus : en effet, sinon comme la moitié des villes sont soit A soit B, il y aurait au moins 3 villes qui sont soit A soit B, ce qui contredit le fait que les villes sont distinctes. Ainsi l'exemple ne contient que des cycles de longueur au plus 4.

Quelle que soit la manière dont les villes sont reliées, il y a un cycle de longueur au moins 4 :
Déjà notons que toute ville a au moins 2 routes partant de celle-ci : en effet, s'il y a une ville X dont ne part aucune route, en choisissant Y et Z deux autres villes on obtient une contradiction. Si X n'est reliée qu'à une ville, en notant Y celle-ci, et Z une autre ville, on obtient une contradiction.

Ceci implique l'existence d'un cycle de longueur au moins 3 : en prenant A_1 une ville quelconque, A_2 une ville reliée à A_1, A_3 une ville reliée à A_2 différente de A_1 (qui existe car il y a deux routes partant de A_2), A_4 une ville reliée à A_3 différente de A_2 (qui existe car il y a deux routes partant de A_3), etc, on obtient une suite infinie de villes $(A_n)_{n \geqslant 1}$. Comme il y a un nombre fini de routes, il existe $i < j$ tel que $A_i = A_j$. On peut prendre j minimal pour lequel il existe $i < j$ tel que $A_i = A_j$. On ne peut avoir $i = j + 1$ par définition, et $i = j + 2$ est aussi exclu (car $A_{i+2} \neq A_i$ par définition). Ainsi $A_i, \dots, A_{j-1}$ forme un cycle de villes distinctes, et de longueur au moins 3.

Si le cycle obtenu est de longueur au moins 4, on a le résultat voulu. Sinon notons A, B, C

le cycle dans l'ordre. S'il n'existe aucune autre ville reliée à A, B, C, alors en prenant $X = A, Y = B$ et Z une autre ville (qui n'est pas C), on obtient une contradiction. Il existe donc une ville notée D, reliée à A, B ou C. Par symétrie, disons que D est relié à A. Il existe un chemin allant de D à B sans passer par A. Si ce chemin passe par C, on a un chemin de D à C qui ne passe pas par A ou B, donc on peut le refermer en empruntant les routes de C vers B puis de B vers A pour obtenir un cycle de longueur au moins 4. Sinon, on a alors un chemin allant de D à B ne passant pas par C ou par A. Notons $D, V_1, \dots, V_k, B$ les villes de ce chemin avec $k \geqslant 0$, on a alors le cycle $D, V_1, \dots, V_k, B, C, A$ qui est de longueur au moins 4, ce qui conclut.

Solution n°2 de l'exercice 15
On propose une solution alternative de l'existence d'un cycle de longueur $\geqslant 4$. Si toutes les villes sont reliées par des routes directes, il existe un cycle de longueur 2026. Sinon, il existe deux villes A et B qui ne sont pas reliées par une route directe. Considérons un chemin $AC_1C_2 \dots C_kB$, où les sommets C_i sont tous distincts et différents de A et de B, avec $k \geqslant 1$ et $B = C_{k+1}$ par convention. Soit i l'indice maximal tel que A est relié à C_i. Un tel indice existe car AC_1 est une route, et $i \leqslant k$ car A et B ne sont pas reliés. Par maximalité, on sait que A est relié à C_i, C_i est relié à C_{i+1} mais A n'est pas relié à C_{i+1}. Or, il existe un chemin allant de C_{i+1} à A sans passer par C_i. On en déduit donc un cycle de longueur $\geqslant 4$ de la forme $AC_iC_{i+1}D_1 \dots D_\ell$, avec $\ell \geqslant 1$.

Commentaire des correcteurs : Ce problème a été de très loin le moins traité. Il est dommage de voir si peu de copies, le barème proposait de nombreux points intermédiaires accessibles. L'exercice était assez technique, et il était facile d'affirmer des choses fausses si l'on manquait de rigueur. De nombreuses personnes ont par exemple construit un cycle de longueur au moins 4 sans s'assurer que tous les sommets du cycle étaient bien différents. Similairement, le fait qu'il existe deux chemins différents entre toute paire de sommets n'implique pas immédiatement qu'il existe deux chemins ne partageant aucun sommet entre toute paire de sommets. Cette propriété est en fait vraie sous l'hypothèse de l'énoncé, mais est loin d'être évidente (c'est un cas particulier du théorème de Menger).

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre et Géométrie 44
1 Géométrie : Chasse aux angles 1 (Lilas et Héloïse) 44
2 Algèbre : Découverte (Hadriel) 53
3 Algèbre : Récurrence (Kevin) 54
4 Géométrie : Chasse aux angles 2 (Martin et Aurélien) 63
5 Géométrie : Triangles semblables (Mathieu) 75
6 Algèbre : Inégalités 1 (Théo) 81
7 Algèbre : Inégalités 2 (Héloïse) 86
8 Géométrie : Pot-pourri (Claire et Noam) 93
2 Entraînement de mi-parcours 106
3 Deuxième partie : Combinatoire et Arithmétique 110
1 Combinatoire : Principe des tiroirs (Anatole) 110
2 Arithmétique : PGCD et divisibilité (Antoine D) 116
3 Arithmétique : Nombres premiers (Eva) 120
4 Combinatoire : Invariants et coloriages (Lucile) 126
5 Combinatoire : Principe de l'extremum (Félix) 134
6 Arithmétique : Modulos (Matteo et Rémi) 136
7 Arithmétique : Équations diophantiennes (David) 143
8 Combinatoire : Jeux (Solal) 152
4 Entraînement de fin de parcours 167

1 Première partie : Algèbre et Géométrie

1 Géométrie : Chasse aux angles 1 (Lilas et Héloïse)

Ce cours reprend l'incroyable cours donné par Martin à Valbonne 2025.

Exercices

Exercice 1
Calculer la somme des angles d'un heptagone (7 cotés).

Exercice 2
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points distincts A et B. Une droite passant par le point A recoupe le cercle Γ_1 en un point C et le cercle Γ_2 en un point D. Une droite passant par le point B recoupe le cercle Γ_1 en un point E et le cercle Γ_2 en un point F. Montrer que les droites (CE) et (DF) sont parallèles.

Exercice 3
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent respectivement aux points P et Q. Une droite ℓ coupe les cercles ω_1 et ω_2 respectivement aux points A, C et B, D de telle sorte que les points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre. Montrer qu'on a $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 4
(Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de points A et C sur la droite (BD). Soient B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de points B et D sur la droite (AC). Montrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques.

Exercice 6
Soit A, B, C, D quatre points dans cet ordre sur un cercle et soit S le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas C et D. Les droites (SD) et (SC) intersectent (AB) en E et F respectivement. Montrer que C, D, E, F sont cocycliques.

Exercice 7
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soient H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C. Prouver que $(H_BH_C) \perp (AO)$.

Exercice 8
Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

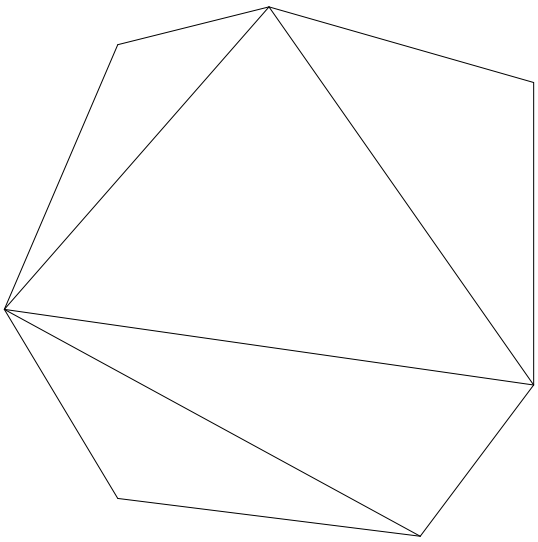
Exercice 9
Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles de sommets A et B rencontrent les côtés

BC et AC respectivement en D et E. Soit F la projection orthogonale de C sur BE et G la projection orthogonale de C sur AD. Montrer que (FG) et (AB) sont parallèles.

Exercice 10
(EGMO 2022 P1) Soit ABC un triangle dans lequel $BC < AB$. Soit P un point distinct de B sur le segment $[AB]$ et Q un point distinct de C sur le segment $[AC]$ tels que $BQ = BC = CP$. Soit T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ, H l'orthocentre du triangle ABC et S le point d'intersection des droites (BQ) et (CP). Montrer que les points T, H et S sont alignés.

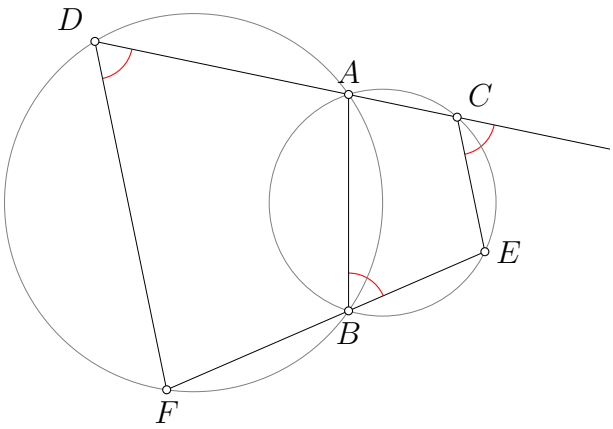
Solutions

Solution de l'exercice 1



On découpe notre heptagone en 5 triangles. La somme des angles du heptagone vaut donc $5 \times 180 = 900$ degrés.

Solution de l'exercice 2



Les points A, B, F et D sont cocycliques donc

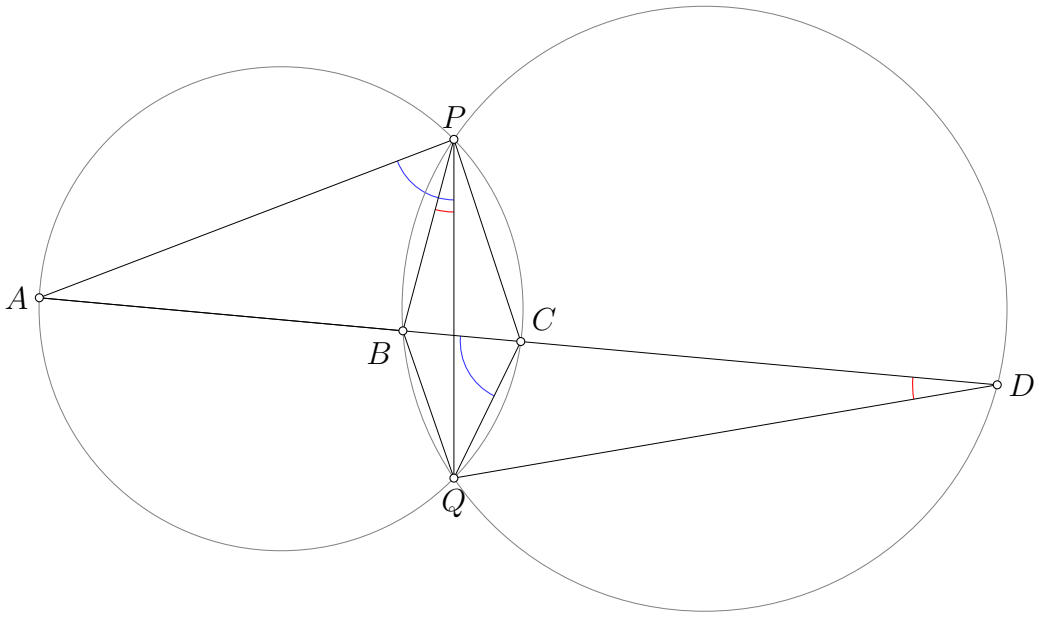
$$\widehat{FDA} = 180° - \widehat{FBA} = \widehat{EBA}$$

Les points A, B, E et C sont cocycliques donc

$$\widehat{ABE} = 180° - \widehat{ECA}$$

On obtient donc que $\widehat{FDA} = 180° - \widehat{ACE}$, ce qui signifie que les droites (DF) et (CE) sont parallèles.

Solution de l'exercice 3

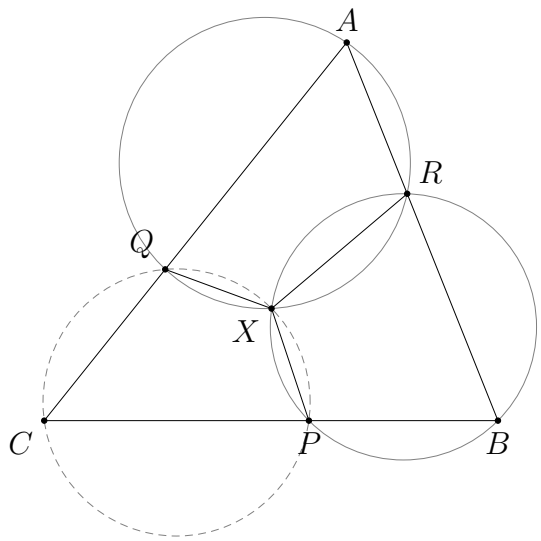


On vérifie que d'après le théorème de l'angle inscrit pour les quadrilatères cycliques $APCQ$ et $PBQD$:

$$\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = \widehat{ACQ} - \widehat{BDQ} = \widehat{CQD}$$

où la dernière égalité provient du fait que la somme des angles du triangle CQD vaut $180°$.

Solution de l'exercice 4

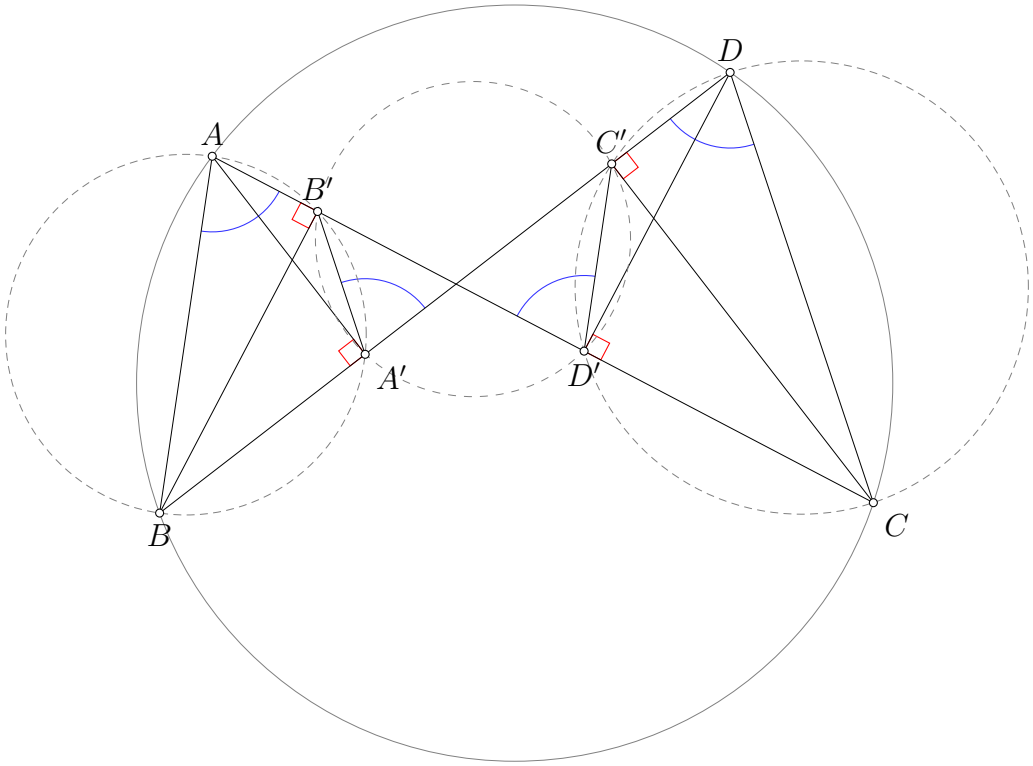


On appelle X le second point d'intersection des cercles circonscirts aux triangles AQR et BRP. Il s'agit de montrer que le point X appartient au cercle circonscrit du triangle CPQ. Or :

$$\widehat{QXP} = 360° - \widehat{PXR} - \widehat{RXQ} = (180° - \widehat{PXR}) + (180° - \widehat{QXR}) = \widehat{PBR} + \widehat{QAR} = 180° - \widehat{PCQ}$$

ce qui montre bien que les points Q, X, P et C sont cocycliques.

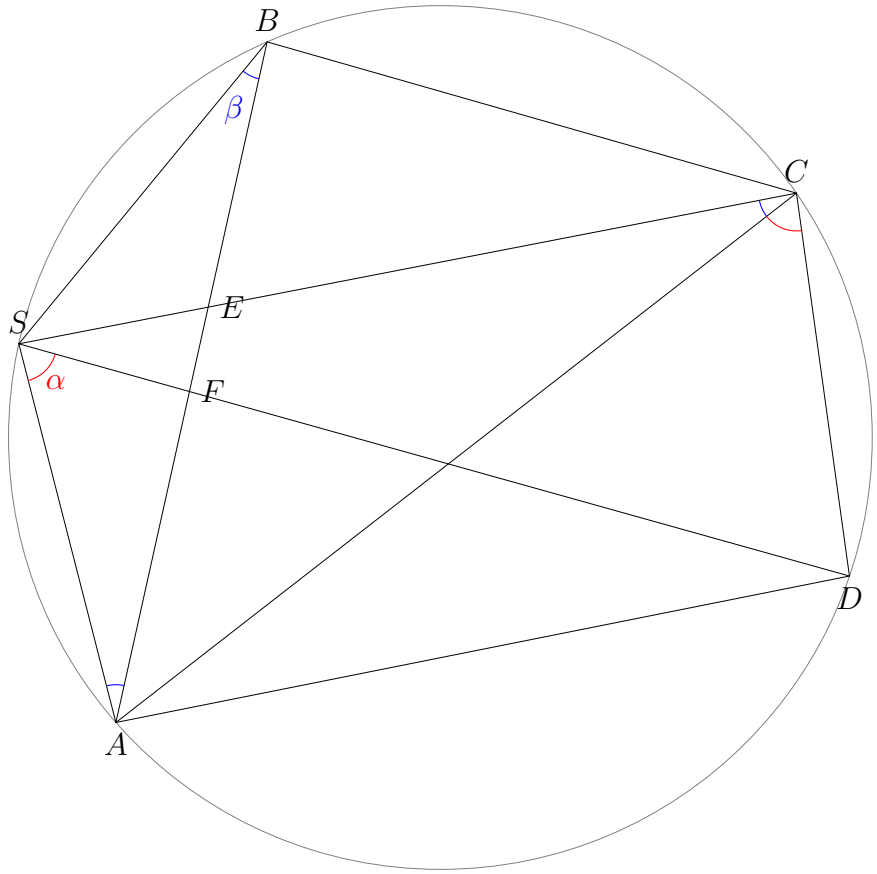
Solution de l'exercice 5



Puisque $\widehat{AB'B} = 90° = \widehat{AA'B}$, le quadrilatère $AB'A'A$ est cyclique. De même, le quadrilatère $DC'D'C$ est cyclique. On déduit

$$\widehat{C'A'B'} = 180° - \widehat{B'A'B} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 180° - \widehat{C'D'C} = \widehat{C'D'A'}.$$

Solution de l'exercice 6



Comme S est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$,

$$\widehat{ABS} = \widehat{BAS} = \alpha$$

A, S, B, C cocycliques donc

$$\widehat{ACS} = \widehat{ABS} = \alpha$$

et

$$\widehat{ACD} = \widehat{ASD} = \phi$$

Dans le triangle ASF, comme $\widehat{ASF} = \phi$ et $\widehat{FAS} = \alpha$, on a

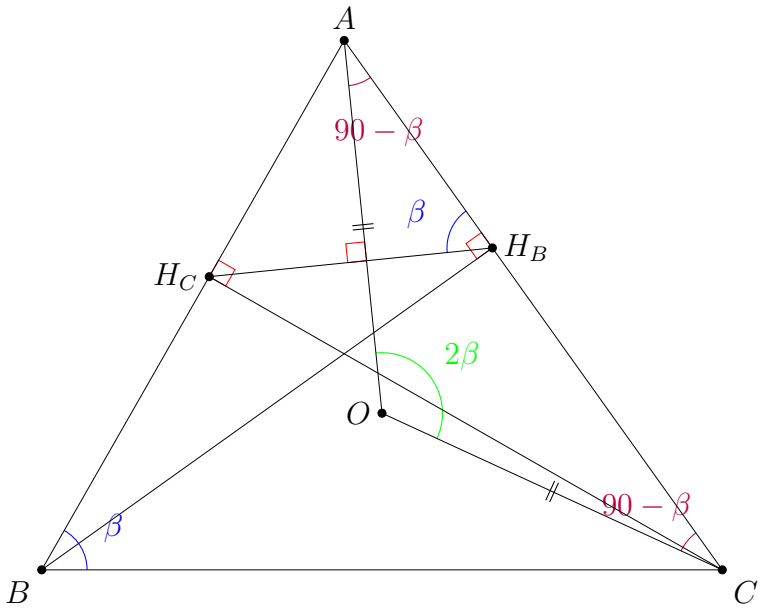
$$\widehat{SFB} = \alpha + \phi$$

Or $\widehat{DCA} = \phi$ et $\widehat{ACS} = \alpha$, on a

$$\widehat{DCS} = \alpha + \beta = \widehat{BFS}$$

Donc E, F, C, D cocycliques.

Solution de l'exercice 7



Les triangles BH_BC et BH_CC étant respectivement rectangles en H_B et H_C, le théorème de l'angle inscrit nous dit que B, C, H_B et H_C sont cocycliques, d'où on tire que

$$\widehat{CBH_C} = \widehat{AH_BH_C}$$

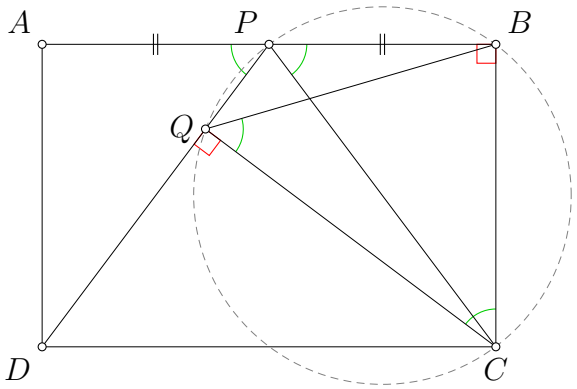
. D'autre part, le théorème de l'angle au centre indique que $\widehat{COA} = 2\widehat{CBA}$. Le triangle AOC étant isocèle en O, on en déduit que

$$\widehat{OAH_B} = \widehat{OAC} = 90 - \widehat{ABC}$$

Finalement

$$\widehat{AXH_B} = \widehat{OAH_B} + \widehat{AH_BH_C} = 90 - \widehat{ABC} + \widehat{ABC} = 90$$

Solution de l'exercice 8

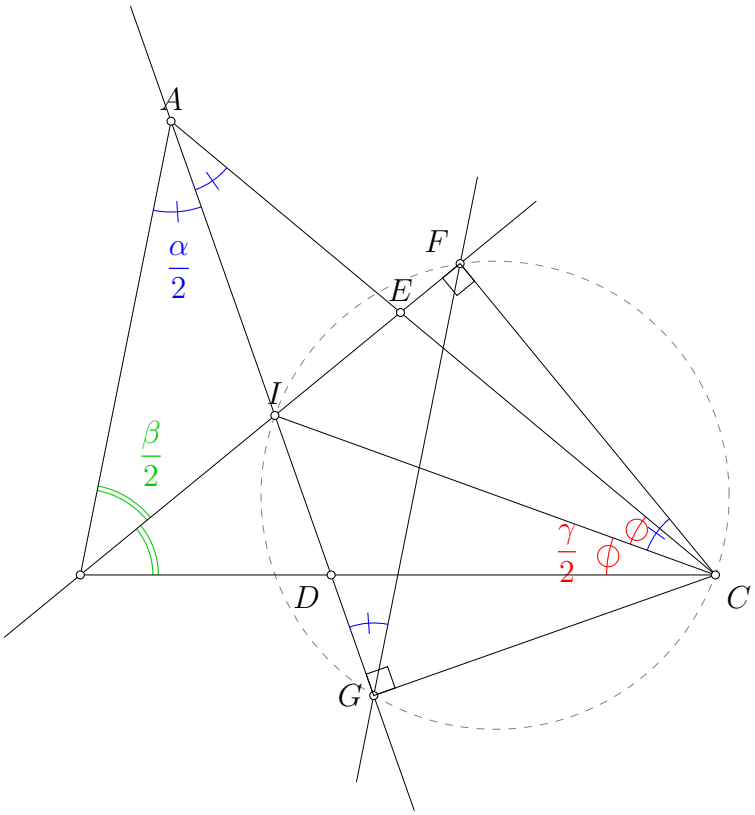


Puisque $\widehat{PQC} = 90° = 180° - 90° = 180° - \widehat{PBC}$, les points Q, P, B et C sont cocycliques. Il vient que $\widehat{CQB} = \widehat{CPB}$.

Les points B et C sont les symétriques respectifs des points A et D par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. On déduit que $\widehat{CPB} = \widehat{DPA}$.

Les points Q, P, B et C sont cocycliques, donc $\widehat{DPA} = 180° - \widehat{QPB} = \widehat{QCB}$. On a donc finalement $\widehat{QCB} = \widehat{BQC}$ et le triangle BQC est isocèle en B.

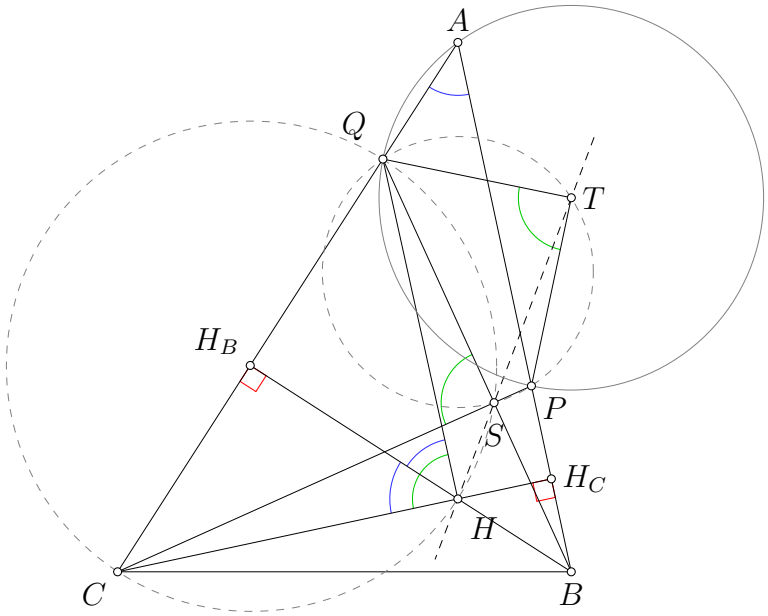
Solution de l'exercice 9



On note α, β, γ les angles du triangle ABC, selon les conventions d'usage. On note I le centre du cercle inscrit. C'est donc en particulier le point d'intersection de (AD) et (BE), et

(CI) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$
Alors, on cherche à montrer que $\widehat{AGF} = \widehat{BAG}$.
Comme $\widehat{IFC} = 180 - \widehat{IGC}$, $IFCG$ est cyclique. On a donc $\widehat{AGF} = \widehat{IGF} = \widehat{ICF}$.
En regardant le triangle rectangle BFC, avec le fait que (BI) et (CI) sont des bissectrices, on a $90 = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \widehat{ICF}$. Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180$, avec ce qui précède, $\widehat{AGF} = \frac{\alpha}{2}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10



En l'absence d'idées, on peut chercher à exprimer les différents angles de la figure en fonction des angles du triangle.

On note H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement.

Par exemple, on peut calculer l'angle $\widehat{CSB}$ en fonction de α, β et γ. Pour cela, on remarque que le triangle PCB est isocèle en P et que la médiatrice du segment $[PB]$ est la droite (HC), de sorte que la droite (HC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$. De même, la droite (HB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{QBC}$. On a alors :

$$\widehat{CSB} = 180° - \widehat{QBC} - \widehat{PCB} = 180° - 2\widehat{HCB} - 2\widehat{HBC} = 180° - 2(90° - \beta) - 2(90° - \beta) = 180° - 2\alpha$$

Cela signifie que $\widehat{QSP} = 180° - 2\alpha = 180° - \widehat{QTP}$ d'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle $\mathcal{C}_{APQ}$. Les points T, P, S et Q sont donc cocycliques.

D'autre part, puisque H est sur la médiatrice du segment $[QC]$, le triangle QHC est isocèle en H et la droite (HH_B) est la bissectrice de l'angle $\widehat{QHC}$. On a donc

$$\widehat{QHC} = 2\widehat{H_BHC} = 2(90° - \widehat{HCA}) = 2(90° - (90° - \alpha)) = 2\alpha = 180° - \widehat{CSQ}$$

Les points Q, S, H et C sont donc cocycliques.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\widehat{HST} = \widehat{HSQ} + \widehat{QST} = 180°$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{QTPS}$ et en calculant dans le triangle QPT isocèle en T, on trouve :

$$\widehat{QST} = \widehat{QPT} = \frac{180^\circ - \widehat{PTQ}}{2} = 90^\circ - \alpha$$

D'autre part, d'après le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{QSHC}$:

$$\widehat{HSQ} = 180^\circ - \widehat{QCH} = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

ce qui conclut bien que $\widehat{HSQ} + \widehat{QST} = 180^\circ$.

2 Algèbre : Découverte (Hadriel)

Ce cours est inspiré du grandiose cours donné par Melvil à Valbonne en 2025.

3 Algèbre : Récurrence (Kevin)

Le principe de récurrence

Définition 1.
Soit n_0 un entier et, pour tout entier $n \geqslant n_0$, soit $P(n)$ une propriété dépendant de n. Une preuve par récurrence permet de montrer que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

Théorème 2.
Soit n_0 un entier. Supposons que les deux assertions suivantes soient vérifiées :

1. la propriété $P(n_0)$ est vraie ;
2. pour tout entier $n \geqslant n_0$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

La première assertion permet de commencer le raisonnement. La seconde permet ensuite de passer d'un rang au rang suivant. On obtient successivement $P(n_0)$, $P(n_0+1)$, $P(n_0+2)$, et ainsi de suite.

Rédiger une preuve par récurrence

Une rédaction par récurrence comporte toujours les trois étapes suivantes.

1. **Initialisation.** On vérifie directement la propriété au premier rang considéré.
2. **Hérédité.** On fixe un entier $n \geqslant n_0$, on suppose que $P(n)$ est vraie, puis on démontre $P(n+1)$.
3. **Conclusion.** On applique le principe de récurrence en précisant l'ensemble des entiers pour lesquels la propriété est vraie.

Exemple 3.
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par

$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = 2u_n - 1$$

pour tout entier $n \geqslant 0$. Montrons que, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$u_n = 2^{n+1} + 1.$$

Démonstration. Pour $n \geqslant 0$, notons $P(n)$ la propriété $u_n = 2^{n+1} + 1$.

Initialisation. Pour $n = 0$, on a

$$u_0 = 3 = 2^1 + 1.$$

La propriété $P(0)$ est donc vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 0$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2\big(2^{n+1} + 1\big) - 1 = 2^{n+2} + 1.$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a $u_n = 2^{n+1} + 1$. □

Rappel 4.
Dans l'étape d'hérédité, la propriété $P(n)$ est une hypothèse : elle n'a pas à être redémontrée. En revanche, il faut expliquer précisément comment elle permet d'obtenir $P(n+1)$. Il faut également vérifier le bon rang initial : une hérédité seule ne suffit pas à établir une propriété.

Exercices

Exercice 1
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 2
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 3
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Exercice 4
Montrer que, pour tout réel $x \geqslant -1$ et tout entier $n \geqslant 0$,

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Exercice 5
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Exercice 6
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 = a_1^3 + \cdots + a_n^3.$$

Déterminer toutes les suites vérifiant cette propriété.

Exercice 7
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$2^n > n.$$

Exercice 8
Montrer que, pour tout réel $q \neq 1$ et tout entier $n \geqslant 0$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Exercice 9
Soit $(b_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $b_0 = 1$ et, pour tout entier $n \geqslant 0$,

$$b_{n+1} = b_0 + b_1 + \cdots + b_n.$$

Déterminer une formule explicite pour b_n.

Exercice 10
Soient a, b et u_0 trois réels. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie, pour tout entier $n \geqslant 0$, par

$$u_{n+1} = au_n + b.$$

Déterminer une formule explicite pour u_n.

Exercice 11
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Exercice 12
Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1\times 2 + 2\times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$, on a

$$1 = \frac{1 \times 2}{2}.$$

La propriété $P(1)$ est donc vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.
Conclusion. Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution de l'exercice 2
Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$,

$$1^2 = 1 = \frac{1 \times 2 \times 3}{6}.$$

Ainsi, $P(1)$ est vraie.
Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{(n+1)\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big)}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Il s'agit bien de la formule attendue au rang $n+1$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
Conclusion. Par récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 3
D'après l'exercice 1, il suffit de montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Notons $P(n)$ cette propriété.

Initialisation. Pour $n = 1$, les deux membres sont égaux à 1. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= (n+1)^2\left(\frac{n^2}{4} + n + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

La propriété $P(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion. Par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2.$$

Solution de l'exercice 4

Fixons un réel $x \geqslant -1$. Pour $n \geqslant 0$, notons $P(n)$ la propriété

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Initialisation. Pour $n = 0$, on a

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x.$$

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 0$. Supposons $P(n)$ vraie. Comme $x \geqslant -1$, on a $1 + x \geqslant 0$ et l'on peut multiplier l'inégalité par $1 + x$ sans en changer le sens. On obtient

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geqslant (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geqslant 1 + (n+1)x, \end{aligned}$$

car $nx^2 \geqslant 0$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, l'inégalité est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 5

Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$

Initialisation. Pour $n = 1$, on a $1 = 1^2$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $P(n)$ vraie. Le terme impair suivant est $2(n+1) - 1 = 2n + 1$. Par conséquent,

$$1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2n+1) = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 6

Nous allons montrer que l'unique suite possible est

$$\boxed{a_n = n \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 1.}$$

Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété :

$$a_k = k \quad \text{pour tout entier } k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$, la relation de l'énoncé donne

$$a_1^2 = a_1^3.$$

Comme $a_1 > 0$, on peut diviser par a_1^2 et obtenir $a_1 = 1$. La propriété $P(1)$ est donc vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $P(n)$ vraie et posons

$$S_n = a_1 + \cdots + a_n = 1 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La relation de l'énoncé aux rangs n et $n+1$ donne

$$(S_n + a_{n+1})^2 = S_n^2 + a_{n+1}^3.$$

Après simplification,

$$2S_n a_{n+1} + a_{n+1}^2 = a_{n+1}^3.$$

Puisque $a_{n+1} > 0$, on peut diviser par a_{n+1} :

$$a_{n+1}^2 - a_{n+1} - 2S_n = 0.$$

En utilisant $2S_n = n(n+1)$, on obtient

$$a_{n+1}^2 - a_{n+1} - n(n+1) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\big(a_{n+1} - (n+1)\big)(a_{n+1} + n) = 0.$$

Comme $a_{n+1} > 0$, la seconde possibilité est exclue. Ainsi, $a_{n+1} = n+1$, donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, toute suite vérifiant l'énoncé satisfait $a_n = n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Réciproquement, l'identité de l'exercice 3 montre que la suite $a_n = n$ convient bien.

Solution de l'exercice 7

Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété $2^n > n$.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a $2^1 = 2 > 1$. Ainsi, $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $2^n > n$. Alors

$$2^{n+1} = 2 \times 2^n > 2n.$$

Or $2n \geqslant n+1$ puisque $n \geqslant 1$. On en déduit

$$2^{n+1} > n + 1.$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, $2^n > n$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 8

Fixons un réel $q \neq 1$. Pour $n \geqslant 0$, notons $P(n)$ la propriété

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Initialisation. Pour $n = 0$,

$$1 = \frac{q-1}{q-1}.$$

Ainsi, $P(0)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 0$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1 + q + \cdots + q^n + q^{n+1} &= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} \\ &= \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 9

On a immédiatement

$$b_1 = b_0 = 1.$$

De plus, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$b_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1} + b_n \\ &= 2b_n. \end{aligned}$$

Montrons désormais par récurrence que $b_n = 2^{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Initialisation. Pour $n = 1$, on a $b_1 = 1 = 2^0$.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $b_n = 2^{n-1}$. Alors

$$b_{n+1} = 2b_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n.$$

Conclusion. La formule explicite est

$$\boxed{b_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad b_n = 2^{n-1} \text{ pour tout entier } n \geqslant 1.}$$

Solution de l'exercice 10

Il faut distinguer deux cas.

Premier cas : $a = 1$**.** Montrons par récurrence que

$$u_n = u_0 + nb$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Pour $n = 0$, la formule est immédiate. Si elle est vraie au rang n, alors

$$u_{n+1} = u_n + b = u_0 + nb + b = u_0 + (n+1)b.$$

La formule est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 0$.

Second cas : $a \neq 1$**.** Montrons par récurrence que

$$u_n = a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}$$

pour tout entier $n \geqslant 0$.

Pour $n = 0$, le membre de droite vaut u_0. Supposons la formule vraie au rang n. Alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= au_n + b \\ &= a\left(a^n u_0 + b\frac{a^n - 1}{a - 1}\right) + b \\ &= a^{n+1}u_0 + b\frac{a(a^n - 1) + (a - 1)}{a - 1} \\ &= a^{n+1}u_0 + b\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}. \end{aligned}$$

La formule est donc vraie au rang $n + 1$.

Finalement,

$$\boxed{u_n = \begin{cases} u_0 + nb, & \text{si } a = 1, \\ a^n u_0 + b\dfrac{a^n - 1}{a - 1}, & \text{si } a \neq 1. \end{cases}}$$

Solution de l'exercice 11

Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$,

$$\frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}.$$

Ainsi, $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \times 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2) + 1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion. Par récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 12

Pour $n \geqslant 1$, notons $P(n)$ la propriété

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Initialisation. Pour $n = 1$,

$$1 \times 2 = 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3}.$$

Ainsi, $P(1)$ est vraie.

Hérédité. Soit $n \geqslant 1$. Supposons $P(n)$ vraie. Alors

$$\begin{aligned} 1 \times 2 + \cdots + n(n+1) + (n+1)(n+2) &= \frac{n(n+1)(n+2)}{3} + (n+1)(n+2) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}. \end{aligned}$$

Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

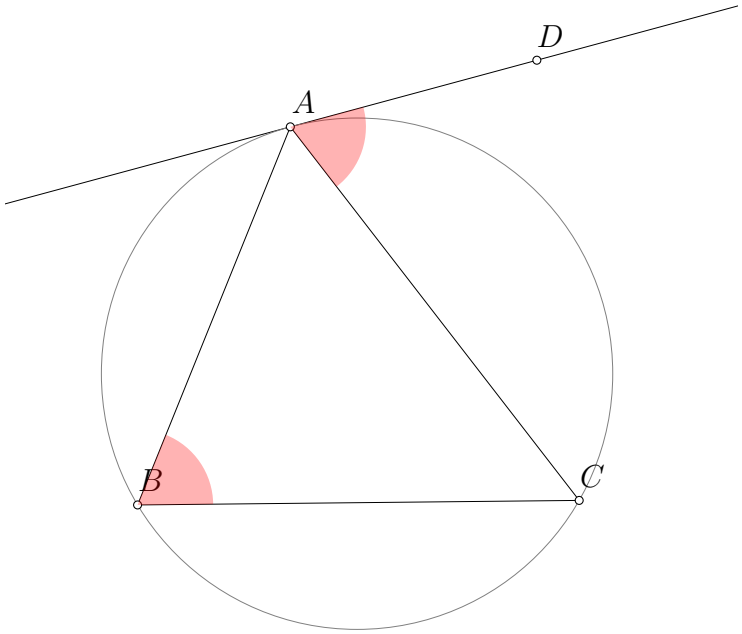
Conclusion. Par récurrence, la formule est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

4 Géométrie : Chasse aux angles 2 (Martin et Aurélien)

Définition 1.
Soit ω un cercle de centre O et A un point sur ce cercle. La tangente à ω en A est définie comme l'unique droite intersectant ω uniquement en A ou comme la perpendiculaire à (OA) en A.

Théorème 2 (Théorème de l'angle tangent)**.**
Soit ABC un triangle, ω son cercle circonscrit, et D un point du même côté que C par rapport à la droite (AB).
Alors (AD) est tangente à ω en A si et seulement si $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$.

Démonstration.



On introduit O le centre du cercle ω.
On suppose que (AD) est tangente à ω en A. On a alors $\widehat{DAO} = 90$ (définition de la tangente), $\widehat{CAO} = \widehat{ACO}$ (le triangle ACO est isocèle en O) et $\widehat{AOC} = 2 \cdot \widehat{ABC}$ (théorème de l'angle au centre). Donc $\widehat{DAC} = 90 - \widehat{CAO} = \frac{1}{2}(180 - (\widehat{CAO} + \widehat{ACO})) = \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOC} = \widehat{ABC}$.
On suppose maintenant que $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$. On introduit E, un point du même côté que C par rapport à la droite (AB), tel que (AE) soit tangente à ω en A. D'après le sens direct du théorème, on a $\widehat{EAC} = \widehat{ABC}$. Donc $\widehat{EAC} = \widehat{DAC}$. Ainsi, (AD) et (AE) sont confondues, et (AD) est tangente à ω en A. □

Exercices

Exercice 1
Soit X l'intersection de deux droites, et ω un cercle tangent à ces deux droites en A et B. Montrer que ABX est isocèle en X.

Exercice 2
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit ω. Soit D le pied de la bissectrice issue de A et P l'intersection de la tangente à ω en A avec (BC). Montrer que PAD est isocèle en P.

Exercice 3
Soit ABC un triangle avec $AB < AC$, ω son cercle circonscrit. La tangente au cercle ω au point A coupe (BC) en X. La bissectrice de $\widehat{AXB}$ coupe (AB) en R et (AC) en S. Montrer que ARS est isocèle en A.

Exercice 4
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles s'intersectant en A et B. On note C l'intersection de la tangente à ω_1 en A avec ω_2 et D l'intersection de la tangente à ω_2 en B avec ω_1. Montrer que (AD) est parallèle avec (BC).

Exercice 5
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles tangents en A, où ω_2 est à l'intérieur de ω_1. Soit une droite intersectant ω_1 et ω_2 respectivement en B, C et en P, Q. Montrer que $\widehat{BAP} = \widehat{QAC}$.

Exercice 6
Soit ABC un triangle et P un point sur $[BC]$. Montrer que le cercle passant par P et tangent à (AB) en B, le cercle passant par P et tangent à (AC) en C et le cercle circonscrit à ABC sont concourants.

Exercice 7
Soient ω un cercle de centre O, A et B deux points sur le cercle non opposés. Les tangentes à ω en A et B s'intersectent en X. Les points M sur (AB) et K sur (XB) sont tels que M est le milieu de $[OK]$. Montrer que A, X, K et M sont cocycliques.

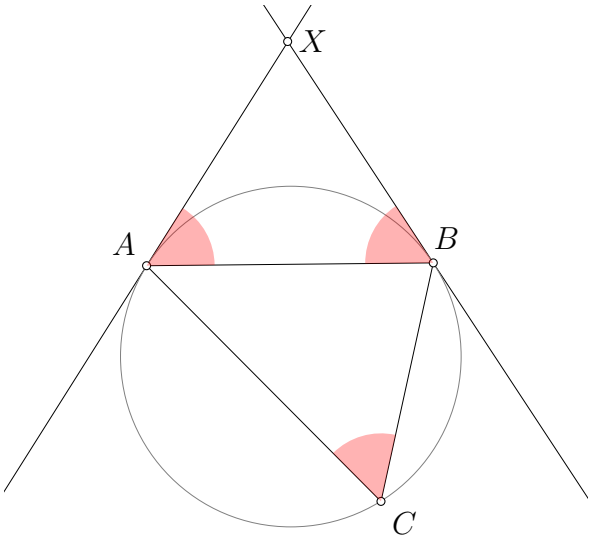
Exercice 8 (Lemme des pièces de monnaie)
Soient $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ et ω_4 quatre cercles tangents deux à deux dans cet ordre (ω_1 avec ω_2, ω_2 avec ω_3, ω_3 avec ω_4 et ω_4 avec ω_1). Montrer que les quatre points de tangence sont cocycliques.

Exercice 9
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles tangents en A, où ω_2 est à l'intérieur de ω_1. On prend un point P sur ω_1 différent de A. Les tangentes au cercle ω_2 passant par P sont tangentes au cercle ω_2 en deux points X et Y et coupent le cercle ω_1 en deux points Q et R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2 \cdot \widehat{XAY}$.

Exercice 10
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles tangents en A. On place B sur ω_1 et C sur ω_2. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC. Soit P le point d'intersection de la tangente à ω_1 en B et de la tangente à ω_2 en C. Montrer que $BCOP$ est cyclique.

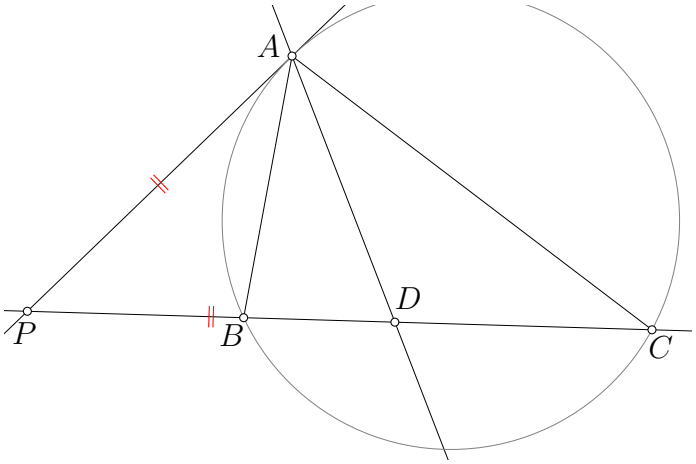
Solutions

Solution de l'exercice 1



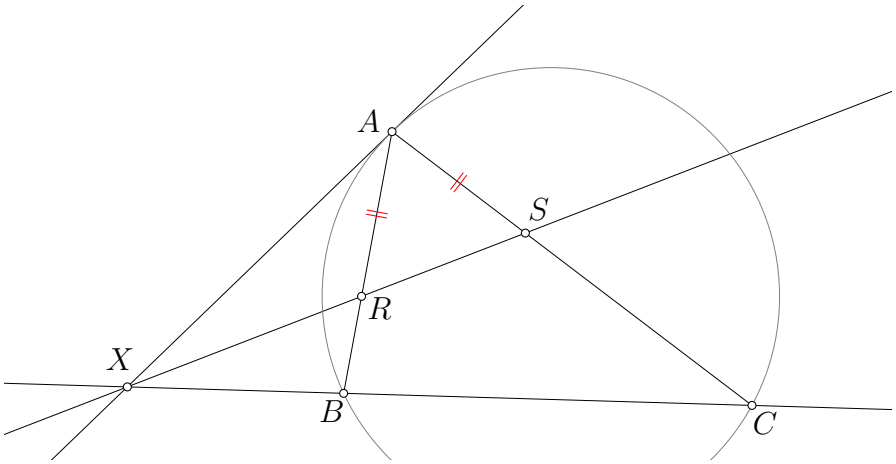
Soit C un point sur ω, à l'extérieur du triangle ABX. D'après le théorème de l'angle tangent, on a alors $\widehat{XAB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABX}$.
Donc ABX est isocèle en X.

Solution de l'exercice 2



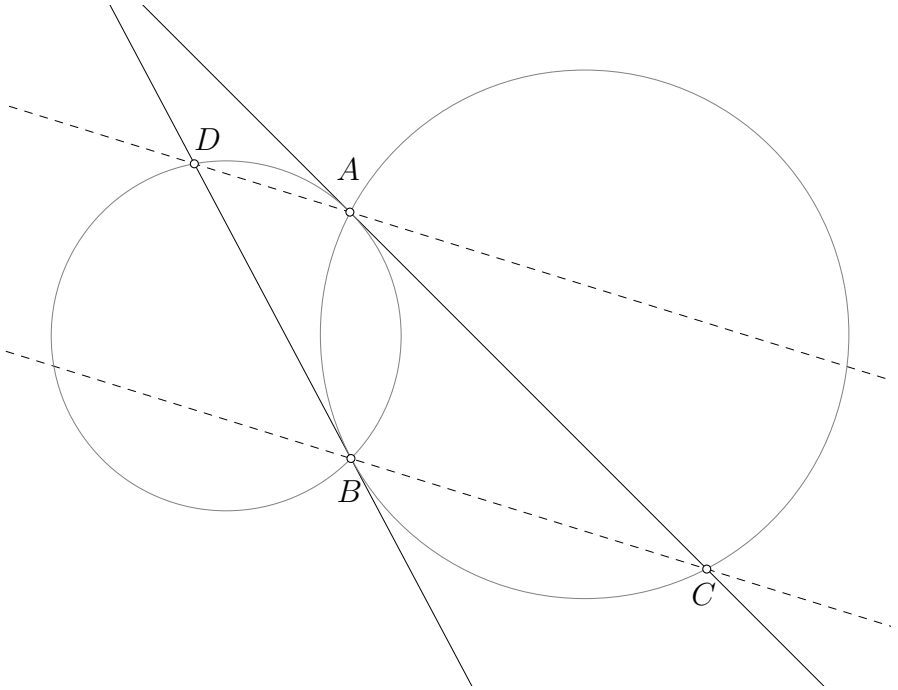
D'après le théorème de l'angle tangent, on a $\widehat{PAB} = \widehat{ACB} = \widehat{ACD}$. De plus, $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$.
Donc $\widehat{PAD} = \widehat{PAB} + \widehat{BAD} = \widehat{ACD} + \widehat{DAC} = 180 - \widehat{CDA} = \widehat{PDA}$.
Ainsi, PAD est isocèle en P.

Solution de l'exercice 3



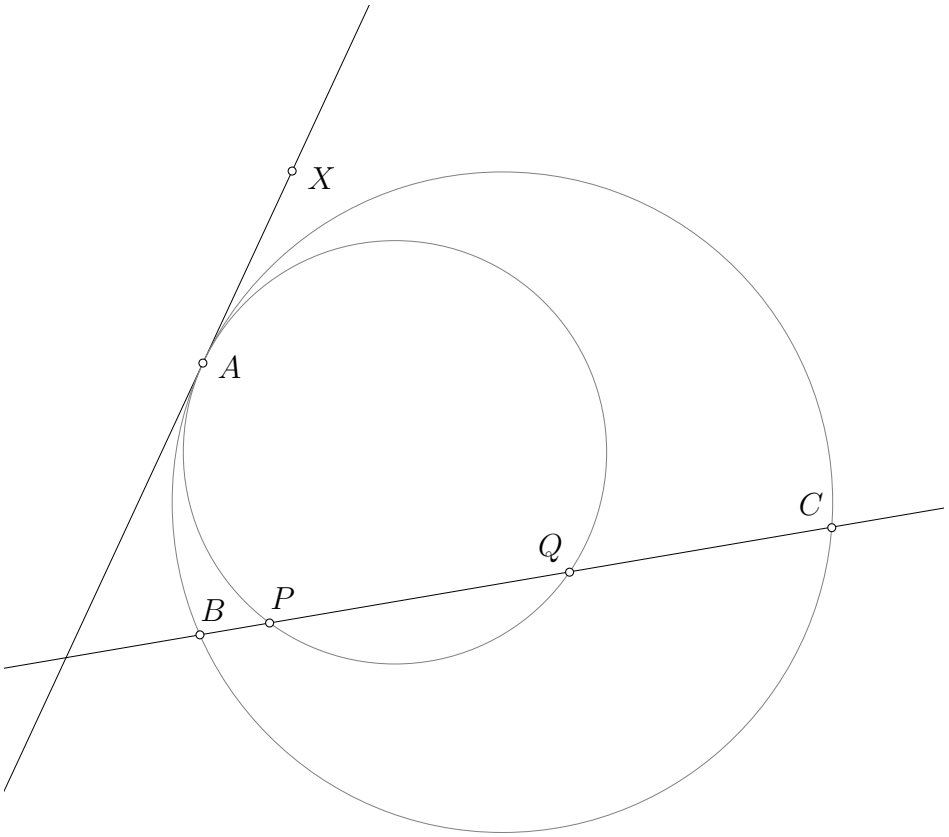
D'après le théorème de l'angle tangent, on a $\widehat{XAR} = \widehat{XAB} = \widehat{ACB} = \widehat{SCX}$. De plus, $\widehat{AXR} = \widehat{SXC}$. Donc $\widehat{ARS} = 180 - \widehat{ARX} = \widehat{AXR} + \widehat{XAR} = \widehat{SXC} + \widehat{SCX} = 180 - \widehat{XSC} = \widehat{XSA} = \widehat{RSA}$. Ainsi, ARS est isocèle en A.

Solution de l'exercice 4



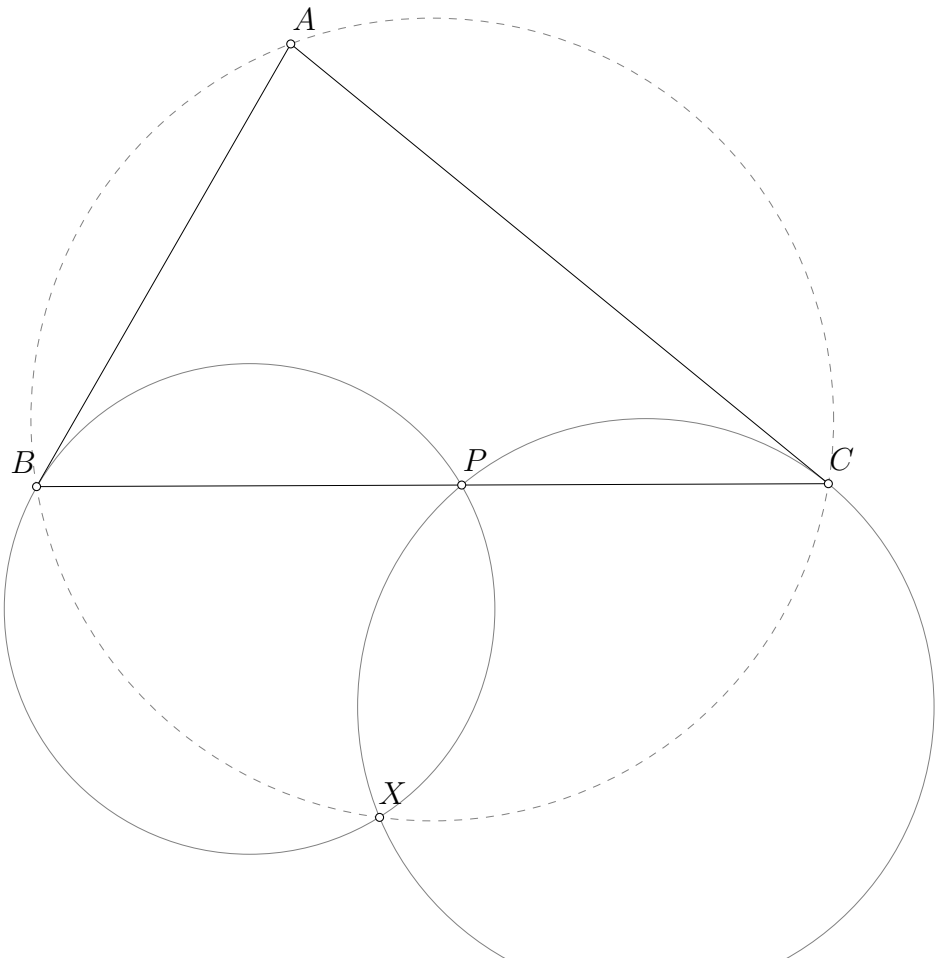
Soit E un point sur (AC) de sorte que E, A, C soient alignés dans cet ordre. D'après le théorème de l'angle tangent, on a $\widehat{DAE} = \widehat{DBA} = \widehat{BCA} = \widehat{BCE}$.
Ainsi, (AD) et (BC) sont parallèles par angles correspondants.

Solution de l'exercice 5



Soit X un point sur la tangente commune aux deux cercles, du même côté que C de (AB).
D'après le théorème de l'angle tangent, $\widehat{CBA} = \widehat{CAX}$ et $\widehat{QPA} = \widehat{QAX}$.
Donc $\widehat{BAP} = 180 - \widehat{APB} - \widehat{PBA} = \widehat{APQ} - \widehat{CBA} = \widehat{QAX} - \widehat{CAX} = \widehat{QAC}$.

Solution de l'exercice 6

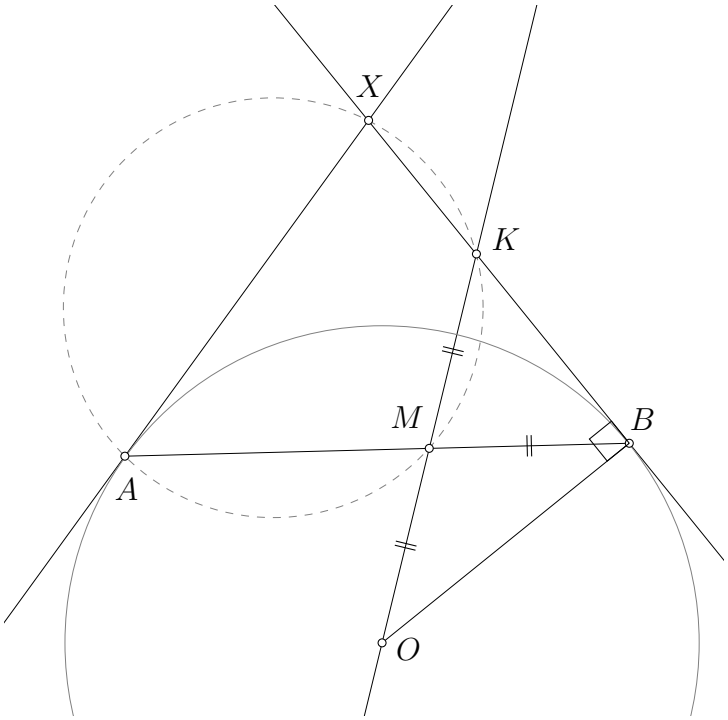


Soit X l'intersection des deux cercles passant par P. Montrons que X appartient au cercle circonscrit à ABC. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{BXC} &= \widehat{BXP} + \widehat{PXC} \\
&= \widehat{ABP} + \widehat{ACP} \quad \text{(angle tangent)} \\
&= \widehat{ABC} + \widehat{ACB} \\
&= 180 - \widehat{BAC}
\end{aligned}$$

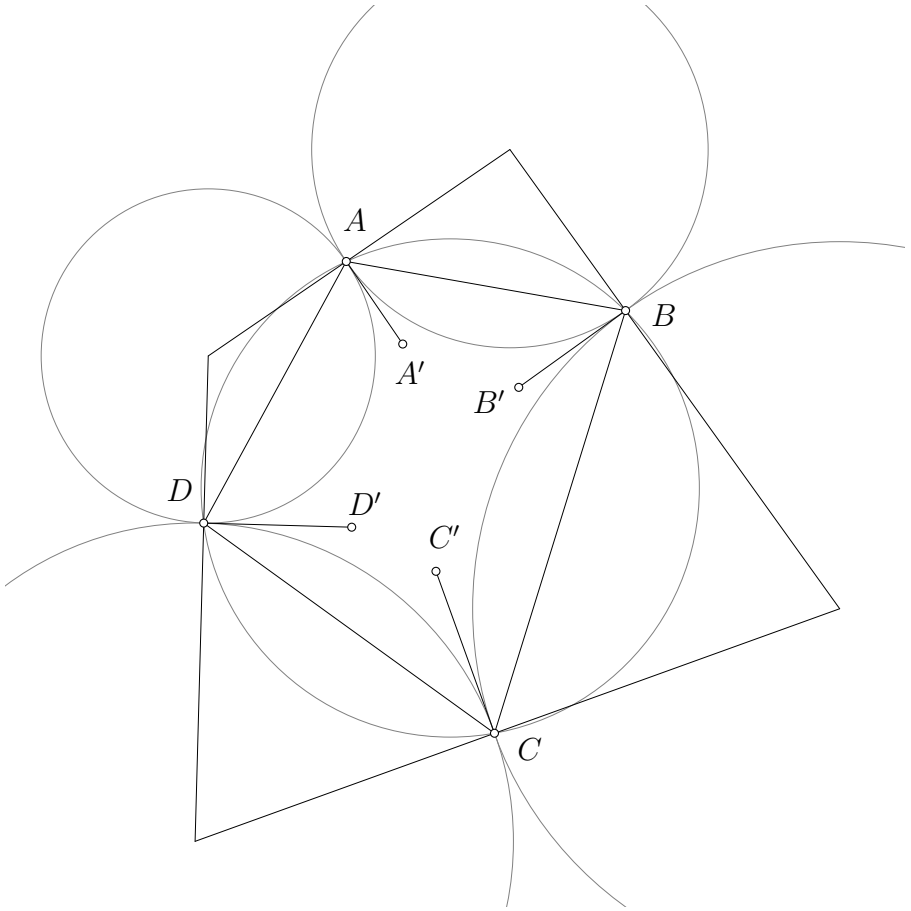
Donc A, B, C et X sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7



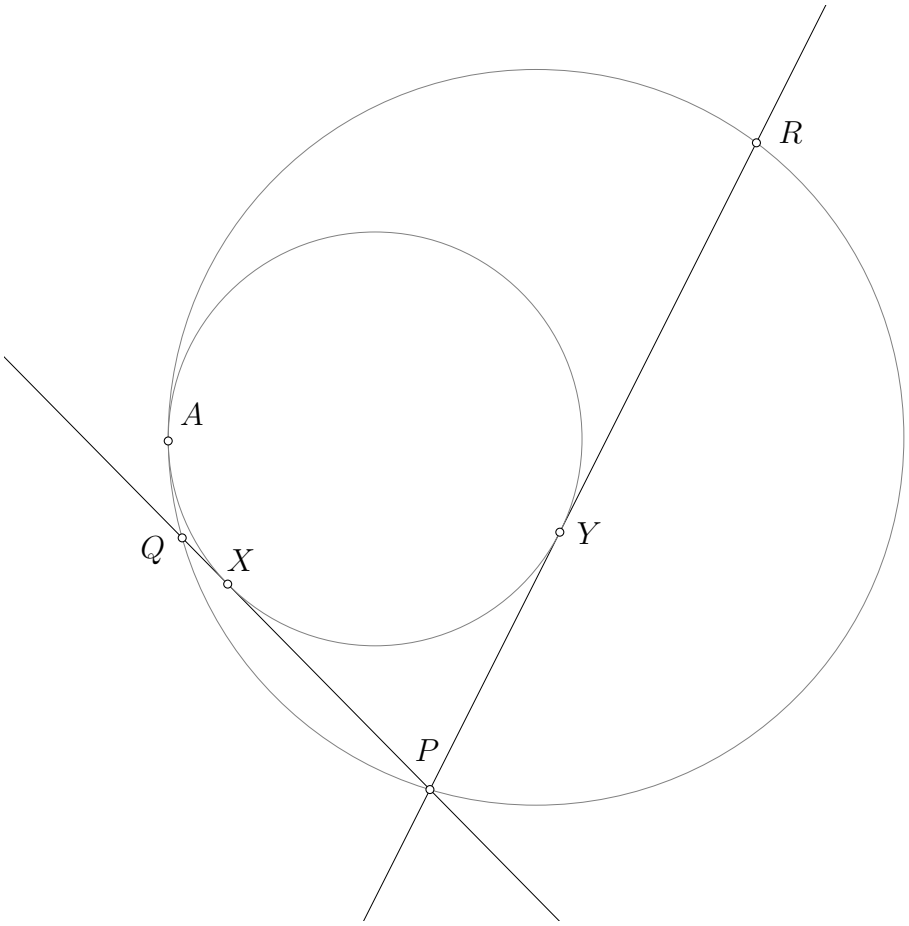
Par définition, $\widehat{OBK} = 90°$. Donc OBK est rectangle et M se situe au milieu de l'hypoténuse.
Alors $BM = KM$ et $\widehat{BKM} = \widehat{KBM}$.
Ainsi, $180 - \widehat{XKM} = \widehat{BKM} = \widehat{KBM} = \widehat{XBA} = \widehat{XAB} = \widehat{XAM}$, et A, X, K et M sont cocycliques.

Solution de l'exercice 8



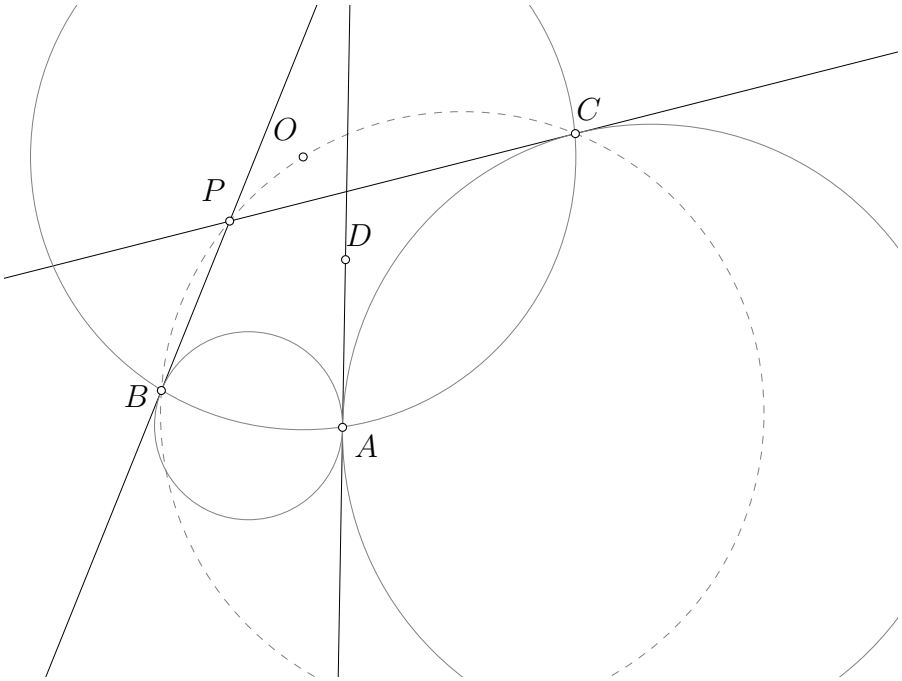
Soient A, B, C et D les points de tangence, et A', B', C' et D' des points sur les tangentes communes aux cercles «du coté intérieur» (voir figure).
Alors $\widehat{ABB'} = \widehat{A'AB}$, $\widehat{BCC'} = \widehat{B'BC}$, $\widehat{CDD'} = \widehat{C'CD}$ et $\widehat{DAA'} = \widehat{D'DA}$.
Ainsi, $360 = \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA} + \widehat{DAB} = \widehat{ABB'} + \widehat{B'BC} + \widehat{BCC'} + \widehat{C'CD} + \widehat{CDD'} + \widehat{D'DA} + \widehat{DAA'} + \widehat{A'AB} = 2(\widehat{ABB'} + \widehat{B'BC} + \widehat{CDD'} + \widehat{D'DA}) = 2(\widehat{ABC} + \widehat{CDA})$.
Enfin, $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180$ et A, B, C et D sont cocycliques.

Solution de l'exercice 9



On a $\widehat{QAR} = 180 - \widehat{QPR} = \widehat{PXY} + \widehat{PYX} = \widehat{XAY} + \widehat{XAY}$.

Solution de l'exercice 10



Soit D un point sur la tangente commune des deux cercles (voir figure). On a $\widehat{BOC} = 360 - 2 \cdot \widehat{BAC} = 360 - \widehat{BAC} - \widehat{BAD} - \widehat{DAC} = 360 - \widehat{BAC} - \widehat{PBA} - \widehat{ACP} = \widehat{BPC}$.
Ainsi, B, C, O et P sont cocycliques.

5 Géométrie : Triangles semblables (Mathieu)

Exercices

Exercice 1
(puissance d'un point par rapport à un cercle) Soit $\mathcal{C}$ un cercle et P un point à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Deux droites partant de P recoupent $\mathcal{C}$ en A, B et en C, D respectivement. Montrer que : $PA \times PB = PC \times PD$. Que devient ce résultat si P est à l'intérieur du cercle ?

Exercice 2
Soit ABC un triangle rectangle en C et D le pied de la hauteur issue de C. Montrer les relations suivantes, dites relations d'Euclide :

1. $CD^2 = AD \times BD$
2. $BC^2 = AB \times BD$
3. $AC^2 = AB \times AD$

En déduire une démonstration du théorème de Pythagore.

Exercice 3
Soit ABC un triangle rectangle en C. Sur la droite (AC), on place un point D tel que $CD = BC$ et tel que le point C soit situé entre A et D. La perpendiculaire à (AB) passant par D recoupe (BC) en E. Montrer que $AC = CE$.

Exercice 4
Dans un parallélogramme $ABCD$, on prend un point M quelconque sur la diagonale (AC). On note E le point d'intersection entre (AB) et la perpendiculaire à (AB) passant par M. De même, la perpendiculaire à (AD) passant par M coupe (AD) en un point F. Démontrer que : $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible dans un cercle de centre O. On suppose que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires. Prouver que la distance de O à la droite (AD) est égale à la moitié de la longueur du segment $[BC]$.

Exercice 6
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques et E le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Montrer l'égalité suivante : $\frac{AC}{BC} \times \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. Les cercles circonscrits aux triangles ABD et BCD recoupent les côtés $[AB]$ et $[BC]$ en E et F respectivement. Montrer que $AE = CF$.

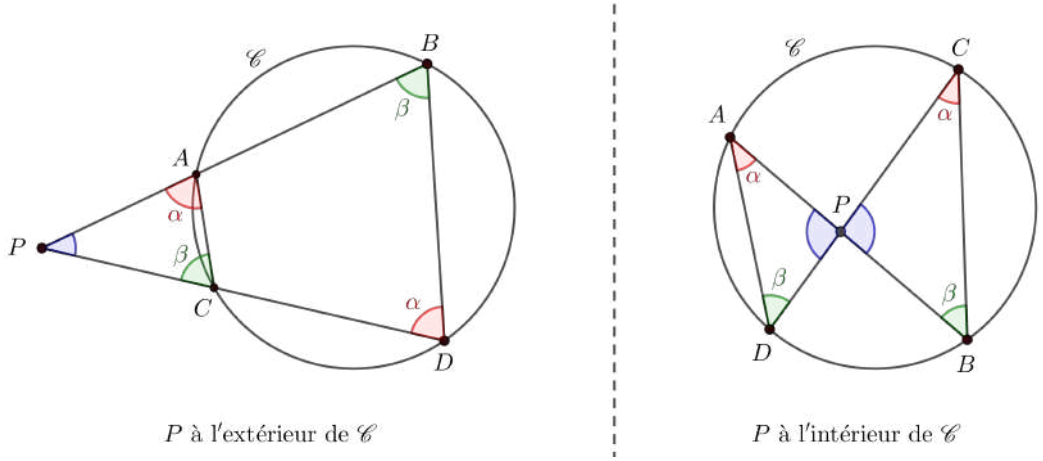
Exercice 8
Soit ABC un triangle. Soit $\mathcal{C}_B$ le cercle passant par B et tangent au segment $[AC]$ en A et soit $\mathcal{C}_C$ le cercle passant par C et tangent au segment $[AB]$ en A. Les cercles $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ se recoupent au point D. La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point E. Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Comme A, B, C et D sont cocycliques, le théorème de l'angle inscrit donne que $\widehat{PAC} = \widehat{BDP}$ et $\widehat{PBD} = \widehat{PCA}$. On a donc $PAC \sim PDB$, d'où $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$ et ainsi $PA \times PB = PC \times PD$.

Si P est à l'intérieur du cercle, on utilise à nouveau le théorème de l'angle inscrit pour montrer que $PAD \sim PCB$ et on conclut de la même façon.



Solution de l'exercice 2

Par une simple chasse aux angles dans les nombreux triangles rectangles de la figure, on obtient que

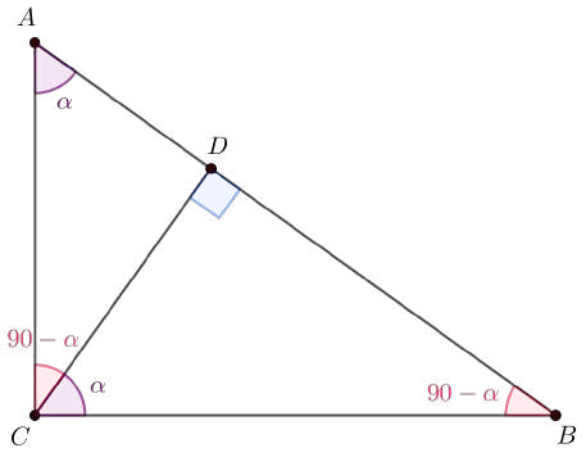
$$ABC \sim ACD \sim CBD.$$

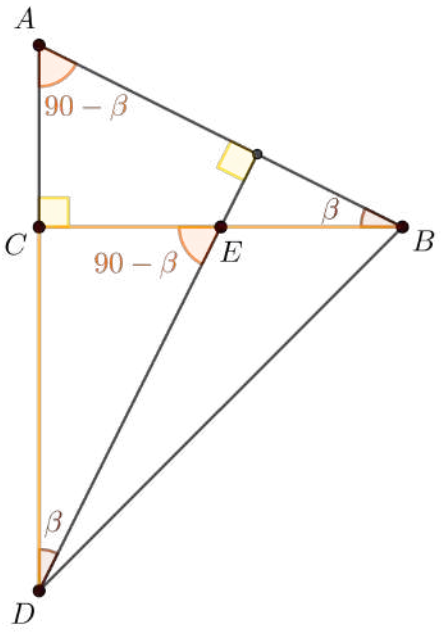
En utilisant les rapports de longeurs, il vient $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$ et $\frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BD}$, ce qui donne les trois identités cherchées.

Pour retrouver le théorème de Pythagore, on écrit que

$$BC^2 + AC^2 = AB \times BD + AB \times AD = AB \times (BD + AD) = AB^2$$

étant donné que A, D et B sont alignés.





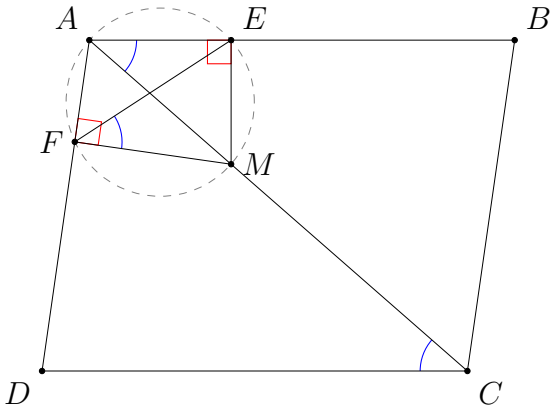
Solution de l'exercice 3
Par chasse aux angles, on montre que $\widehat{ABC} = \widehat{EDC}$. On a donc $CED \sim CAB$. On en déduit que $\frac{CE}{CD} = \frac{CA}{BC}$, d'où $CE = CA$ car $CD = BC$ par hypothèse.

Solution de l'exercice 4
On veut connaître le quotient $\frac{ME}{MF}$, on s'intéresse donc au triangle MEF et on calcule ses angles. Puisque $\widehat{AEM} = 90° = 180 - \widehat{AFM}$, les points A, E, M et F sont cocycliques. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a donc que $\widehat{MEF} = \widehat{MAF} = \widehat{CAD}$ et $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \widehat{ACD}$ par parallélisme. Les triangles MEF et DAC sont donc semblables.

On en déduit l'égalité de rapport

$$\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{CD} = \frac{AD}{AB}$$

puisque $AB = CD$ dans le parallélogramme $ABCD$.

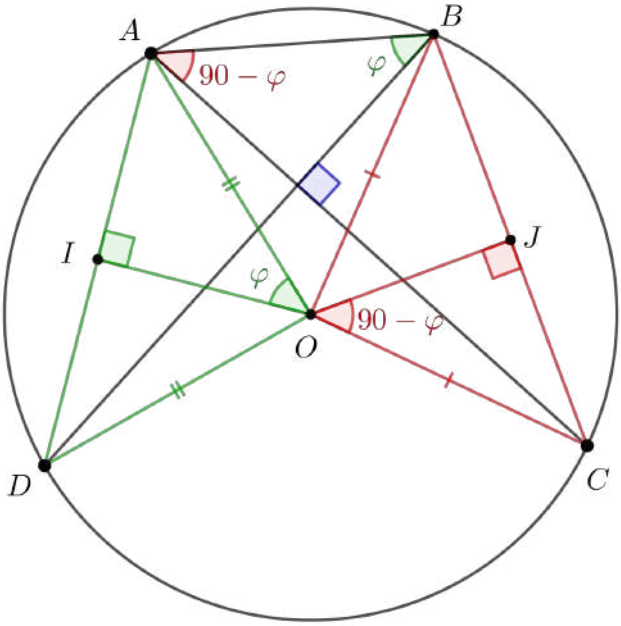


Solution de l'exercice 5

Soit I le projeté orthogonal de O sur (AD). On veut connaître la distance OI, on s'intéresse donc au triangle OIA. D'après le théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{AOI} = \widehat{ABD}$.

On cherche un triangle semblable à OIA qui fasse intervenir BC, ce qui donne l'idée d'introduire J, le projeté orthogonal de O sur (BC). Encore par l'angle au centre, on sait que $\widehat{COJ} = \widehat{CAB}$. Mais puisque (AC) et (BD) sont perpendiculaires, on a $\widehat{CAB} = 90 - \widehat{ABD}$. Ainsi $\widehat{JCO} = 90 - \widehat{COJ} = \widehat{ABD} = \widehat{AOI}$, ce qui prouve que $OIA \sim CJO$.

Enfin, on en déduit que $\frac{OI}{OA} = \frac{CJ}{CO}$. Or $OA = CO$ car ce sont deux rayons du cercle. D'où $OI = CJ = \frac{BC}{2}$ puisque (OJ) est la médiatrice de $[BC]$ dans le triangle isocèle COB.

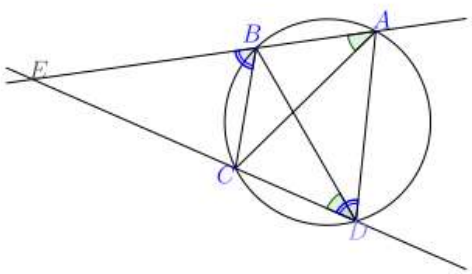


Solution de l'exercice 6

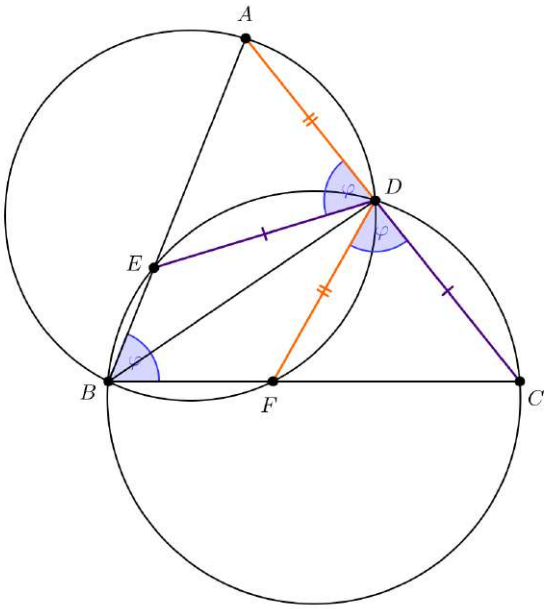
Par chasse aux angles comme dans l'exercice 1, on trouve que $ECB \sim EAD$ mais aussi que $ECA \sim EBD$. Cela donne respectivement

$$\frac{AD}{BC} = \frac{ED}{BE} \quad \text{et} \quad \frac{AC}{BD} = \frac{AE}{ED}.$$

En multipliant ces deux égalités, le terme en ED se simplifie et on obtient le résultat cherché.



Solution de l'exercice 7
D'après le théorème du pôle Sud appliqué dans les triangles ABF et CBE, nous savons que d'une part $DA = DF$ et d'autre part que $DE = DC$ (cela peut se voir aussi par chasse aux angles si on ne connaît pas ce résultat). Qui plus est, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{CBE} = \widehat{EDA}$ (cocyclicité de B, C, D et E) et $\widehat{ABF} = \widehat{FDC}$ (cocyclicité de A, B, F, D). Ainsi, $\widehat{ADE} = \widehat{FDC}$. Mis avec les égalités de longueurs précédentes, on en conclut que les triangles ADE et FDC sont superposables, ce qui implique que $AE = CF$.



Solution de l'exercice 8
On traduit les hypothèses sous formes d'égalités d'angles. Ainsi, on observe que, par angle tangentiel pour $\mathcal{C}_B$ puis par angle inscrit dans le cercle circonscrit à ABC :

$$\widehat{DBA} = \widehat{CAD} = \widehat{CAE} = \widehat{CBE}.$$

De même on obtient que $\widehat{BCE} = \widehat{DCA}$. Ainsi, on a

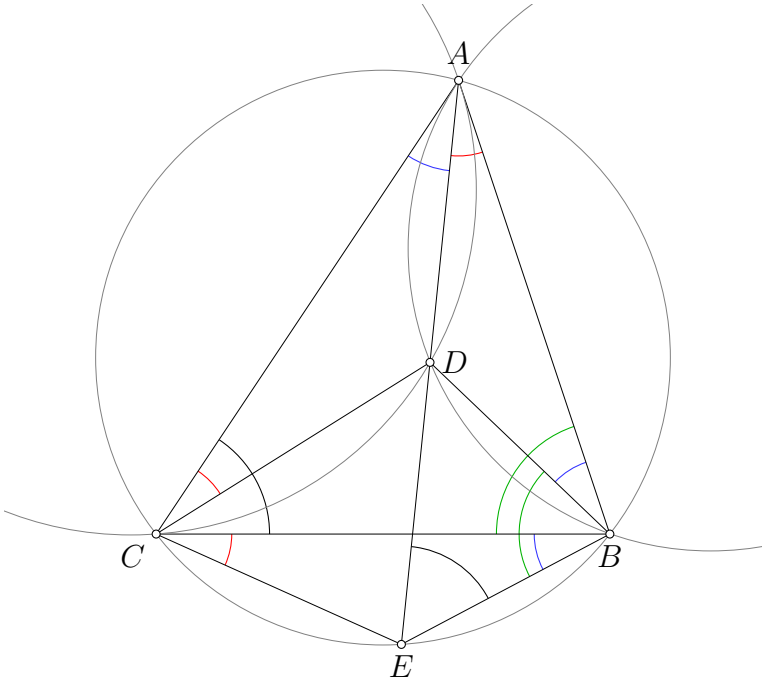
$$DBA \sim DAC \sim EBC.$$

D'autre part, puisque $\widehat{DBA} = \widehat{CBE}$, on a

$$\widehat{DBE} = \widehat{DBC} + \widehat{CBE} = \widehat{DBC} + \widehat{DBA} = \widehat{CBA}$$

et par angle inscrit $\widehat{DEB} = \widehat{AEB} = \widehat{BCA}$. Ainsi on a $DBE \sim ABC$. On a alors toutes les égalités de rapports qu'il faut pour conclure :

$$DA \underset{DBA\sim DAC}{=} DB \cdot \frac{AB}{AC} \underset{DBE\sim ABC}{=} DE \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = DE.$$


A
D
C
B
E

6 Algèbre : Inégalités 1 (Théo)

Le cours et les exercices sont repris à la fois sur le cours de la POFM trouvable ici, et sur le cours de Rémi donné en 2023 disponible ici.

Exercices

Inégalité arithmético-géométrique à deux variables/un carré est positif

Exercice 1
Soit $x > 0$. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 2
Soit x, y des réels strictement positifs. Montrer que $x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y$ et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 3
Soit x, y des réels. Montrer que $5x^2 + y^2 + 1 \geqslant 4xy + 2x$. Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 4
Soit a, b, c des réels positifs, montrer que $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

Exercice 5
Lemme du tourniquet : Soit a, b, c des réels. Montrer que $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 6
Soit a, b, c des réels positifs. Montrer que si $ab + bc + ca = 1$, alors $a + b + c \geqslant \sqrt{3}$. Déterminer les cas d'égalité.

Inégalité arithmético-géométrique à 3 variables

Exercice 7
Soit a, b, c trois réels strictement positifs, montrer que

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3abc.$$

Exercice 8
Soit a, b, c trois réels positifs vérifiant $a + b + c = 6$. Déterminer la valeur maximale que peut prendre abc.

Exercice 9
Soit a, b, c trois réels positifs vérifiant $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$. Déterminer la valeur minimale que peut prendre $a + b + c$.

Exercice 10
Soit x, y, z trois réels positifs. Montrer que

$$3 + 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 \geqslant 3x^2 + 3y^2 + 3z^2.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 11
Soit a, b, c, d des réels positifs de somme 1. Montrer que $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}$. Déterminer les cas d'égalité.

Inégalité arithmético-géométrique à n variables

Exercice 12
Soit $x \geqslant 0$ un réel. Montrer que $1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4 \times x^4$. Déterminer les cas d'égalité

Exercice 13
Soit a, b, c, d positifs tels que $abcd = 1$. Montrer que $a^2+b^2+c^2+d^2+ab+cd+bc+ad+ac+bd \geqslant 10$. Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 14
Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs de somme n. Montrer que $(1 + \frac{1}{a_1}) \times \cdots \times (1 + \frac{1}{a_n}) \geqslant 2^n$. Déterminer les cas d'égalité.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Par l'inégalité arithmético-géométrique appliqué à x et $\frac{1}{x}$, on obtient $= x + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{\frac{x}{x}} = 2$. On a égalité si et seulement si $x = \frac{1}{x}$ si et seulement si $x^2 = 1$. Le cas d'égalité est donc atteint pour $x = 1$.

Solution de l'exercice 2
Par l'inégalité arithmético géométrique

$$x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2\sqrt{x \cdot \frac{y^2}{x}} = 2y$$

Supposons qu'on a égalité, alors $x = \frac{y^2}{x}$ donc $x^2 = y^2$ donc $x = y$. Réciproquement si $x = y$, $x + \frac{y^2}{x} = y + \frac{y^2}{y} = 2y$ on a bien égalité.

Solution de l'exercice 3
Par inégalité arithmético-géométrique, $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$ et $a + c \geqslant 2\sqrt{ac}$. En faisant le produit

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8\sqrt{abbcca} = 8\sqrt{(abc)^2} = 8abc.$$

Solution de l'exercice 4
Regardons le terme de droite. En voyant un facteur $2x$, on pense à utiliser que $2x \leqslant x^2 + 1$. Il suffit ensuite de prouver que $4xy \leqslant 4x^2 + y^2$. Or, on remarque que $4x^2 + y^2 = (2x)^2 + y^2 \geqslant 2 \times (2x) \times y = 4xy$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans les deux inégalités précédentes. Comme on a égalité dans $2x \leqslant x^2 + 1$, $x = 1$. Comme on a égalité dans $2 \times (2x)y \leqslant (2x)^2 + y^2$, on sait que $y = 2x = 2$. Réciproquement, si $(x, y) = (1, 2)$, alors $5x^2 + y^2 + 1 = 10 = 4xy + 2x$.

Solution de l'exercice 5
Regardons le terme de droite : on cherche à majorer des produits de deux nombres par une somme de carrés. On utilise donc le fait que $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, $bc \leqslant \frac{b^2+c^2}{2}$ et $ac \leqslant \frac{a^2+c^2}{2}$. En sommant ces trois inégalités, on obtient $ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans les trois inégalités utilisées, donc par la proposition 2, $a = b$, $b = c$ et $a = c$. En particulier $a = b = c$. Réciproquement, si $a = b = c$, alors $a^2 + b^2 + c^2 = 3a^2 = ab + bc + ca$: on a bien égalité.

Solution de l'exercice 6
Vu qu'il y a une racine dans le résultat, on calcule $(a+b+c)^2$. On constate alors que $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = a^2 + b^2 + c^2 + 2$. Or, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca = 1$ par le lemme du tourniquet, donc $(a + b + c)^2 \geqslant 3$, de sorte que $(a + b + c) \geqslant \sqrt{3}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Alors on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $a = b = c$. Comme $ab + bc + ca = 1$, c'est que $3a^2 = 1$, donc $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = b = c$. Réciproquement, si $a = \frac{1}{\sqrt{3}} = b = c$, on a bien $a + b + c = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Solution de l'exercice 7
On applique l'inégalité arithmético-géométrique :

$$a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3\sqrt[3]{a^2bb^2cc^2a} = 3\sqrt[3]{(abc)^3} = 3abc.$$

Solution de l'exercice 8
Par inégalité arithmético-géométrique, $abc \leqslant \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 = 2^3 = 8$.

De plus cette valeur est atteinte pour $a = b = c = 2$: on a bien $a + b + c = 6$ et $abc = 8$. Donc 8 est la valeur maximale.

Solution de l'exercice 9
Etant donné qu'on a une information sur le produit de $a + 1, b + 1$ et $c + 1$, on essaie de les faire apparaître dans la quantité $a + b + c$: on a $a + b + c = (a + 1) + (b + 1) + (c + 1) - 3$. En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique, on obtient

$$a+b+c = (a+1)+(b+1)+(c+1)-3 \geqslant 3\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} - 3 = 3\sqrt[3]{8} - 3 = 6 - 3 = 3.$$

De plus cette valeur est atteinte : si $a = b = c = 1$, on a bien $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8$, et $a + b + c = 3$, donc la valeur minimale de $a + b + c$ est 3.

Solution de l'exercice 10
En regardant l'inégalité, on se rend compte qu'il n'y a aucun terme mélangeant à la fois x et y, ou y et z, ou z et x. Ainsi on découpe l'inégalité en une inégalité sur x, une sur y, une sur z. Pour avoir une inégalité similaire en x, y, z, il suffit de découper 3 en $1 + 1 + 1$, et donc de prouver que $1 + 2x^3 \geqslant 3x^2$, $1 + 2y^3 \geqslant 3y^2$ et $1 + 2z^3 \geqslant 3z^2$.

Les trois inégalités étant identiques en changeant x, y, z, il suffit de prouver celle sur x. On se rend compte que le cas d'égalité semble être pour $x = 1$, on ne peut donc faire une IAG sur $2x^3$ et 1 directement. On sépare donc $2x^3$ en 2 pour pouvoir faire une IAG avec 3 termes égaux : par IAG,

$$1 + 2x^3 = 1 + x^3 + x^3 \geqslant 3\sqrt[3]{x^3 \times x^3} = 3x^2.$$

Cela conclut la preuve de l'inégalité. Si on a égalité, d'après l'IAG $x^3 = 1$, donc $x = 1$. De même $y = z = 1$. Réciproquement, si $x = y = z = 1$, $3 + 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 = 9 = 3x^2 + 3y^2 + 3z^2$, donc le cas d'égalité est $x = y = z = 1$.

Solution de l'exercice 11
On utilise que $1 - a = b + c + d$, $1 - b = a + c + d$ et similairement pour $1 - c$ et $1 - d$. Ainsi

$$\frac{bcd}{(1-a)^2}+\frac{acd}{(1-b)^2}+\frac{abd}{(1-c)^2}+\frac{abc}{(1-d)^2} = \frac{bcd}{(b+c+d)^2}+\frac{acd}{(a+c+d)^2}+\frac{abd}{(a+b+d)^2}+\frac{abc}{(a+b+c)^2}$$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\frac{bcd}{(b+c+d)^2} \leqslant \frac{\left(\frac{b+c+d}{3}\right)^3}{(b+c+d)^2}$$

. Or le terme de droit vaut $\frac{b+c+d}{27}$. On utilise la même majoration pour les 3 autres termes de la somme, on obtient :

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{b+c+d}{27} + \frac{a+c+d}{27} + \frac{a+b+d}{27} + \frac{a+b+c}{27}.$$

Ainsi

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{3(a+b+c+d)}{27} = \frac{1}{9}.$$

Supposons qu'on a égalité. En particulier, on a égalité dans les différentes inégalités arithmético-géométriques utilisées. Pour avoir égalité dans la première, on doit forcément avoir $b = c = d$; pour la seconde, on doit avoir $a = c = d$, de sorte que $a = b = c = d$. Comme $a+b+c+d = 1$, on a nécessairement $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Réciproquement, si $a = b = c = d = \frac{1}{4}$, $a + b + c + d = 1$ et $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} = 4 \times \frac{a^3}{(1-a)^2} = 4 \times \frac{4^2}{4^3 \times 3^2} = \frac{1}{9}$.

Solution de l'exercice 12
On utilise l'inégalité arithmético-géométrique, dans le cas $n = 4$. On obtient

$$1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4x^{\frac{2+6+8}{4}} = 4x^4.$$

Supposons qu'on a égalité. D'après le cas d'égalité $x^2 = 1$, donc $x = 1$. Réciproquement si $x = 1$, on a $1 + x^2 + x^6 + x^8 = 4 = 4 \times x^4$

Solution de l'exercice 13
On a une somme de 10 termes et on veut prouver qu'elle est plus grande que 10. On va donc utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur les 10 termes. On obtient :

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd + bc + ad + ac + bd \geqslant 10\sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5} = 10\sqrt[10]{(abcd)^5} = 10$$

Si on a égalité, alors $a^2 = b^2 = c^2 = d^2$, donc par positivité $a = b = c = d$. Comme $abcd = 1$, $a^4 = 1$ donc $a = b = c = d = 1$. Réciproquement si $a = b = c = d = 1$, alors $abcd = 1$ et $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd + bc + ad + ac + bd = 10$

Solution de l'exercice 14
Par inégalité arithmético-géométrique, pour tout i entre 1 et n, on a $1 + \frac{1}{a_i} \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_i}}$. En particulier,

$$(1 + \frac{1}{a_1}) \times \cdots \times (1 + \frac{1}{a_n}) \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_1}} \times 2\frac{1}{\sqrt{a_2}} \times \cdots \times 2\frac{1}{\sqrt{a_n}} = 2^n \frac{1}{\sqrt{a_1 \dots a_n}}.$$

Or, $a_1 \times \cdots \times a_n \leqslant \left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^n = 1^n = 1$, donc

$$(1 + \frac{1}{a_1}) \times \cdots \times (1 + \frac{1}{a_n}) \geqslant 2^n \times \frac{1}{\sqrt{a_1 \times \cdots \times a_n}} \geqslant 2^n.$$

Supposons qu'on a égalité. Alors on a égalité dans l'inégalité $1 + \frac{1}{a_i} \geqslant 2\frac{1}{\sqrt{a_i}}$ pour tout i, donc $\frac{1}{a_i} = 1$ donc $a_i = 1$ pour tout i. Réciproquement si $a_1 = \cdots = a_n = 1$,

$$(1 + \frac{1}{a_1}) \times \cdots \times (1 + \frac{1}{a_n}) = (1 + 1) \times \cdots \times (1 + 1) = 2^n,$$

on a donc bien égalité.

7 Algèbre : Inégalités 2 (Héloïse)

Cours

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**

Cas $n = 3$: Soient a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3 des réels. On a :

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

Cas général : Soient $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ des réels. On a :

$$(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + ... + a_n^2) \cdot (b_1^2 + ... + b_n^2)$$

Il y a égalité lorsque tous les b_i sont nuls, ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a_i = \lambda b_i$ pour tout i.

Théorème 2 (Inégalité des mauvais élèves)**.**

Cas $n = 3$: Soient a_1, a_2, a_3 des réels et b_1, b_2, b_3 des réels strictement positifs. On a :

$$\frac{(a_1 + a_2 + a_3)^2}{b_1 + b_2 + b_3} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \frac{a_3^2}{b_3}$$

Cas général : Soient $a_1, ..., a_n$ des réels et $b_1, ..., b_n$ des réels strictement positifs. On a :

$$\frac{(a_1 + ... + a_n)^2}{b_1 + ... + b_n} \leqslant \frac{a_1^2}{b_1} + ... + \frac{a_n^2}{b_n}$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a_i}{b_i} = \lambda$ pour tout i entre 1 et n.

Exercices

Exercice 1
Montrer que si a, b, c, d sont strictement positifs, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}$

Exercice 2
(Inégalité arithmético-quadratique) Soient a, b, c des réels strictements positifs. Montrer que

$$\frac{a + b + c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 3 (Inégalité arithmético-harmonique)
Soient $a_1, ..., a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1 + ... + a_n}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 4
Soit $a_1 \dots a_n$ des réels. Montrer que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 5 (Lemme du tourniquet)
Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$ et donner les cas d'égalité.

Exercice 6
Soient a, b, c, d des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{4ab}{c+d} \leqslant \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{d}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 7
Soit $a_1 \dots a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $n + \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{4}{a_1+1} + \cdots + \frac{4}{a_n+1}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 8
Soit n un entier strictement positif, $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs, $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels strictement positifs. On suppose que $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ et on note $S = a_1 + \cdots + a_n$.

— Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{b_i+a_i}$

— Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} \geqslant \frac{S}{2}$

Exercice 9
Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a^2}{b}\right) \cdot \left(1 + \frac{b^2}{c}\right) \cdot \left(1 + \frac{c^2}{a}\right) \geqslant (1+a) \cdot (1+b) \cdot (1+c)$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 10 (inégalité de Nesbitt)
Soit a, b, c des réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Trouver les cas d'égalité.

Exercice 11
Soient a, b, c des réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Quelle est la plus grande valeur que peut prendre $s = 2a - 6b + 4c$?

Exercice 12
Déterminer la plus petite valeur de $a^2+b^2+c^2+d^2$ lorsque a, b, c, d sont des réels strictement positifs tels que $a+2b+3c+4d=12$

Exercice 13
Soit x, y des réels positifs, montrer que $x^2+y^2+1 \geqslant x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$

Exercice 14 (JBMO 2023, A1)
Soient a, b, c, d des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{2}{(a+b)(c+d)+(b+c)(a+d)} \leqslant \frac{1}{(a+c)(b+d)+4ac}+\frac{1}{(a+c)(b+d)+4bd}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 15
Soit x, y, z des réels strictement positifs avec $x^2+y^2+z^2=3$, montrer que

$$\frac{x^2+yz}{x^2+yz+1}+\frac{y^2+zx}{y^2+zx+1}+\frac{z^2+xy}{z^2+xy+1} \leqslant 2$$

Exercice 16
Soit a, b, c strictement positifs, montrer que

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}$$

et déterminer les cas d'égalité.

Solutions

Solution de l'exercice 1
D'après l'inégalité des mauvais élèves,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{b}+\frac{16}{d}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}=\frac{2^2}{b}+\frac{4^2}{d}\geqslant\frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 2
On applique l'inégalité des mauvais élèves :

$$\begin{aligned}\frac{(a+b+c)^2}{3+3+3} &\leqslant \frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}+\frac{c^2}{3}\\ \iff \frac{(a+b+c)^2}{9} &\leqslant \frac{a^2+b^2+c^2}{3}\\ \iff \frac{a+b+c}{3} &\leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 3
On applique l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{1^2}{a_1}+\ldots+\frac{1^2}{a_n}\leqslant\frac{(1+\ldots+1)^2}{a_1+\ldots+a_n}=\frac{n^2}{a_1+\ldots+a_n}$$

Solution de l'exercice 4
On applique l'inégalité des mauvais élèves pour $e_i=a_i$ et $f_i=1$, on obtient $a_1^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{1+\ldots 1}=\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$.

On a égalité si et seulement s'il exsite λ réel tel que pour tout i, $a_i=\lambda$ i.e. tous les a_i sont égaux.

Solution de l'exercice 5
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}(a^2+b^2+c^2)\cdot(b^2+c^2+a^2) &\geqslant (ab+bc+ca)^2\\ \iff (a^2+b^2+c^2)^2 &\geqslant (ab+bc+ca)^2\\ \iff a^2+b^2+c^2 &\geqslant ab+bc+ca\end{aligned}$$

car tout est positif.

Solution de l'exercice 6
On applique d'abord l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{d}\geqslant\frac{(a+b)^2}{c+d}=\frac{a^2+b^2+2ab}{c+d}$$

Or par carré positif, on a : $a^2+b^2\geqslant 2ab$. On a donc $\frac{a^2+b^2+2ab}{c+d}\geqslant\frac{4ab}{c+d}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7
On applique l'inégalité des mauvais élèves :
$1+\frac{1}{a_i} \geqslant \frac{4}{1+a_i}$ pour tout i entre 1 et n.
On somme ces n inégalités pour obtenir celle voulue.

Solution de l'exercice 8
Notons que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{b_i+a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2-b_i^2}{b_i+a_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i - b_i = S - S = 0.$

On applique l'inégalité des mauvais élèves : $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1+b_1+\cdots+a_n+b_n} = \frac{S^2}{2S} = \frac{S}{2}$

Solution de l'exercice 9
D'après l'inégalité des mauvais élèves : $\frac{1}{1}+\frac{a^2}{b} \geqslant \frac{(1+a)^2}{1+b}$, et de même, $\frac{1}{1}+\frac{b^2}{c} \geqslant \frac{(1+b)^2}{1+c}$ et $\frac{1}{1}+\frac{c^2}{a} \geqslant \frac{(1+c)^2}{1+a}$ On a alors :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a^2}{b}\right)\cdot\left(1+\frac{b^2}{c}\right)\cdot\left(1+\frac{c^2}{a}\right) &\geqslant \frac{(1+a)^2\cdot(1+b)^2\cdot(1+c)^2}{(1+a)\cdot(1+b)\cdot(1+c)}\\ &\geqslant (1+a)\cdot(1+b)\cdot(1+c)\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 10
On fait apparaitre des carré et on applique l'inégalité des mauvais élèves :
$\frac{a^2}{(b+c)a}+\frac{b^2}{(a+c)b}+\frac{c^2}{(b+a)c} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} = \frac{a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)}{2(ab+bc+ca)}$
Or d'après le lemme du tourniquet, $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$
donc $a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geqslant 3(ab+bc+ca)$.
On en déduit l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 11
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} & (2a-6b+4c)^2 \leqslant (a^2+b^2+c^2)\cdot(2^2+(-6)^2+3^2)\\ \iff & s^2 \leqslant 14\cdot 56\\ \iff & s \leqslant 28\end{aligned}$$

On vérifie alors que ce maximum est bien atteint. On part du cas d'égalité de Cauchy-Schwarz : $\frac{a}{2}+\frac{b}{-6}+\frac{c}{4}=\lambda$ On a donc $a=2\lambda$, $b=-6\lambda$ et $c=4\lambda$

$$\begin{aligned} & a^2+b^2+c^2 = 14\\ \iff & 4\lambda^2+36\lambda^2+16\lambda^2 = 14\\ \iff & 56\lambda^2 = 14\\ \iff & \lambda^2 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

En prenant $\lambda=\frac{1}{2}$ on a bien $s=14$.

Solution de l'exercice 12
Par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+2^2+3^2+4^2) \geqslant (a+2b+3c+4d)^2 = 12^2.$$

Comme $1^2+2^2+3^2+4^2=30$, on obtient que $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant \frac{12^2}{30} = \frac{24}{5}$.

Si on a égalité, alors $a/1 = b/2 = c/3 = d/4$, donc $a+2b+3c+4d = a+4a+9a+16a = 30a$, donc il suffit de prendre $a=2/5$, $b=4/5$, $c=6/5$ et $d=8/5$. On a bien $a+2b+3c+4d=12$, et $a^2+b^2+c^2+d^2 = 120/25 = 24/5$ ce qui montre bien que la valeur est atteinte.

Solution de l'exercice 13

première solution :

Par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$\begin{aligned} x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1} &\leqslant \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+1+y^2+1} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+2)} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2+1-1)(x^2+y^2+1+1)} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2+1)^2-1} < x^2+y^2+1 \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

deuxième solution :

Par l'inégalité des mauvais élèves :

$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2+1}{1} \geqslant \frac{(x+\sqrt{y^2+1})^2}{1+1} = \frac{x^2+y^2+1}{2} + x\sqrt{y^2+1}$

Donc $\frac{x^2+y^2+1}{2} \geqslant x\sqrt{y^2+1}$. De même $\frac{x^2+y^2+1}{2} \geqslant y\sqrt{x^2+1}$.

On obtient l'inégalité voulue en sommant.

Solution de l'exercice 14

On utilise l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{1^2}{(a+c)(b+d)+4ab} + \frac{1^2}{(a+c)(b+d)+4cd} \geqslant \frac{(1+1)^2}{2(a+c)(b+d)+4ac+4bd}$$

Or

$$\begin{aligned} 2(a+c)(b+d)+4ac+4bd &= 2ac+2ad+2bc+2bd+2ab+2bd+2ca+2cd \\ &= 2\left((a+b)(c+d)+(b+c)(a+d)\right). \end{aligned}$$

Donc l'inégalité précédente se réécrit

$$\frac{1}{(a+c)(b+d)+4ab} + \frac{1}{(a+c)(b+d)+4cd} \geqslant \frac{2}{(a+b)(c+d)+(b+c)(a+d)}$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue. On a égalité si et seulement si $\frac{1}{(a+c)(b+d)+4ab}\frac{1}{(a+c)(b+d)+4cd}$, donc si et seulement si $(a+c)(b+d)+4ab = (a+c)(b+d)+4cd$ *i.e.* si $ab=cd$.

Solution de l'exercice 15

Remarquons que $\frac{x^2+yz}{x^2+yz+1} = 1 - \frac{1}{x^2+yz+1}$ et de même cycliquement. Ainsi l'inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{x^2+yz+1} + \frac{1}{y^2+zx+1} + \frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant 1.$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves

$$\frac{1}{x^2+yz+1}+\frac{1}{y^2+zx+1}+\frac{1}{z^2+xy+1}\geqslant\frac{(1+1+1)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+3}.$$

Or par le lemme du tourniquet, $xy+yz+xz\leqslant x^2+y^2+z^2=3$ donc

$$\frac{1}{x^2+yz+1}+\frac{1}{y^2+zx+1}+\frac{1}{z^2+xy+1}\geqslant\frac{9}{3+3+3}=1$$

ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 16
L'inégalité est équivalente à

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right)\geqslant\frac{9}{4}.$$

On utilise Cauchy Schwarz sur $(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})$ et $\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c}+\frac{\sqrt{b}}{a+c}+\frac{\sqrt{c}}{b+a}\right)$. On obtient que

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right)\geqslant\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)^2.$$

En utilisant l'inégalité de Nesbitt (cf exercice 10), on a alors que $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\right)^2\geqslant\frac{9}{4}$ ce qui donne l'inégalité voulue.

Si on a égalité, on a égalité dans l'inégalité de Nesbitt donc $a=b=c$.

Réciproquement si on a $a=b=c$, chaque fraction vaut $\frac{1}{4a}$, donc le terme de gauche vaut $\frac{3}{4a}$. Le terme de droite vaut $\frac{3}{4a}$, donc on a bien égalité si et seulement si $a=b=c$.

8 Géométrie : Pot-pourri (Claire et Noam)

Exercices

Exercice 1
Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. Notons $\alpha = \widehat{CAB}$ et $\beta = \widehat{ABD}$. Soit E le point d'intersection entre (AB) et (CD) et F le point d'intersection entre (AC) et (BD). Déterminer les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{AFD}$ en fonction de α et β.

Exercice 2 (Théorème de Miquel)
Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Exercice 3
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en A et B. On note t une tangente commune à Γ_1 et Γ_2 et P et Q les points de tangence respectifs. On note M le point d'intersection de (AB) avec t. Montrer que M est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 4
Soit Ω_1 et Ω_1 deux cercles de centres O_1 et O_2, s'intersectant en deux points X et Y . Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y . On note B l'intersection de (AY) en Ω_2. Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Exercice 5 (Théorème du pôle sud)
Soit ABC un triangle. Soit S le point d'intersection de la bissectrice interne de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le cercle circonscrit à ABC. Montrer que S appartient à la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 6
Soit ABC un triangle et S son pôle sud issu de A, montrer que S est le centre du cercle circonscrit à BIC, avec I le centre du cercle inscrit à ABC

Exercice 7
Soient S_A, S_B, S_C les pôles Sud issus de A, B, C respectivement. Montrer que I est l'orthocentre de $S_AS_BS_C$.

Exercice 8
Soit ABC un triangle. Soit O, H respectivement le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC. On note O' le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point O et de l'arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC ne contenant pas le point A. Montrer que la droite (AO') est la bissectrice de l'angle $\widehat{HAO}$.

Exercice 9
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. On suppose que le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le côté $[AB]$ en un point E et que le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le côté $[AC]$ en un point F. Démontrer que $BE = CF$.

Exercice 10
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M et N les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$. La droite

(DB) coupe les droites (AM) et (AN) respectivement en P et Q. Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 11
Soit un demi-cercle de diamètre $[AB]$ sur lequel on choisit deux points C et D. Soit S l'intersection de (AC) et (BD) et T le pied de la perpendiculaire à $[AB]$ issue de S. Montrer que (ST) est la bissectrice de $\widehat{CTD}$.

Exercice 12 (Droite de Simson)
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Soit P un point de Γ et D, E, F les projetés orthogonaux de P sur (AB), (BC), (CA) respectivement. Montrer que D, E, F sont alignés.

Exercice 13 (Tour final Suisse 2019)
Soit k un cercle et A un point sur ce cercle. Soient B et C deux autres points sur le cercle k. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec le cercle k. Soit Y le symétrique du point A par rapport au point X. Soit D le point d'intersection de la droite (YC) avec le cercle k. Montrer que le point D obtenu ne dépend pas du choix des points B et C sur le cercle k.

Exercice 14
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit H l'orthocentre de ABC. La parallèle à (AB) passant par H coupe (BC) en P et (AD) en Q. La parallèle à (BC) passant par H coupe (AB) en R et (CD) en S. Montrer que S, P, Q et R sont cocycliques.

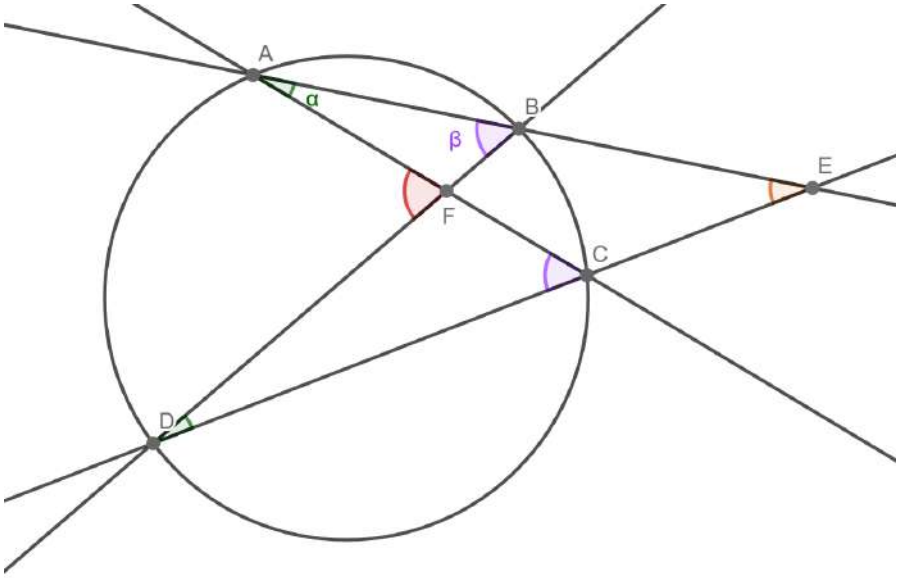
Exercice 15
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent respectivement aux points P et Q. Une droite d coupe les cercles ω_1 et ω_2 respectivement aux points A, C et B, D de telle sorte que les points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre. Montrer qu'on a $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 16 (BXMO 2011)
Soit ABC un triangle soit I le centre de son cercle inscrit. Les bissectrices $(AI), (BI)$ et (CI) coupent les côtés opposés en D, E et F respectivement. La médiatrice du segment $[AD]$ coupe les droites (BI) et (CI) en M et N respectivement. Montrer que les points A, I, M et N sont cocycliques.

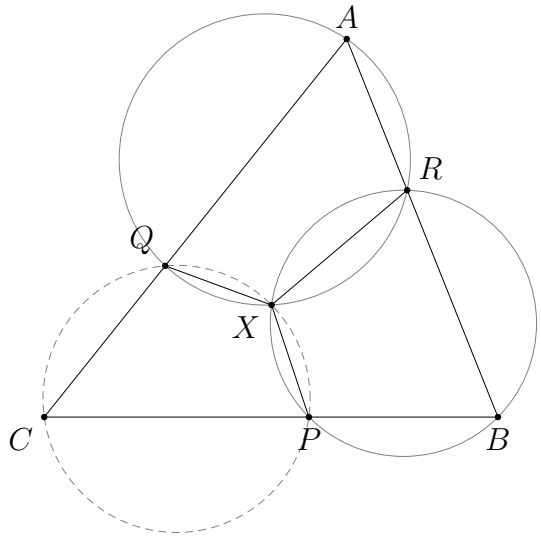
Exercice 17 (Test senior 1 2022, problème 2)
Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit G le centre de gravité du triangle ABD. Soit P et Q les points de la droite (BD) tels que les droites (GP) et (PC) sont perpendiculaires et les droites (GQ) et (QC) sont perpendiculaires. Démontrer que la droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
$\widehat{BFA} = 180 - \alpha - \beta$ par somme des angles d'un triangle, donc $\widehat{AFD} = \alpha + \beta$
Par angle inscrit, $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \beta$ donc par somme des angles d'un triangle, $\widehat{AED} = \beta - \alpha$



Solution de l'exercice 2

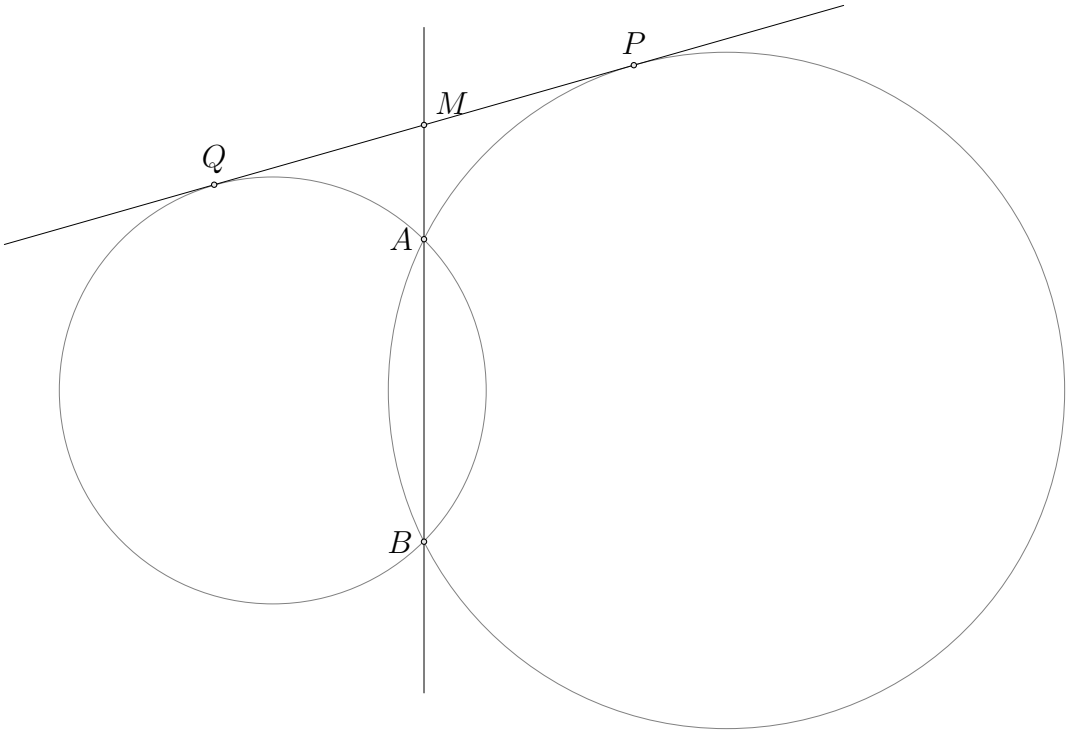


On appelle X le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AQR et BRP. Il s'agit de montrer que le point X appartient au cercle circonscrit du triangle CPQ. Or :

$$\widehat{QXP} = 360° - \widehat{PXR} - \widehat{RXQ} = (180° - \widehat{PXR}) + (180° - \widehat{QXR}) = \widehat{PBR} + \widehat{QAR} = 180° - \widehat{PCQ}$$

ce qui montre bien que les points Q, X, P et C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3



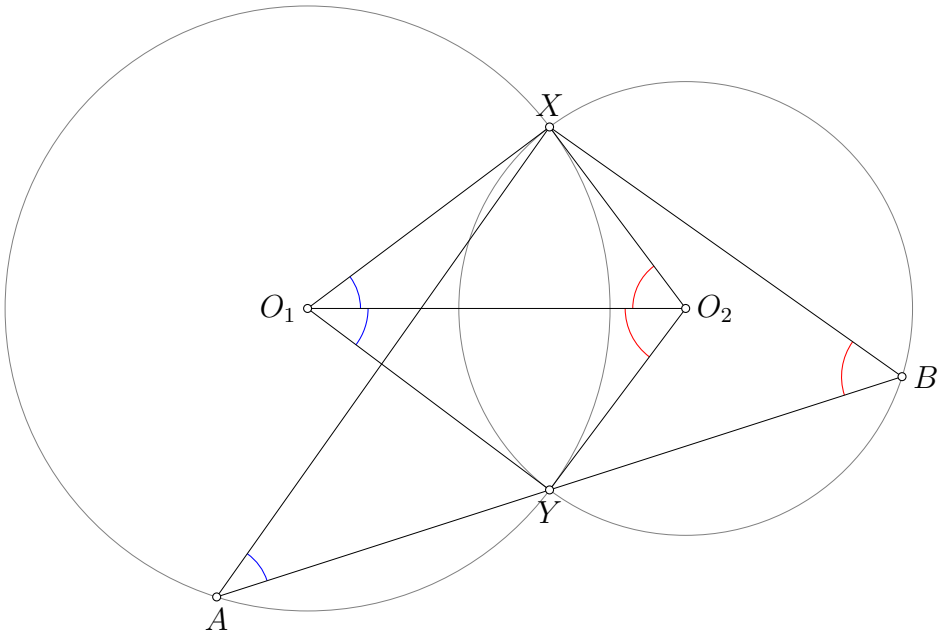
L'idée de cet exercice est de calculer la puissance de M par rapport à chacun des cercles :

— Par rapport à Γ_1, la puissance de M vaut MP^2, mais aussi $MA \times MB$

— Par rapport à à Γ_2, la puissance de M vaut MQ^2, mais aussi $MA \times MB$

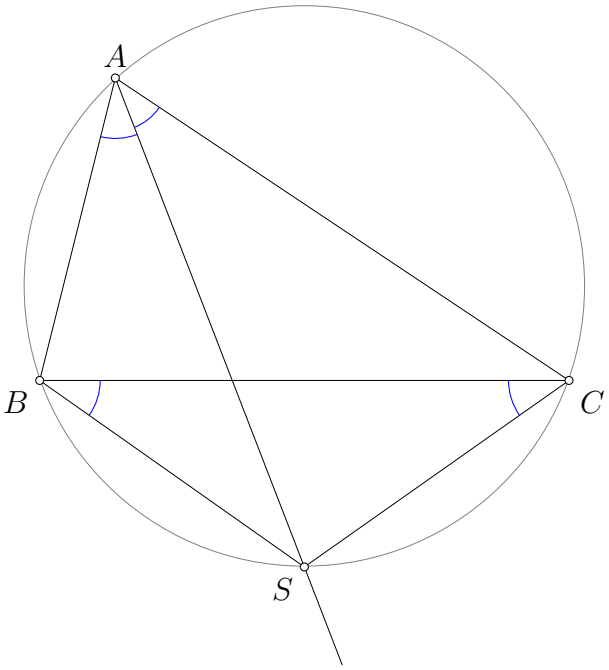
Ainsi, $MP = MQ$, donc M est bien le milieu du segment $[PQ]$

Solution de l'exercice 4



D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{XO_1Y} = 2\widehat{XAY}$. Or, comme X et Y sont à la fois sur Γ_1 et Γ_2, on a $O_1X = O_1Y$ et $O_2X = O_2Y$. On en déduit donc que (O_1O_2) est la médiatrice du segment $[XY]$, et donc la hauteur du triangle XO_1Y, qui est confondue avec la bissectrice puisque le triangle est isocèle. En définitive, on a $\widehat{XO_1O_2} = \widehat{XAB}$, et de la même manière, on a $\widehat{XO_2O_1} = \widehat{XBA}$. Ainsi, les triangles XAB et XO_1O_2 sont bien semblables.

Solution de l'exercice 5

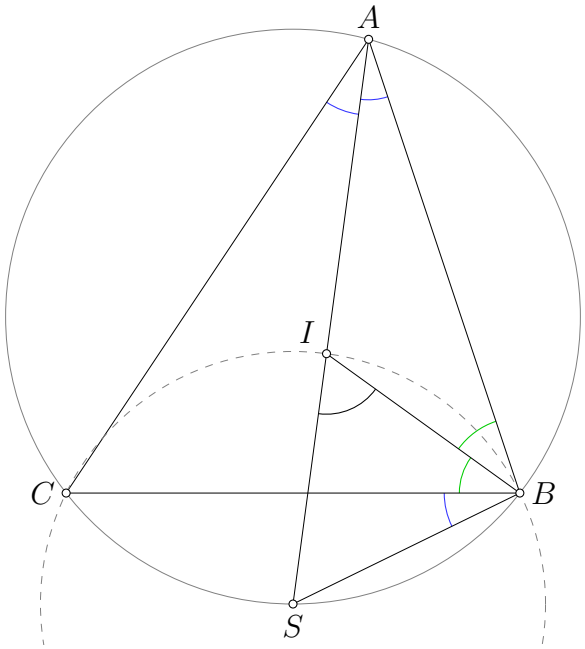


On redéfinit S comme l'intersection de la bissectrice issue de A et du cercle circonscrit. Une chasse aux angles donne alors

$$\widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \widehat{SAB} = \widehat{SCB},$$

et SCB est isocèle en S. Ainsi, S est sur la médiatrice de $[BC]$, comme voulu.

Solution de l'exercice 6



On montre que $SB = SI$. Puisque $SB = SC$, on a alors que S est équidistant des points C, I et B, comme voulu.

Pour montrer que $SI = SB$, on montre que $\widehat{SIB} = \widehat{IBS}$. Pour cela, en utilisant la somme des angles du triangle AIB :

$$\widehat{SIB} = 180° - \widehat{AIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$$

Puisque I est sur les bissectrices des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$, on a

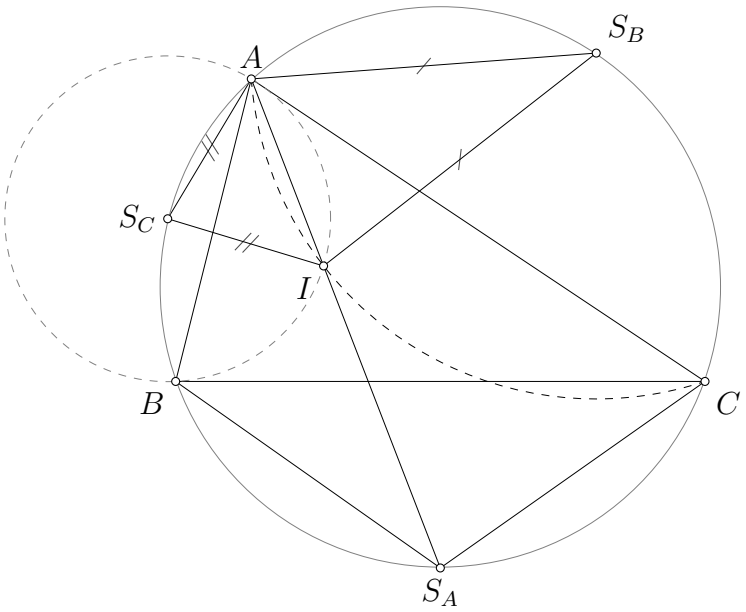
$$\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \widehat{IAC} + \widehat{IBC}$$

Or, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{IAC} = \widehat{SAC} = \widehat{SBC}$, de sorte que

$$\widehat{IAC} + \widehat{IBC} = \widehat{SBC} + \widehat{IBC} = \widehat{IBS}$$

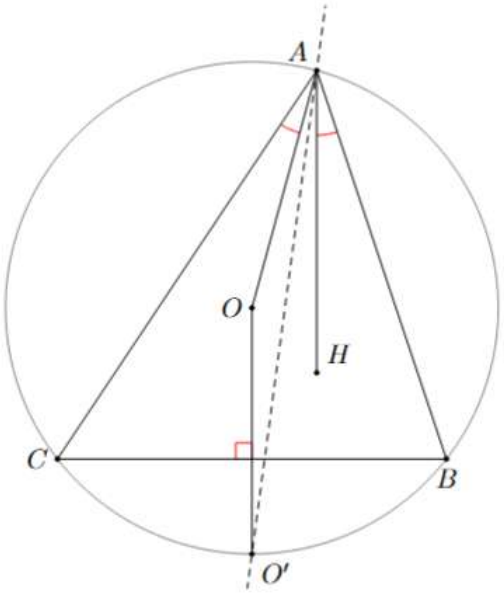
donc on a bien $\widehat{SIB} = \widehat{SBI}$, comme voulu.

Solution de l'exercice 7



On montre que $(AI) \perp (S_C S_B)$, les autres orthogonalités se montrent de la même façon. Pour se faire, on montre que $(S_C S_B)$ est en fait la médiatrice de (AI). Ce fait découle à son tour du fait que $AS_B = IS_B$ par l'exercice du cercle antarctique.

Solution de l'exercice 8



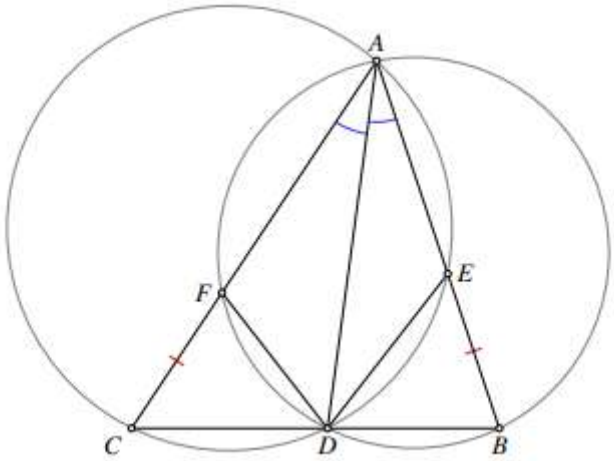
Tout d'abord, puisque la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point O est la médiatrice du segment $[BC]$, le point O' est le pôle Sud du point A dans le triangle ABC.
Le point O' appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Pour montrer qu'il appartient à la bissectrice de l'angle HAO, il suffit de montrer que $\widehat{HAB} = \widehat{OAC}$ (qui est également un résultat bien connu sur l'orthocentre).
Le triangle AOC est isocèle au point O donc $\widehat{COA} = 180° - 2\widehat{CAO}$. D'après le théorème de

l'angle au centre, on a $\widehat{COA} = 2\widehat{CBA}$. Ainsi, $2\widehat{CBA} = 180° - 2\widehat{CAO}$. Si bien que

$$\widehat{CAO} = 90° - \widehat{CBA}$$

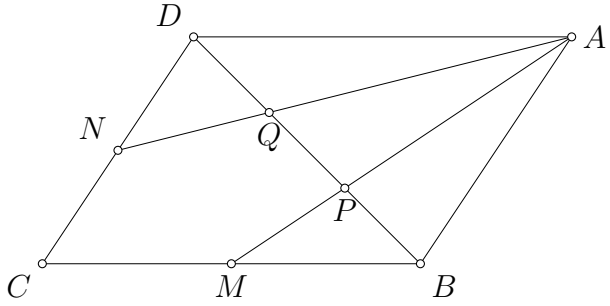
Or la droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires donc $90° - \widehat{CBA} = \widehat{HAB}$. On retrouve donc bien que $\widehat{CAO} = \widehat{HAB}$, ce qui permet de conclure.

Solution de l'exercice 9



On veut montrer que les triangles BDE et DFC sont isométriques. Puisque (AD) est la bissectrice de $\widehat{FAB}$ et de $\widehat{CAE}$ par théorème du pôle Sud on a que D est sur la médiatrice de $[CE]$ et de $[FB]$. Ainsi, $CD = DE$ et $FD = DB$. Il nous reste à montrer que $\widehat{BDE} = \widehat{FDC}$. Or, par angle inscrit on a $\widehat{BDE} = 180 - \widehat{EDC} = \widehat{CAE} = \widehat{FAB} = 180 - \widehat{FDB} = \widehat{FDC}$

Solution de l'exercice 10



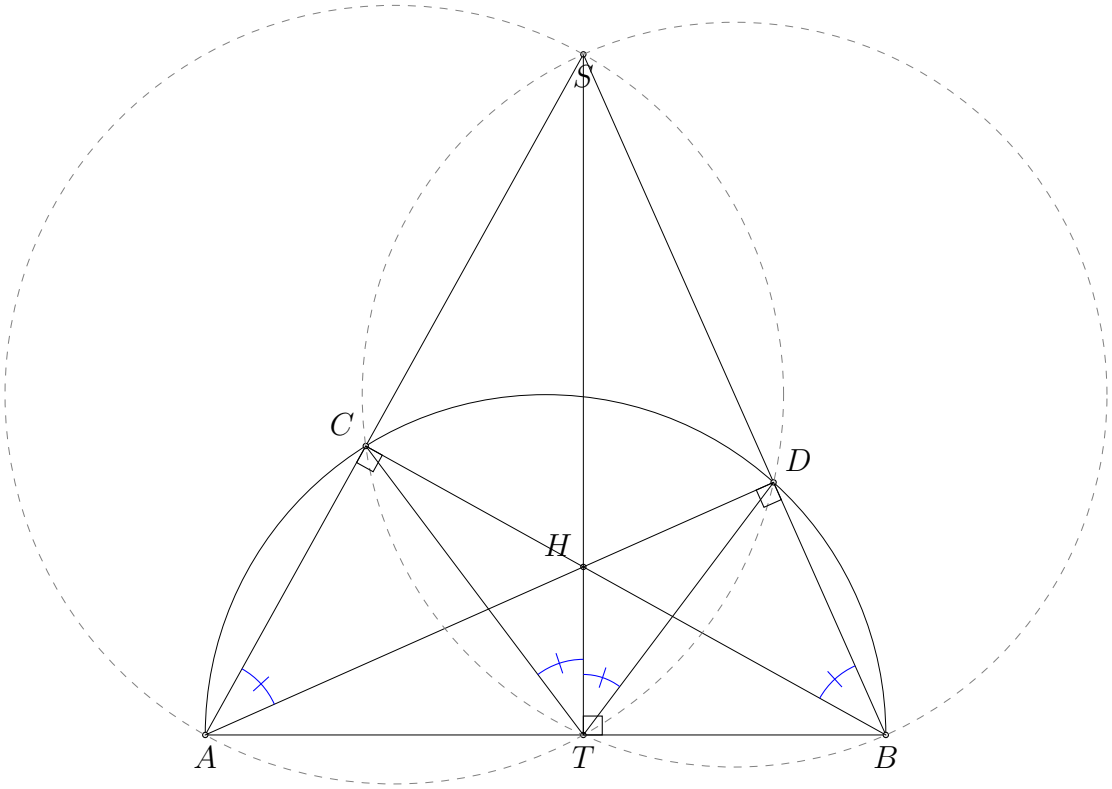
Par angles alternes-internes, on a $\widehat{QDN} = \widehat{QBA}$ et $\widehat{QND} = \widehat{QAB}$, donc $QDN \sim QBA$.

Ainsi, on a $\frac{DQ}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$ car $AB = DC$ et N est le milieu de $[DC]$. (On peut remarquer que c'est en fait le théorème de Thalès dans $DNQAB$)

Dond $DQ = \frac{QB}{2}$, ce qui implique $DQ = \frac{DB}{3}$. On montre de même que $BP = \frac{DB}{3}$, et il vient alors que $QP = BP - DQ - PB = \frac{BD}{3}$.

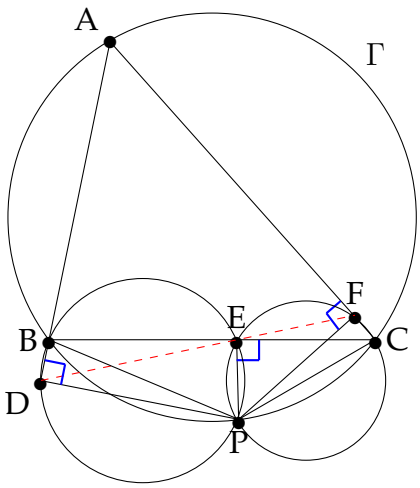
On a bien alors $DQ = QB = PB$.

Solution de l'exercice 11



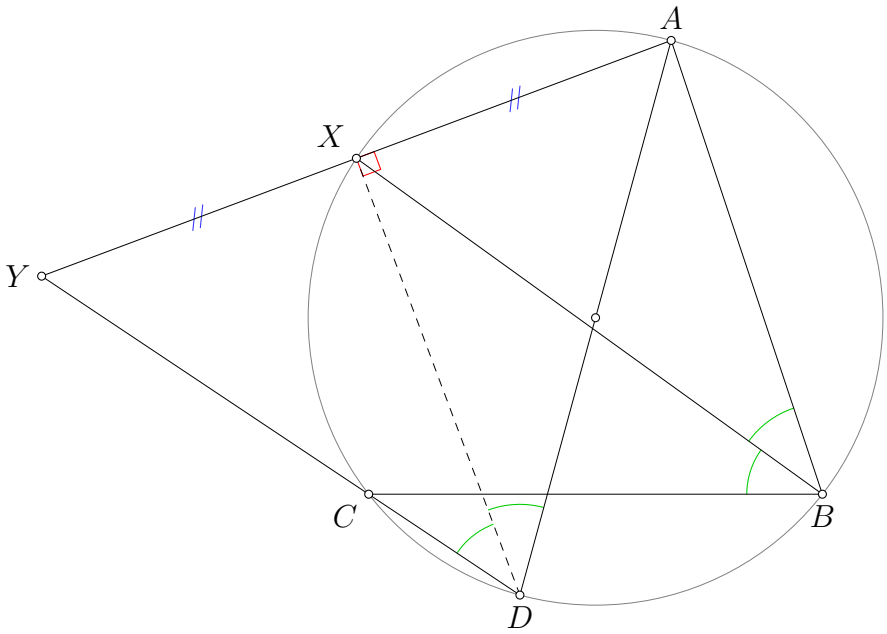
Le fait qu'on ait des points sur un demi-cercle nous donne d'autres angles droits, en C et D. Le réflexe est alors de regarder si des cercles n'apparaissent pas. On pourrait introduire l'intersection $(AD) \cap (BC)$, qui serait alors l'orthocentre du triangle ABS et montrer qu'il est sur la bissectrice de $\widehat{CTD}$. On peut aussi remarquer que $BTCS$ est cyclique, et ainsi que $\widehat{CTS} = \widehat{CBS} = 90° - \widehat{ASB}$. De même, $\widehat{DTS} = \widehat{DAS} = 90° - \widehat{ASB}$, et c'est fini.

Solution de l'exercice 12



On a $\widehat{PEC} = 90° = \widehat{PFC}$ donc par réciproque de l'angle inscrit, P, E, F, C sont cocycliques. De plus $\widehat{BDP} + \widehat{BEP} = 90° + 90° = 180°$ donc B, D, P, E sont également cocycliques. Dès lors $\widehat{DEP} = \widehat{DBP}$. Or $\widehat{DBP} = 180° - \widehat{PBA}$ et $\widehat{PCA} = 180° - \widehat{PBA} = \widehat{PEF}$. Donc $\widehat{DEP} + \widehat{PEF} = 180°$. Donc D, E, F sont bien alignés.

Solution de l'exercice 13

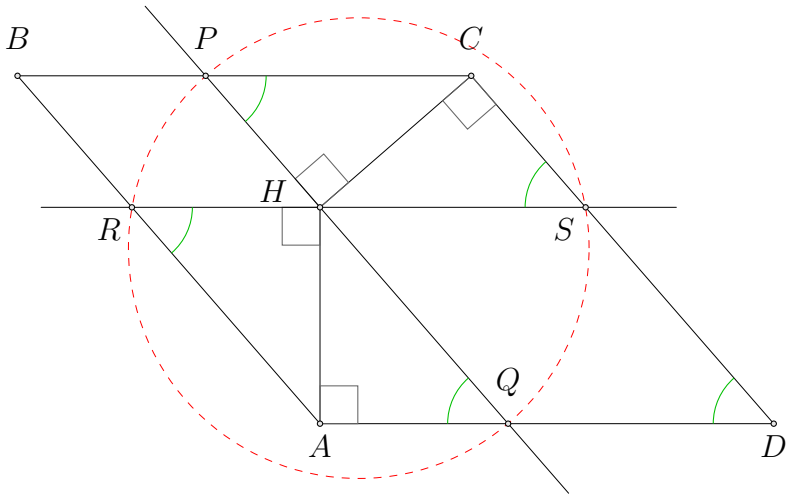


Le point X est identifié comme le pôle Sud du sommet B dans le triangle ABC. Il s'agit donc du milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$. Il s'agit donc aussi du pôle Sud du sommet D dans le triangle ADC. La droite (XD) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{ADC}$.

Dans le triangle AYD, la médiane et la bissectrice sont donc confondues. on déduit que le triangle AYD est isocèle en D et le point X est le pied de la hauteur issue du sommet D dans le triangle ADY. L'angle $\widehat{AXD}$ est donc droit. Cela signifie que le point D est le point

diamétralement opposé à A dans le cercle k. Cette position ne dépend pas des points B et C choisis, ce qui conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 14

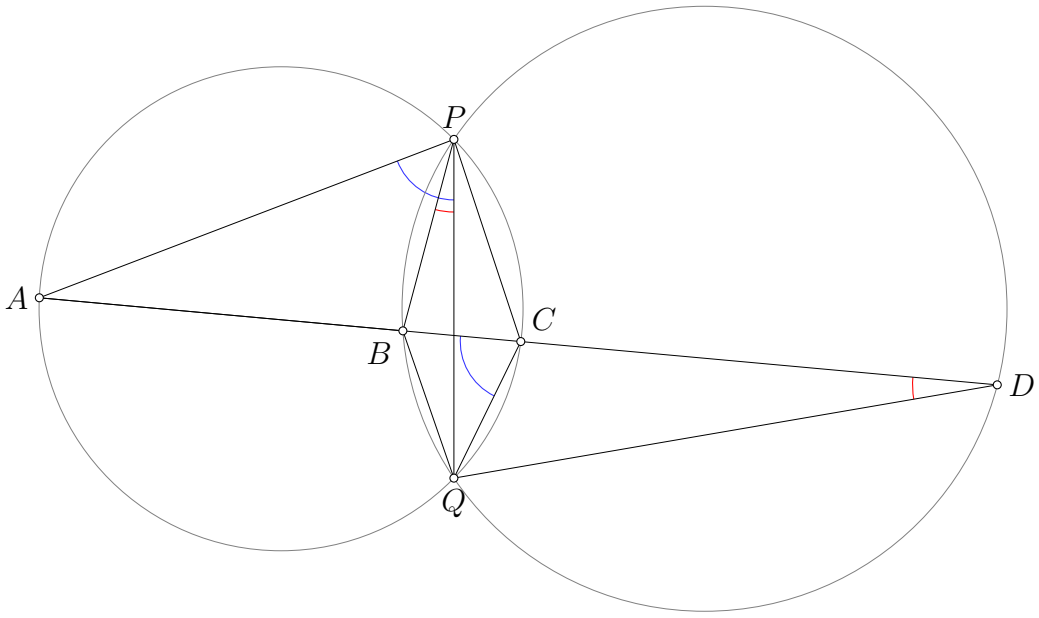


Avec les droites parallèles qu'on a, les triangles HAQ, HAR, HPC et HCS sont semblables. Donc on a :

$$\begin{aligned}\frac{HQ}{HR} &= \frac{HQ}{HA}\cdot\frac{HA}{HR}\\ &= \frac{HS}{HC}\cdot\frac{HC}{HP}\\ &= \frac{HS}{HP}\end{aligned}$$

Ce qui fait $HQ \cdot HP = HS \cdot HR$ et donc P, Q, R et S sont cocycliques.

Solution de l'exercice 15

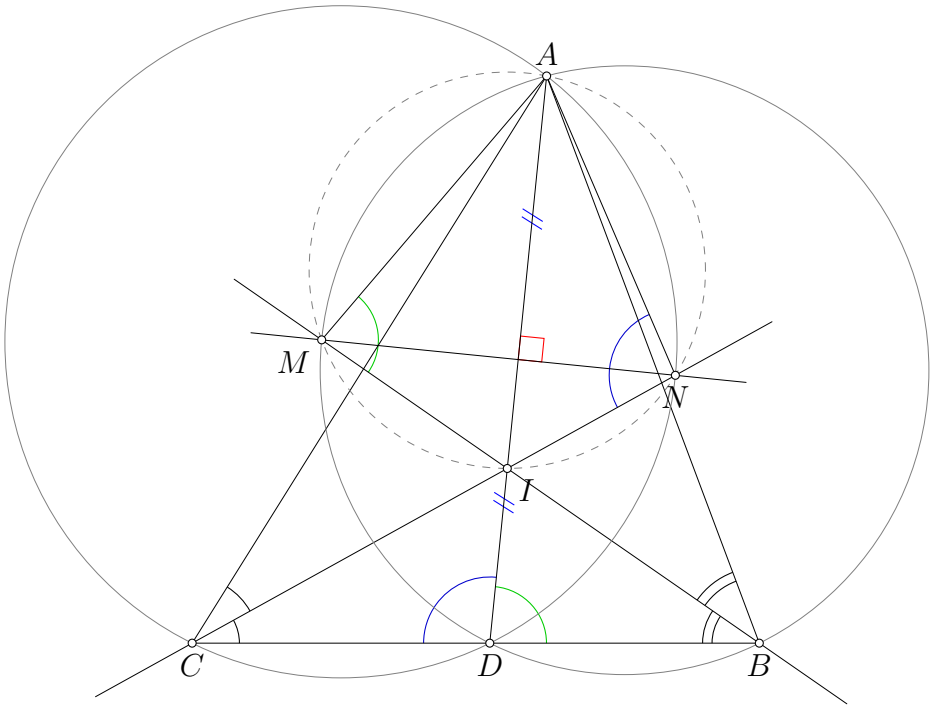


On vérifie que d'après le théorème de l'angle inscrit pour les quadrilatères cycliques $APCQ$ et $PBQD$:

$$\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = \widehat{ACQ} - \widehat{BDQ} = \widehat{CQD}$$

où la dernière égalité provient du fait que la somme des angles du triangle CQD vaut $180°$.

Solution de l'exercice 16

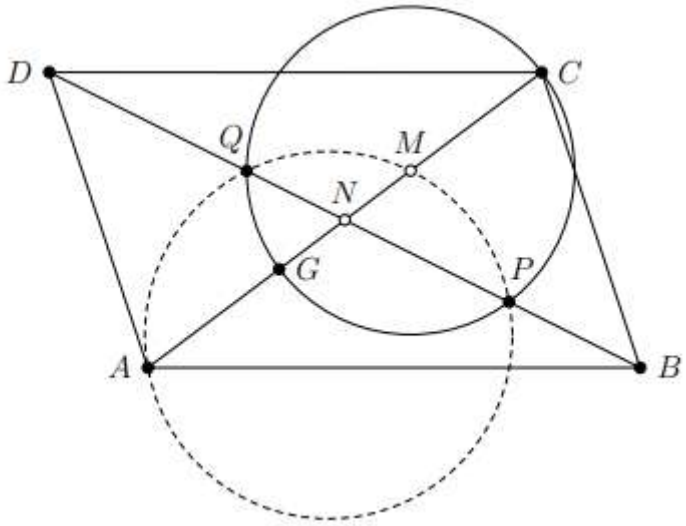


Des bissectrices et des médiatrices s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. Le point M est en effet par définition le pôle sud du point B dans le triangle BAD donc le quadrilatère $BAMD$ est cyclique. De même, le quadrilatère $CAND$ est cyclique. Il vient que

$$\widehat{IMA} + \widehat{INA} = \widehat{BMA} + \widehat{CNA} = \widehat{BDA} + \widehat{CDA} = 180°$$

ce qui montre bien que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 17



Tout d'abord puisque $ABCD$ est un parallélogramme et que la droite (AG) passe par le milieu de $[BD]$ on en déduit que (AG) est une diagonale du parallélogramme.
Puisque $\widehat{CGP}$ et $\widehat{CGQ}$ sont droits on en déduit que les points C, G, P et Q résident sur un même cercle de diamètre $[CG]$.
Il est alors intéressant d'introduire M le centre de cercle afin de symétriser un petit plus le problème. De plus, une figure propre et grande nous permet de conjecturer que les points A, M, Q, P sont cocycliques. Ainsi comme M se situe sur la médiatrice de $[PQ]$ on aurait par théorème du pôle Sud que (AM) est la bissectrice de $\widehat{PAQ}$. Montrons donc que $AMPQ$ est cyclique.
On remarque alors assez vite qu'un chasse angle n'aboutit pas pour démontrer la cocyclité. De plus, les centres de gravités induisent des égalités de rapport puisque G se trouve au $2/3$ de la médianne. Il est donc naturel d'utiliser la puissance de points. On introduit donc N l'intersection des diagonales du quadrilatère.
Par puissance en N dans $CPGQ$ on a $NQ \cdot NP = NC \cdot NG$. Or, les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu donc $NQ \cdot NP = NA \cdot NG$. Or, $NM = MG - NG = \frac{1}{2}GC - NG = \frac{1}{2}(NC + NG) - NG = \frac{1}{2}NA - \frac{1}{2}NG = \frac{1}{2}AG = NG$. On a donc $NQ \cdot NP = NA\dot{N}M$ ce qui implique que $MPQA$ est cyclique ce qui conlut par pôle Sud.

2 Entraînement de mi-parcours

Exercices

Exercice 1
Soit $BCDE$ un carré et soit O son centre. Soit A un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle ABC est rectangle en A. Montrer que le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 2
Soit a, b, c des réels positifs vérifiant $ab + bc + ca = 3$. Montrer que

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ab} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 3
Soit a, b, c des réels strictement positifs, montrer que

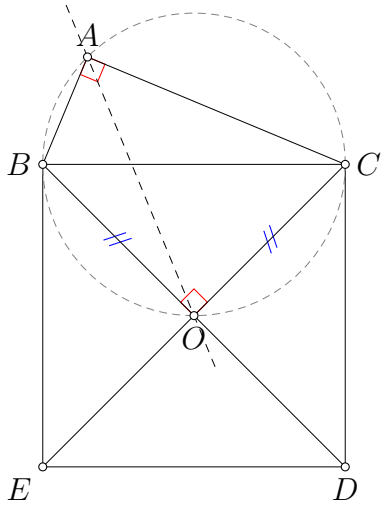
$$\frac{1+3a^{12}}{b^3} + \frac{1+3b^{12}}{c^3} + \frac{1+3c^{12}}{a^3} \geqslant 12(abc)^2.$$

Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 4
Soit ABC un triangle et Γ le cercle de diamètre $[BC]$. Le cercle Γ recoupe les droites (AB) et (AC) en P et Q respectivement. On note O le centre du cercle circonscrit à APQ. Montrer que les tangentes au cercle Γ en P et Q se coupent en O.

Solutions

Solution de l'exercice 1



Puisque $\widehat{BAC} = 90° = \widehat{BOC}$, les points B, A, C et O sont cocycliques. Puisque le triangle BOC est isocèle en O, le point O est sur la médiatrice du segment $[BC]$, il s'agit donc du pôle Sud du point A dans le triangle ABC. Le point O appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Solution de l'exercice 2

On applique l'inégalité des mauvais élèves : on a

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ab} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{3+ab+bc+ca} = \frac{(a+b+c)^2}{6}.$$

Or $(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \geqslant 3(ab+bc+ca)$ d'après le lemme du tourniquet, donc

$$\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ab} = \frac{(a+b+c)^2}{6} \geqslant \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

On a bien l'inégalité voulue. Si on a égalité, on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $a = b = c$. Comme de plus $ab+bc+ca = 3$, on a $3a^2 = 3$, donc $a = 1 = b = c$.

Réciproquement, si $a = b = c = 1$, $\frac{a^2}{1+bc} + \frac{b^2}{1+ac} + \frac{c^2}{1+ab} = \frac{3}{2}$ donc on a bien égalité.

Solution de l'exercice 3

On remarque qu'on a égalité si $a = b = c = 1$. Essayons de simplifier le numérateur : comme on veut préserver le cas d'égalité, le plus simple est de découper $3a^{12}$ en 3 : on a $1+3^{12} = 1+a^{12}+a^{12}+a^{12}+a^{12} \geqslant 4\sqrt[4]{a^{36}} = 4a^9$ par inégalité arithmético-géométrique. Ainsi, en faisant de même avec b et c, on a :

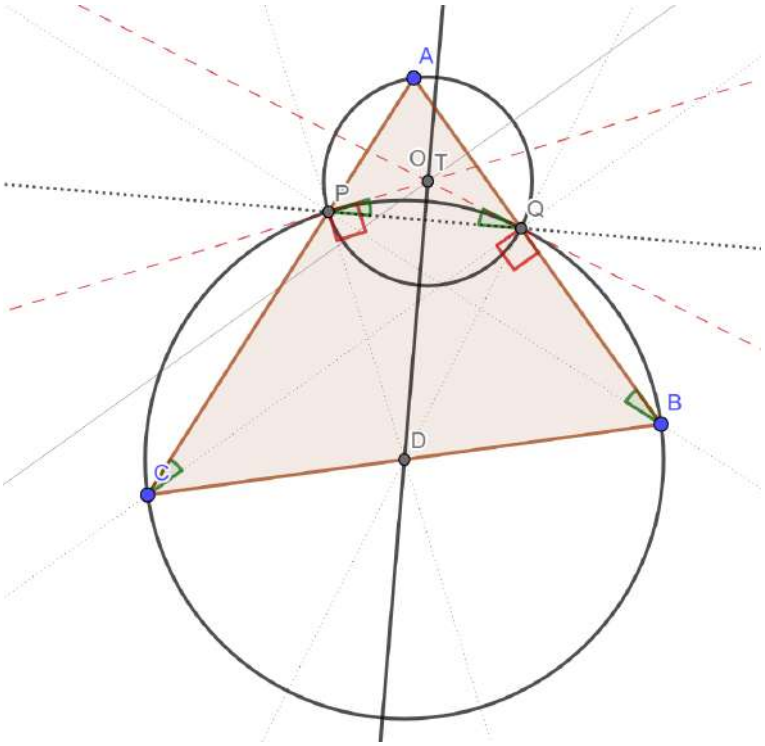
$$\frac{1+3a^{12}}{b^3} + \frac{1+3b^{12}}{c^3} + \frac{1+3c^{12}}{a^3} \geqslant \frac{4a^9}{b^3} + \frac{4b^9}{c^3} + \frac{4c^9}{a^3}.$$

De plus, en appliquant encore l'inégalité arithmético-géométrique.

$$\frac{1+3a^{12}}{b^3}+\frac{1+3b^{12}}{c^3}+\frac{1+3c^{12}}{a^3}\geqslant 4\left(\frac{a^9}{b^3}+\frac{b^9}{c^3}+\frac{c^9}{a^3}\right)\geqslant 12\sqrt[3]{\frac{a^9b^9c^9}{b^3c^3a^3}}=12(abc)^2.$$

Si on a égalité, on a égalité dans la première IAG, donc $a^{12}=1=b^{12}=c^{12}$, donc $a=b=c=1$. Réciproquement, dans ce cas on a bien égalité car chaque fraction vaut 4, donc leur somme vaut 12, qui est bien égal au terme de droite.

Solution de l'exercice 4



On note T le point d'intersection des tangentes, montrons que T est le centre du cercle circonscrit à APQ.

Par angle tangent, $\widehat{QCP}=\widehat{QPT}$ et $\widehat{PCQ}=\widehat{PQT}$, donc T est sur la médiatrice de $[PQ]$

CPB et CQB sont rectangles respectivement en P et Q car $[BC]$ est le diamètre du cercle

Donc $\widehat{QCB}=180-90-\widehat{ABC}=90-\widehat{ABC}$

Ainsi, $\widehat{PCQ}=\widehat{ACP}-\widehat{QCB}=\widehat{ACB}-(90-\widehat{ABC})=\widehat{ACB}+\widehat{ABC}-90$

$\widehat{PTQ}=180-2\widehat{TQP}$ car TQP est isocèle en T
$\widehat{PTQ}=180-2\widehat{PCQ}=180-2\widehat{ACB}+2\widehat{ABC}+180$

De plus dans le triangle ABC, $\widehat{CAB}=180-\widehat{BCA}-\widehat{ABC}$

Donc $\widehat{CAB}=\widehat{PAQ}=\frac{1}{2}\widehat{PTQ}$ donc T est le centre du cercle circonscrit à PAQ car il est sur la médiatrice de $[PQ]$, et la propriété de l'angle au centre est vérifiée sur l'angle $\widehat{PAQ}$

Solution n°2 de l'exercice 4

Posons O' un point sur la tangente en P au cercle, du même côté de la tangente que O.

Par angle tangentiel on a $\widehat{O'PQ} = \widehat{PCQ}$.

Or par définition de Q, $\widehat{CQB} = 90$, donc le triangle AQC est rectangle en Q.

Ainsi $\widehat{O'PQ} = \widehat{PCQ} = 90 - \widehat{CAQ} = 90 - \widehat{CAB}$.

Le triangle OPQ est isocèle en O, donc $\widehat{OPQ} = 90 - \widehat{POQ}/2$.

Or par angle au centre $\widehat{POQ} = 2\widehat{PAQ}$. Donc $\widehat{OPQ} = 90 - \widehat{PAQ} = \widehat{O'PQ}$.

Ainsi (OP) est parallèle à $(O'P)$ la tangente au cercle passant par P, donc O est sur la tangente passant par P. Par le même raisonnement, celui-ci est aussi sur la tangente passant par P.

3 Deuxième partie : Combinatoire et Arithmétique

1 Combinatoire : Principe des tiroirs (Anatole)

Ce cours reprend principalement celui donné par Emilhan en 2025.

Le principe des tiroirs part d'une intuition assez simple : si l'on veut ranger beaucoup d'objets dans peu de tiroirs, alors un des tiroirs devra contenir un grand nombre d'objets. L'enjeu est de savoir ce qu'on entend par "beaucoup" et "grand nombre".

Théorème 1 (Principe des tiroirs, première version)**.**
Si $n+1$ chaussettes sont placées dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient au moins 2 chaussettes.

Théorème 2 (Principe des tiroirs, deuxième version)**.**
Si $kn+1$ chaussettes sont rangées dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir contenant au mois $k+1$ chaussettes.

Démonstration. Si ce n'est pas le cas, chaque tiroir contient au plus k chaussettes, donc les tiroirs contiennent au total au plus $k \cdot n$ chaussettes, absurde. □

Exemple 3.
Parmi 25 élèves, il y en a forcément trois nés pendant le même mois.

Voici enfin la version la plus générale du principe des tiroirs.

Définition 4 (Partie entière)**.**
Si a est un nombre réel, on note $\lceil a \rceil$ (partie entière supérieure de a) le plus petit entier supérieur ou égal à a.
On note de même $\lfloor a \rfloor$ (partie entière inférieure de a) le plus grand entier inférieur ou égal à a.

Théorème 5 (Principe des tiroirs)**.**
Si on range k chaussettes dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroirs contenant au moins $\lceil \frac{k}{n} \rceil$ chaussettes.

Démonstration. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas. Alors chaque tiroir contient au plus $\lceil \frac{k}{n} \rceil - 1$ chaussettes. Or, $\lceil \frac{k}{n} \rceil - 1 < \frac{k}{n}$, donc les tiroirs contiennent au total au plus $n \cdot (\lceil \frac{k}{n} \rceil - 1) < n \cdot \frac{k}{n} = k$ chaussettes, absurde. □

Exemple 6.
Il existe au moins 4 élèves du stage ayant la même pointure.

Quelques variantes

Théorème 7 (Principe des tiroirs inversé)**.**
Si k chaussettes sont placées dans n tiroirs, alors il y a au moins un tiroir contenant au plus $\lfloor \frac{k}{n} \rfloor$ chaussettes.

Théorème 8 (Principe des tiroirs infini)**.**
Si une infinité de chaussettes sont placées dans un nombre fini de tiroirs, il existe au moins un tiroir contenant une infinité de chaussettes.

Exemple 9.
Il existe une infinité de puissances de 7 qui ont le même premier chiffre.

Théorème 10 (Principe des tiroirs, version analytique)**.**
Si l'on prend n nombres dont la somme vaut k, alors l'un d'entre eux est inférieur ou égal à $\frac{k}{n}$.

Remarques diverses :

— En général, l'enjeu sera de trouver les bons tiroirs. Il s'agit souvent de partitions astucieuses d'un ensemble.

— Si l'énoncé met en jeu deux entiers n et m où m s'écrit de la forme $kn+1$, un principe des tiroirs est probablement caché quelque part.

— Le principe des tiroirs donne un résultat d'existence, mais en aucun cas d'unicité !

Premiers exercices

Exercice 1
Combien faut-il qu'il y ait d'élèves à Valbonne pour être sûr que l'un des groupes contient au moins 19 élèves (quelle que soit la répartition des élèves dans les groupes) ?

Exercice 2
Soit a, b, c trois entiers. Montrer que $(a-b)(b-c)(c-a)$ est pair.

Exercice 3
Félix choisit 5 points dans un triangle équilatéral de côté 2. Montrer qu'il en existe deux à distance au plus 1 l'un de l'autre.

Exercice 4
Matteo choisit 7 entiers distincts entre 1 et 12. Montrer qu'il y en a forcément deux dont la somme vaut 13.

Exercices de développement

Exercice 5
Eva veut ranger ses 51 chaussettes dans 7 tiroirs. Montrer qu'il existe deux tiroirs qui, à eux deux, contiennent au moins 16 chaussettes.

Exercice 6
Lucile écrit $-1, 0$ ou 1 dans chaque case d'un tableau $n \times n$. Elle considère ensuite la somme de chacune des colonnes, lignes et grandes diagonales. Montrer que parmi ces sommes, il y

en a toujours deux qui sont égales.

Exercice 7
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 20\}$ pour être sûr d'avoir parmi ceux-ci deux entiers a et b tels que $a - b = 2$?

Exercice 8
Hadrien choisit cinq points distincts du plan à coordonnées entières. Montrer qu'il en existe d'eux tel que le milieu du segment les reliant soit un point à coordonnées entières.

Exercices plus techniques

Exercice 9
Hadriel choisit 10 entiers quelconques entre 1 et 100. Montrer qu'on peut trouver 2 sous-ensembles non vides de ces 10 entiers qui sont de même somme.

Exercice 10
Combien de fous au maximum on peut disposer sur un échiquier sans qu'aucun d'eux ne puisse en prendre un autre ?

Exercice 11
Tristan choisit 201 points dans un rectangle 10×10. Montrer qu'il en existe 3 formant un triangle d'aire au plus 1.
Bonus : Montrer qu'il y a 3 points formant un triangle d'aire au plus $\frac{1}{2}$.

Exercice 12
Montrer que si l'on choisit $n + 1$ nombres parmi $\{1, \ldots, 2n\}$, on peut en trouver deux tels que l'un divise l'autre.

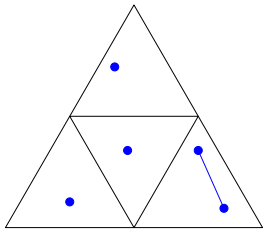
Exercice 13
Pendant les vacances, qui durent 42 jours, Erik fait au moins une séance d'escalade chaque jour, et pour un total de 81 fois en tout. Prouver qu'il existe une suite de jours consécutifs pendant laquelle il fait exactement 20 séances.

Solutions

Solution de l'exercice 1
La réponse est 91.
Il y a 5 groupes donc, s'il y a 91 élèves, l'un des groupes contient au moins $\lceil \frac{91}{5} \rceil = 19$ élèves.
Réciproquement, s'il y a seulement 90 élèves, chaque groupe peut contenir exactement 18 élèves.

Solution de l'exercice 2
Il y a deux parités possibles pour chaque entier : pair ou impair. Par le principe des tiroirs, il existe donc deux entiers parmi a, b, c de la même parité. Ainsi, $a - b$, $b - c$ ou $c - a$ est pair, donc le produit de ces trois nombres est pair.

Solution de l'exercice 3
On peut découper le triangle en 4 sous-triangles équilatéraux de côté 1 comme sur la figure ci-dessous. Par le principe des tiroirs, il y a alors au moins deux points parmi les 5 dans le même sous-triangle, et ces deux points sont à distance au plus 1.



Solution de l'exercice 4
La subtilité est ici de construire les bons tiroirs. On va considérer les paires de nombres suivantes :

$$\{1, 12\}, \{2, 11\}, \{3, 10\}, \{4, 9\}, \{5, 8\}, \{6, 7\}$$

Ces paires forment 6 tiroirs. Par le principe des tiroirs, parmi les 7 nombres choisis il y en a au moins deux dans le même tiroir. La somme de ces deux nombres est alors 13.

Solution de l'exercice 5
Cette exercice est une variante du principe des tiroirs, où l'on considère cette fois plusieurs tiroirs. La preuve est similaire au principe des tiroirs, mais sensiblement plus délicate.
On trie les tiroirs par nombre décroissant de chaussettes. Soit a_i le nombre de chaussettes dans le tiroir i, avec donc $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_7$.
Supposons par l'absurde que l'énoncé est faux. Alors $a_1 + a_2 \leq 15$. Ainsi, $a_2 \leq 7$ (car $2a_2 \leq a_1 + a_2 \leq 15$). On a alors $a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 \leq a_2 \leq 7$. Ainsi,

$$51 = (a_1 + a_2) + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 15 + 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 50$$

absurde.

Solution de l'exercice 6
Nos tiroirs seront les valeurs possibles pour la somme des éléments d'une ligne/colonne/diagonale. Cette somme peut prendre toutes les valeurs entre $-n$ et $+n$, donc $2n + 1$ valeurs possibles.
Or, il y a n lignes, n colonnes et 2 diagonales, ce qui donne $2n + 2$ sommes différentes. Ainsi, par le principe des tiroirs, il existe deux sommes qui ont la même valeur.

Solution de l'exercice 7
Comme souvent, la difficulté est ici de construire les tiroirs. Considérons les paires suivantes :

$$\{1,3\},\{2,4\},\{5,7\},\{6,8\},\{9,11\},\{10,12\},\{13,15\},\{14,16\},\{17,19\},\{18,20\}$$

Dans chaque paire, la différence des deux éléments vaut 2. On a formé 10 paires donc, si l'on prend 11 éléments, par le principe des tiroirs il y en a deux dans la même paire, et leur différence vaut alors 2.
Réciproquement, si l'on choisit 10 éléments ou moins, l'objectif n'est pas forcément atteint (par exemple avec $1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18$).

Solution de l'exercice 8
Ici, il est important de reformuler ce que l'on cherche à montrer. Soit (a, b) et (c, d) les coordonnées de deux points. Leur milieu est $(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2})$. Ses coordonnées sont entières si et seulement si $a + c$ et $b + d$ sont pairs, ce qui revient à dire que a et c ont la même parité, et de même pour b et d. Nos tiroirs seront alors les paires (parité de la première coordonnée, parité de la deuxième coordonnée) pour chaque point. Il y a quatre tiroirs : (pair,pair), (pair, impair), (impair,pair), (impair,impair). Ainsi, par le principe des tiroirs, parmi nos 5 points il en existe deux dans le même tiroir, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9
Il y a exactement $2^{10} - 1 = 1023$ sous-ensembles non vides de nos 10 entiers, qui seront nos chaussettes.
Les tiroirs sont les valeurs possibles pour les sommes des sous-ensembles. Chacun contient au plus 10 entiers entre 1 et 100, donc sa somme est comprise entre 1 et 1000. Ainsi, il y a 1000 tiroirs donc, par le principe des tiroirs, il existe deux sous-ensembles qui ont la même somme.

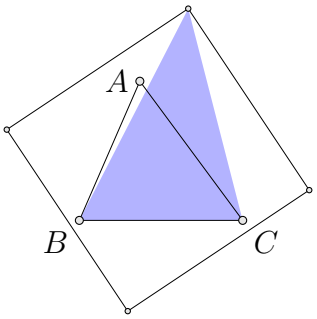
Solution de l'exercice 10
On va s'intéresser aux diagonales qui vont dans la direction haut-droit. Il y en a 15 au total, chacune constituant un tiroir. De plus, les coins haut-gauche et bas-droit forment chacun une diagonale d'une case, on peut en fait les mettre dans un même tiroir car ils sont tous deux sur la grande diagonale haut-gauche. Ainsi, on a formé 14 tiroirs, et si deux fous sont dans le même tiroir il s'attaquent forcément. On peut ainsi placer au plus 14 fous.

Réciproquement c'est possible de poser 14 fous, en plaçant les fous sur toutes les cases de la première et de la dernière ligne, sauf les deux coins bas-droit et haut-droit.

Solution de l'exercice 11
On va simplement découper le rectangle en 100 carrés 1×1. Il y a 201 points, donc par le principe des tiroirs au moins trois de ces points sont dans le même carré. L'aire du triangle formé par ces trois points est inférieure ou égale à l'aire du carré, donc à 1.

Bonus : On va montrer que l'aire du triangle formé par ces trois points est même inférieure ou égale à $\frac{1}{2}$. On va pour cela déplacer les sommets du triangle tout en augmentant son aire pour parvenir à un triangle d'aire $\frac{1}{2}$.
Soit ABC ce triangle. Si B et C sont fixés, l'aire du triangle est proportionnelle à la distance de A à la droite BC. Tournons le plan pour superposer la droite BC avec l'axe des abscisses. Alors l'aire du triangle est maximale si A est le point le plus haut ou le plus bas du carré. Or on remarque aisément que le point le plus haut est nécessairement un coin (s'il y a plusieurs

points les plus hauts, alors l'un d'eux est un coin). De même pour le point le plus bas. Ainsi, on peut remplacer A par l'un des coins du carré pour augmenter l'aire du triangle.
En réalisant la même opération pour B et C, on peut supposer que A, B, C sont trois coins du carré. Dans ce cas, l'aire du triangle vaut $\frac{1}{2}$, ce qui conclut.



Remarque : On pouvait aussi s'en sortir moins laborieusement en exprimant l'aire du triangle en fonction de ses coordonnées cartésiennes.

Solution de l'exercice 12
Ici les chaussettes seront les $n+1$ nombres choisis, et la difficulté est encore une fois de déterminer les tiroirs. On va considérer les ensembles suivants : pour chaque nombre impair i entre 1 et $2n$, on prend le tiroir $\{i, 2i, 4i, ...\}$. Il y a n nombres impairs, donc n tiroirs. On remarque de plus que chaque nombre entre 1 et $2n$ se range dans exactement un tiroir. Ainsi, par le principe des tiroirs, deux de nos $n+1$ nombres sont dans le même tiroir. Ils s'écrivent donc sous la forme $2^a i$ et $2^b i$ avec a et b entiers. On remarque alors que l'un des deux divise forcément l'autre.

Solution de l'exercice 13
Ce problème étant présent sur Mathraining, je ne le corrigerai évidemment pas.

2 Arithmétique : PGCD et divisibilité (Antoine D)

La partie cours est la même que toutes les ressources classiques sur le sujet, comme par exemple le poly de Jean-Louis Tu, ou encore le cours de Paul au groupe B en 2023, à partir de la partie "Divisibilité".

Exercices

Exercice 1
Déterminer la division euclidienne de 53 par 7.

Exercice 2
Soient a, b, c, d des entiers relatifs. Montrer que si $a \mid b$ et $c \mid d$, alors $ac \mid bd$.

Exercice 3
Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n+1)$ est pair. Montrer ensuite que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 4
Trouver tous les entiers naturels n vérifiant $n^2 + 1 \mid n$.

Exercice 5
Trouver tous les entiers naturels n vérifiant $n + 1 \mid n^2 + 1$.

Exercice 6 (IMO 1959, Problème 1)
Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 7
Montrer que pour tout entier naturel n, on a $6 \mid n^3 - 7n$.

Exercice 8
Pour quels entiers strictement positifs n a-t-on $5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 5^n + 3^n$?

Exercice 9
a) Montrer que si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $an^2 + bn + c = 0$, alors $n \mid c$.
b) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^5 - 2n^4 - 7n^2 - 7n + 3 = 0$.

Exercice 10
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^3 + n - 2$ est une puissance de 2.

Exercice 11
Pour des entiers strictement positifs m et n, montrer que $PGCD(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{PGCD(m,n)} - 1$.

Exercice 12
Trouver tous les entiers strictement positifs m, n tels que $3 \cdot 2^m + 1 = n^2$.

Exercice 13
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \mid 1 + 2 + \cdots n$ pour tout $n > 0$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On a $53 = 7 \times 7 + 6$.

Solution de l'exercice 2
$a \mid b$ et $c \mid d$ donc il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ka$, $d = k'c$, donc $bd = (kk')(ac)$ i.e. $\boxed{ac \mid bd}$.

Solution de l'exercice 3
Pour le premier cas, il suffit de remarquer que parmi deux nombres consécutifs, au moins l'un des deux est pair (on peut sinon s'en convaincre en regardant la division euclidienne de n par 2). Comme le produit d'un nombre pair par n'importe quel autre entier est pair, alors $n(n+1)$ est bien pair.
Pour le deuxième cas, on remarque que $n(n+1)$ est pair, donc $2 \mid n(n+1)(2n+1)$. Quant a la divisibilité par 3, si $3 \mid n$, on a fini, sinon le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1 ou 2. Dans le premier cas, on vérifiera que $2n+1$ est divisible par 3 et dans le deuxième, que $n+1$ est divisible par 3. Dans tous les cas, $n(n+1)(2n+1)$ est divisble par 3, et donc par 6.

Solution de l'exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n^2+1| > |n|$, donc la seule possibilité est que $n = 0$.
Réciproquement, on a bien $1 \mid 0$

Solution de l'exercice 5
Si $n+1 \mid n^2+1$, alors $n+1 \mid (n+1)^2 - (n^2+1)$, donc $n+1 \mid 2n$, donc $n+1 \mid 2n - 2(n+1)$, donc $n+1 \mid -2$, donc $n = 0$ ou $n = 1$.
Réciproquement, 0 et 1 conviennent bien.

Solution de l'exercice 6
Une fraction est irréductible SSI son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Or, $3 \times (14n+3) - 2 \times (21n+4) = 1$, donc le numérateur et le dénominateur sont bien premiers entre eux pour tout n et la fraction est bien irréductible.

Solution de l'exercice 7
On commence par remarquer que $6 \mid n^3 - 7n \iff 6 \mid n^3 - 7n + 6n$, donc $6 \mid n^3 - n$. Or, $n^3 - n = n(n^2-1) = n(n-1)(n+1)$, et parmi trois nombres consécutifs, il y en a au moins un de pair et exactement un divisible par 3, donc le produit de trois nombres consécutifs est divisible par 6, donc $n^3 - 7n$ est toujours divisible par 6.

Solution de l'exercice 8
On applique une combinaison linéaire bien placée :

$$5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 5(3^{n-1} + 5^{n-1}) - 5^n + 3^n = 2 \cdot 3^{n-1}.$$

Maintenant 3 est premier avec $5^{n-1} + 3^{n-1}$, donc par le lemme de Gauss, $5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 2$. En particulier $5^{n-1} + 3^{n-1} \leq 2$, et $n \leq 1$ donc $n = 1$. Réciproquement, si $n = 1$ on a bien $2 \mid 8$.

Solution de l'exercice 9
a) On a $an^2 + bn + c = 0 \iff c = -n(an+b)$, donc il faut bien que $\boxed{n \mid c}$.
b) On applique le résultat précédent : on a $n \mid 3$ donc $n \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Réciproquement, seuls -1 et 3 conviennent.

Solution de l'exercice 10
Soit n une éventuelle solution. Alors $n^3 + n - 2 = (n-1)(n^2+n+2)$ donc $n-1$ et n^2+n+2

sont des puissances de 2. Comme $n-1 < n^2+n+2$, nécessairement $n-1 \mid n^2+n+2$. On en déduit que $n-1 \mid n^2+n+2-(n-1)(n+2) = 4$. Les diviseurs positifs de 4 sont $1, 2, 4$ donc les seules valeurs possibles pour n sont $2, 3, 5$. En testant chaque possibilité, seuls 2 et 5 conduisent à des solutions.

Solution de l'exercice 11
Par symétrie des rôles, on peut supposer sans perte de généralité que $m \geq n$. On a alors :

$$PGCD(2^m-1, 2^n-1) = PGCD(2^m-1-2^{m-n}(2^n-1), 2^n-1) = PGCD(2^{m-n}-1, 2^n-1)$$

Une récurrence immédiate fournit $PGCD(2^m-1, 2^n-1) = PGCD(2^{m-nq}-1, 2^n-1)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq nq$. En particulier, si r est le reste de la division euclidienne de m par n, alors

$$PGCD(2^m-1, 2^n-1) = PGCD(2^r-1, 2^n-1)$$

On reconnaît alors la suite des restes successifs de l'algorithme d'Euclide : en notant $x_0 = m$ et $y_0 = n$, puis (x_a, y_a) la liste des couples successifs, pour tout $a \geq 1$ on a :

$$PGCD(2^{x_{a-1}}-1, 2^{y_{a-1}}-1) = PGCD(2^{x_a}-1, 2^{y_a}-1)$$

On a finalement $PGCD(2^m-1, 2^n-1) = PGCD(2^{PGCD(m,n)}-1, 2^0-1) = 2^{PGCD(m,n)}-1$.

Solution de l'exercice 12
Déjà, $3 \cdot 2^m + 1$ est impair, donc n également. On factorise, pour obtenir $3 : cdot2^m = (n+1)(n-1)$. Notons que les deux termes $n+1$ et $n-1$ ne peuvent être tous deux divisibles par 4, sans quoi $4 \mid n+1-(n-1) = 2$, une contradiction. Ainsi l'un parmi $n-1$ ou $n+1$ n'est divisible que par 2, et est donc plus petit que 6 : en particulier $n \leq 7$. On doit donc vérifier toutes les valeurs de m telles que $3 \cdot 2^m \leq 48$, i.e. $m \leq 4$. On obtient successivement $3 \cdot 2^m + 1 = 7, 13, 25, 49$, parmi lesquelles seules 25 et 49 sont des carrés. Cela donne comme solutions finales les couples $(3, 5)$ et $(4, 7)$ (qu'on n'a pas besoin de vérifier, on vient de le faire).

Solution de l'exercice 13
On commence par regarder ce qu'il se passe pour $n = 1$: $f(1) \mid 1$. Comme $f(1) > 0$, on en déduit $f(1) = 1$. À présent, pour $n = 2$ on a $f(2)+1 \mid 3$. On a $f(2)+1 \geqslant 1+1 = 2$, donc $f(2)+1 = 3$ et $f(2) = 2$. En essayant les valeurs suivantes, on se rend compte qu'on a toujours $f(n) = n$, du fait que la somme des $n-1$ premiers termes est trop grande pour qu'une autre valeur de $f(n)$ soit possible. Plus précisément, montrons par récurrence forte que $f(n) = n$. Pour $n = 1, 2$ c'est déjà fait. Supposons donc qu'on ait un $n \geq 2$ tel que pour tout $k \leq n$, $f(n) = n$. Alors la relation de l'énoncé pour $n+1$ donne

$$\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1) \mid \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

La fin de la preuve vient alors de l'observation suivante : si $a, b > 0$ vérifient $a \mid b$, alors $a = b$ ou $a \leq b/2$; cela vient simplement des cas $k = 1$ ou $k \geq 2$ dans la relation $b = ka$.

Ici on a

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{(n+2)(n+1)}{4} \iff 2n \geq n+2,$$

ce qui est vrai puisque $n \geq 2$. Ainsi

$$\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1) > \frac{(n+1)(n+2)}{4},$$

ce qui force

$$\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ou encore $f(n+1) = n+1$. Notre hérédité tient, et on a donc fini.

3 Arithmétique : Nombres premiers (Eva)

Ce cours est très intégralement inspiré du merveilleusement fantastique cours de Martin Rakovsky et Anatole Bouton de l'an dernier.

Définitions

Exercice 1
Déterminer toutes les paires de nombres premiers consécutifs

Exercice 2
Déterminer tous les nombres premiers de la forme $a^2 - 1$ avec $a \geqslant 1$ un entier.

Exercice 3
Soit a et n des entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^n - 1$ est premier. Montrer que $a = 2$ et que n est premier.

Lemmes de Gauss et Euclide

Exercice 4

1. Soit a un entier naturel. Montrer que 7 divise $a \cdot a$ si et seulement si 7 divise a.
2. Soit a un entier naturel. Montrer que 7 divise a^n si et seulement si 7 divise a.

Exercice 5
Soit a, b deux nombres premiers entre eux. Montrer que si $a \mid n$ et $b \mid n$, alors $ab \mid n$.

Exercice 6
Soient x et y deux entiers. Montrer que si $2x + 1$ divise $8y$, alors $2x + 1$ divise y

Exercice 7
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 8
Montrer que si a et b sont premiers entre eux, alors $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

Décomposition en facteurs premiers

Exercice 9
Soit p un nombre premier. Donner les diviseurs de p^k.

Exercice 10
Soit p un nombre premier et m et n des entiers. On suppose que $p^2 + m^2 = n^2$. Montrer que $n = m + 1$.

Exercice 11
En fonction de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier, déterminer son nombre de diviseurs positifs.

Exercice 12

1. Montrer qu'un entier est un carré si et seulement si l'exposant de chaque facteur dans sa décomposition en facteurs premier est pair.
2. Montrer qu'un entier est une puissance k-ième si et seulement si l'exposant de chaque facteur dans sa décomposition en facteurs premier est divisible par k.

Et pour finir

Exercice 13
Déterminer tous les entiers naturels p tels que p, $p+2$ et $p+4$ soient tous premiers.

Exercice 14
Déterminer tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que $p < q < r$ et les nombres $r-q, r-p$ et $q-p$ sont tous les trois des nombres premiers.

Exercice 15
Soit p un nombre premier et a, b deux entiers tels que $p^3|ab$. Montrer que $p^2|a$ ou $p^2|b$.

Exercice 16
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers dont le reste de la division euclidienne par 4 vaut 3.

Exercice 17
Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Donner les valeurs possibles du PGCD de $a+b$ et de a^2-ab+b^2.

Exercice 18
Soit p, q et r des nombres premiers. On suppose que chacun des trois nombres $pq+1, qr-p$ et $rp+1$ sont des carrés parfaits. Montrer que $p+2qr+2$ est un carré parfait.

Exercice 19
Trouver toutes les paires (p, q) de nombres premiers telles que

$$p^2(p^3-1) = q(q+1).$$

Exercice 20 (Iran Round 2 2010)
Soient $a > b$ deux entiers strictement positifs. On suppose que $\gcd(a-b, ab+1) = 1$ et que $\gcd(a+b, ab-1) = 1$. Montrer que $(a-b)^2 + (ab+1)^2$ n'est pas un carré parfait.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Commençons par remarquer que dans toute paire de nombres consécutifs, il y en a un qui est pair. Alors, comme le seul nombre premier pair c'est 2 (cf. Exercice 2), les seules paires possibles sont $(1, 2)$ ou $(2, 3)$. On constate finalement que la première paire n'est pas solution puisque 1 n'est pas premier. Ainsi la seule solution est $(2, 3)$ car 2 et 3 sont bien premiers.

Solution de l'exercice 2
On reconnait ici une identité remarquable : $a^2-1=a^2-1^2=(a-1)(a+1)$. Notre nombre est alors factorisé et pour que ce soit un nombre premier, il faut que l'un des facteurs soit égal à 1. Ainsi, on soit avoir $a-1=1$ ou $a+1=1$, ce qui donne $a=2$ ou $a=0$. Comme on cherche $a \geqslant 1$, on a $a=2$, donc $a^2-1=3$ qui est bien premier. La seule solution est donc 3.

Solution de l'exercice 3

1. On sait que $a-1$ divise a^n-1 et comme $n \geq 2$, $a-1 < a^n-1$. Ainsi, $a-1$ est un diviseur strict de a^n-1, donc, comme a^n-1 est premier, on doit avoir $a-1=1$, soit $a=2$.
2. Par contraposée, si n n'est pas premier, alors on peut écrire $n=ab$ avec $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$. Ainsi,
$$2^n-1=(2^a)^b-1^b=(2^a-1)\left(2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\ldots+1\right)$$
Avec $2^a-1 \geqslant 2$ et $2^{a(b-1)}+2^{a(b-2)}+\ldots+1 \geqslant 2$, donc 2^n-1 n'est pas premier, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4
7 est premier, donc on peut appliquer le lemme d'Euclide :

1. 7 divise $a \times a$, donc 7 divise a. Réciproquement, si 7 divise a, $a=7k$ avec k un entier, donc $a^2=7\times 7\times k\times k$, et est donc divisible par 7.
2. C'est la même chose, mais avec le lemme d'Euclide généralisé.

Solution de l'exercice 5
Soient k et ℓ des entiers tels que $n=ak=b\ell$. On a donc que $b \mid ak$ et que b est premier avec a. D'après le lemme d'Euclide, $b \mid k$. Il existe donc un entier m tel que $k=bm$. On a alors $n=abm$, donc $ab \mid n$.

Solution de l'exercice 6
$2x+1$ est impair, donc premier avec 8. On peut donc directement appliquer le lemme de Gauss pour obtenir que $2x+1$ divise y.

Solution de l'exercice 7
Par l'absurde, supposons qu'il n'en existe qu'un nombre fini $p_1,\ldots,p_n$. Alors considérons l'entier $N=p_1\times\ldots\times p_n+1$: il n'est divisible par aucun des n nombres premiers listés ci-dessus. Cependant le lemme précédent garantit l'existence d'un diviseur premier de N, ce qui nous donne une contradiction et qui conclut.

Solution de l'exercice 8
Par le corollaire précédent, il suffit de montrer qu'aucun nombre premier ne peut diviser simultanément ab et $a+b$. Soit donc p un nombre premier divisant ab. Par le lemme d'Euclide, $p|a$ ou $p|b$. Quitte à échanger a et b, on peut supposque $p|a$. Comme a et b sont premiers entre eux, p ne divise pas b. Ainsi, p ne divise pas $a+b$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9
Les diviseurs de p^k sont les nombres de la forme p^a avec $0 \leqslant a \leqslant k$.

Solution de l'exercice 10
Notons que $n^2 > m^2$ donc $n > m$. L'équation se factorise sous la forme $p^2=n^2-m^2=$

$(n-m)(n+m)$. Donc $n-m$ est un diviseur de p^2, de sorte que $n-m=1, p$ ou p^2. Si $n-m \geqslant p$, alors $n+m=\frac{p^2}{n-m} \leqslant n-m$, ce qui est absurde. On déduit que $n-m=1$, comme voulu.

Solution de l'exercice 11
On note $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Les diviseurs de n sont alors exactement les entiers de la forme $p_1^{\beta_1} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$ avec $\forall i, \quad \beta_i \in [\![0, \alpha_i]\!]$, ce qui donne un total de

$$(\alpha_1 + 1) \times \ldots \times (\alpha_n + 1)$$

diviseurs distincts.

Solution de l'exercice 12

1. D'abord, si n est un carré, on peut écrire $n = k^2$ avec $k = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$. Ainsi, $n = p_1^{2\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{2\alpha_r}$, et l'unicité de la décomposition garantit alors le résultat. Réciproquement, si $n = p_1^{2\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{2\alpha_r}$, alors $n = k^2$ avec $k = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$
2. La deuxième question est parfaitement analogue, mais en remplaçant les 2 par des k.

Solution de l'exercice 13
Remarquons que parmi p, $p+2$ et $p+4$, il y en a exactement un qui est divisible par 3 puisque l'un de p, $p+1$ ou $p+2$ l'est (ce sont trois nombres consécutifs), et que $p+1$ est divisible par 3 SSI $p+4$ l'est. Ainsi, l'un de ces trois nombres doit être égal à trois. C'est le même argument que pour les nombres premiers pairs. On peut alors traiter les trois cas et trouver que la seule possibilité est $p=3$.

Solution de l'exercice 14
On suppose que p, q et r sont tous impairs. Alors $p-q$, $q-r$ et $r-p$ sont pairs. Comme leur valeur absolue est première, ces nombres valent tous 2. Ainsi les entiers $p, p+2$ et $p+4$ sont premiers. Si p est divisible par 3, alors $p=3$ et $q=5$ et $r=7$.
Cependant, le triplet $(3,5,7)$ n'est pas solution du problème : $7-3=4$ n'est pas premier.
Si p n'est pas divisible par 3, alors p est de la forme $3k+1$ ou $3k+2$. Le premier cas implique que $p+2$ soit divisible par 3 donc $p+2=3$ mais $p=1$ n'est pas un nombre premier. Le deuxième cas implique que $p+4$ soit divisible par 3, mais $p+4=3$ ne donne pas de solution strictement positive.
On suppose que $r=2$. Alors p et q sont impaires et $p-q$ est pair et premier donc égal à 2. Il vient que $q+2, q$ et $q-2$ sont tous les trois des nombres premiers. D'après le cas précédent, cela implique que $q-2=3$ donc $p=7$. Réciproquement, le triplet $(p,q,r)=(2,5,7)$ et ses permutations sont donc bien solutions au problème.

Les seuls triplets solutions sont donc $(2,5,7)$ ainsi que ses permutations.

Solution de l'exercice 15
Supposons que p^2 ne divise ni a ni b. Alors $v_p(a) \leqslant 1$ et $v_p(b) \leqslant 1$. On déduit que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \leqslant 2$, ce qui contredit le fait que $p^3 \mid ab$.

Solution de l'exercice 16
Par l'absurde, supposons qu'il en existe un nombre fini $k \in \mathbb{N}$. Notons les $p_1, \ldots, p_k$. Considérons le nombre $n = 4p_1 \times \ldots \times p_k - 1$. Alors N n'est divisible ni par 2 ni par un des p_i. C'est donc le produit de nombres premiers distincts des p_i et de 2. Or, un produit de nombres premiers de la forme $4m+1$ est un nombre de la forme $4m'+1$, donc au moins un des divsieurs

de N est de la forme $4\ell+3$, et n'apparait pas dans la liste des p_i, ce qui est absurde. Il y a donc une infinité de nombres premiers de la forme $4k+3$.

Solution de l'exercice 17
Posons $d = \text{PGCD}(a+b, a^2-ab+b^2)$.

Soit p un éventuel diviseur premier de d. Alors p est également un diviseur de $a^2+b^2-ab-(a+b)^2 = -3ab$. D'après le lemme d'Euclide, p divise $3, a$ ou b. Si p divise b, comme p divise $a+b$, on déduit que p divise également a, ce qui contredit que a et b sont premiers entre eux. Ainsi, p ne peut pas diviser b, et de même il ne peut pas diviser a. On déduit que p divise 3 donc $p=3$. Ainsi, d est une puissance de 3.

Cependant, si 9 divisait d, on aurait de même que précédemment que 9 divise $3ab$, donc que 3 divise ab. Ceci implique que 3 divise $a+b$ et a et ou b, donc 3 divise a et b, ce qui contredit que a et b sont premiers entre eux. Ainsi, 9 ne divise pas d, donc $d=1$ ou $d=3$.

Réciproquement, ces deux valeurs sont possibles : si $a=b=1$, on a bien $\text{PGCD}(a+b, a^2-ab+b^2) = \text{PGCD}(1,2) = 1$, tandis que si $a=1$ et $b=2$, on a bien $\text{PGCD}(a+b, a^2-ab+b^2) = \text{PGCD}(3,3) = 3$.

Solution de l'exercice 18
Donnons-nous trois entiers strictement positifs a, b et c tels que $pq+1 = a^2, qr-p = b^2$ et $rp+1 = c^2$. Puisque p, q et r sont premiers, ils sont supérieurs ou égaux à 2, de sorte que $a^2 > pq \geqslant 4$ donc $a \geqslant 3$ et de même $b \geqslant 3$ et $c \geqslant 3$. Les égalités se réécrivent comme

$$pq = a^2 - 1 = (a-1)(a+1),$$

$$qr - p = b^2,$$

$$rp = c^2 - 1 = (c-1)(c+1).$$

Puisque $a \geqslant 3$, on a $1 < a-1 < a+1 < a^2-1$, donc $a+1$ et $a-1$ sont des diviseurs strictes de pq. Ceci implique que $p = a+1$ et $q = a-1$ ou que $p = a-1$ et $q = a+1$. De même, on trouve que $p = b+1$ et $r = b-1$ ou que $p = b-1$ et $r = b+1$. On déduit que $q = p+2$ ou $q = p-2$ et $r = p+2$ ou $r = p-2$. On distingue les différents cas :

- Si $q = p+2$ et $r = p+2$, alors $q = r = p+2$, donc $(p+2)^2 - p = p^2+3p+4$ est un carré parfait, ce qui est absurde car $(p+1)^2 < p^2+3p+4 < (p+2)^2$.
- Si $q = p-2$ et $r = p+2$, d'après l'exercice 17 on déduit que $q = 3, p = 5$ et $r = 7$. Mais alors $p+2qr+2 = 49 = 7^2$, donc l'énoncé est vérifié.
- Si $q = p+2$ et $r = p-2$, d'après l'exercice 17 on déduit que $q = 7, p = 5$ et $r = 3$. Mais alors $p+2qr+2 = 49 = 7^2$, donc l'énoncé est vérifié.
- Si $q = p-2$ et $r = p-2$, alors $(p-2)^2 - p$ est un carré parfait. Pourtant, $(p-3)^2 < (p-2)^2 - p < (p-2)^2$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 19
Si $p = q$, alors $p^4 - p = p+1$. Or $p^4 = p \cdot p^3 \geqslant 8p > 2p+1$ pour tout nombre premier p car $p \geqslant 2$. On a donc $p \neq q$ et donc p et q sont premiers entre eux.

p^2 est premier avec q donc d'après le lemme de Gauss, $p^2 \mid q+1$. On dispose donc de $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $q+1 = kp^2$.

Comme q est premier avec p^2, $q \mid p^3-1 = (p-1)(p^2+p+1)$. Donc $q \mid p-1$ ou $q \mid p^2+p+1$.

Si $q \mid p-1$, alors

$$p < kp^2 - 1 = q \leqslant p-1$$

ce qui est absurde.

On a donc $q \mid p^2+p+1$ donc $kp^2-1 = q \leqslant p^2+p+1$ soit $(k-1)p^2 \leqslant p+2$. Si $k=1$, alors $q = p^2-1 = (p-1)(p+1)$ qui n'est premier que si $p=2$. On a alors $q=3$ mais $2^2(2^3-1) = 28 \neq 12 = 3(3+1)$. On en déduit que $k \geqslant 2$ et $p > 2$, donc $p+2 < p^2 \leqslant (k-1)p^2 \leqslant p+2$ ce qui est également absurde.

Finalement il n'y a pas de solution.

Solution de l'exercice 20

Commençons par vérifier que

$$(a-b)^2 + (ab+1)^2 = (a+b)^2 + (ab-1)^2 = (a^2+1)(b^2+1).$$

On suppose par l'absurde que ce nombre est un carré parfait. Observons que si a^2+1 et b^2+1 ne peuvent pas tous les deux être des carrés parfaits. En effet, s'il existe x tel que $a^2+1 = x^2$, on déduit que $1 = x^2 - a^2 = (x-a)(x+a)$. Chacun des facteurs $x-a$ et $x+a$ sont donc des diviseurs de 1, et sont strictement positifs, donc ils sont égaux à 1. Ainsi, $x-a = x+a = 1$, donc $a=0$, ce qui contredit les hypothèses. Ainsi, a^2+1 et b^2+1 ne sont pas des carrés parfaits, donc ils ne sont pas premiers entre eux (d'après l'exerice 14).

On note $d = \text{PGCD}(a^2+1, b^2+1)$ et p un diviseur premier de d (qui existe d'après le paragraphe précédent). Alors p divise également $b^2+1-(a^2+1) = b^2-a^2 = (b-a)(a+b)$. D'après le lemme d'Euclide, p divise $a-b$ ou $a+b$. Si $p \mid a-b$, alors p divise également $ab+1$ car p divise le nombre $(a-b)^2+(ab+1)^2$. Ceci contredit l'hypothèse que $\text{PGCD}(a-b, ab+1) = 1$. Si $p \mid a+b$, alors p divise également $ab-1$ car p divise le nombre $(a+b)^2+(ab-1)^2$. Ceci contredit l'hypothèse que $\text{PGCD}(a+b, ab-1) = 1$. On a une contradiction dans tous les cas, ce qui conclut l'exercice.

4 Combinatoire : Invariants et coloriages (Lucile)

Ce cours correspond au cours éponyme donné par Quentin Hurez et moi même (Lucile) en 2024, disponible ici

Exercices

Invariants

Un invariant est une quantité (qui peut être un nombre entier, un nombre réel,un nombre modulo n, un ensemble de nombre, une suite de nombres....) qui reste inchangée pendant les différentes étapes d'un processus. Cela permet de déterminer qu'une configuration n'est pas accessible à partir d'une autre.

Exercice 1
On écrit les nombres $2, 3, 5, 7, 11$ sur un tableau. En une opération, on peut remplacer deux nombres de même parité par deux copies de leur moyenne arithmétique, si celle-ci est entière (c'est-à-dire qu'on remplace x, y par $\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}$). Peut-on obtenir 5 nombres égaux après un certain nombre d'opérations ?

Exercice 2
Peut-on répartir les nombres $1, 2, \ldots, 33$ en 11 groupes de 3 tels que dans chaque groupe, un des trois nombres soit la somme des deux autres ?

Exercice 3
Les entiers de 1 à 2024 sont écrits au tableau. À chaque étape, on en choisit deux qu'on efface et remplace par leur différence. Peut-on se débrouiller pour finir avec un seul nombre égal à 1 à la fin ?

Exercice 4
On vous donne 20 cartes, chacune contenant exactement un chiffre. Chaque chiffre apparaît sur exactement deux cartes. Est-il possible de réarranger les cartes de telle manière à ce que pour chaque chiffre i, il y a exactement i cartes entre les deux cartes qui contiennent i ?

Exercice 5
Sur une île déserte vivent 2024 caméléons. Au départ, 924 sont jaunes, 700 sont rouges et 400 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleur différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, il ne se passe rien. Au bout d'un an, tous les caméléons sur l'île sont devenus de la même couleur. Laquelle ?

Coloriages et pavages

Un certain nombre de problèmes de combinatoire sont des problèmes de "pavage". Dans un tel problème, l'objectif est de recouvrir une forme avec des tuiles de types donnés. Dans ce genre de problème on peut mieux comprendre la situation en utilisant un coloriage, ce qui permet de regrouper les cases en groupes de tailles pas forcément égales mais qui ont toutes

les mêmes caractéristiques (ex : dans un échiquier une case noire est toujours entourée de cases blanches)

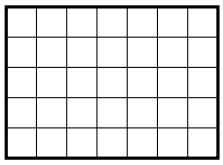
On peut ensuite analyser les tuiles pour savoir quelles couleurs elles peuvent ou sont obligées de recouvrir...

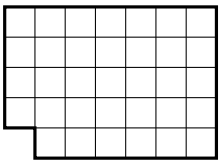
Exercice 6

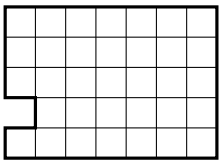
1. Peut-on recouvrir un échiquier 8×8 avec des dominos 2×1 ?
2. On retire un coin d'un échiquer 8×8. Peut-on le recouvrir avec des dominos 2×1 ?
3. On retire deux coins opposés d'un échiquier 8×8. Peut-on le recouvrir avec des dominos 2×1 ?

Exercice 7

Peut-on paver les plateaux tronqués suivants à l'aide de dominos 2×1 que l'on peut placer verticalement ou horizontalement ?

Plateau n°1 : 

Plateau n°2 : 

Plateau n°3 : 

Domino :

Exercice 8

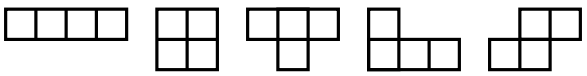
On se place sur un échiquier 8×8 (donc composé alternativement de cases noires et blanches). On peut changer de couleur :

1. toutes les cases d'une ligne ou d'une colonne
2. les cases d'un carré 2×2

Est-il possible d'obtenir un diagramme comportant une seule case noire ?

Exercice 9

Est-il possible de former un rectangle à l'aide des cinq tétraminos suivants ?

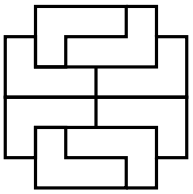


Exercice 10

Montrer qu'un échiquier 10×10 ne peut pas être recouvert à l'aide de 25 tétraminos en T

Exercice 11

Considérons un échiquier $n \times n$ dont on aurait retiré les quatre coins.Pour quelles valeurs de n peut-on le recouvrir avec des tétraminos en L comme dans la figure ci dessous



Exercice 12
Sur chaque case du carré 9×9 se trouve un lézard. À un certain signal tous les lézards se déplacent d'une case en diagonale vers une autre case du carré. Certaines cases peuvent être occupées par plusieurs lézards et certaines autres peuvent être vides. Trouver le nombre minimum de cases vides.

Exercice 13
Considérons un échiquier 5×5. On écrit -1 sur l'une de ses cases et $+1$ sur toutes les autres. A chaque étape, on peut changer les signes de tous les nombres d'un sous-carré $a \times a$ ($a > 1$), le but étant d'obtenir un $+1$ sur toutes les cases de l'échiquier. Quelles positions initiales du -1 permettent d'arriver à la solution ?

Exercice 14
Montrer qu'un rectangle $a \times b$ peut être recouvert par des rectangles $1 \times n$ si et seulement si n divise a ou b.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On cherche ici une quantité qui ne varie pas. On remarque alors que la somme de tous les nombres écrits au tableau est un invariant. En effet, $x+y = \frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}$. Au début, la somme vaut $S = 2+3+5+7+11 = 28$. Supposons qu'après un certain nombre d'étapes, on se retrouve avec cinq nombres entiers égaux, on appelle a ce nombre. On aurait alors $28 = S = 5a$, soit $a = \frac{28}{5}$ qui n'est pas entier, contradiction.
On en déduit qu'il est impossible de se retrouver avec cinq nombre égaux.

Solution de l'exercice 2
On remarque ici que dans chaque groupe de 3, la somme des nombres est paire. En effet, si trois nombres x, y, z forment un groupe avec $z = x+y$, alors $x+y+z = 2(x+y)$. Ainsi, la somme de tous les nombres est paire aussi (on ajoute des termes qui sont tous pairs). Or la somme des nombres vaut $1+2+3+\ldots+32+33 = \frac{33\times 34}{2} = 33\times 17$, ce qui est impair. Ce n'est donc pas possible de les répartir en groupes comme souhaité.

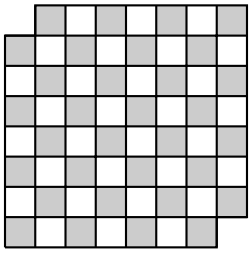
Solution de l'exercice 3
Considérons S la somme de tous les entiers écrits au tableau. Lorsqu'on choisit deux nombres $a \leq b$ pour les remplacer par $b-a$, la somme devient $S-a-b+(b-a) = S-2a$. La somme n'est donc pas un invariant. En revanche, on retire à S un nombre *pair*, donc la *parité* de la somme est un invariant.
Au début, la somme vaut $S = 1+2+3+\ldots+2024 = \frac{2024\times 2025}{2} = 1012\times 2025$ qui est pair. La somme finale doit donc être paire également. On ne peut donc pas se retrouver avec un seul nombre égal à 1 à la fin (cela donnerait lieu à une somme finale impaire).

Solution de l'exercice 4
Soit p_k la position du premier chiffre k (entre 1 et 20). On sait que les deux chiffres k sont en position p_k et p_k+k+1. La somme des positions vaut donc $1+2+\ldots+20 = \frac{20\times 21}{2} = 210$, mais elle vaut également $[p_0+(p_0+0+1)]+[p_1+(p_1+1+1)]+[p_2+(p_2+2+1)]+\ldots+[p_9+(p_9+9+1)]$, ce qui vaut $10+(0+1+\ldots+9)+2(p_0+p_1+\ldots+p_9)$, d'où $210 = 10+45+2(p_0+p_1+\ldots+p_9)$, mais alors $2(p_0+p_1+\ldots+p_9) = 155$, et on a une contradiction sur la parité. Ce n'est donc pas possible de réarranger les cartes de cette manière.

Solution de l'exercice 5
Soient J, R, V le nombre de caméléons jaunes, rouges, verts respectivement. Lorsque deux caméléons de couleur différente se rencontrent, disons jaune et vert, J prend la valeur $J-1$, V la valeur $V-1$ et R la valeur $R+2$. En particulier, $J-R, R-V$ et $V-J$ varient de 0 ou ± 3, donc *modulo* 3 ils ne varient pas.
Or au début, $J-R = 924-700 = 224 \equiv 2 \pmod 3$, $R-V = 700-400 = 300 \equiv 0 \pmod 3$ et $V-J = 400-924 = -524 \equiv 1 \pmod 3$. La seule possibilité pour que deux nombres soient égaux à 0 est que $R = V = 0$. Donc la couleur restante est nécessairement jaune.
Remarquons qu'on n'a pas prouvé qu'il était possible que tous les caméléons deviennent jaune, mais on a prouvé que s'ils deviennent tous d'une couleur, c'est nécessairement jaune.

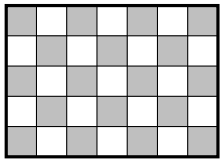
Solution de l'exercice 6

1. Oui, on peut, il suffit de les poser tous horizontalement par exemple.
2. On ne peut plus car il y a un nombre impair de cases et que chaque domino couvre deux cases.
3. On a retiré 2 cases de la même couleur, blanche par exemple, il y a alors 30 cases blanches et 32 cases noires, or un domino recouvre exactement une case blanche et une case noire donc ça n'est pas possible.

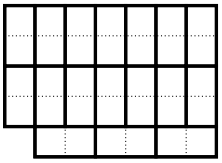


Solution de l'exercice 7
Le plateau n°1 comporte $7 \times 5 = 35$ cases, or un domino comporte $1 \times 2 = 2$ cases. Il faudrait $\frac{35}{2} = 17.5$ dominos pour le pavé, ce qui n'est pas possible.
Le plateau n°2 est pavable, comme le montre le dessin ci-dessous.
Quant au plateau n°3, en adoptant un coloriage de type échiquer, on dénombre 18 cases noires contre 16 cases blanches. Comme il a 34 cases, il faudrait $\frac{34}{2} = 17$ dominos pour le paver. Mais un domino couvrant nécessairement une case blanche et une case noire, si le pavage était possible on aurait 17 cases noires et 17 cases blanches, ce qui n'est pas le cas ici. Il est donc impossible de paver le plateau n°3 avec les dominos.

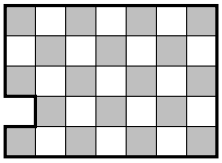
Plateau n° 1 :



Plateau n° 2 :

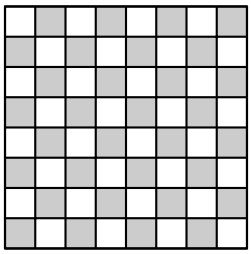


Plateau n° 3 :

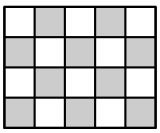


Domino :

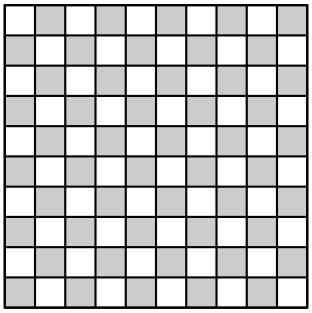
Solution de l'exercice 8
On remarque ici un invariant, la parité du nombre de cases noires.
En effet quand on change la couleur de toutes les cases d'une ligne ou d'une colonne, puisque l'on change la couleur d'un nombre pair de cases, la parité du nombre de cases noires ne change pas.
Cela fonctionne également pour les cases d'un carré 2×2. Au début, on a un nombre pair de cases noires, il doit donc en rester un nombre pair à la fin, il est donc impossible qu'il ne reste qu'une seule case noire.



Solution de l'exercice 9
Si on colorie le plan comme un échiquier, alors tous les tétraminos sauf celui en T, recouvrent 2 cases blanches et 2 cases noires, alors que celui en T recouvre une case noire et trois cases blanches (ou l'inverse). Si on pouvait former un rectangle, il aurait $4 \times 5 = 20$ cases, or dans un rectangle de 20 cases il y a autant de cases noires que de blanches, ce qui n'est pas possible avec la présence du tétramino en T.

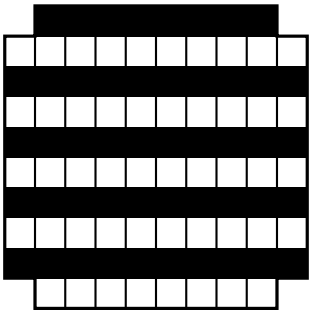


Solution de l'exercice 10
Dans un échiquier $10 \times 10 = 25 \times 4$, il faudrait 25 tétraminos de 4 cases pour recouvrir l'échiquier. Or un tétramino en T recouvre un nombre impair de cases blanches et nombre impair de cases noirs. Donc 25 tétraminos recouvrent un nombre impair de cases blanches et nombre impair de cases noires, ce qui ne marche pas sur un échiquier 10×10.

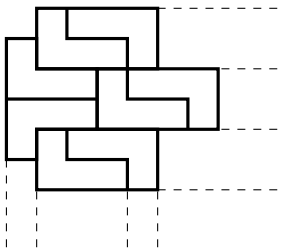


Solution de l'exercice 11
On commence par remarquer que $n^2 - 4$ doit être multiple de 4, donc n est pair.

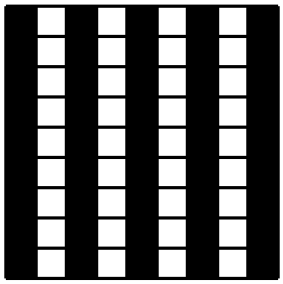
On colorie l'échiquier comme ci-dessous.



Chaque tétramino recouvre soit 3 cases blanches et une case noire, soit 3 cases noires et une case blanche. Comme il y a le même nombre de cases blanches et de cases noires, il faut utiliser un nombre pair de tétraminos pour tout paver. Autrement dit $n^2 - 4$ doit être multiple de 8. Donc n doit être de la forme $4k + 2$, et on peut trouver des configurations qui marche comme celle ci-dessous

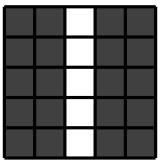


Solution de l'exercice 12
On colorie une colonne sur 2 en noir et l'autre en blanc, comme ci-dessous.



Après le signal, tous les lézards se trouvent sur une case de couleur différente. Il y a 9 cases noires de plus que de cases blanches, donc il y a au minimum 9 cases vides après le signal. On vérifie ensuite que de telles solutions existent.

Solution de l'exercice 13
On colorie l'échiquier comme ci-dessous



Dans ce coloriage, chaque sous-carré contient un nombre pair de cases noires. Donc si -1 est sur une case noire, il y aura toujours un nombre impair de -1 sur les cases noires.En opérant une rotation de 90 degrés du diagramme, on constate qu'il est nécessaire que le -1 soit sur la case centrale. Réciproquement, on vérifie qu'un tel coloriage fonctionne, en faisant successivement les coins bas gauche et haut droit en 2×2, puis les coins haut gauche et bas droit en 3×3 (de sorte à obtenir -1 partout), et finalement un 5×5 pour obtenir des $+1$ partout.

Solution de l'exercice 14

— Si n divise a ou b, alors c'est évident qu'un tel recouvrement est possible. On suppose alors que n ne divise ni a, ni b

— On utilise n couleurs de sorte qu'un rectangle $1 \times n$ recouvre n couleurs différentes à chaque fois. On numérote les couleurs de 1 à n, et on compte le nombre de case coloriées dans le grand rectangle

— On effectue la division euclidienne de a et b par n. On a $a = k \cdot n + r$ et $b = l \cdot n + q$

— On sait qu'il y a autant de cases de chaques couleurs sur les rectangles $b \times (n \cdot k)$ et $r \times (l \cdot n)$ donc pour que $a \times b$ soit recouvrables pour des rectangles $1 \times n$, Il faut que ça soit le cas pour le rectangle $r \times q$ or on a le coloriage suivant (avec le rectangle $r \times q$ représenté en blanc).

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

Supposons que le rectangle $r \times q$ fois a autant de cases de chaque couleur : il doit donc en avoir $\frac{rq}{n}$. Mais la couleur 1 est représentée $\min(r, q)$ fois. Donc $\min(r, q) = \frac{rq}{n}$. Si par l'absurde $r, q > 0$, disons $r \leq q$, alors $n = q$, contradiction. Donc soit r soit q est nul, ce qui signifie bien que n divise a ou b.

5 Combinatoire : Principe de l'extremum (Félix)

Si on a un ensemble d'objets sur lequel on veut prouver une propriété, il est souvent instructif de considérer le plus petit ou le plus grand élément.

Théorème 1.
Tout ensemble non-vide fini de réels admet un minimum et un maximum.

Théorème 2.
Tout sous-ensemble non-vide d'entiers naturels admet un minimum.

On utilise en général ces théorèmes dans le sens inverse, c'est à dire qu'on prouve la non-existence d'un maximum ou d'un minimum, afin de conclure qu'un ensemble est vide ou infini.

Exemples

— Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers.
— Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercices

Exercice 1
Soit S un ensemble de points tel que tout point de S est le milieu de deux autres points de S. Montrer que S admet une infinité de points.

Exercice 2
A chaque point à coordonnées entières du plan, on attribue un nombre entier strictement positif, tel que chaque nombre est égal à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins (en haut, en bas, à gauche et à droite). Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 3
Soit $2n$ points du plan, dont 3 ne sont jamais alignés. Montrer qu'on peut toujours les relier par paires sans que les segments produits ne s'intersectent.

Exercice 4
Soit n points rouges et n points bleus dans le plan, dont 3 ne sont jamais alignés. Montrer qu'on peut toujours les relier par paires rouge-bleu sans que les segments produits ne s'intersectent.

Exercice 5
Soient 6 cercles passant par un même point. Montrer que le centre d'un des cercles est contenu dans (ou sur) un des autres cercles.

Exercice 6
On écrit les entiers de 1 à 64 sur les cases d'un échiquier. Montrer qu'il existe deux cases voisines (par un côté ou par un coin) avec une différence au moins égale à 9.

Exercice 7
Une pizzeria utilise divers ingrédients pour produire les garnitures de ses pizzas. Aucun ingrédient n'est utilisé dans chaque pizza, et chaque pizza contient au moins un ingrédient. Montrer qu'il existe deux pizzas p et p' et deux ingrédients i et i' tels que p contient i mais pas i' et p' contient i' mais pas i.

Exercice 8
Soit n points du plan. On suppose que chaque triplet de points forme un triangle d'aire $A \leqslant 1$. Montrer que tous les points sont compris dans un triangle d'aire $A \leqslant 4$.

Exercice 9
On considère un ensemble fini de points S tel que toute droite passant par deux points de S passe aussi par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.

Exercice 10
On a $n \geqslant 3$ points dans le plan pas tous alignés. Montrer qu'il en existe 3 dont le cercle circonscrit ne contient (strictement) aucun des autres points.

Exercice 11
Soit $n > 0$ un entier. Chacune des n personnes d'un groupe est la seule à connaître un potin. Pour partager leurs informations, elles se téléphonent deux à deux, mais à chaque fois, seule l'une parle et l'autre ne fait qu'écouter toutes les informations que l'autre lui transmet. Déterminer le nombre minimal de coups de téléphone suffisant pour que chacune des personnes connaisse tous les potins.

6 Arithmétique : Modulos (Matteo et Rémi)

Cours

Ce cours introduit le concept de congruence. Il reprend principalement le cours de l'an dernier par Arthur D et Henry, lui-même inspiré des idées du polycopié introductif de la POFM accessible sur ce lien. Nous introduisons les modulos, ainsi que les principales opérations associées. Nous étudions ensuite la valeur d'un carré modulo certaines valeurs, et utilisons ce concept à travers des exercices.

Congruence et Opérations

Exemple 1.
Introduction de la notion avec les exemples d'une horloge modulo 12 et d'un rubik's cube modulo 4.

Définition 2.
Soit n un entier non nul. On dit de deux entiers relatifs a et b qu'ils sont **congrus modulo** n si

$$n \mid (a-b).$$

Dans ce cas on écrit $a \equiv b\ [n]$. (se lit "a est congru à b modulo n")

Proposition 3.
Soit n un entier non nul, et a et b des entiers.
a est congru à b modulo n si et seulement si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n.

Démonstration. Puisqu'on doit montrer une équivalence ("si et seulement si") on doit faire la preuve de chacune des implications.

— (Sens $\Leftarrow$) On suppose que a et b ont le même reste r dans la divison euclidienne par n. Ainsi il existe q et q' (pas forcément égaux !) tels que

$$a = qn + r \quad \text{et} \quad b = q'n + r.$$

On veut montrer que n divise $a - b$:

$$a - b = qn + r - q'n - r = n(q - q').$$

Donc a et b sont congrus entre eux modulo n. $a \equiv b\ [n]$.

— (Sens $\Rightarrow$) : On suppose que $a \equiv b\ [n]$, c'est à dire $n \mid a - b$.
On veut montrer que a et b ont le même reste dans la divison euclidienne par n. Ecrivons déjà ces divisions :

$$a = qn + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < n,$$

$$b = q'n + r' \quad \text{et} \quad 0 \leq r' < n.$$

Comme n divise $a - b$ alors $n \mid n(q - q') + (r - r')$ donc $n \mid r - r'$.
Or

$$0 \leq r < n,$$

$$-n < -r' \leq 0.$$

Donc

$$-n < r - r' < n.$$

Et le seul multiple de n strictement compris entre $-n$ et n est 0. Donc $r - r' = 0$ c'est à dire que les restes sont égaux.

□

Remarque 4.
La première définition où $n \mid a - b$ est peut être moins intuitive que celle avec les restes, mais elle est beaucoup plus facile à utiliser dans les preuves, ce que nous allons voir tout de suite.

Proposition 5.
Soit n un entier non nul, et a,b et c des entiers

1. $a \equiv a\ [n]$.
2. Si $a \equiv b\ [n]$, alors $b \equiv a\ [n]$.
3. Si $a \equiv b\ [n]$ et $b \equiv c\ [n]$, alors $a \equiv c\ [n]$.

Démonstration. Éléments de preuves :

1. Car $n \mid a - a = 0$.
2. Si $n \mid a - b$ alors $n \mid b - a$.
3. Si $n \mid a - b$ et $n \mid b - c$ alors $n \mid a - b + b - c = a - c$.

□

Proposition 6 (Opérations)**.**
Soit n un entier non nul, et a,a', b et b' des entiers. Supposons $a \equiv a'\ [n]$ et $b \equiv b'\ [n]$

1. (Somme) : $a + b \equiv a' + b'\ [n]$
2. (Différence) : $a - b \equiv a' - b'\ [n]$
3. (Produit) : Si $ab \equiv a'b'\ [n]$
4. (Puissance) : Pour k un entier naturel, on a $a^k \equiv a'^k\ [n]$

Démonstration. On suppose que $n \mid a - a'$ et que $n \mid b - b'$

1. Par somme de multiples n divise $a - a' + b - b' = a + b - (a' + b')$. Donc $a + b \equiv a' + b'\ [n]$.
2. Même chose avec la différences de deux multiples
3. Cette preuve nécéssite une astuce souvent utile, qui consiste à ajouter le terme que l'on veut pour le retirer ensuite :

   $$a'b' - ab = a'b' - ab' + ab' - ab = (a' - a)b' + (b' - b)a$$

   On a une combinaison linéaire de multiples de n, c'est donc un mutiple de n.
4. Il suffit d'iterer la proposition 6.3 par récurrence.

□

Exemple 7.
Attention : **On ne peut pas toujours diviser dans les modulos!!!**
Par exemple $2 \times 4 \equiv 2 \times 1\ [6]$ pourtant $4 \not\equiv 1\ [6]$.

Exercices

Exercice 1
Pour chacune des équations suivantes, calculer le plus petit entier positif la satisfaisant :

1) $x \equiv 5\ [3]$
2) $x \equiv 103\ [10]$
3) $x \equiv -10\ [9]$
4) $x \equiv 302 \times (8+30)\ [3]$
5) $x \equiv 13 \times 218 [6]$
6) $x \equiv 2026\ [7]$
7) $x \equiv 2026^{2026}\ [7]$

Exercice 2
Montrer les divisibilités suivantes pour n un entier naturel :
$3 \mid n^3 - n$ $\quad$ $8 \mid n^3(n^6-1)$ $\quad$ $5 \mid 9^{n+2} - 4^n$

Exercice 3
Montrer que $n-1$ divise $n^2 + 4n^{n+2} - 7n + 2n^{2025}$.

Exercice 4
Montrer que la somme de 3 cubes consécutifs est toujours divisible par 9.

Exercice 5
Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 10^{100} + 3$?

Exercice 6
Montrer que l'équation $16x^2 + 3y^2 = 2025$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 7
Montrer que l'équation $x^2 + 15y^2 = 2028$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 8
Montrer que l'équation $x^2 + 14y^2 = 2027$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 9
Trouver tous les triplets (x, y, z) d'entiers positifs tels que $x^2 + y^2 = 3z^2$.

Exercice 10
Soient a, b, c des entiers strictement positifs tel que $a^2 + b^2 = c^2$. Démontrer que $60|abc$.

Exercice 11
Trouver tous les quadruplets (x, y, z, n) d'entiers naturels tels que $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2^n$.

Exercice 12
Trouver tous les triplets (x, y, z) d'entiers positifs tels que $x^3 + y^3 - 53 = 7^z$.

Exercice 13
Trouver tous les couples (x, y) d'entiers positifs tels que $x^2 + 2^y = 2026$.

Exercice 14
Trouver tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que $6^a = 1 + 2^b + 3^c$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Pour trouver le plus entier vérifiant l'équation, il faut et il suffit, de calculer le reste de la division euclidienne, ou encore le résidu compris entre 0 et $n-1$ avec n le modulo considéré.

1. $x \equiv 5 \equiv 2\ [3]$
2. $x \equiv 103 \equiv 3\ [10]$
3. $x \equiv -10 \equiv 8\ [9]$
4. $x \equiv 302 \times (8+30) \equiv 2 \times (2+0) \equiv 4 \equiv 1\ [3]$
5. $x \equiv 13 \times 218 \equiv 1 \times 2 \equiv 2[6]$
6. $x \equiv 2026 \equiv 2026 - 2100 \equiv -74 \equiv -74 + 70 \equiv -4 \equiv 3\ [7]$
7. $x \equiv 2026^{2026} \equiv 3^{2026} \equiv 3^{2022} \times 3^4 \equiv (3^6)^{337} \times 4 \equiv 1^{337} \times 4 \equiv 1 \times 4 \equiv 4\ [7]$

La dernière ligne vient du fait que $3^2 \equiv 2[7]$, donc $3^4 \equiv 2 \times 2 \equiv 4[7]$ et $3^6 \equiv 4 \times 2 \equiv 8 \equiv 1[7]$.

Solution de l'exercice 2

1. On regarde modulo 3, on voit en testant les trois valeurs $\{0, 1, 2\}$ que $n^3 \equiv n \pmod 3$.
2. L'exercice nous invite à considérer l'expression $n^3(n^6-1)$ modulo 8.
   Etant donné que notre expression est une factorisation de deux fonctions simples (n^3 et n^6-1) on a envie de faire un tableau modulo 8.
   Pour se simplifier la tâche on remarque tout de même que si n est pair alors n^3 est le produit de 3 nombres pairs et est donc divisible par $2^3 = 8$. On fait alors un tableau seulement pour les valeurs impairs modulo 8.

n	1	3	5	7
$n^3 \pmod 8$	1	3	5	7
$n^6 - 1 \pmod 8$	0	0	0	0
$n^3(n^6-1) \pmod 8$	0	0	0	0

   On remarque finalement bien que pour chaque valeur modulo 8 le produit considéré est congru à 0 ce qui conclut.
3. En regardant modulo 5 on peut remarquer que $9 \equiv -1 \pmod 5$ et $4 \equiv -1 \pmod 5$. Ainsi, $9^{n+2} - 4^n \equiv (-1)^{n+2} - (-1)^n \equiv (-1)^n - (-1)^n \equiv 0 \pmod 5$. D'où la conclusion.

Solution de l'exercice 3
La divisibilité souhaitée nous invite à regarder modulo $n-1$ et à montrer que la quantité est congrue à 0.
De plus, le modulo $n-1$ possède une propriété très intéressante : $n \equiv 1 \pmod{n-1}$
On peut donc remplacer tous les n par des 1 modulo $n-1$.

$$\begin{aligned} n^2 + 4n^{n+2} - 7n + 2n^{2025} &\equiv 1^2 + 4 \times 1^{4n+2} - 7 \times 1 + 2 \times 1^{2025} \\ &\equiv 1 + 4 - 7 + 2 \equiv 0 \pmod{n-1}. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4
On remarque que les cubes modulo 9 sont congrus à $0, 1, -1$ dans cet ordre. En effet,

$$\begin{aligned}
0^3 &\equiv 0 \pmod 9\\
1^3 &\equiv 1 \pmod 9\\
2^3 &\equiv 8 \equiv -1 \pmod 9\\
3^3 &\equiv 0 \pmod 9\\
4^3 &\equiv 1 \pmod 9\\
5^3 &\equiv -1 \pmod 9\\
6^3 &\equiv 0 \pmod 9\\
7^3 &\equiv 1 \pmod 9\\
8^3 &\equiv -1 \pmod 9,
\end{aligned}$$

et ainsi de suite. Ainsi quels que soient trois cubes consécutifs, on englobe exactement un de chaque reste parmi $\{-1, 0, 1\}$, dont la somme vaut bien 0.

Solution de l'exercice 5
Un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4. En effet, on peut vérifier que $0^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4$ et $1^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod 4$.
Ainsi $a^2 + b^2 \equiv 0, 1$ ou $2 \pmod 4$, mais $10^{100} + 3 \equiv 3 \pmod 4$. L'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 6
Un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4. En effet, on peut vérifier que $0^2 \equiv 2^2 \equiv 0 \pmod 4$ et $1^2 \equiv 3^2 \equiv 1 \pmod 4$.
Ainsi $16x^2 + 3y^2 \equiv -y^2 \equiv 0$ ou $-1 \pmod 4$, mais $2025 \equiv 1 \pmod 4$. L'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 7
La présence d'un coefficient 15 devant une des variables nous donne envie de considérer l'équation modulo un entier divisant 15.
En regardant modulo 3, on trouve seulement que $x \equiv 0 \pmod 3$ mais cela ne constitue pas une absurdité en soit.
On pense donc à regarder notre équation modulo 5 qui est également un diviseur de 15.
En faisant cela on a alors, $x^2 \equiv 3 \pmod 5$ mais en regardant les différents carrés modulo 5 on trouve que ceux-ci sont $0, 1$ et -1. Cela est donc une absurdité.

Solution de l'exercice 8
En considérant l'équation modulo 8 on trouve que $2027 \equiv 3 \pmod 8$.
Ainsi, $x^2 - 2y^2 \equiv x^2 + 14y^2 \equiv 3 \pmod 8$.
On en déduit donc que x est impair car sinon $x^2 - 2y^2$ serait pair contrairement à 3 et 8 ne pourrait alors pas diviser $x^2 - 2y^2 - 3$.
Par chance, modulo 8, tous les carrés impairs valent 1. En effet, on peut calculer que $1^2 \equiv 3^2 \equiv 5^2 \equiv 7^2 \equiv 1 \pmod 8$.
On en déduit $x^2 - 2y^2 \equiv 1 - 2y^2 \pmod 8$ et donc $3 \equiv 1 - 2y^2$. Cela est alors équivalent à $y^2 \equiv -1 \pmod 8$ qui est impossible car on vient de voit que les seuls carrés impairs étaient congru à 1 modulo 8!

Solution de l'exercice 9
Cet exercice introduit le principe de *descente infinie*. Soit (x_0, y_0, z_0) un solution non-nulle qui

minimise la valeur de $|x_0|$. Alors modulo 4, la seule solution possible est d'avoir $x_0^2 \equiv y_0^2 \equiv z_0^2 \equiv 0 \pmod 4$. Celà implique que les trois variables sont paires. Ainsi on peut définir les entiers $x_1 = x_0/2$, $y_1 = y_0/2$, $z_1 = z_0/2$. On remarque alors que

$$x_1^2 + y_1^2 = 3z_1^2,$$

donc (x_1, y_1, z_1) est aussi une solution non-nulle de l'équation, mais avec $|x_1| = |x_0|/2 < |x_0|$. Cela contredit la minimalité de $|x_0|$. Il n'y a donc pas de solutions non-nulles. Cependant, $(0, 0, 0)$ est clairement solution.

Solution de l'exercice 10
Étant donné que $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$, l'exercice nous invite à considérer successivement l'équation modulo $3, 4$ et 5.
Modulo 3 les carrés sont 0 et 1. Si les trois variables sont non divisibles par 3 on a alors $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 3$ ce qui implique $2 \equiv a^2 + b^2 = c^2 \equiv 1 \pmod 3$ qui est absurde.
De même, modulo 5 les carrés sont 0, 1 et -1. Si les trois variables sont non divisibles par 5 on a alors $a^2 + b^2 = c^2 \pmod 5$ qui est impossible avec chaque variable valant 1 ou -1.
Finalement, au lieu de regarder l'équation modulo 4 où on apprendra seulement qu'un terme est pair on va regarder l'équation modulo 8. Si les trois variables sont pairs on a $8 \mid abc$.
Si seulement deux variables ou zéro sont pairs alors en regardant l'équation modulo 2 on tombe sur une absurdité $0 \equiv 1 \pmod 2$ car chaque carré vaut 0 ou 1 mod 2 selon sa parité.
Il reste alors à traiter le cas où exactement un terme pair. On souhaite alors montrer que ce terme est même multiple de 4.
Si tous les termes sont pairs ou non divisibles par 4 les carrés modulo 8 sont alors $1, 4$ on se rend encore une fois compte que l'équation $a^2 + b^2 \equiv c^2$ est alors impossible à satisfaire.

On a ainsi montré qu'un des termes est multiple de 3, un de 5 et que le produit est toujours divisible par 4 !
On en conclut donc que $60 \mid abc$.

Solution de l'exercice 11
Ici on regarde modulo 8. Si $n \geq 3$, alors $2^n \equiv 0 \pmod 8$. Or un carré vaut $0, 1$ ou 4 modulo 8, ainsi on peut se convaincre que l'expression $x^2 + y^2 + z^2 + 1$ ne sera jamais divisible par 8. Les seules solutions possibles sont donc pour $n = 0, 1, 2$. On trouve les solutions $(0, 0, 0, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$,$(0, 1, 0, 1)$,$(0, 0, 1, 1)$, ainsi que $(1, 1, 1, 2)$.

Solution de l'exercice 12
Soit (x, y, z) une éventuelle solution. On regarde modulo 7. Si $z \geq 1$ on a $x^3+y^3+3 \equiv \pmod 7$. Or, les cubes modulo 7 valent $0, 1$ ou -1. Ainsi, $x^3 + y^3$ peut être congru à $-2, -1, 0, 1, 2$ mais ne peut être congru à $-3 \equiv 4[7]$. Il nous reste donc le cas $z = 0$. Si $x \geq 4$ on a $x^3 + y^3 \geq x^3 \geq 64 > 54$. Il nous reste à traiter les cas $x = 0, 1, 2, 3$, pour lesquels on obtient $y^3 = 54, 53, 46, 27$. Le seul cube étant 27, on a que seul $x = 3$ est solution ce qui nous donne la solution $(3, 3, 0)$.

Solution de l'exercice 13
Regardons dans un premier temps le cas $y \geq 1$.
En considérant l'équation modulo 2, on remarque que x est pair. Ainsi, $x^2 \equiv 0[4]$. De plus, $2026 \equiv 2[4]$, donc on doit avoir $2^y \equiv 2[4]$. Or si $y \geq 2$, $4 \mid 2^y$. Ainsi, si $y \geq 1$ on doit également avoir $y \leq 1$ c'est à dire $y = 1$. En remplaçant cela dans l'énoncé on trouve $x^2 + 2 = 2026$, soit $x^2 = 2024$, ce qui donne pas de solution.
Il nous reste dès lors le cas $y = 0$ qui conduit bien à la solution $(x, y) = (45, 0)$.

Solution de l'exercice 14
On regarde l'équation modulo 8. Si $a > 2$ et $b > 2$, alors $6^a \equiv 0[8]$ et $2^b \equiv 0[8]$. On doit donc avoir $1 + 3^c \equiv 0[8]$. Mais un tableau de congruence modulo 8 montre que $3^c \equiv 1$ ou $3[8]$. Ainsi, il n'y a pas de solutions dans ce cas. On en déduit que $a \leq 2$ ou $b \leq 2$, et on traite donc les différents cas :

Si $a = 1$, on a $6 = 1 + 2^b + 3^c$, donc $c = 1$ (sinon $3^c > 6$), et on trouve la solution $(1, 1, 1)$.

Si $a = 2$, on a $36 = 1 + 2^b + 3^c$, donc $c \leq 3$ (sinon $3^c > 36$). Une étude exhaustive donne les solutions $(2, 5, 1)$ et $(2, 3, 3)$.

Si $b = 2$, on a $6^a = 5 + 3^c$. Ceci est clairement impossible, car 6^a et 3^c sont multiples de 3, mais pas 5. Il n'y a donc pas de solutions dans ce cas.

Si $b = 1$, l'équation devient $6^a = 3 + 3^c$. On peut supposer que $a > 2$ grâce aux cas précédents. On regarde alors modulo 9. Comme $a > 2$, $6^a \equiv 0[9]$, donc on doit avoir $3^c \equiv -3 \equiv 6[9]$. Mais si $c = 1$, alors $3^c \equiv 3[9]$, et si $c \geq 2$, alors $3^c \equiv 0[9]$. Il n'y a donc pas non plus de solutions dans ce cas.

Finalement, les seules solutions sont celles trouvées dans le cas $a \leqslant 2$, à savoir $(1, 1, 1)$, $(2, 5, 1)$ et $(2, 3, 3)$.

7 Arithmétique : Équations diophantiennes (David)

Le cours et les exercices suivants sont largement tirés du cours d'Amélie du stage de Valbonne 2024 et du cours d'Akin du stage de Valbonne 2025.

Rappels

Proposition 1.
Pour tous a, b réels, $n \geqslant 1$ entiers, on a l'identité :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

De plus, si n est impair , on a également :

$$a^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Remarque 2.
La dernière identité est fausse si n est pair, il faut y faire attention.

Remarque 3.
On retiendra et utilisera souvent le cas particulier de $n = 2$ et $n = 3$, notamment dans le cas où $b = 1$.

— $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
— $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
— $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$

Définition 4.
Une équation diophantienne est une équation dont les inconnus sont des entiers.

Exemple 5.
Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $a + b = 2$

Exemple 6.
Résoudre dans $\mathbb{N}$: $a^n + b^n = c^n$

Pour la culture, cette dernière équation est l'objet du théorème d'Andrew-Wiles démontré trois siècles après avoir été énoncé. C'est donc une équation plutôt difficile.
En maths olympiques, toute équation diophantienne proposée sera de difficulté raisonnable. Des réflexes sont cependant à acquérir :

— Quelles sont les solutions, s'il y en a ? S'il y en a un nombre fini, peut-on les exhiber ? S'il y en a un nombre infini, comment les décrire simplement ?
— Comment simplifier le plus l'équation ?
— Quels modulos pour obtenir des informations ?
— Quels arguments de divisibilité (d'arithmétique plus généralement) semblent pertinents ?

On voit ici les différents réflexes à adopter pour résoudre ce genre d'équations : lemme de Gauss, modulo $3, 4, 8$, puissance d'un nombre premier…
Il ne faut pas oublier de vérifier ses solutions.

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 = 5 + 4y^2$.

Exercice 2
Trouver tous les entiers naturels a, b tels que $2^a + 1 = b^2$.

Exercice 3
Trouvers tous les entiers naturels m, n tels que $m^2 = 3^n + 16$.

Exercice 4
Trouver tous les entiers naturels x, y tels que $2^x = y^2 + y + 1$.

Exercice 5
Trouver tous les premiers p, q, r tels que $p + q^2 = r^4$.

Exercice 6
Pour quels entiers n existe-t-il a et b entiers tels que $n + a^2 = b^2$?

Exercice 7
Trouver tous les entiers naturels x, y tels que $2^x - 1 = 3^y$.

Exercice 8
Trouver tous les entiers naturels m et premiers p tels que $m^3 = p^2 - 8$

Exercice 9
Trouver les entiers a, b tels que $2^a - 3^b = 7$.

Exercice 10
Trouver tous les entiers x, y, z tels que $2^x + 3^y = z^2$.

Exercice 11 (2019 JBMO N5)
Trouver tous les entiers naturels x, y, z tels que $45^x - 6^y = 2019^z$.

Exercice 12
Trouver tous les entiers naturels a, n tels que $3 \cdot 2^x + 4 = n^2$.

Exercice 13
Trouver tous les entiers naturels t, y, z tels que $5^t + 4^y = z^2$.

Exercice 14 (JBMO N3 2022)
Trouver tous les quadruplets d'entiers stirctement positifs (p, q, a, b), où p et q sont des nombres premiers et $a > 1$, tels que

$$p^a = 1 + 5q^b.$$

Exercice 15 (JBMO 2015 N4)
Trouver tous les nombres premiers a, b, c et entiers strictement positifs k qui satisfont l'équation

$$a^2 + b^2 + 16c^2 = 9k^2 + 1.$$

Exercice 16 (2025 JBMO N6)
Trouver tous les premiers $p < 2025$ pour lesquels il existe un entier n tel que $p^2 + 2p - 7 = n^3$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Soit (x, y) un couple d'entiers solutions. On factorise :

$$(x - 2y)(x + 2y) = 5$$

5 étant premier, on a nécessairement $x - 2y = 1, x + 2y = 5$ ou $x - 2y = 5, x + 2y = 1$, ou $x - 2y = -1, x + 2y = -5$ ou $x - 2y = -5, x + 2y = -1$. En résolvant les systèmes, cela donne les couples solutions $(3, 1), (3, -1), (-3, 1), (-3, -1)$ qui vérifient effectivement l'équation.

Remarque 7. : On aurait pu supposer $x, y \geqslant 0$ quitte à prendre $-x$ ou $-y$ dans l'équation. Alors $x + 2y$ est forcément positif, et il ne reste qu'à traiter les cas positifs.

Solution de l'exercice 2
En que $16 = 4^2$, puis en factorisant avec m^2, l'équation se réécrit :

$$(m - 4)(m + 4) = 3^n$$

Ainsi, $m - 4$ et $m + 4$ sont des puissances de 3 qui diffèrent de 8 : seuls 1 et 9 conviennent, d'où $m - 4 = 1$, c'est-à-dire $m = 5$, et finalement en réinjectant dans l'équation $n = 2$.
Pour conclure, $(m, n) = (5, 2)$.

Solution de l'exercice 3
Soient a, b deux naturels solutions. On fait passer le 1 de l'autre côté de l'équation et on factorise :

$$2^a = (b - 1)(b + 1)$$

Nécessairement, $b - 1$ et $b + 1$ sont des puissances de 2, qui diffèrent de 2. Le seul couple correspondant est $(2, 4)$, d'où $b - 1 = 2$ et $b + 1 = 4$, c'est-à-dire $b = 3$, qui donne $a = 3$.
Le couple $(a, b) = (3, 3)$ est effectivment solution.

Solution de l'exercice 4
On remarque que $y^2 + y + 1 = y(y + 1) + 1$ est nécessairement impair, le produit de deux entiers consécutifs étant pairs. Ainsi, 2^x est impair, ce qui force $x = 0$ et donc $y = 0$.

Solution de l'exercice 5
On remarque que les premiers ne peuvent être tous impairs, donc l'un d'eux vaut 2.

— Cas 1 : $p = 2$. Alors $2 = (r^2 - q)(r^2 + q)$, ce qui force, 2 étant premier, les facteurs étant positifs, et $r^2 + q > r^2 - q$, $r^2 - q = 1$ et $r^2 + q = 2$. Toutefois, ceci donne $q = \frac{1}{2}$,absurde.
— Cas 2 : $q = 2$. Alors $p = (r^2 - 2)(r^2 + 2)$. p étant premier, les facteurs étant positifs, et $r^2 + 2 > r^2 - 2$, on a donc $p = r^2 + 2$ et $1 = r^2 - 2$, la dernière égalité est absurde.
— cas 3 : $r = 2$. Alors $p = (4 - q)(4 + q)$. De même, on doit avoir $4 - q = 1$ et $4 + q = p$, donc $q = 3$ puis $p = 7$.

Finalement, l'unique solution est $(p, q, r) = (7, 3, 2)$.

Solution de l'exercice 6
On réécrit l'égalité : $n = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$.
Regardons modulo 4 : un carré valant 0 ou $1 \pmod 4$, on a n valant $1, 0$ ou $-1 \pmod 4$. Ainsi,

n est impair ou divisible par 4.
Si n est de la forme $2k+1$: on cherche a et b le plus simplement possible sachant qu'ils sont de parités différentes, par exemple avec $b-a=1$. Ceci donne $a+b=2k+1$, d'où $a=k$ et $b=k+1$, qui est un couple qui convient.
Si n est de la forme $4k$: on cherche à nouveau a et b le plus simplement possible, sachant qu'ils sont de mêmê parité, par exemple en prenant $b-a=2$. Ceci donne alors $a+b=2k$, et donc $a=k-1$ et $b=k+1$, qui conviennent.

Solution de l'exercice 7
On suppose $y \geqslant 1$.
En prenant l'équation modulo 3, $(-1)^x - 1 \equiv 0 \pmod 3$, donc x est pair. En écrivant $x=2n$, on a

$$(2^n-1)(2^n+1) = 3^y$$

Ainsi, 2^n-1 et 2^n+1 sont des puissances de 3 différant de 2 : seuls 1 et 3 conviennent. On en déduit $2^n-1=1$, donc $n=1$, ce qui donne $x=2$ et $y=1$, qui conviennent.
Pour $y=0$, on a donc $x=1$ également.
Les solutions (x,y) convenant sont donc $(2,1)$ et $(1,0)$.

Solution de l'exercice 8
Soit (m,p) un couple solution. On a $p^2 = m^3+8 = (m+2)(m^2-2m+4)$. Les deux facteurs sont strictement plus grands que 1 (car $m+2 \geqslant 2 > 1$ et $m^2-2m+4 = (m-1)^2+3 \geqslant 3 > 1$). Puisqu'ils divisent p^2 et leur produit vaut exactement p^2 , ils sont tous les deux égaux à p. On a donc $p = m+2 = m^2-2m+4$, d'où $(m-1)(m-2)=0$ et donc $m \in \{1,2\}$. Si $m=2$ on trouve $p=4$ qui n'est pas un nombre premier. Si $m=1$, alors on vérifie que $p=3$ convient dans l'équation initiale. Finalement $(1,3)$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 9
Si $b \geqslant 1$, en regardant modulo 3, on a $2^a \equiv 1 \pmod 3$, donc a est pair. De plus, $2^a \geqslant 7$, d'où $a \geqslant 3$: on regarde cette fois modulo 4, qui donne $-3^b \equiv 3 \pmod 4$, donc b est pair.
En écrivant $a=2x$, $b=2y$, on reconnaît une différence de deux carrés : $(2^x-3^y)(2^x+3^y)=7$. Puisque 7 est premier, que $2^x+3^y > 2^x-3^y, 0$ et que les facteurs doivent être positifs, on en déduit que $2^x-3^y=1$ et $2^x+3^y=7$, ce qui donne $2^x=4$ et $3^y=3$, ou encore $x=2$ et $y=1$, soit $a=4$ et $b=2$, qui conviennent.

Sinon, $b=0$ et alors $a=3$.

Les solutions sont $(a,b)=(4,2),(3,0)$.

Solution de l'exercice 10
On suppose $y \geqslant 1$ pour le moment.
En regardant modulo 3, on voit que $2^x \equiv 0$ ou $1 \pmod 3$, donc x est pair. On en déduit, en écrivant $x=2a$: $3^y = (z-2^a)(z+2^a)$, ce qui signifie que $z-2^a$ et $z+2^a$ sont des puissances de 3. De plus, $(z+2^a)-(z-2^a) = 2^{a+1} \neq 0 \pmod 3$, donc une de ces puissances de 3 vaut 1. On en déduit $z=2^a+1$, et on se ramène à résoudre

$$3^y = 2^{a+1}+1$$

.

Si $a = 0$, alors $y = 1$, ce qui donne $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$ comme solution.

Sinon, $a \geqslant 1$ et on peut regarder modulo 4 : $3^y \equiv 1 \pmod 4$, donc y est pair. On écrit $y = 2b$ et on peut à nouveau factoriser : $(3^b - 1)(3^b + 1) = 2^{a+1}$, ce qui montre que $3^b - 1$ et $3^b + 1$ des puissances de 2 dont la différence vaut 2 : seuls 2 et 4 conviennent, et ainsi, $3^b - 1 = 2$, donc $b = 1$ et enfin $a = 2$. Ceci donne la solution $x = 4, y = 2, z = 5$.

Puis si $y = 0$, on doit résoudre $2^x = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1)$, donc $z - 1$ et $z + 1$ sont des puissances de 2 dont la différence vaut 2 : ce sont 2 et 4 nécessairement, et donc on trouve $x = 3, y = 0, z = 3$.

Pour conclure $(0, 1, 2), (4, 2, 5), (3, 0, 3)$ sont solutions.

Solution de l'exercice 11
Première observation , $45^x \geqslant 2$, donc $x \geqslant 1$.
On suppose $y \geqslant 2$.
On regarde modulo 4 : $1 - 0 \equiv (-1)^z \pmod 4$, donc z est pair. En prenant modulo 5, on a cette fois $0 - 1 \equiv (-1)^z \pmod 5$, donc z est impair : nous avons abouti à une contradiction.
Ainsi, $y = 0$ ou $y = 1$.
Si $y = 0$, alors on ne peut avoir $x, z \geqslant 1$, sans quoi modulo 3, on aurait $0 - 1 \equiv 0 \pmod 3$, ce qui est absurde. Or, $x = 0$ ou $z = 0$ ne mène à aucune solution. Il n'y a donc aucune solution dans ce cas.
Si $y = 1$, alors on ne peut avoir $x, z \geqslant 2$, sans quoi modulo 9, on aurait $0 - 6 \equiv 0 \pmod 9$, absurde. On teste les cas restants, et on trouve que $(x, y, z) = (2, 1, 1)$ est un couple solution.

Solution de l'exercice 12
Pour $x = 0$, l'équation devient $n^2 = 7$ qui n'a pas de solution. Supposons $x > 0$, on factorise :

$$3 \cdot 2^x = (n - 2)(n + 2)$$

. Le membre de gauche est pair donc le membre de droite est pair. Les deux facteurs du membre de droite sont de même parité donc ils sont tous les deux pairs et on a deux cas :

— Cas 1 : $3 \cdot 2^a = n - 2$ et $2^b = n + 2$, avec $a + b = x$. On peut combiner ces deux équations pour trouver $2^b = 3 \cdot 2^a + 4$. Notons que $n + 2$ et $n - 2$ ont pour différence 4 donc ils ne peuvent pas être tous les deux divisibles par 8. On a donc $a \leqslant 2$ ou $b \leqslant 2$. Or $2^b > 4$, donc $b > 2$ et on déduit que $a \leqslant 2$.
Si $a = 0$, $2^b = 3 + 4 = 7$ ce qui n'est pas possible.
Si $a = 1$, $2^b = 6 + 4 = 10$ ce qui n'est pas possible non plus.
Si $a = 2$, alors $2^b = 12 + 4 = 16$ donc $b = 4$. On obtient $x = 6$ et $n = 14$. réciproquement, on vérifie que $3 \cdot 2^6 + 4 = 196 = 14^2$ et le couple $(6, 14)$ est bien solution.

— Cas 2 : $3 \cdot 2^a = n + 2$ et $2^b = n - 2$, avec $a + b = x$. Les deux équations combinées donnent $2^b + 4 = 3 \cdot 2^a$. De même que précédemment, on a $a \leqslant 2$ ou $b \leqslant 2$.
1. Si $b \leqslant 2$, alors $b = 0, 1$ ou 2. Si $b = 0$, alors $5 = 3 \cdot 2^a$ ce qui n'est pas possible. Si $b = 1$, $6 = 3 \cdot 2^a$ et $a = 1$, soit $x = 2$ et $n = 4$ et on vérifie que $3 \cdot 2^2 + 4 = 16 = 4^2$ et $(2, 4)$ est bien solution. Si $b = 2$, alors $8 = 3 \cdot 2^a$ ce qui n'est pas possible.

2. Si $a \leqslant 2$, alors $a = 0, 1$ ou 2. Si $a = 0$, $2^b + 4 = 3 < 4$ ce qui n'est pas possible. Si $a = 1$, on retombe sur le cas où $b = 1$ et sur le couple $(2, 4)$. Si $a = 2$, $2^b + 4 = 12$ donc $b = 3$. Ceci donne $x = 5$ et $n = 10$. Réciproquement, on vérifie que $3 \cdot 2^5 + 4 = 100 = 10^2$ et $(5, 10)$ est bien solution.
Ainsi l'ensemble des couples (x, n) solutions est $\{(2, 4), (5, 10), (6, 14)\}$

Solution de l'exercice 13
L'équation à résoudre est :

$$5^t + 4^y = z^2$$

En remarquant que $4^y = (2^y)^2$, ceci se réécrit :

$$5^t = (z - 2^y)(z + 2^y)$$

. Donc il existe $a, b \geqslant 0$ tels que $5^a = z - 2^y$ et $5^b = z + 2^y$, avec $a + b = t$. Notons que $5^b \geqslant 5^a$, donc $b \geqslant a$ En faisant la différence, $5^a(5^{b-a} - 1) = 5^b - 5^a = 2^{y+1}$. Ce dernier n'étant pas divisible par 5, ceci montre que $a = 0$, et donc $z = 2^y + 1$.
Ainsi, $5^t = 2^{y+1} + 1$. Cete équation n'a aucune solution pour $y \geqslant 2$: en effet modulo 3, $(-1)^t \equiv (-1)^{y+1} + 1 \pmod 3$. Pour que ce soit possible, il faut que t soit impair et que $y + 1$ soit pair. Mais modulo 8, $5^t \equiv 0 + 1 \pmod 8$, ce qui force t pair. En effet, les puissances de 5 valent 1 ou 5 modulo 8, selon la parité. on aboutit donc à une absurdité.
Il suffit de traiter les cas $y = 0$ et 1, ce qui donne la solution $(t, y, z) = (1, 1, 3)$.

Pour conclure, l'unique solution est $(1, 1, 3)$.

Solution de l'exercice 14
p et q ne peuvent être tous deux impairs, ni tous deux égaux à 2. Deux cas se présentent :

Si $p = 2$ et q impair : l'équation modulo 5 indique $2^a \equiv 1 \pmod 5$. Or les valeurs de $2^x \pmod 5$ sont $2, 4, 3, 1$ dans cet ordre là, donc il faut que $4 \mid a$. En écrivant $a = 2n$, on a en factorisant

$$(2^n - 1)(2^n + 1) = 5q^b$$

q ne peut diviser à la fois les deux facteurs, sans quoi il diviserait $(2^n + 1) - (2^n - 1) = 2$, absurde. De même pour 5. On en déduit que, sachant que $2^n - 1 < 2^n + 1$:
soit $2^n - 1 = 1$, qui donne $n = 1$ et $3 = 5 \cdot q^b$, pas de solution
soit $2^n - 1 = 5$, pas de solution
soit $2^n + 1 = 5$, qui donne $n = 2$ et $15 = 5q^b$, c'est-à-dire $q = 3$ et $b = 1$. D'où la solution $(2, 3, 4, 1)$.

Si $q = 2$ et p impair : on a

$$p^a - 1 = 5 \cdot 2^b$$

Si $a > 1$ est impair , alors $p^{a-1} + \ldots + p + 1$ est un impair divisant $5 \cdot 2^b$, donc il vaut 1 ou 5. Mais ce nombre vaut au moins $p^2 + p + 1 \geqslant 13$, absurde. Sinon, a est pair, et on pose $a = 2n$.On a ainsi

$$(p^n - 1)(p^n + 1) = 5 \cdot 2^b$$

Notons que 4 ne peut diviser à la fois $p^n - 1$ et $p^n + 1$ mais que 2 divise les deux à la fois, de sorte que l'un des facteurs vaut exactement 10.
Si $p^n - 1 = 10$, alors $p^n + 1 = 12$ n'est pas une puissance de deux, donc pas de solution.

Sinon, $p^n + 1 = 10$ et $p^n - 1 = 8$, qui donne $(p, q, a, b) = (3, 2, 4, 4)$.

En résumé, les solutions sont $(2, 3, 4, 1), (3, 2, 4, 4)$.

Solution de l'exercice 15

On regarde modulo 3 : ceci donne

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv 1 \pmod 3$$

Ceci ne peut être vérifié que si exactement un parmi a, b, c n'est pas divisible par 3, c'est-à-dire qu'exactement un parmi a, b, c n'est pas égal à 3, puisqu'ils sont premiers.

Si $a, b = 3$ et $c \neq 3$. Alors on réécrit l'équation comme :

$$17 = 9k^2 - 16c^2 = (3k - 4c)(3k + 4c)$$

. Ainsi, puisque 17 est premier et que les facteurs à droite doivent être positifs, $3k - 4c = 1$ et $3k + 4c = 17$, ce qui donne $k = 3, c = 2$.

Si $c = 3$ et spdg $a = 3$. Alors on réécrit cette fois l'équation comme :

$$2^3 \cdot 19 = 152 = 9k^2 - b^2 = (3k - b)(3k + b)$$

On remarque que $3k - b$ et $3k + b$ ont même parité, ce qui élimine les cas où un des facteurs est impair.
- cas 1 : $3k - b = 2$ et $3k + b = 76$, ce qui donne $6k = 78$, donc $k = 13$ et $b = 37$.
- cas 2 : $3k - b = 4$ et $3k + b = 38$, ce qui donne $6k = 42$, donc $k = 7$ et $b = 17$.

Finalement, les solutions sont $(3, 3, 2, 3), (3, 37, 3, 13), (37, 3, 3, 13), (3, 17, 3, 7), (17, 3, 3, 7)$.

Solution de l'exercice 16
Si $p = 2$, alors $n = 1$. On suppose par la suite p impair.
On réécrit l'équation en remarquant que $8 = 2^3$ ce qui permet la factorisation : $(p + 1)^2 = n^3 + 8 = (n + 2)(n^2 - 2n + 4)$ ou encore, en remarquant que n doit être pair, puis que $8 \mid (p + 1)^2 \implies 4 \mid p + 1$, et en posant $n = 2k$:

$$(\frac{p+1}{4})^2 = (\frac{k+1}{2})(k^2 - k + 1)$$

Notons que $\frac{k+1}{2}$ doit être entier, puisque 2 ne divise pas $k^2 - k + 1$. Le pgcd de $\frac{k+1}{2}$ et $k^2 - k + 1$ divise toute combinaison linéaire des deux, il divise en particulier $k^2 - k + 1 - (k + 1)(k - 1) = -k + 2$ ou encore $-k + 2 + (k + 1) = 3$. Si ce pgcd valait 1, alors $\frac{k+1}{2}$ et $k^2 - k + 1$ sont des entiers premiers entre dont le produit est un carré : ce seraient donc des carrés. Si $k = 1$, alors on doit avoir $p = 3$. Sinon, $k \geqslant 2$, et donc $(k - 1)^2 < k^2 - k + 1 < k^2$, ce qui montre que $k^2 - k + 1$ n'est pas un carré en l'encadrant entre deux carrés consécutifs.
On en déduit que $\gcd(\frac{k+1}{2}, k^2 - k + 1) = 3$, et puisque leur produit est un carré, il existe des entiers x et y premiers entre eux tels que $\frac{k+1}{2} = 3x^2$, $k^2 - k + 1 = 3y^2$.
Il faut encore utiliser la condition que $p < 2025$: ceci impose

$$(3^8 \cdot 5^4 =) 2025^2 \geqslant n^3 + 8 > n^3 = 8k^3$$

, et par conséquent

$$4 \cdot 45 > 45\sqrt[3]{45} > 2k = 12x^2 - 2$$

, ce qu'on réécrit $182 > 12x^2 \implies x \leqslant 3$.
Il ne reste plus qu'à traiter les cas restants, sachant que $x \geqslant 1$:
Si $x = 1$, alors $k = 5$ et donc $n = 10$. $n^3 + 8 = 1008$ n'est pas un carré, pas de solution.
Si $x = 2$, alors $k = 23$, $n = 46$. Après avoir posé les calculs (on rappelle qu'en compétition, l'usage de la calculatrice est interdite), on trouve que $p = 311$.
Si $x = 3$, alors $k = 53$ et $n = 106$. Pour éviter des calculs (trop) pénibles, on peut s'apercevoir que $\frac{k+1}{2} = 27$, $k^2 - k + 1 = 2757 = 3 \cdot 919$, et en vérifiant que 919 est premier, ceci montre que $(\frac{k+1}{2})(k^2 - k + 1)$ n'est pas un carré.

Au final, les solutions sont $(2, 1), (3, 2), (311, 46)$.

8 Combinatoire : Jeux (Solal)

Pour une introduction plus complète au domaine de la théorie des jeux, on pourra se référer au super cours groupe A de Théo et Augustin au stage de Valbonne 2023. On en présente ici un bref résumé.

Contexte du cours

— On considérera par la suite des jeux à deux joueurs, où les joueurs joueront chacun leur tour suivant des règles et conditions de victoire définies au préalable.

— On appellera *stratégie gagnante* une stratégie qui permette à un des deux joueurs de s'assurer une victoire, peu importe comment joue son adversaire.

— En particulier, dans la plupart des jeux il est fréquent qu'un des deux joueurs ait une stratégie gagnante. On cherchera donc à déterminer qui, ou si à défaut, les deux joueurs peuvent s'assurer la nulle.

Maintenant que cela est dit, on peut présenter quelques idées essentielles à l'analyse des jeux combinatoires.

— Il faut impérativement traiter des petits cas pour se donner une idée de qui gagne quand et de qu'est-ce que tel joueur à intérêt à faire !

— Il est souvent crucial d'analyser les positions perdantes et gagnante en remontant à partir de l'état final.

— Parfois il sera intéressant de créer de la symétrie pour imaginer des stratégies en poussant un joueur à suivre une stratégie de type "miroir".

— Finalement, on pourra parfois mettre en place un pavage ou un coloriage pour expliciter une stratégie.

Les exercices

Analyse des positions

Exercice 1
Ghita et Zacharia disposent 20 bâtons devant eux, et puis à tour de rôle, en commençant par Ghita, enlèvent exactement 1, 2 ou 3 bâtons de la file. Celui qui enlève le dernier bâton gagne la partie. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 2
Waël et Stefan jouent à un jeu. Sur une table, il y a 20 pièces. En commençant par Waël, ils peuvent prendre exactement $1, 2, 3, 5$ ou 7 pièces. Celui qui prend la dernière pièce gagne. Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 3
Partant de 0 et en en commençant par Louis, Louis et Timothée ajoutent chacun leur tour à la quantité en cours un nombre de leur choix parmi $\{1, 2, ..., 10\}$. Celui qui atteint 100 gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 4
Sur la table se trouvent 2023 jetons. Tour à tour, Héloise et Lélia doivent enlever au moins un

jeton et au plus la moitié des jetons restants au moment où ils jouent. La joueuse qui laisse un unique jeton sur la table perd la partie. C'est Héloise qui commence. Déterminer laquelle des deux joueuses possède une stratégie gagnante et décrire une telle stratégie.

Exercice 5 (JBMO TST 2020)
Soit $n \geqslant 3$. Lucie et Thais jouent à un jeu. Sur une table, il y a n pièces. A tour de rôles, en notant k le nombre de pièces encore sur la table, elles peuvent prendre exactement l pièces, avec $1 \leqslant l \leqslant k$ un entier tel que k et l sont premiers entre eux. La joueuse qui prend la dernière pièce gagne. Lucie commence. En fonction de n, quelle joueuse possède une stratégie gagnante ?

Exercice 6
Yanis et Zacharia jouent au jeu suivant. Initialement, ils placent trois piles, chacune contenant 2026 pièces. Ensuite, ils font tour-à-tour des mouvements, avec Yanis qui commence. Un mouvement consiste à choisir une des piles actuellement disponibles, à effacer les potentielles autres piles, et à la découper en deux ou trois piles non vides (potentiellement inégales). Un joueur perd la partie quand il ne peut plus faire de tel mouvement. Qui de Yanis et Zacharia a une stratégie gagnante ?

Stratégies miroirs et autres

Exercice 7
Ghita et Waël ont une réserve illimitée de pièces circulaires de rayon 1 centimètre. Tour à tour, en commençant par Ghita, ils les placent sur une table carrée de côté 10 centimètres, de sorte que deux pièces quelconques ne se recouvrent jamais, et que toutes les pièces soient entièrement contenues dans la table. La première personne qui ne peut plus jouer perd la partie. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 8
Stefan et Timotée jouent à un jeu sur un échiquier 2027×2027 avec initialement un 0 dans chaque case. En commençant par Stefan, chacun leur tour, ils doivent ajouter un 1 à un nombre de la grille, pour un total de 2^{2027} ajouts. A la fin du jeu, on note $\ell_1, \ldots, \ell_{2027}$ la somme des nombres dans chacune des lignes et $c_1, \ldots, c_{2027}$ la somme des nombres dans chacune des colonnes. Timotée gagne si pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2025$, il existe $1 \leqslant j \leqslant 2027$ tel que $l_i = c_j$ et pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2027$, il existe $1 \leqslant i \leqslant 2027$ tel que $c_j = \ell_i$. Sinon c'est Stefan qui gagne. Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 9
Thais et Lélia jouent à un jeu sur un 100-gone régulier. Chacune leur tour, en commençant par Lélia, elles peuvent choisir un nombre entre 1 et 100 qui n'a pas encore été choisi et le mettre sur un des sommets qui n'a pas encore de nombre.
A la fin du jeu, on note S la somme maximale parmi les nombres de 3 sommets consécutifs. Lélia veut maximiser S et Thais cherche à le minimiser.
Si les deux joueuses jouent de manière optimale, combien vaudra S ?

Exercice 10
Soit $n \geqslant 4$ un entier pair. Héloïse et Lucie jouent à un jeu. Chacune à leur tour, elles écrivent un 0 ou un 1 sur un sommet d'un n-gone initialement vierge. Héloise commence et gagne si après l'un de ses coups, il y a trois sommets consécutifs du n-gones tels que la somme des

nombres qui y sont inscrits est un multiple de 3. Autrement c'est Lucie qui gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 11
Yanis et Louis jouent à un jeu sur un échiquier 5202×5202. Chacun son tour, en commençant par Yanis, Yanis met un X dans une case vide, et puis Martin met un O dans une case vide. Yanis gagne s'il réussi à remplir un carré 2×2 de X, et sinon c'est Louis qui gagne.
Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 12
Soit $n > 1$. Chocolat et Caramel jouent au jeu suivant. $2n$ cartes numérotées de 1 à $2n$ sont mélangées puis disposées dans une ligne, de manière à ce que les faces numérotées soient visibles. Chacun à leur tour, Chocolat et Caramel choisissent une carte, soit celle tout à droite soit celle soit à gauche de la ligne, et la garde pour eux, jusqu'à ce que toutes les cartes aient été prises. Alice commence. A la fin du jeu, chaque joueur calcule la somme des numéros des cartes qu'il a prises. Le joueur ayant la plus grande somme gagne. Un joueur dispose-t-il d'une façon de ne pas perdre ?

Exercice 13
Tous les autres exercices des TDs d'Oscar (2025) et de Théo et Augustin (2023) disponibles sur cette page !

Les solutions

Solution de l'exercice 1
Regardons d'abord ce qui se passe pour de plus petits cas. Typiquement on se rend compte que :

— Si il y a moins de trois bâtons sur la table, la personne dont c'est le tour peut gagner la partie.

— Si il y a 4 bâtons sur la table, la personne dont c'est le tour ne peut pas gagner la partie mais doit enlever au moins un bâton donc son adversaire va gagner.

— Si il y a entre 5 et 7 batôns sur la table, la personne dont c'est le tour peut forcer l'autre joueur sur la position 4 et donc s'arrurer une victoire.

— ....

On peut résumer ça plus simplement en faisant un petit tableau représentant quelles positions sont perdantes, ou au contraire gagnantes :

— 1 : Gagnante

— 2 : Gagnante

— 3 : Gagnante

— 4 : Perdante

— 5 : Gagnante

— 6 : Gagnante

— 7 : Gagnante

— 8 : Perdante

En traitant ces cas "simples", on a donc gagné deux informations essentielles qui vont nous permettre de résoudre le problème. D'une part, les positions perdantes semblent être les multiples de 4 et d'autre part, une stratégie pour le joueur qui n'est pas sur une position perdante et de s'arranger pour forcer toujours l'autre joueur sur une position multiple de 4. Ecrivons ça proprement.
Montrons que Zacharia dispose d'une stratégie gagnante. Pour ce faire, à chaque tour, si Ghita enlève $k \in \{1, 2, 3\}$ bâtons alors Zacharia enlève $4 - k \in \{1, 2, 3\}$ bâtons. Puisque au tour de Ghita il y a initialement 20 batôns, et que 20 est divisible par 4, il s'ensuit que Alice aura systématiquement un nombre multiple de 4 de batôns au début de son tour. La devant se terminer, au dernier tour Ghita aura 0 batôns devant lui : Zacharia aura gagné.

Solution de l'exercice 2

On reprend la solution d'Oscar dans son cours de l'année dernière.

On remarque que le jeu est symétrique entre les deux joueurs. Ainsi, en partant depuis la fin, on remonte pour déterminer pour chaque nombre de pièce si la situation est gagnante ou perdante pour celui à qui c'est de jouer :

- 1 est gagnant en prenant 1 balle.
- 2 est gagnant en prenant 2 balles.
- 3 est gagnant en prenant 3 balles.
- 4 est perdant.
- 5 est gagnant en prenant 1 balle.
- 6 est gagnant en prenant 2 balles.
- 7 est gagnant en prenant 3 balles.
- 8 est perdant.
- 9 est gagnant en prenant 1 balle.
- 10 est gagnant en prenant 2 balles.
- 11 est gagnant en prenant 3 balles.
- 12 est perdant.
- 13 est gagnant en prenant 1 balle.
- 14 est gagnant en prenant 2 balles.
- 15 est gagnant en prenant 3 balles.
- 16 est perdant.
- 17 est gagnant en prenant 1 balle.
- 18 est gagnant en prenant 2 balles.
- 19 est gagnant en prenant 3 balles.
- 20 est perdant.

Donc, comme c'est Waël qui commence, c'est Stefan qui gagne.

Solution de l'exercice 3

A nouveau, on constate que les positions entre 90 et 99 sont gagnantes, mais que 89 est perdante. On peut en fait lister toutes les positions perdantes pour trouver 89, 78, 67, $\ldots$, 12, et 1, c'est-à-dire les nombres congrus à 1 modulo 11.

Dès lors, puisque 0 n'est pas perdant c'est Louis qui va gagner. Pour cela son but et de toujours pousser son adversaire sur une position congrue à 1 modulo 11. Il commence donc par prendre 1 allumette, puis, dès que Timothée prend $x \in \{1, \ldots, 10\}$ allumettes, il complète à 11 en en prenant $11 - x \in \{1, \ldots, 10\}$.

Solution de l'exercice 4
On commence de nouveau par dresser les positions perdantes et gagnantes. On trouve :

- 2 : Perdante
- 3 : Gagnante
- 4 : Gagnante
- 5 : Perdante
- 6 : Gagnante
- 7 : Gagnante
- 8 : Gagnante
- 9 : Gagnante
- 10 : Gagnante
- 11 : Perdante

On voit un pattern se dessiner : si la position k est perdante alors toutes les positions entre $k+1$ et $2k$ sont gagnantes tandis que la position $2k+1$ est perdante. Montrons le :

— Pour $k+1 \leqslant i \leqslant 2k$ on a $i-k \leqslant \frac{i}{2}$ donc on peut enlever $i-k$ pièces et envoyer l'adversaire sur la position k qui est perdante : la position i est gagnante.

— Pour $i = 2k+1$ on a $\frac{i}{2} < k+1$ donc on doit envoyer l'adversaire sur une position entre la position $k+1$ et la position $2k$. Toutes sont gagnantes donc la position $2k+1$ est perdante.

Dès lors on peut lister exhaustivement toutes nos positions gagnantes :

$$2 \mapsto 5 \mapsto 11 \mapsto 23 \mapsto 47 \mapsto 95 \mapsto 191 \mapsto 383 \mapsto 767 \mapsto 1535 \mapsto 3071.$$

La position 2027 est donc gagnante : c'est Héloïse qui va gagner.

Solution de l'exercice 5
A nouveau, faute d'idées, on commence par lister les positions gagnantes et perdantes :

- 1 : Gagnante
- 2 : Perdante
- 3 : Gagnante
- 4 : Perdante
- 5 : Gagnante
- 6 : Perdante
- 7 : Gagnante

Le pattern qui se dessine est cette fois plutôt clair : les positions paires sont perdantes et les positions impaires sont gagnantes. Essayons de comprendre pourquoi :

— Si on est sur une position impaire alors on peut envoyer l'adversaire sur une position paire plus petite en enlevant 1, qui est donc perdante.

— Si on est sur une position paire alors on ne peut pas envoyer l'adversaire sur une position paire plus petite : cela nécessiterait d'enlever un nombre pair, ce qui contredirait l'hypothèse $\mathrm{pgcd}(k, l) = 1$. On doit donc l'envoyer sur une position impaire, qui est gagnante.

Maintenant qu'on a effectué cette analyse on a tous les ingrédients en main pour résoudre l'exercice ; reste à tout rédiger proprement. On montre ainsi par récurrence forte que pour $k \in \mathbb{N}$, s'il reste k pièces sur la table alors le joueur dont c'est le tour gagne si et seulement si k est impair.

Initialisation : Si $k = 1$ alors le joueur dont c'est le tour gagne.

Hérédité : On distingue deux cas.

— Si $n + 1$ est impair alors on a $\mathrm{pgcd}(n + 1, 1) = 1$ donc le joueur dont c'est le tour peut prendre une pièce et envoyer son adversaire sur la position $n + 1 - 1 = n < n + 1$, qui est pair et donc perdante par hypothèse de récurrence.

— Si $n + 1$ est pair alors on a $\mathrm{pgcd}(n + 2, 2)$ est pair donc le joueur dont c'est le tour doit enlever un nombre impair de pièces. Il est ainsi forcé d'envoyer son adversaire sur une position impaire, qui est donc gagnante par hypothèse.

Ainsi Lucie gagne si n est impair et Thais gagne si n est pair.

Solution de l'exercice 6
Une fois n'est plus coutume, il faut impérativement dresser une liste des positions perdantes et gagnantes pour des petits cas.
On constate cette fois-ci que les positions perdantes sont exactement celles où la pile a un nombre initial n congru à 1 modulo 3 de pièces. Montrons le comme précédemment par récurrence forte sur n.

Initialisation : Si $n = 1$ alors le joueur dont c'est le tour perd. Si $n \in \{2, 3\}$ alors le joueur dont c'est le tour gagne en découpant la pile en piles de une pièce.

Hérédité : On montre maintenant que si n est un multiple de 3 et qu'on connaît les positions gagnantes et perdantes entre 1 et n, alors on connaît les positions gagnantes et perdantes entre 1 et $n + 3$. On distingue maintenant les trois cas :

— On a $n+1 \equiv 1 \pmod 3$. On remarque maintenant que $1+1 \equiv 2 \pmod 3$ et que $1+1+1 \equiv 0 \pmod 3$. Dès lors, si le joueur dont c'est le tour découpe une pile contenant $n+1$ pièces en deux ou trois piles, il y aura au moins une pile contenant un nombre non congru à 1 modulo 3 de pièces. Son adversaire pourra alors choisir cette dernière pile, qui est donc gagnante pour lui par hypothèse de récurrence.

— La position $n + 2$ est gagnante pour le joueur dont c'est le tour car il peut découper une pile de $n + 2$ pièces en deux piles contenant $n + 1$ pièces et 1 pièce. Son adversaire est alors forcé de choisir la pile contenant $n + 1$ pièces, qui est donc perdante pour lui.

— La position $n + 3$ est gagnante pour le joueur dont c'est le tour car il peut similairement la découper en une pile de $n + 1$ pièces et deux piles de 1 pièce.

Il y a initialement $2026 \equiv 1 \pmod 3$ pièces donc c'est Yanis qui va gagner.

Solution de l'exercice 7
Montrons que Ghita a une stratégie gagnante. On va mettre en place une stratégie miroir qui lui permettra de jouer tant que Waël peut placer une pièce. Dès lors il est clair que la partie doit s'arrêter puisque la table est finie et que chaque pièce a une aire non nulle, donc à un moment Waël ne pourra plus jouer : il aura perdu.
Pour cela Ghita va d'abord choisir de poser une pièce au centre exact de la table. Ensuite, si Bob pose une pièce P quelque part, Ghita se contente de poser une pièce P' au symétrique centrale de la pièce de Waël par rapport au centre de la table.
Effectivement, Ghita pourra toujours poser une telle pièce car si une pièce Q touchait la pièce P' alors le symétrique Q' de Q serait aussi sur la table avant que Waël ne joue d'après la stratégie de Ghita et toucherait donc la pièce P, ce qui n'est pas possible puisque Waël a pu jouer P. Ainsi, cette stratégie permet bien à Ghita de jouer tant que Waël joue, et puisque la partie s'arrête à un moment, Waël est forcé de perdre.

Solution de l'exercice 8

En fait Timothée peut plus généralement garantir que $c_i = \ell_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2027$. Pour cela, Timothée commence par dessiner un axe de symétrie, par exemple la diagonale descendante de l'échiquier. Dès lors, si Stefan ajoute un nombre dans la case (i, j), Timothée va ajouter un nombre dans la case symétrique par rapport à cette diagonale, c'est à dire la case (j, i).

Avec cette stratégie, on sait que dès que la ligne i gagne une unité, la colonne i gagnera une unité au tour suivant (et vice-versa), donc puisque que Timotée et Stefan jouent un nombre pair de tour, on aura bien $\ell_i = c_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2027$ à la fin !

Solution de l'exercice 9

On va montrer que $S = 201$ si les deux joueuses jouent de manière optimale. On peut motiver la stratégie qui suit en examinant d'abord à la main les cas $n = 4$ et $n = 6$.

Il s'agit ici d'un jeu un peu spécial puisque le but des joueuses n'est plus simplement de gagner ou de perdre, mais d'optimiser une quantité. Dès lors, il nous faut décrire une stratégie pour chacune des joueuses qui lui permette d'atteindre au moins ou au plus la quantité $S = 201$, peu importe ce que joue l'autre joueuse.

- Stratégie de Thais : Thais groupe les sommets par paires de sommets consécutifs. Ainsi, si Lélia met un i sur l'un des sommets d'une paire, Thais met un $101 - i$ sur l'autre sommet de la paire.
  Alors, à la fin, sur chaque paire, la somme des deux nombres sera de 101. Comme parmi 3 nombres consécutifs il y a exactement une paire, la somme de 3 nombres consécutifs sera d'au plus $101 + 100 = 201$.
- Stratégie de Lélia : Lélia choisit un sommet arbitraire et y met le 100.
  - Si Thais ne joue pas le 99, alors Lélia place le 99 sur l'un des sommets à côté du 100. Dès lors, à gauche ou à droite de ces deux sommets, il y aura au moins un 2 et donc une somme d'au moins $100 + 99 + 2 = 201$.
  - Si Thais joue un 99.
    - Si Thais place le 99 à côté du 100, alors comme ci-dessus, il y aura forcément une somme de 201.
    - Sinon, Lélia peut placer le 98 à côté du 100 de sorte qu'il ne soit pas à côté du 99. Dès lors, après le coup de Théo, Oscar pourra placer à gauche ou à droite de ces deux nombres un 96 ou un 97. Ainsi, elle s'assurera d'obtenir une somme d'au moins $100 + 98 + 96 = 294 > 201$.

  Donc, dans tous les cas, Lélia peut s'assurer d'obtenir une somme d'au moins 201 sur 3 sommets consécutifs.

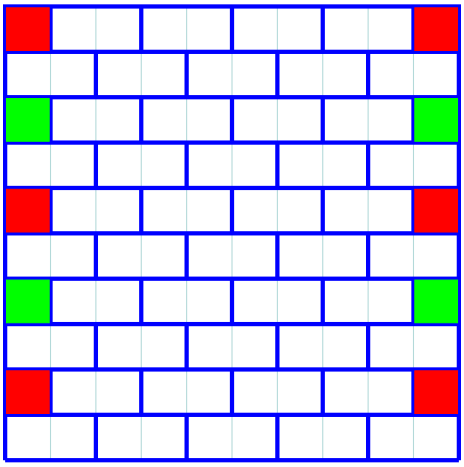
Finalement, si les deux joueuses jouent de manière optimale, on aura bien $S = 201$.

Solution de l'exercice 10

On va montrer que Lucie a une stratégie gagnante.

Une remarque simple est que Héloise doit en fait réussir à aligner trois 0 ou trois 1 à la suite puisque c'est les deux seules sommes divisibles par 3. Pour l'en empêcher, Lucie commence par grouper les sommets du n-gone par paires de sommets consécutifs, ce qui est possible car n est pair. Alors, dès que Héloise joue un nombre $x \in \{0, 1\}$ dans une paire, Lucie complète la paire en jouant $1 - x \in \{0, 1\}$ dans l'autre case encore vide. Puisque parmi 3 sommets consécutifs du n-gone il y a au moins deux sommets appartenant à une même paire, à la fin de la partie il ne pourra pas y avoir 3 sommets consécutifs égaux !

Solution de l'exercice 11
On pave la grille de cette manière (en prenant comme exemple un grille 10×10) : On remarque



qu'en plaçant un carré 2×2, il y a forcément exactement un domino entier qui est recouvert par le carré. On en déduit la stratégie suivante pour Louis :

- Si Yanis joue sur une case "non colorée", Louis joue sur la case qui appartient au même domino.
- Si Yanis joue sur une case colorée, Louis joue sur la case colorée de la même ligne.

Ainsi, Yanis ne peut remplir un domino, et donc ne peut remplir un carré 2×2.
C'est donc Louis qui possède une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 12
Oui, Chocolat a une stratégie gagnante. Elle colorie une carte sur 2 en noir en allant de gauche à droite et le reste en blanc (de telle manière à ce que 2 cartes consécutives n'aient pas la même couleur). Elle regarde la couleur dont la somme des cartes est la plus élevée (ou égale) et choisit une carte de cette couleur en premier. Caramel aura ensuite le choix entre 2 cartes de l'autre couleur, laissant à Chocolat le choix entre 2 cartes de couleur différente et ainsi de suite. Ainsi, elle pourra toujours choisir une carte de la même couleur que celle qu'elle a choisi au début, tandis que Bob sera toujours obligé d'avoir que des cartes de l'autre couleur. Ainsi l'un aura la somme des cartes noires à la fin, et l'autre la somme des cartes blanches, et comme Chocolat avait pu choisir au début laquelle prendre, elle est certaine de ne pas perdre.

4 Entraînement de fin de parcours

Exercices

Exercice 1
On écrit 2026 symboles "$+$" et 2027 symboles "$-$" sur un tableau noir.
Chaque minute, Calamar efface deux symboles et les remplace par un symbole selon les règles suivantes :

- Si les deux symboles qu'elle efface sont identiques, alors elle les remplace par un $+$;
- Si les deux symboles qu'elle efface sont différents, alors elle les remplace par un $-$.

Elle répète ceci jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un symbole écrit au tableau. De quel symbole s'agit-il ?

Exercice 2
Déterminer tous les triplets d'entiers strictement positifs (a, b, x) tels que

$$a! + b! + 5 = x^2.$$

Exercice 3
Déterminer tous les triplets de nombres premiers (p, q, r) deux-à-deux distincts tels que :

$$(p - 5)(q - 21)(r - 26) = pqr.$$

Exercice 4
Les nombres 1, 2, $\ldots$, 2001 sont écrits au tableau. Ananas et Banana jouent au jeu suivant : celles-ci effacent un nombre tour à tour, en commençant par Ananas, jusqu'à ce qu'il ne reste que deux nombres écrits au tableau. Si la somme de ces derniers est divisible par 8, alors Ananas gagne. Autrement, c'est Banana qui gagne. Qui de Ananas ou Banana a une stratégie gagnante ?

Solutions

Solution de l'exercice 1
Montrons qu'il s'agit du symbole "-". On remarque pour cela que le produit des symboles écrits au tableau est un invariant, en effet :

— Si on remplace deux "+" par un $+$, alors le produit ne change pas,

— Si on remplace deux "-" par un $+$, alors le produit ne change pas,

— Si on remplace un "+" et un "-" par un $-$, alors le produit ne change pas.

Initialement, le produit des nombres écrits au tableau vaut $1^{2026} \times (-1)^{2027} = -1$, donc il ne restera plus qu'un symbole "-" à la fin.

Solution de l'exercice 2
On a un carré, donc on regarde modulo 3 ou 4, ou 8. Commençons par 3.

Si a et b sont tous les deux supérieurs à 3, alors $a!$ et $b!$ sont divisibles par 3, ce qui donne

$$5 \equiv x^2 \pmod 3.$$

Or $5 \equiv 2$ n'est pas un carré modulo 3, donc ce n'est pas possible. L'un des deux nombres a et b est donc plus petit que 3 ; mettons que ce soit a. On distingue les cas suivants :

• Si $a = 1$, alors l'équation devient $b! + 6 = x^2$. À présent, si $b \geqslant 4$, alors modulo 4 on aurait

$$2 \equiv x^2 \pmod 4,$$

ce qui n'est pas possible. Réciproquement, pour $b \leqslant 3$ les nombres $7, 8, 12$ ne sont pas des carrés.

• Si $a = 2$, alors l'équation devient $b! + 7 = x^2$. De même que précédemment, si $b \geqslant 4$, alors modulo 4 on aurait

$$3 \equiv x^2 \pmod 4,$$

ce qui n'est pas possible. Réciproquement, pour $b \leqslant 3$, parmi les nombres $8, 9, 13$, seul 9 est un carré.

Cela donne alors pour seule solution de l'équation le triplet $(a, b, x) = (2, 2, 3)$.

Solution de l'exercice 3
Parmi p, q, r au moins deux sont impairs car le seul nombre premier pair est 2. Ainsi au moins l'un des nombres p ou q est impair et le membre de gauche est donc pair. Par conséquent p, q ou r est égal à 2.

— Si $p = 2$ alors on a $-3(q - 21)(r - 26) = 2qr$, donc $3 \mid 2qr$ et 3 est premier donc $3 = q$ ou $3 = r$.
  — Si $q = 3$ alors $q - 21 = -18$ est divisible par 9 alors que le membre de droite ne peut pas l'être (car $q \neq r$), ce cas est donc absurde.
  — Ainsi $r = 3$ et l'équation devient $-3(q - 21) \times (-23) = 6q$ c'est à dire $23(q - 1) = 2q$, donc $23 \mid 2q$ et 23 est premier donc $q = 23$. Nous trouvons donc le triplet $(2, 23, 3)$.

— Si $q = 2$ alors on a $-19(p - 5)(r - 26) = 2pr$ donc $19 \mid 2pr$ et $p = 19$ ou $r = 19$.
  — Si $p = 19$ alors l'équation devient $19 \times 14(r - 26) = 2 \times 19r$ c'est-à-dire $7(r - 26) = r$ donc $7 \mid r$, 7 est premier donc $r = 7$, or $7 - 26 \neq 1$ et donc ce cas ne fournit pas de solutions.

— Si $r = 19$ alors nous obtenons $19 \times 7(p-5) = 2 \times 19p$ c'est-à-dire $7(p-5) = 2p$. Ainsi $7 \mid 2p$, 7 est premier et donc $p = 7$. On trouve ainsi le triplet $(7, 2, 19)$.

— Si $r = 2$ alors p, q sont impairs donc $p-5$ est pair, $q-21$ et $r-26$ aussi donc le membre de gauche est divisible par au moins 8. Or, il est égal à $2pq$ donc il n'est même pas divisible par 4, ce cas ne fournit donc pas de solutions.

Ainsi, les seules solutions possibles sont $(2, 23, 3)$ et $(7, 2, 19)$. On vérifie qu'elles conviennent :

$$(2-5)(23-21)(3-26) = (-3) \times 2 \times (-23) = 2 \times 3 \times 23$$
$$(7-5)(2-21)(19-26) = 2 \times (-19) \times (-7) = 7 \times 2 \times 19$$

Les deux seules solutions à l'exercice sont donc $(2, 23, 3)$ et $(7, 2, 19)$.

Solution de l'exercice 4

On montre qu'Ananas a une stratégie gagnante. Déjà, puisque 2001 est impair, c'est elle qui commence mais également elle qui termine. Son objectif est que les deux nombres écrits à la fin aient une somme divisible par 8, une stratégie pour arriver à cette fin peut donc être qu'à la fin de chacun de ses tours, la somme de tous les nombres au tableau soit divisible par 8. Notons qu'au début, la somme de tous les chiffres vaut

$$\frac{2001 \times 2002}{2} = 2001 \times 1001 \equiv 1 \pmod 8,$$

puisque c'est un produit de deux nombres tous deux congrus à $1 \pmod 8$.

On peut alors deviser une stratégie miroir pour Ananas :

- Elle commence par effacer 2001, de sorte que la somme des nombres écrits au tableau soit divisible par 8.
- Ensuite, si Banana efface un nombre k avec $k \neq 1000$ et $k \neq 2000$, elle efface le nombre $2000 - k$.
- Si Banana efface le nombre 1000 ou 2000, elle efface l'autre de ces nombres.

Elle peut toujours appliquer cette stratégie : puisque 2001 a été effacé au début, les nombres k et $2000 - k$ sont toujours effacés par paires, et il en va de même pour 1000 et 2000. À chaque paire de coups de Banana et Ananas, la somme des nombres écrits au tableau diminue de 2000 ou 3000, elle reste en particulier nulle modulo 8. Ce sera donc encore le cas après le dernier coup d'Ananas, c'est donc elle qui a une stratégie gagnante.

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre et Géométrie 172
1 Géométrie : TD de révisions (Claire et Antoine D) 172
2 Algèbre : Inégalités (Noam) 186
3 Algèbre : Équations fonctionnelles 1 (Oscar) 187
4 Géométrie : Configurations (Héloïse) 194
5 Géométrie : Axe radical (Lilas et Melvil) 206
6 Algèbre : Relations de Viète, technique s,p (Martin) 218
7 Algèbre : Équations fonctionnelles 2 (Tristan) 230
8 Géométrie : Pot-pourri (Kevin et Mathieu) 247
2 Entraînement de mi-parcours 258
3 Deuxième partie : Arithmétique et Combinatoire 261
1 Combinatoire : TD de révisions (Arthur) 261
2 Arithmétique : TD de révisions (Eva) 265
3 Arithmétique : Ordre multiplicatif 1 (Hugo) 269
4 Combinatoire : Double comptage (Maxime) 277
5 Combinatoire : Grilles (Tiphaine et Théo) 278
6 Arithmétique : Ordre multiplicatif 2 (Erik) 291
7 Arithmétique : Équations dipohantiennes (Hadrien et Emilhan) 296
8 Combinatoire : Pot-pourri (Lucile et Gaëtan) 305
4 Entraînement de fin de parcours 311

1 Première partie : Algèbre et Géométrie

1 Géométrie : TD de révisions (Claire et Antoine D)

Exercices

Exercice 1
Soient A, B, C, D quatre points cocycliques. Notons $\alpha = \widehat{CAB}$ et $\beta = \widehat{ABD}$. Soit E le point d'intersection entre (AB) et (CD) et F le point d'intersection entre (AC) et (BD). Déterminer les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{AFD}$ en fonction de α et β.

Exercice 2
Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en deux points distincts A et C. Soit B le second point d'intersection de ω_1 avec la tangente à ω_2 en le point A. Soit D le deuxième point d'intersection du cercle ω_2 avec la tangente au cercle ω_1 en le point C. Montrer que les droites (AD) et (BC) sont parallèles.

Exercice 3
Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Exercice 4
Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle Γ. Soit D le pied de la bissectrice issue de A. Soit P le point d'intersection de la tangente de Γ en A avec (BC). Montrer que PAD est isocèle en P.

Exercice 5
Soit un demi-cercle de diamètre $[AB]$ sur lequel on choisit deux points C et D. Soit S l'intersection de (AC) et (BD) et T le pied de la perpendiculaire à $[AB]$ issue de S. Montrer que (ST) est la bissectrice de $\widehat{CTD}$.

Exercice 6
Pythagore : Soit ABC est un triangle rectangle en A et H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ à l'aide de triangles semblables.

Exercice 7
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles s'intersectant en P et Q. Soit X un point de (PQ). Une droite d_1 passant par X coupe ω_1 en A et B et une droite d_2 passant par X coupe ω_2 en C et D. Montrer que $ABCD$ est cyclique.

Exercice 8
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P autre que D et ω_2 en le point Q autre que B. Montrer que BQ = DP.

Exercice 9
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en A et B. On note t une tangente commune à Γ_1 et Γ_2 et P et Q les points de tangence respectifs. On note M le point d'intersection de (AB) avec t. Montrer que M est le milieu du segment $[PQ]$.

Exercice 10
Soit $ABCD$ un losange, F sur le segment $[AD]$ et E sur le segment $[AB]$. Soit L le point d'intersection de (FC) et (BD), et K celui de (EC) et (BD), Q celui de (FK) et (BC) et P celui de (EL) et (DC). Montrer que $CP = CQ$.

Exercice 11
Soit D le pied de la bissectrice issue de A. Les cercles circonscrits aux triangles ACD et ABD recoupent les côtés $[AB]$ et $[AC]$ en E et F respectivement. Montrer que $BE = CF$.

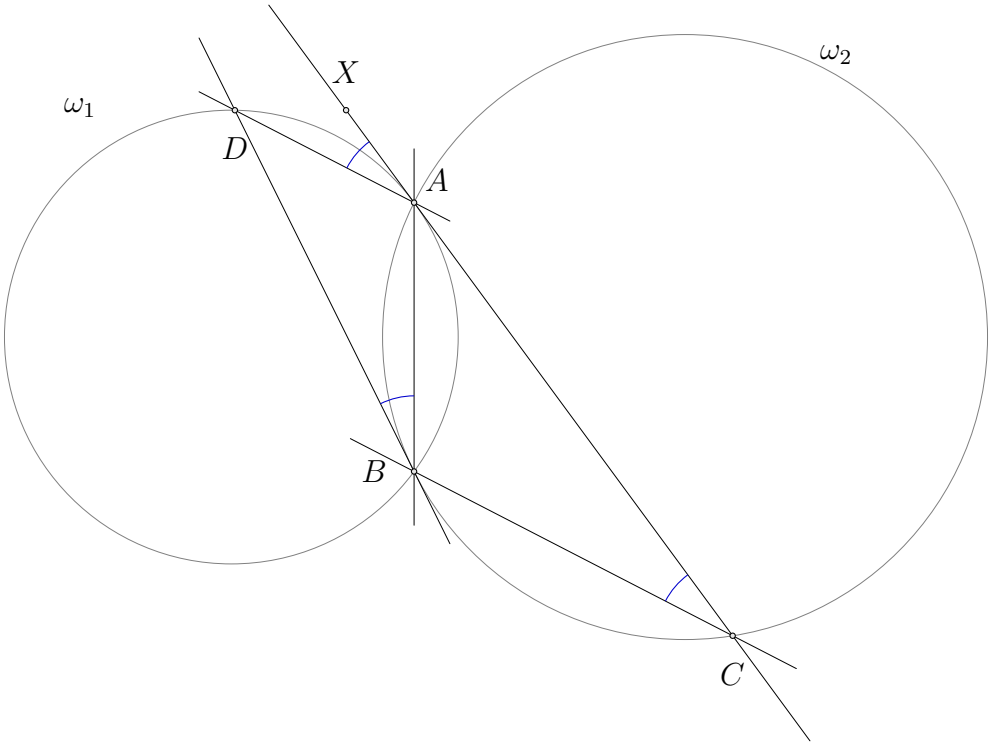
Exercice 12
Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que $BC < AB$ et $BC < CA$. Soient P un point sur le segment $[AB]$ et Q un point sur le segment [AC] tels que $P \neq B$, $Q \neq C$ et $BQ = BC = PC$. Soient T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ, H l'orthocentre du triangle ABC, et S le point d'intersection des droites BQ et CP. Démontrer que T, H et S sont colinéaires.

Solutions

Solution de l'exercice 1

$\widehat{BFA} = 180 - \alpha - \beta$ par somme des angles d'un triangle, donc $\widehat{AFD} = \alpha + \beta$
Par angle inscrit, $\widehat{ACD} = \widehat{ABD} = \beta$ donc par somme des angles d'un triangle, $\widehat{AED} = \beta - \alpha$

Solution de l'exercice 2

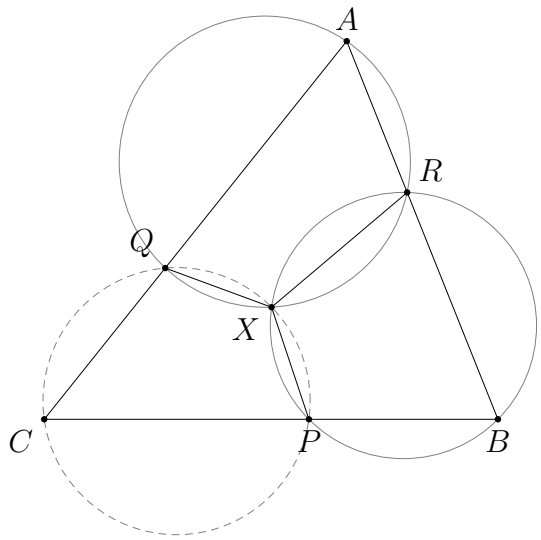


On va prouver la propriété de parallélisme avec les angles correspondants $\widehat{XAD}$ et $\widehat{ACB}$.

Par le théorème de l'angle tangentiel en A pour ω_1, on a $\widehat{XAD} = \widehat{ABD}$. De plus, avec le théorème de l'angle tangentiel, on a $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.

On a alors bien $\widehat{XAD} = \widehat{ACB}$ et (AD) est parallèle à (BC).

Solution de l'exercice 3

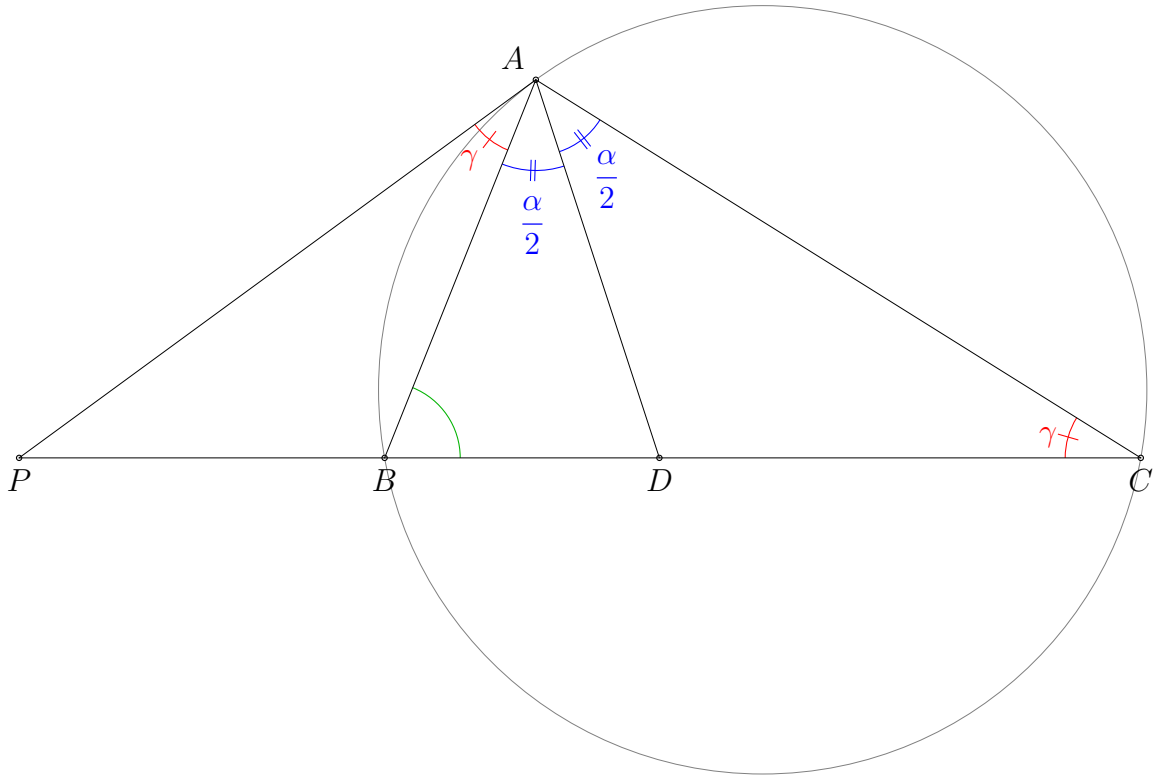


On appelle X le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AQR et BRP. Il s'agit de montrer que le point X appartient au cercle circonscrit du triangle CPQ. Or :

$$\widehat{QXP} = 360° - \widehat{PXR} - \widehat{RXQ} = (180° - \widehat{PXR}) + (180° - \widehat{QXR}) = \widehat{PBR} + \widehat{QAR} = 180° - \widehat{PCQ}$$

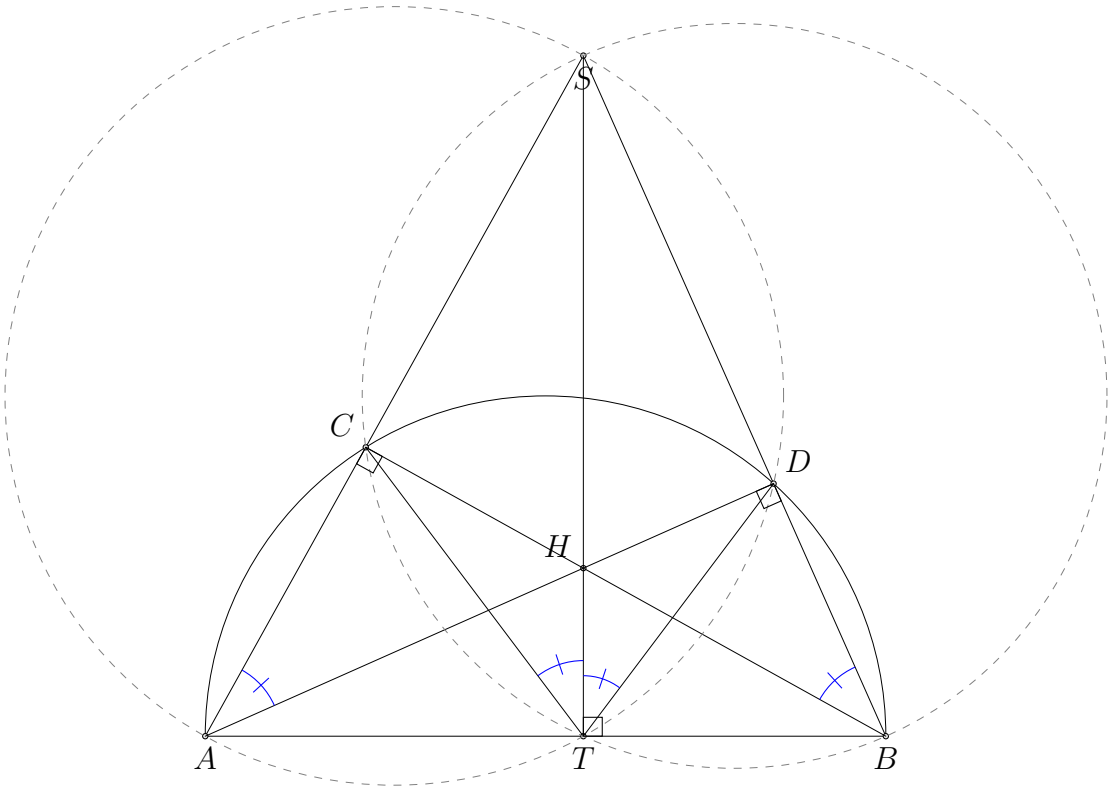
ce qui montre bien que les points Q, X, P et C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



On note α, β et γ les angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Comme (PA) est une tangente à Γ, on a $\widehat{PAB} = \gamma$.
Par ailleurs comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ et $\widehat{DBA} + \widehat{BAD} + \widehat{BAD} = 180°$. Dès lors, $\widehat{ADP} = \widehat{ADB} = \gamma + \frac{\alpha}{2} = \widehat{PAD}$. Donc PAD est isocèle en P.

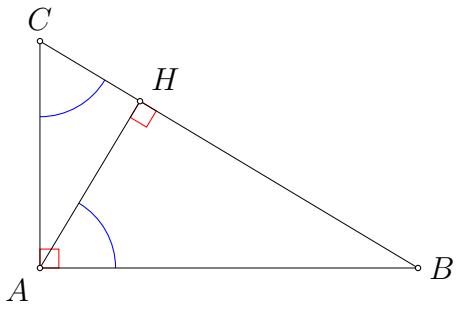
Solution de l'exercice 5



Le fait qu'on ait des points sur un demi-cercle nous donne d'autres angles droits, en C et D. Le réflexe est alors de regarder si des cercles n'apparaissent pas. On pourrait introduire l'intersection $(AD) \cap (BC)$, qui serait alors l'orthocentre du triangle ABS et montrer qu'il est sur la bissectrice de $\widehat{CTD}$. On peut aussi remarquer que $BTCS$ est cyclique, et ainsi que $\widehat{CTS} = \widehat{CBS} = 90° - \widehat{ASB}$. De même, $\widehat{DTS} = \widehat{DAS} = 90° - \widehat{ASB}$, et c'est fini.

Solution de l'exercice 6

On a $ABC \sim HBA \sim HAC$
donc $\frac{AC}{BC} = \frac{HC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = HC \cdot BC$
De même $\frac{AB}{BC} = \frac{HB}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = HB \cdot BC$
Donc on a bien $AB^2 + AC^2 = BC(HB + HC) = BC^2$



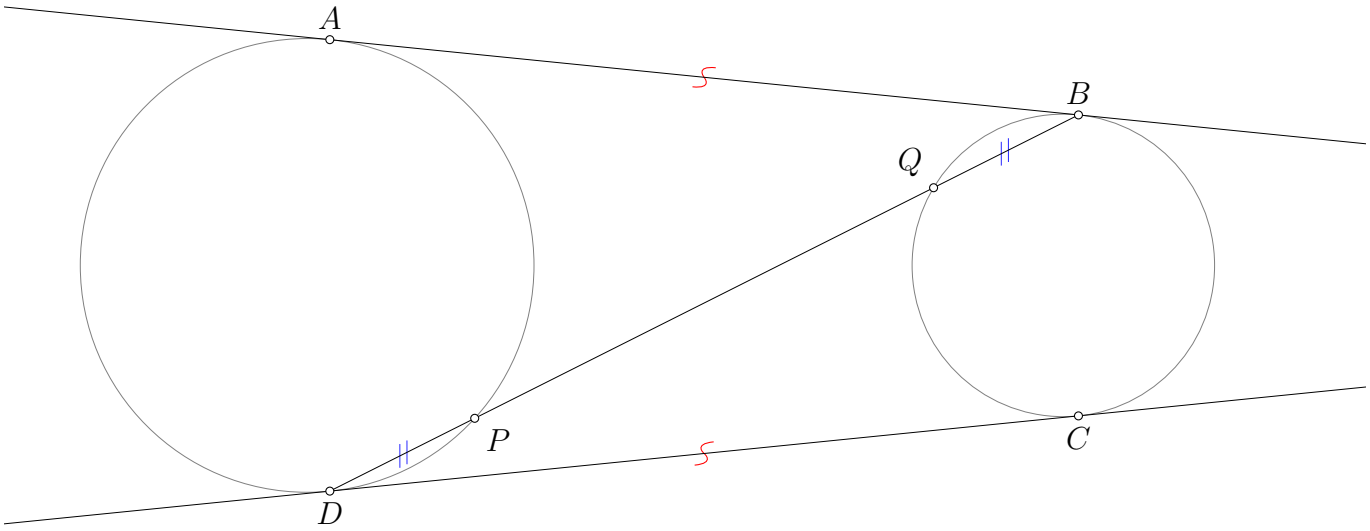
Solution de l'exercice 7

Il s'agit de plusieurs puissances d'un point bien placées :

$$XA \times XB = XP \times XQ = XC \times XD.$$

Par la réciproque de la puissance d'un point, A, B, C, D sont bien cocycliques.

Solution de l'exercice 8



Une symétrie axiale par rapport à la droite joignant les centres des deux cercles échange A et D ainsi que B et C. Donc, $AB = DC$. On pense alors à appliquer la puissance d'un point, on a alors :

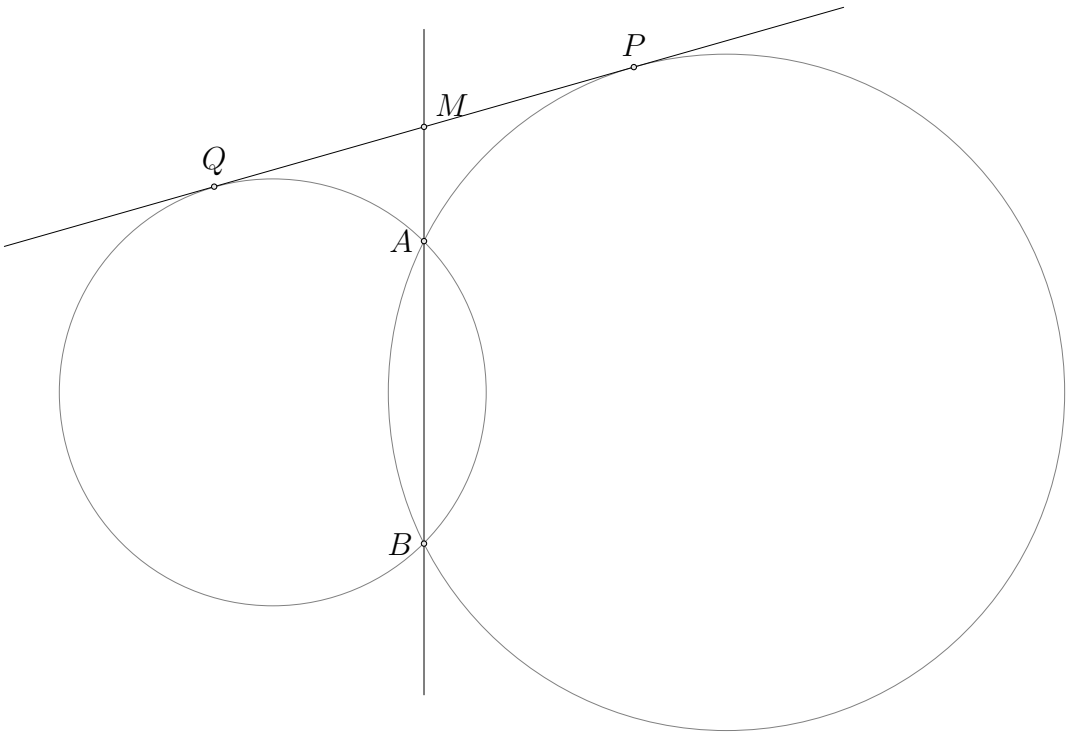
$$DQ \cdot DB = DC^2 = AB^2 = BP \cdot BD,$$

où la première égalité vient de la puissance du point depuis D par rapport à ω_2 et la troisième égalité vient de la puissance du point depuis B par rapport au cercle ω_1. On peut réécrire cette identité de la manière suivante :

$$(BP - DQ)BD = 0.$$

Cela implique que $BP = DQ$ et donc que $DP = BQ$, d'où la conclusion.

Solution de l'exercice 9



L'idée de cet exercice est de calculer la puissance de M par rapport à chacun des cercles :

— Par rapport à Γ_1, la puissance de M vaut MP^2, mais aussi $MA \times MB$

— Par rapport à à Γ_2, la puissance de M vaut MQ^2, mais aussi $MA \times MB$

Ainsi, $MP = MQ$, donc M est bien le milieu du segment $[PQ]$

Solution de l'exercice 10

On cherche des triangles semblables sur la figure. On remarque que $BQK \sim KFD$ (angles alternes-internes) ce qui nous donne $\dfrac{BQ}{FD} = \dfrac{QK}{DK}$

De même, on a donc $KEB \sim KCD$ donc $\dfrac{KB}{KD} = \dfrac{EB}{CD}$

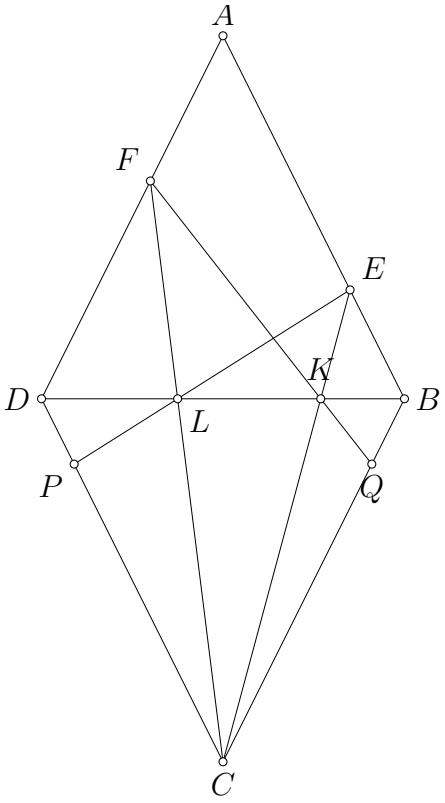
En combinant les deux on obtient $\dfrac{QK}{DF} = \dfrac{EB}{CD}$ soit $QB = \dfrac{EB \cdot DF}{CD}$

On réitère : $DPL \sim BEL$ donc $\frac{DP}{BE} = \frac{DL}{BL}$

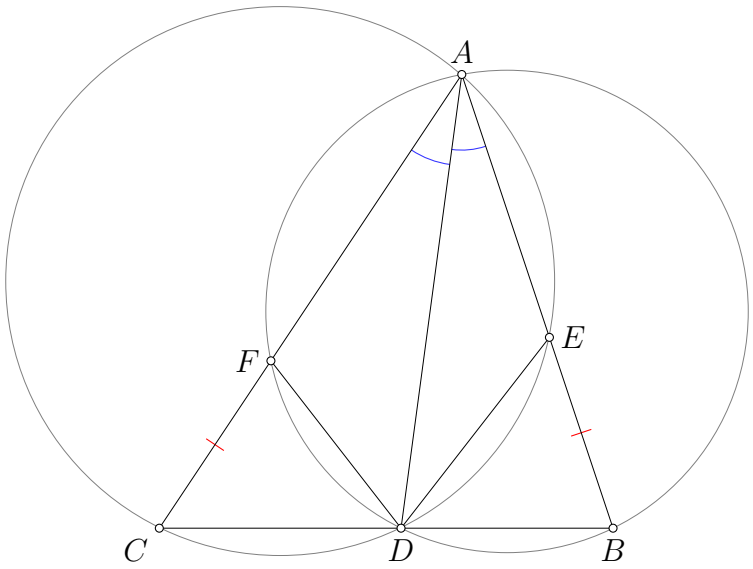
De même $DFL \sim BCL$ donc $\dfrac{DF}{BC} = \dfrac{DL}{BL}$

en combinant on a donc $DP = \dfrac{DF \cdot BE}{BC} = \dfrac{EB \cdot DF}{CD} = BQ$

Finalement, on a bien $CQ = CP$



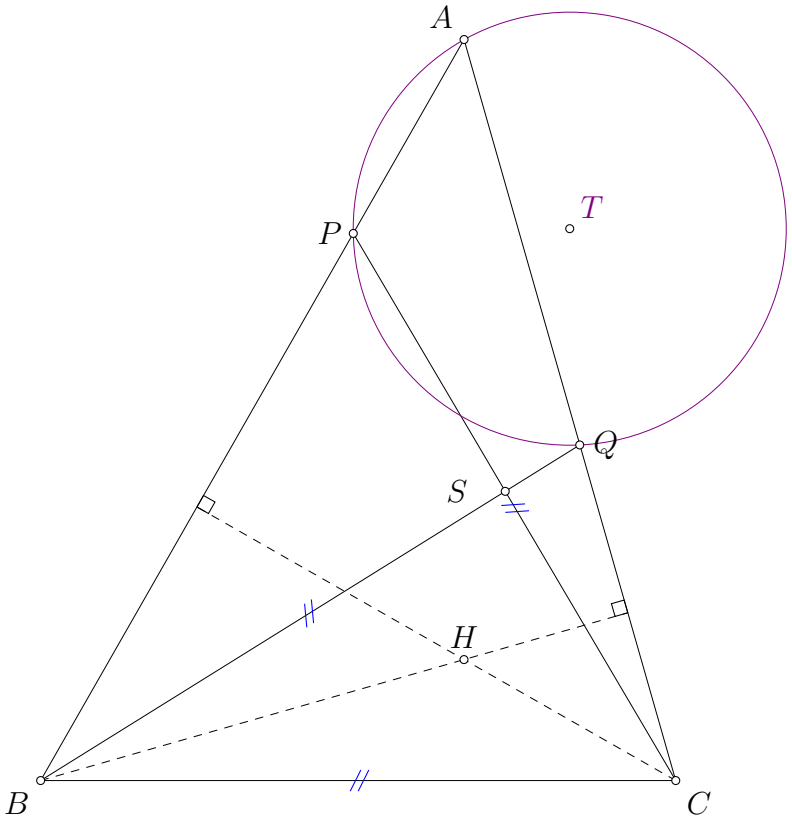
Solution de l'exercice 11



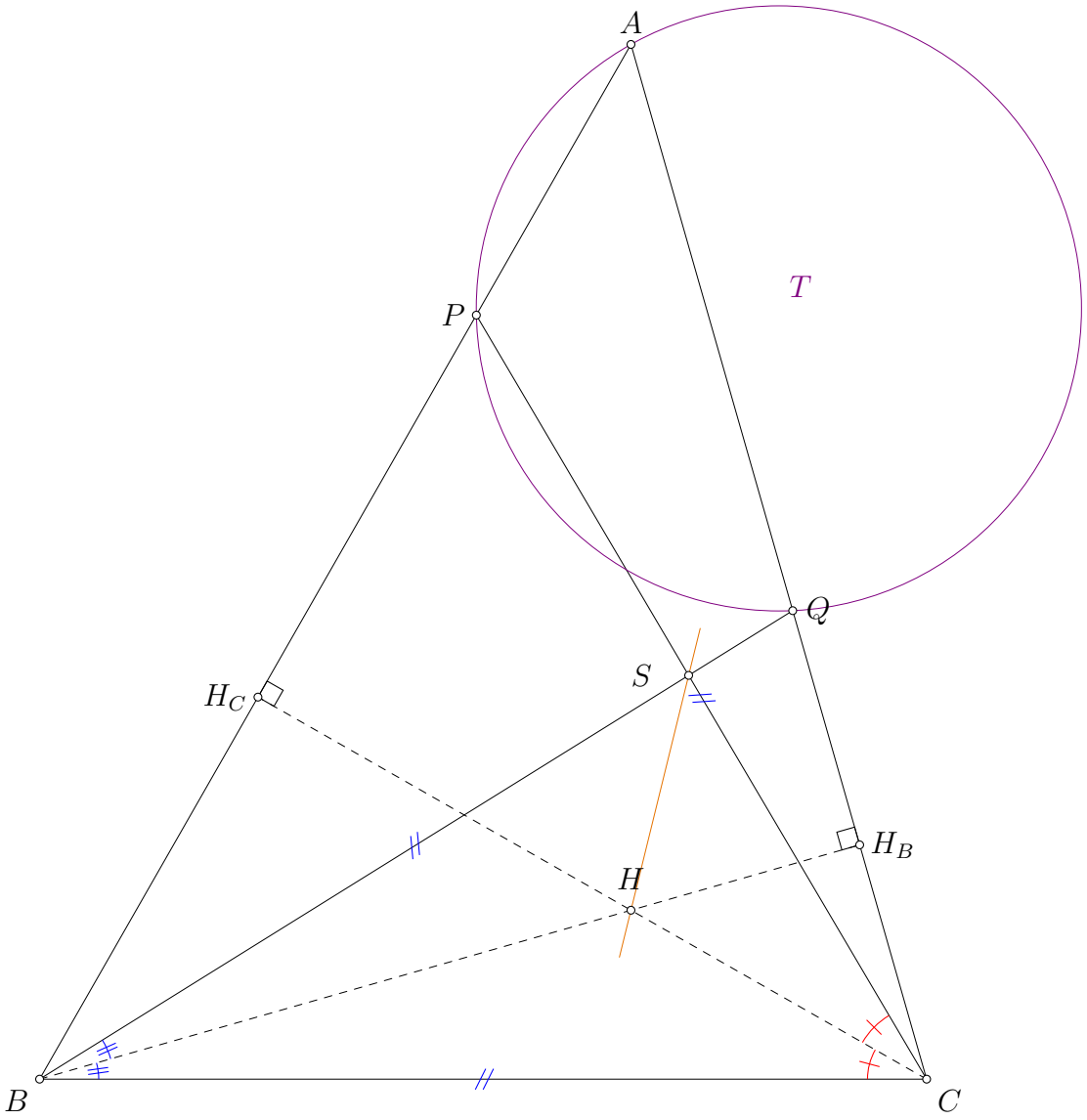
On va montrer que BDE et DFC sont isométriques. Par le théorème du pôle Sud, comme AD est la bissectrice de $\widehat{EAC}$ et de $\widehat{BAF}$, on a $DE = DC$ et $DB = DF$. De plus par angle inscrit, $\widehat{BDE} = 180 - \widehat{EDC} = 180 - \widehat{EAC} = 180 - \widehat{BDF} = \widehat{FDC}$. Donc les triangles sont isométriques et la conclusion suit.

Solution de l'exercice 12

Devant ce problème il nous faut un plan d'attaque ! Notre but est de considérer des bouts de la figure complète (qu'on doit toujours faire pour avoir les idées claires, et regarder si on voit à l'oeil des alignements, des cocyclités etc... incluse ci-dessous) pour ne pas s'embrouiller. On procède donc en deux étapes, d'abord en regardant H et S, puis en regardant T et S.

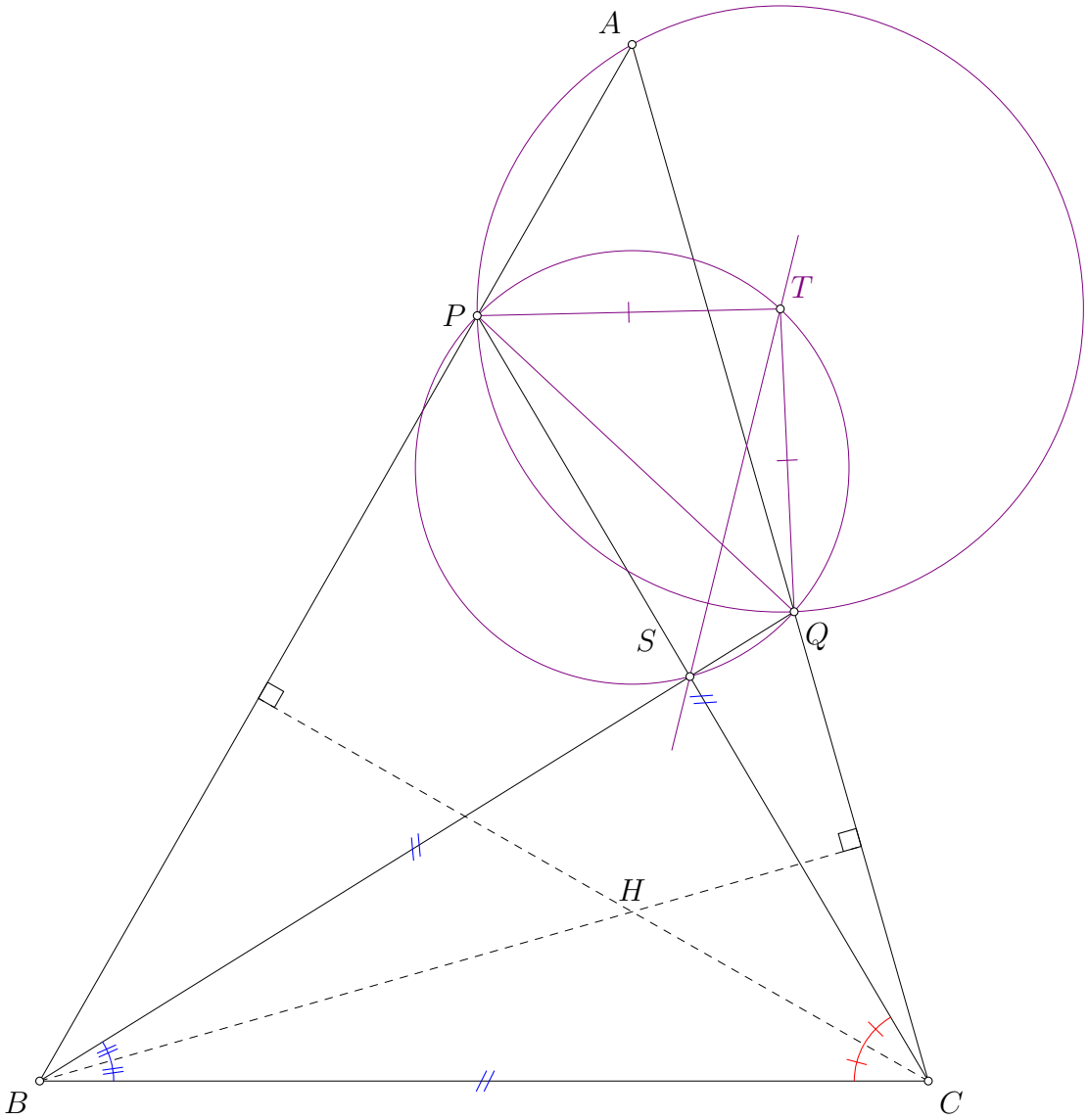


ETAPE 1 :



On montre que H est sur la bissectrice de $\widehat{PSQ}$. En effet BPC est isocèle en C donc sa bissectrice et sa hauteur sont confondues donc H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$. De même H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{QBC}$, ce qui conclut comme les trois bissectrices sont concurrentes.

ETAPE 2 :



On montre d'abord que $PTQS$ est cyclique : en effet par triangles isocèles on a $\widehat{SPA} = 180 - \widehat{ABC}$ et $\widehat{SQA} = 180 - \widehat{ACB}$. Ainsi $\widehat{PSA} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} - \widehat{BAC} = 180 - 2\widehat{BAC}$. Or par angle au centre dans le cercle de centre T, on a $\widehat{PTQ} = 2\widehat{BAC}$. Ceci conclut par caractérisation des angles opposés comme supplémentaires.
Ceci fait, par angles inscrits et PTQ isocèle en T, on a $\widehat{PST} = \widehat{PQT} = \widehat{QPT} = \widehat{QST}$, donc T est sur la bissectrice de $\widehat{BSC}$ comme H l'était, ce qui conclut le problème.

2 Algèbre : Inégalités (Noam)

Ce cours reprend l'excellent cours donné par Hugo et Martin à Valbonne en 2025.

3 Algèbre : Équations fonctionnelles 1 (Oscar)

Cours

Ce cours s'inspire des cours d'équations fonctionnelles donnés les trois dernières années au groupe B à Valbonne.

Commençons par définir la notion de fonction. Pour deux ensembles A et B, une fonction est comme une boîte magique qui à tout élément de A associe un élément de B. A est appelé *ensemble de départ* ou *ensemble de définition* et B est appelé *ensemble d'arrivée*. Voici quelques exemples de fonctions :

— $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x \end{pmatrix}$ est la fonction identité sur $\mathbb{R}$.

— $f : \begin{pmatrix} \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ x \longmapsto x^2 \end{pmatrix}$ est la fonction carrée sur $\mathbb{Q}$.

— $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto 2026 \end{pmatrix}$ est une fonction constante.

Il faut faire attention à ce que la fonction soit bien définie sur tout l'ensemble de départ. Ainsi, $f : \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x} \end{pmatrix}$ n'est pas une fonction correcte car elle n'est pas définie sur $\mathbb{R}_-^*$.
Il faut également vérifier que la fonction est bien à valeur dans l'ensemble d'arrivée. Ainsi, $f : \begin{pmatrix} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto x - 1 \end{pmatrix}$ n'est pas une fonction correcte car $f(0) = -1 \notin \mathbb{N}$.

Une équation fonctionnelle est une équation dans laquelle l'inconnue recherchée n'est plus un nombre, mais une fonction. On cherche alors à identifier toutes les fonctions qui satisfont une relation donnée.

Une équation fonctionnelle se présente généralement sous la forme d'une égalité impliquant une ou plusieurs variables de $\mathcal{A}$ et la fonction f. Voyons sur un premier exemple :

Exemple 1.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que pour tous réels x et y on ait

$$f(x + y) = f(x) + y$$

Méthode d'Analyse-Synthèse
Pour résoudre une équation fonctionnelle, on adopte presque toujours une méthode en deux étapes : l'analyse et la synthèse.

— Analyse : Dans cette étape, on suppose qu'il existe une solution f et on essaye de déduire un maximum de conséquences sur cette fonction, souvent en remplaçant x et y par des valeurs bien choisies. L'objectif est d'arriver à une affirmation du type : « Si f est solution, alors f doit nécessairement être de la forme ... ». De cette façon **on restreint l'ensemble des solutions possibles**.

— Synthèse : Une fois qu'on estime avoir suffisamment restreint les solutions possibles, il nous reste à vérifier lesquelles sont effectivement solutions de l'équation initiale et lesquelles ne le sont pas. En général, la synthèse est souvent plus simple que l'analyse,

mais il est essentiel de ne pas négliger cette vérification, même lorsque les solutions semblent évidentes.

Retour à l'exemple 1.
Analyse : Ici, puisque l'équation est vraie pour tout réel x, on peut poser $x = 0$. De cette façon $f(y) = y + f(0)$ quel que soit le réel y. Ainsi si f est solution alors c'est une fonction de la forme $f(x) = x + c$ où c est une constante réelle.
Synthèse : On vérifie que toutes les fonctions de cette forme sont bien solutions. En effet il y aurait tout à fait pu y avoir des intrus.

$$f(x + y) = (x + y) + c = (x + c) + y = f(x) + y$$

L'analogie entre les équations fonctionnelles et une enquête policière est souvent utilisée pour illustrer le processus de résolution. Dans cette métaphore, nous agissons comme des détectives, utilisant les indices fournis par l'équation pour identifier des fonctions suspectes. L'analyse permet de trouver une liste de suspects restreinte, tandis que la phase de vérification agit comme un jugement final, déterminant quelles fonctions sont réellement des solutions.

Remarque 2.
Les substitutions les plus classiques sont $x = 0$, 1 ou -1, ainsi que $x = y$ ou $x = -y$ ou encore $x = \pm f(y)$. Mais cela dépend évidemment de l'équation qu'on nous donne. Par exemple, s'il y a un terme de la forme $f(x - g(y))$ (par exemple $f(x - y^2)$)), il peut être intéressant de remplacer x par $g(y)$ pour obtenir $f(0)$. Ou alors une substitution qui permet de rendre égaux deux termes de l'égalité. L'objectif est de s'adapter au problème pour trouver les meilleures substitutions possibles.

Exercices

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(xy)$.

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x - f(y)) = 1 - x - y$.

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(f(n)) = n + 1$.

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$.
On essayera d'abord de trouver les valeurs de f sur $\mathbb{N}$ et puis sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y)+f(x)f(y) = xy$.

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant x$ et pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $(x+y)f(x)f(y) = xf(y) + yf(x)$.

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que $f(0) = 0$ et pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $f(f(x) + f(y)) = x + y$.

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $f(x-y) + f(x+y) = 2f(x)$.

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(xy) = f(x)f(y)$ et $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2xy$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Analyse : Soit f une solution.
Avec $y = 0$ on trouve pour tout réel x que

$$f(x) = f(0)$$

Synthèse : On vérifie que toutes les fonctions constantes $f(x) = c \in \mathbb{R}$ sont bien solutions.
Pour x, y réels :

$$f(x+y) = c = f(xy)$$

Donc les solutions sont les fonctions constantes.

Solution de l'exercice 2
Analyse : Soit f une solution.
Ici, on a envie de se débarrasser du terme compliqué $f(x - f(y))$, on pose donc $x = f(y)$ ce qui donne pour tout réel y que

$$f(0) = f(f(y) - f(y)) = 1 - f(y) - y$$

$$f(y) = -y + (1 - f(0))$$

Ici on va même pouvoir affiner notre analyse et trouver $f(0)$. En effet $f(0) = -0 + (1 - f(0))$ donc $f(0) = \frac{1}{2}$.
Synthèse : On vérifie que la fonction $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ avec est bien solution. Pour xy, réels :

$$f(x - f(y)) = -\left(x - \left(-y + \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{2} = 1 - x - y$$

Donc $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 3
Supposons par l'absurde qu'il existe f une fonction solution.
On va utiliser une astuce très utile à toujours tenter dès qu'on connaît bien $f(f(x))$.
L'astuce est d'évaluer $f(f(f(n)))$ de deux façons différentes. Ici pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f\Big(f(f(n))\Big) = f(n+1) \quad \text{et aussi} \quad f\Big(f\Big(f(n)\Big)\Big) = f(n) + 1$$

Donc

$$f(n+1) = f(n) + 1$$

De cette façon par une récurrence que l'on n'explicitera pas

$$f(n) = f(1 + \cdots + 1) = f(0) + 1 + \cdots + 1 = f(0) + n$$

En remplaçant dans l'équation initiale

$$f(f(n)) = n + f(0) + f(0) = n + 1$$

$$2f(0) = 1$$

Donc $f(0)$ n'est pas entier : c'est absurde.
Il n'existe donc pas de fonction solution.

Solution de l'exercice 4
Analyse : Soit f une fonction solution.
Pour $x = y = 0$, on a $f(0) = 2f(0)$ et donc $f(0) = 0$.
Pour $y = -x$, on a $f(0) = f(x) + f(-x)$ et donc $f(-x) = -f(x)$. Ainsi, f est impaire.
Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(n) = nf(1)$:

— Initialisation : pour $n = 0$ et 1, la propriété est bien vérifiée.

— Hérédité : pour $n \geqslant 1$, supposons la propriété vérifiée au rang n et montrons-la au rang $n+1$. On a alors : $f(n+1) = f(n) + f(1) = nf(1) + f(1) = (n+1)f(1)$.

Par imparité, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $f(n) = nf(1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a par récurrence immédiate :

$$f(1) = f\left(\frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{n}\right) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$$

et donc $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}f(1)$.
Soit $q \in \mathbb{Q}$. On pose $q = \frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. On a alors :

$$f(q) = f\left(\frac{a}{b}\right) = f\left(\frac{1}{b} + \ldots + \frac{1}{b}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right) + \ldots + f\left(\frac{1}{b}\right) = af\left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}f(1) = qf(1)$$

Synthèse : Réciproquement, on vérifie que pour tout $a \in \mathbb{Q}$, la fonction $f : x \mapsto ax$ convient car pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, on a : $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$.

Solution de l'exercice 5
Le fait que la fonction soit définie dans les rationnels, nous invite à se ramener à l'équation de Cauchy. Mais on ne pourra pas le faire sur f car on voit qu'il y a d'autres solutions que les fonctions linéaires. (les fonctions affines $f(x) = a + b$ sont aussi solutions)
Avec $y = 0$ et $x = 2X$ pour X réel :

$$2f(X) = f(2X) + f(0)$$

Ainsi dans l'équation initiale :

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x+y) + f(0)$$

L'astuce ici va être de poser $g(x) = f(x) - f(0)$.
De cette façon g vérifie bien l'équation de Cauchy. Donc $g(x) = ax = f(x) - f(0)$ et ainsi $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.
On vérifie que les fonctions affines sont bien solutions.

Remarque 3.
Comment trouver le bon g à poser ?
On se doutait déjà que f ne pourrait pas vérifier Cauchy, car les fonctions affines sont aussi solutions. Là on peut se demander si ce ne sont pas les seules solutions. Si on veut montrer que $f(x) = ax + b$ avec a et b des constantes réelles, cela signifie que $g(x) = f(x) - f(0) = ax + b - x = ax$ vérifiera probablement Cauchy si on est en train de bien deviner les solutions. C'est pour cela qu'il est souvent utile de passer du temps à deviner les solutions au brouillon pour avoir de bonnes idées dans la résolution.

Solution de l'exercice 6
Analyse : Avec $y = 0$ on trouve pour tout réel x que

$$f(x)(1 + f(0)) = 0$$

Or la fonction nulle n'est pas solution de l'équation, donc on peut trouver une valeur x tel que $f(x) \neq 0$, et ainsi $f(0) = -1$.
Puis avec $x = -y = -1$ on trouve $f(1)f(-1) = 0$

- Cas 1 : $f(1) = 0$. On souhaite annuler le produit $f(x)f(y)$, on pose donc $y = 1$, et on voit qu'il faut remplacer x par $x - 1$ pour obtenir $f(x) = x - 1$.
- Cas 2 : $f(-1) = 0$. De même, en posant $y = -1$ et en remplaçant x par $x + 1$ on a $f(x) = -x - 1$.

Synthèse : On vérifie que ces deux fonctions sont bien solutions.

Solution de l'exercice 7
En posant $(x, y) = (0, 0)$, on trouve $f(0) \leqslant f(0) + f(0) \iff f(0) \geqslant 0$. Donc $f(0)$ est positif.
De plus, en posant $(x, y) = (x, -x)$, on trouve :

$$f(0) \leqslant f(x) + f(-x) \implies f(x) \geqslant -f(-x)$$

Or, avec la première condition, trouve que pour tout réel x, $f(-x) \leqslant -x \iff x \leqslant -f(-x)$.
Donc en combinant les deux inégalités, on trouve

$$x \leqslant -f(-x) \leqslant f(x) \implies x \leqslant f(x) \leqslant x$$

Donc pour tout réel x, $f(x) = x$.

Remarque 4.
Il ne faut pas se laisser troubler par l'inégalité qui remplace l'égalité dans ce problème. De nombreux problèmes en compétition et en test sont désormais plutôt des "inéquations fonctionnelles".

Solution de l'exercice 8
Analyse :
On commence par prendre $y = x$, ce qui donne :

$$2xf(x) = 2xf(x)^2$$

D'où pour tout x non-nul, $f(x) = 1$ ou $f(x) = 0$. Ici, on est tenté de conclure qu'il y a deux possibles solutions pour les réels non-nuls : soit $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, soit $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Mais cela ne tient pas compte des multigraphes : on n'a pas encore montré qu'une fonction telle que $f(x) = 0$ pour certains réels (non nuls) et $f(y) = 1$ pour d'autres n'était pas solution.
Pour les écarter, supposons par l'absurde qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, on trouve à partir de l'équation initiale :

$$x = (x + y)f(x)f(y) = 0$$

ce qui est absurde comme on a supposé $x \neq 0$. Donc c'est impossible qu'il y ait de fonction solution qui prenne pour valeur 0 pour un certain antécédent non-nul, et 1 pour un autre antécédent non-nul.
Trouvons maintenant la valeur de $f(0)$ selon le cas. En prenant x non-nul et $y = 0$ on obtient :

$$xf(0) = xf(0)f(x)$$

Donc si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on doit avoir $f(0) = 0$. Sinon, si $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on trouve $xf(0) = xf(0)$, donc $f(0)$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle.
Synthèse :
On vérifie aisément que la fonction nulle est bien solution.
Vérifions maintenant que toutes les fonctions de la forme $f(0) = C$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ sont également solution. Comme x et y jouent des rôles symétriques dans l'équation, il y a trois cas à vérifier :

- **Cas 1 :** $x = y = 0$. On a alors $xf(y) + yf(x) = 0 + 0 = 0$ et $(x + y)f(x)f(y) = 0 \cdot C^2 = 0$, donc on a bien $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
- **Cas 2 :** $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}^*$. Alors $xf(y) + yf(x) = 0 + yC$, et $(x+y)f(x)f(y) = y \cdot C \cdot 1 = yC$, donc on a également $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.
- **Cas 3 :** $x, y \in \mathbb{R}^*$, alors $xf(y) + yf(x) = x + y$ et $(x + y)f(x)f(y) = (x + y) \cdot 1^2 = x + y$, on a bien $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.

Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc la fonction nulle, et toutes les fonctions de la forme $f(0) = C$ (avec $C \in \mathbb{R}$) et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Solution de l'exercice 9
On pose $y = 0$ pour utiliser la seconde condition, et on trouve à nouveau $f(f(x)) = x$. Donc pour l'utiliser, on applique f aux deux membres, ce qui donne :

$$f(f(f(x) + f(y))) = f(x + y) \implies f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Donc toute fonction solution de l'équation initiale est solution de l'équation de Cauchy. De plus, cette fonction a pour domaine de définition $\mathbb{Q}$, donc elle doit être linéaire, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax$ pour un certain réel. On voit que toutes ces fonctions respectent la condition $f(0) = 0$, et en réinjectant cela dans l'équation intiale :

$$f(f(x) + f(y)) = f(ax + ay) = a^2(x + y) = x + y$$

Donc $a^2 = 1 \implies a = 1$ ou -1.
Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ (les calculs pour déterminer a font office de vérification, mais dans le doute ça ne fait jamais de mal de revérifier que les fonctions obtenues sont bien des solutions, on ne sait jamais).

Solution de l'exercice 10
Analyse : Soit f une fonction solution.
On pose pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = f(x) - f(0)$. Ainsi, on a $g(0) = 0$ et pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $g(x - y) + g(x + y) = 2g(x)$.
En posant $x = y$, on obtient que $g(2x) = 2g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{Q}$.
Soit $a, b \in \mathbb{Q}$. On cherche $x, y \in \mathbb{Q}$ tels que $a = x - y$ et $b = x + y$. Pour cela, il suffit de poser $x = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ et $y = \frac{b-a}{2} \in \mathbb{Q}$ et on a alors :

$$g(a) + g(b) = g(x - y) + g(x + y) = 2g(x) = g(2x) = g(a + b)$$

Donc, g vérifie l'équation de Cauchy sur $\mathbb{Q}$ et donc comme vu précédemment, g est linéaire.
Donc, f est affine.
Synthèse : On vérifie réciproquement que toutes les fonctions affines sont bien solution.

Solution de l'exercice 11
Analyse : Soit f une fonction solution.
Pour $x = y = 0$, la seconde condition nous donne que $f(0) = 2f(0)$ et donc $f(0) = 0$.
Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $f(x) = 0$. Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $f(a) = f\left(x \times \frac{a}{x}\right) = f(x)f\left(\frac{a}{x}\right) = 0$. On obtient alors une contradiction avec la seconde condition pour $x = y = 1$.
Dès lors, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x)f(-y) = f(-xy) = f(-x)f(y)$ et donc $\frac{f(-x)}{f(x)} = \frac{f(-y)}{f(y)}$. Il existe donc $c \in \mathbb{R}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(-x)}{f(x)} = c$. Ainsi, $f(-x) = cf(x)$ et c'est aussi vrai pour $x = 0$.
Ainsi, on a $f(1) = f(-1)f(-1) = c^2 f(1)$ et donc comme $f(1) \neq 0$, on a $c^2 = 1$ et donc $c = \pm 1$.
Pour $y = -x$, on a $f(x) + f(-x) - 2x^2 = 0$ et donc $(1 + c)f(x) = 2x^2$. Pour $x = 1$, on a $c \neq 1$ et donc $c = 1$.
Donc, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.
Synthèse : On vérifie réciproquement que la fonction carrée est bien solution.

4 Géométrie : Configurations (Héloïse)

On fixe un triangle ABC, de centre de cercle inscrit I, de centre de cercle circonscrit O, d'orthocentre H.

Considérez chacun de ces exercices comme du cours, ce sont des configurations à connaître et à savoir reconnaître et utiliser dans des figures plus compliquées, avec plus de points, à appliquer à un sommet autre que A dans ABC ou même dans un triangle autre que ABC.

Exercices

Exercice 1
Soit A', B', C' les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement, H l'orthocentre.

— Tracer tous les cercles passants par plus de 4 points parmis ceux nommés.

— Montrer que H est le centre du cercle inscrit à $A'B'C'$.

$A'B'C'$ est le *triangle orthique* de ABC.

Exercice 2 (Théorème du pôle Sud)
Montrer que la bissectrice issue de A et la médiatrice de $[BC]$ se recoupent sur le cercle circonscrit de ABC.

Exercice 3
Soient S_A, S_B, S_C les pôles Sud de A, B, C respectivement. Montrer que I est l'orthocentre de $S_AS_BS_C$.

Exercice 4

— Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés de ABC sont sur le cercle circonscrit de ABC.

— Montrer que les symétriques de H par rapport aux milieux des côtés de ABC sont sur le cercle circonscrit de ABC.

Exercice 5
Montrer que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$.

On dit que O et H sont conjugués isogonaux.

Exercice 6
Soit M le milieu de BC et A' l'antipode de A dans le cercle circonscrit de ABC. Montrer que M est le milieu de $[HA']$.

Exercice 7
Soit S le pôle Sud de A. Montrer que B, C, I sont sur un cercle de centre S.

Ce cercle est le cercle antarctique *de A dans ABC.*

Exercice 8
Soit I_A l'intersection des bissectrices extérieures de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$.

— Montrer que I_A est le centre d'un cercle tangent au segment $[BC]$ et aux droites (AB) et (AC), c'est le cercle A-exinscrit de ABC.

— Montrer que I_A appartient au cercle antartique de A dans ABC.

Exercice 9 (Théorème du pôle Nord)
Montrer que la bissectrice extérieure issue de A et la médiatrice de $[BC]$ se recoupent sur le cercle circonscrit de ABC.

Exercice 10
Soit ω le cercle inscrit de ABC, et Ω son cercle A-exinscrit. On note D, E les points de tangence de ω avec $[BC]$ et $[AB]$ respectivement. On note également J le point de tangence de Ω avec $[BC]$.

1. Montrer que $BD = BE$.
2. Montrer que $BD = CJ$.

Exercice 11
Soit M le milieu de BC, E le pied de la hauteur issue de B, F le pied de la hauteur issue de C. Montrer que MEF est un triangle isocèle en M.

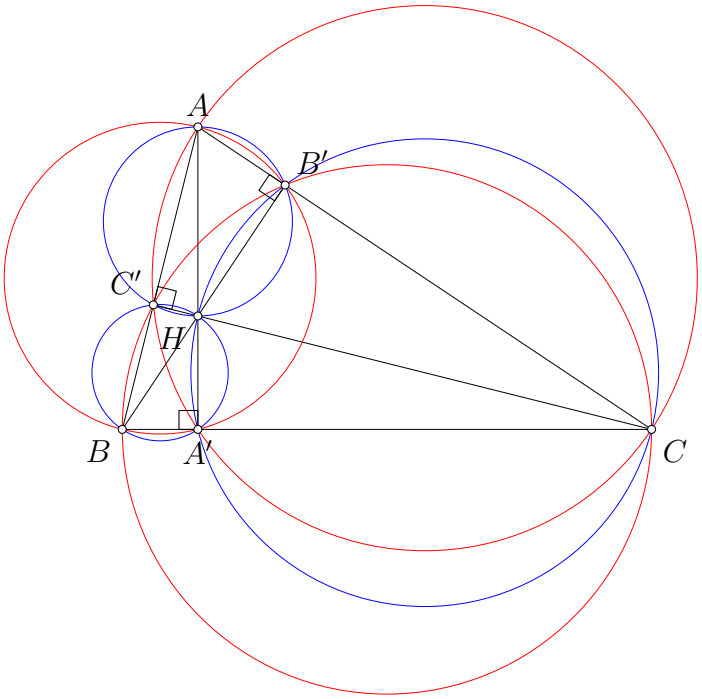
Exercice 12
Comparer les rayons des cercles circonscrits à ABC et BHC.

Exercice 13 (BXMO 2011, P2)
Soit D, E, F les pieds des bissectrices de $\widehat{BAC}, \widehat{CBA}, \widehat{ACB}$ respectivement. La médiatrice de $[AD]$ coupe (BI) et (CI) en M et N respectivement. Montrer que A, I, M, N sont cocycliques.

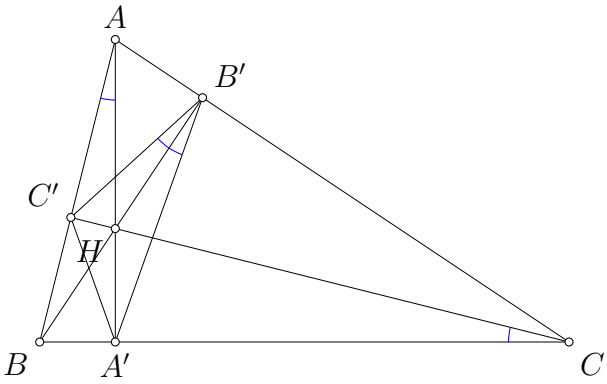
Exercice 14 (JBMO 2014, G4)
Soit M le milieu de $[BC]$, et N le milieu de $[AH]$. Soit O' le centre du cercle circonscrit à BHC. Montrer que $ANO'M$ est un parallélogramme.

Solutions

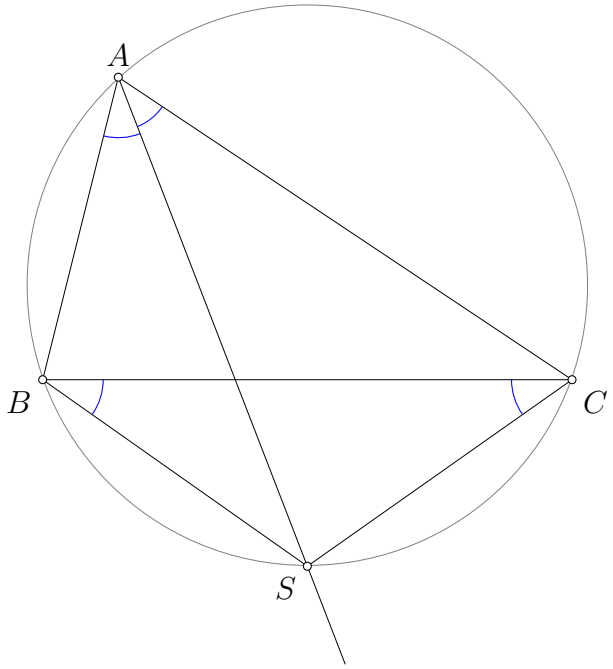
Solution de l'exercice 1
D'après le théorème de l'angle inscrit on peut tracer ces 6 cercles :



Pour la deuxième question, il suffit de vérifier que $\widehat{HB'C'} = \widehat{HB'A'}$ et les autres égalités d'angle se montrent de la même manière. Or H, B', A, C' sont cocycliques donc $\widehat{HB'C'} = \widehat{HAC'}$. A, C', A', C sont cocycliques donc $\widehat{HAC'} = \widehat{HCA'}$. H, A', C, B' sont cocycliques donc $\widehat{HCA'} = \widehat{HB'A'}$. On a ce qu'on veut.



Solution de l'exercice 2

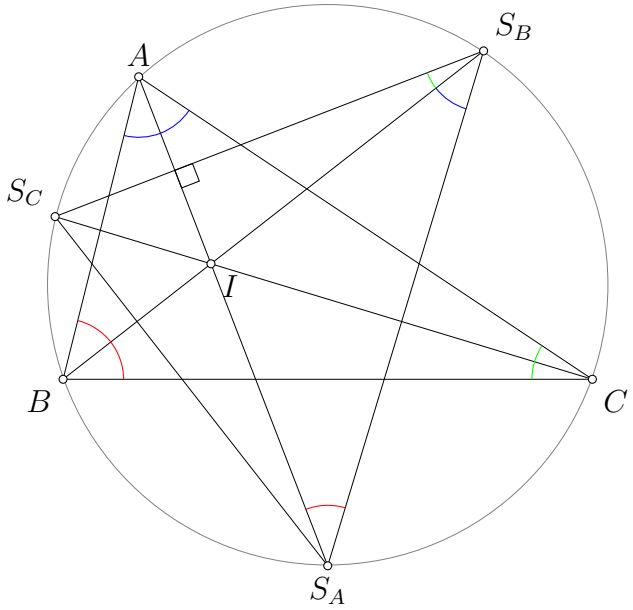


On redéfinit S comme l'intersection de la bissectrice issue de A et du cercle circonscrit. Une chasse aux angles donne alors

$$\widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \widehat{SAB} = \widehat{SCB},$$

et SCB est isocèle en S. Ainsi, S est sur la médiatrice de $[BC]$, comme voulu.

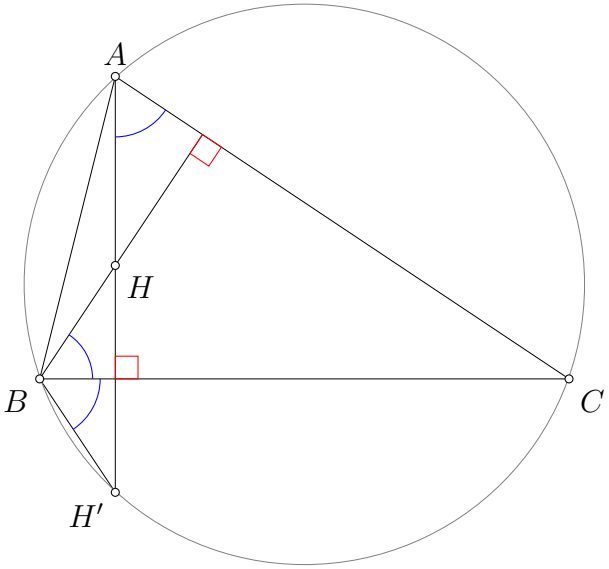
Solution de l'exercice 3



On montre que $(AI) \perp (S_C S_B)$, les autres orthogonalités se montrent de la même façon. Par angle inscrit on a : $\widehat{S_A AB} = \widehat{S_A S_B B}$, $\widehat{S_B BA} = \widehat{S_B S_A A}$, $\widehat{BCS_C} = \widehat{BS_C S_B}$.
Ainsi il reste à montrer que $\widehat{S_A AB} + \widehat{S_B BA} + \widehat{BCS_C} = 90$. Or comme $(S_A A), (S_B B), (S_C C)$

sont les bissectrices des angles du triangle ABC, alors $2\widehat{S_AAB} + 2\widehat{S_BBA} + 2\widehat{BCS_C} = 180$. On divise par 2 et on obtient ce qu'on veut

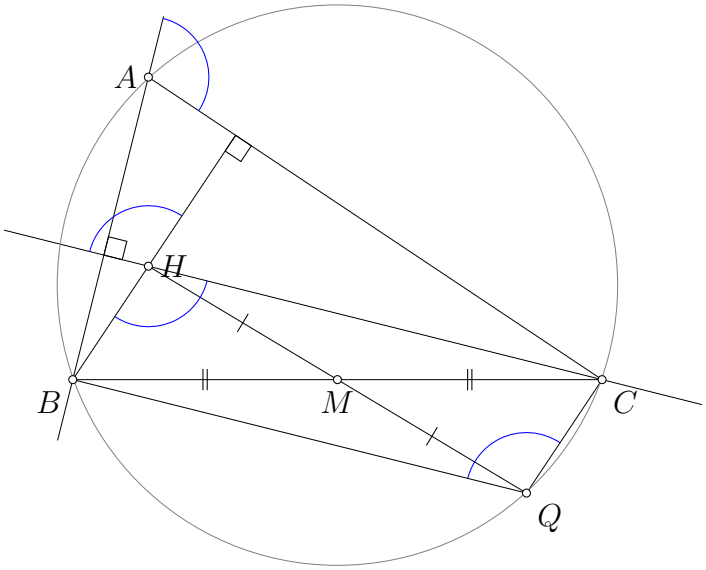
Solution de l'exercice 4



Il s'agit encore d'une chasse aux angles rapide. Ici, $\widehat{H'BC} = \widehat{HBC}$ par symétrie, et

$$\widehat{HBC} = 90° - \widehat{ACB} = \widehat{HAC}$$

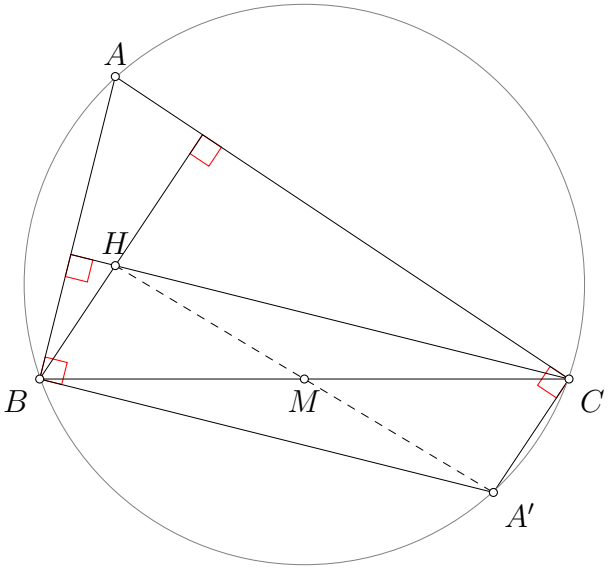
par définition de H.
Pour la deuxième question, on note Q le symétrique de H par rapport au milieu de $[BC]$. $[HQ]$ et $[BC]$ se coupent en leur milieu donc $HBQC$ est un parallélogramme. Ainsi $\widehat{CQB} = \widehat{CHB}$. Puis $\widehat{CHB} = 180 - \widehat{BAC}$. Par la réciproque de l'angle inscrit, C, Q, B, A cocycliques.



Solution de l'exercice 5
Par somme des angles dans un triangle isocèle et angle au centre, on a

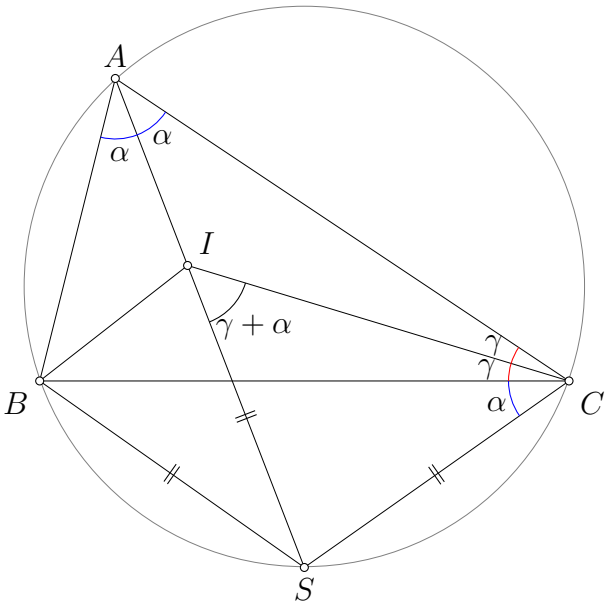
$$\widehat{BAO} = \frac{180 - 2\widehat{AOB}}{2} = 90° - \widehat{ACB} = \widehat{CAH}.$$

Solution de l'exercice 6



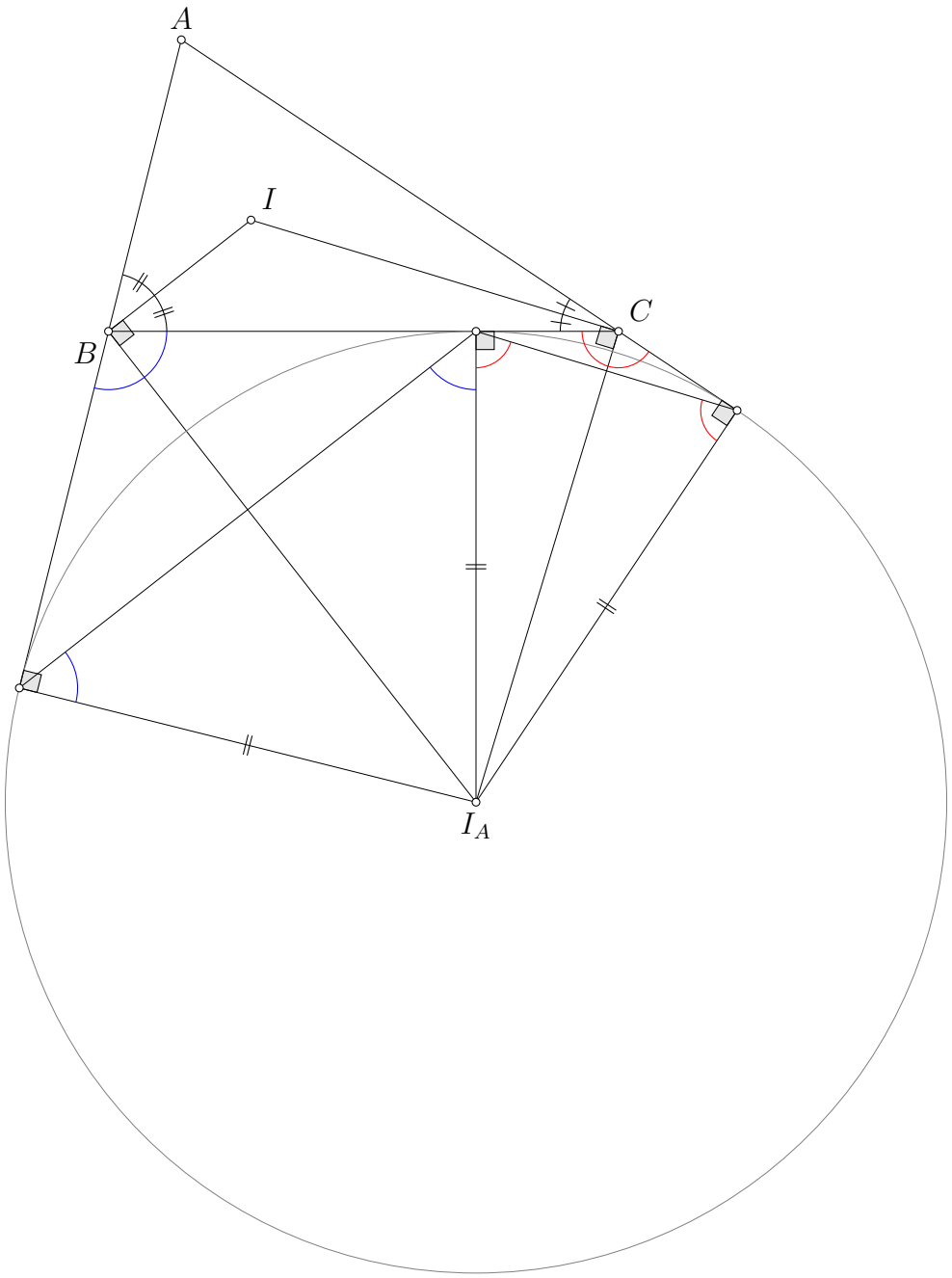
On montre les parallélismes grâce au fait qu'on a beaucoup d'angles droits dans la figure. En effet, (CA') et (BH) sont toutes deux perpendiculaires à (AC), et sont donc parallèles. Le deuxième parallélisme se fait de la même manière.

Solution de l'exercice 7



S est le pôle Sud de A dans ABC donc $BS = SC$. Il reste à montrer que $IS = SC$.
A, B, S, C sont cocycliques donc $\widehat{BAS} = \widehat{BCS} = \alpha$. (AI) et (CI) sont les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ACB}$ respectivement donc $\widehat{SAC} = \alpha$ et $\widehat{ACI} = \widehat{ICB} = \gamma$. Ainsi $\widehat{SIB} = 180 - \widehat{CIB} = \alpha + \gamma = \widehat{ICS}$. On a bien ISC isocèle en S.

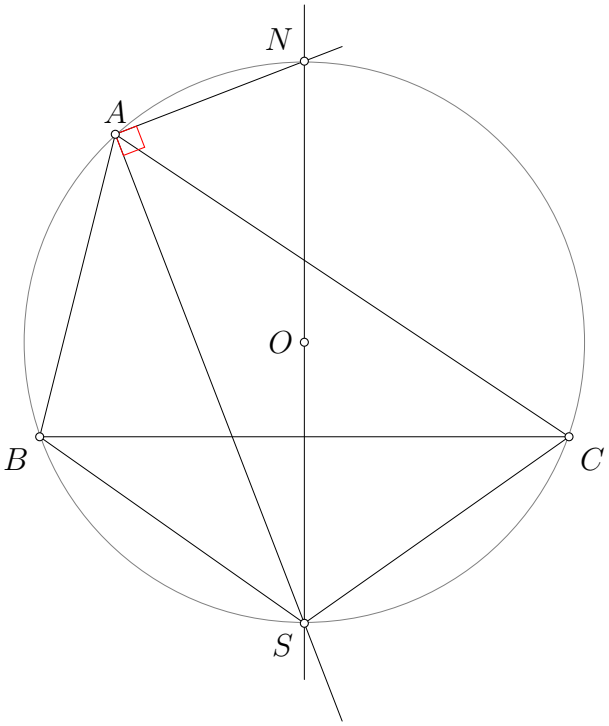
Solution de l'exercice 8



— I_A est à équidistance des droites (AC), (BC) et (AB) et est donc le centre d'un cercle tangent à ces trois droites.

— On a $\widehat{IBI_A} = \widehat{ICI_A} = 90$ donc I, B, C et I_A sont bien cocycliques, et $[II_A]$ est bien un diamètre.

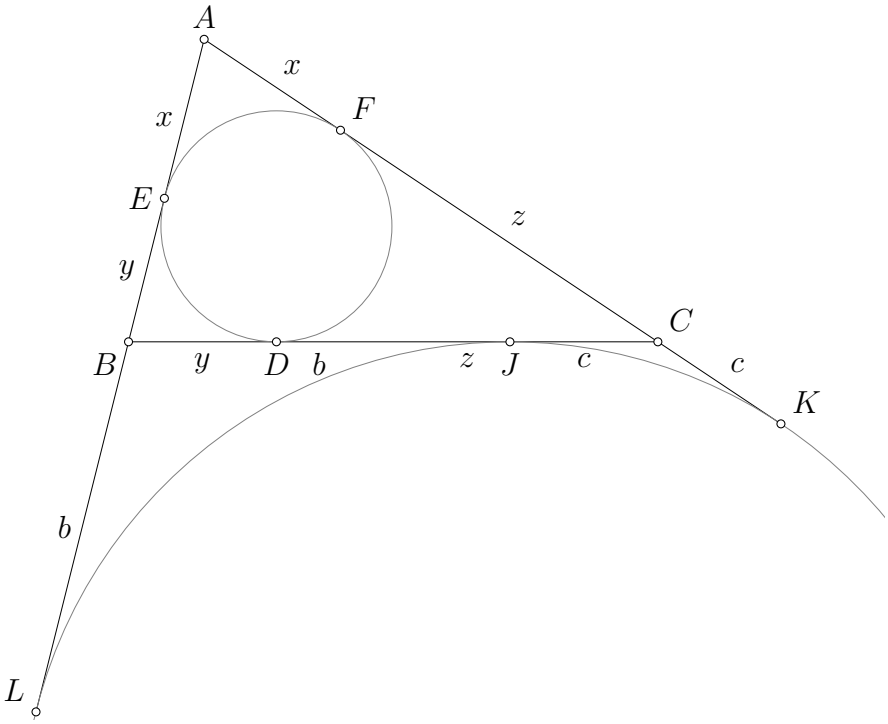
Solution de l'exercice 9



Définissons N comme l'intersection de la bissectrice extérieure et du cercle circonscrit. Puisque les bissectrices extérieures et intérieures sont perpendiculaires, $[NS]$ est un diamètre du cercle circonscrit. Par le théorème du Pôle Sud, $(OS) = (NS)$ est la médiatrice de $[BC]$, et on a fini.

Remarque : Le point N est également le centre d'un cercle passant par B, C, I_B et I_C, appelé le *cercle arctique*. La preuve se fait par chasse aux angles pour montrer qu'il y a beaucoup de triangles isocèles.

Solution de l'exercice 10



La puissance d'un point nous donne une quantité d'égalités de longueurs assez faramineuse. En effet,

$$BE = BD = y, \quad AE = AF = x, \quad CF = CD = z,$$

mais également

$$AL = AK = a, \quad BL = BJ = c, \quad CJ = CK = c.$$

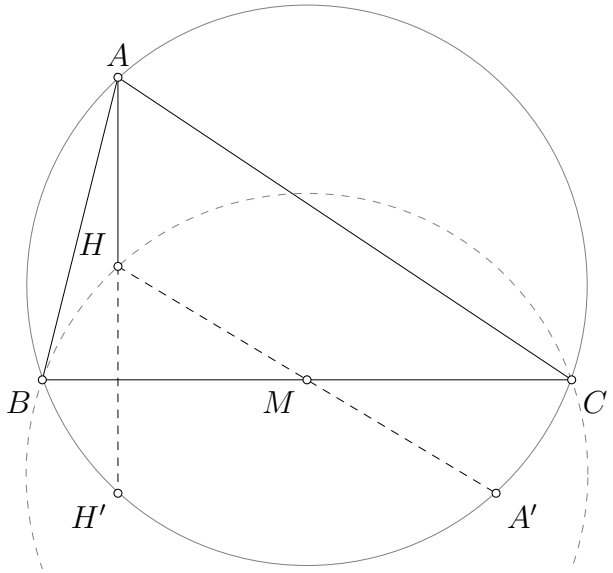
Maintenant, la seule information qu'on n'a pas encore exploitée dans cette figure est le fait que des points sont alignés. On a ainsi

$$x + y + b = a = x + z + c \text{ et } b + c = BC = y + z,$$

donc $y + b = z + c$ et $b + c = y + z$. En faisant la différence des deux relations, on trouve $y - c = c - y$. Ainsi $y = c$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 11
Comme le triangle BCE est rectangle en E, M est le centre du cercle circonscrit du triangle BCE. Ainsi, $ME = MB = \frac{BC}{2}$. Le même raisonnement donne également $MF = \frac{BC}{2}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 12

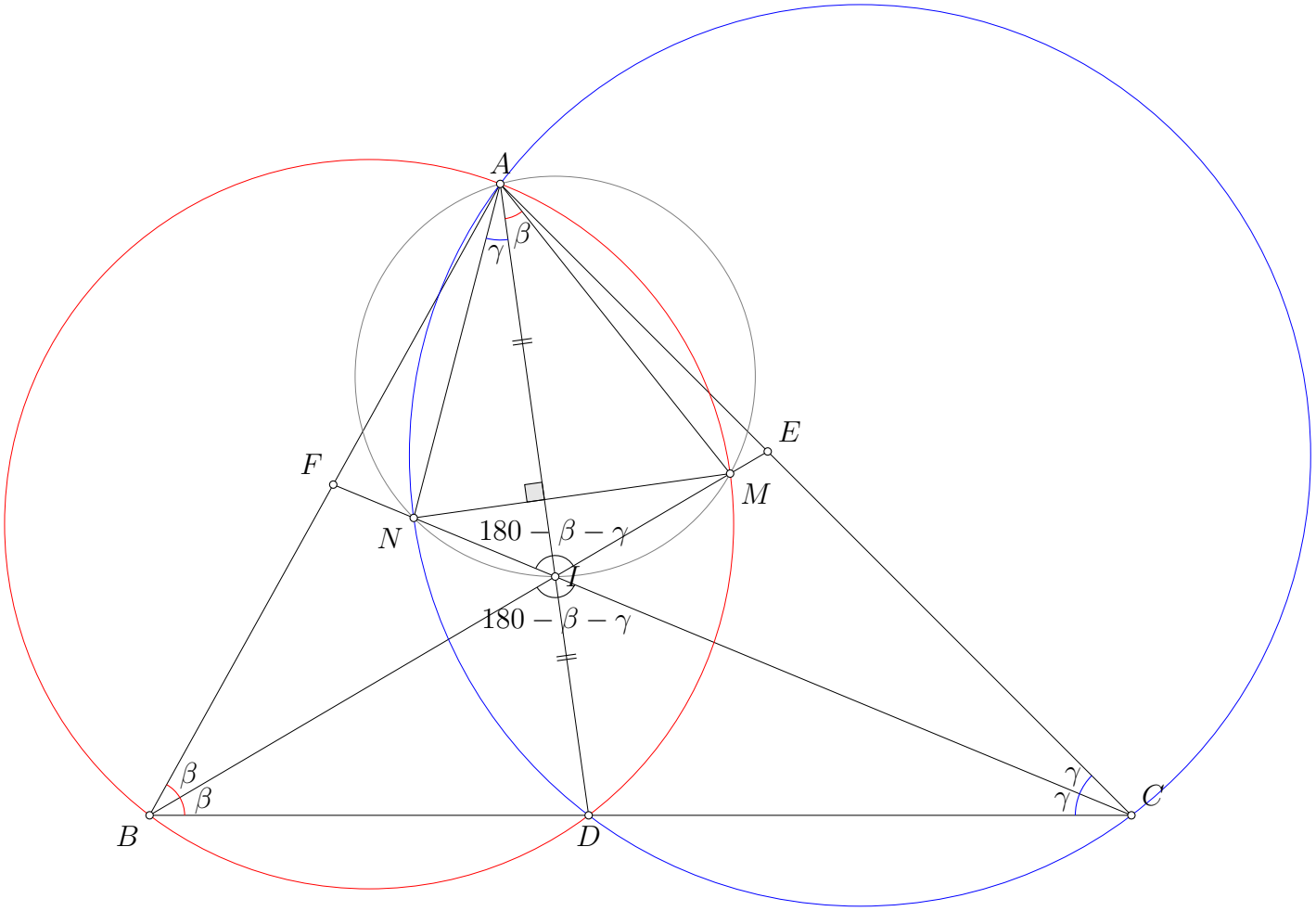


On remarque en faisant une *belle* et *grande* figure *propre* que les cercles ont le même diamètre. Bien que ce soit un fait qui est facilement montrable par la loi des sinus, nous ne sommes pas des barbares, et n'utilisons cet outil que dans des situations adaptées.

Il y a plusieurs manières de faire. Tout d'abord, puisque le symétrique H' de H par rapport à (BC) est sur le cercle (ABC) par l'exercice 4, la symétrie d'axe (BC) échange les cercles (BHC) et $(BH'C) = (ABC)$, ce qui conclut.

Une deuxième manière est de considérer la symétrie de centre M le milieu de $[BC]$. Celle-ci échange B et C, et échange également H et l'antipode A' de A dans (ABC) par l'exercice 6. Ainsi, elle échange les cercles (BHC) et $(CA'B) = (ABC)$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13

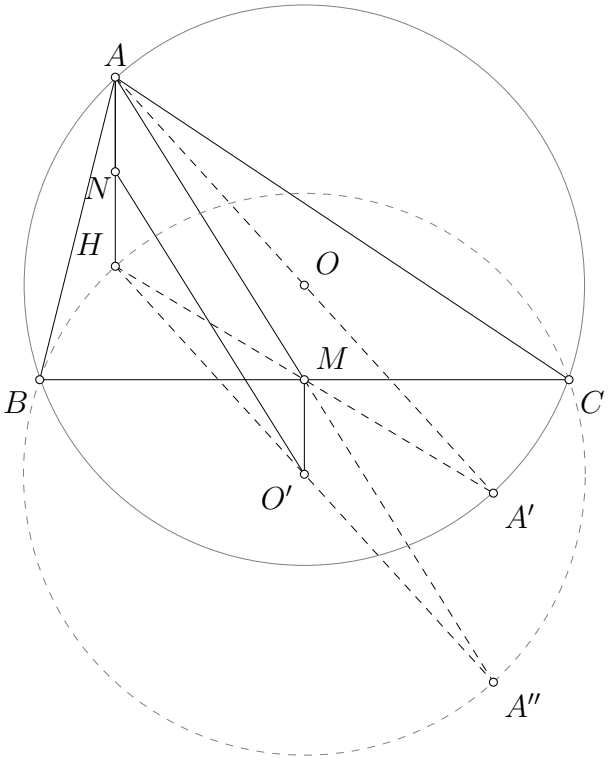


Des bissectrices et des médiatrices s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. Le point M est en effet par définition le pôle sud du point B dans le triangle BAD donc le quadrilatère $BAMD$ est cyclique. De même, le quadrilatère $CAND$ est cyclique. Il vient

$$\widehat{MAN} = \widehat{MAD} + \widehat{DAN} = \widehat{MBD} + \widehat{NCD} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 180° - \widehat{BIC} = 180 - \widehat{MIN}$$

ce qui montre bien que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 14



Cet exercice était difficile, mais connaître ses configurations autour de l'orthocentre simplifiait grandement le problème. En effet, par l'exercice 12, on sait que O' est le symétrique de O par rapport à (BC), d'où $(O'M) \perp (BC)$. Comme on a aussi $(AN) \perp (BC)$, on obtient $(AN)//(O'M)$. Il reste donc à montrer que $AN = O'M$, ou encore $AH = 2OM$. Cette identité découle d'un peu de trigonométrie ($AH = 2R\cos(\widehat{BAC})$), mais une manière élémentaire de la montrer est de remarquer que (OM) est la droite des milieux dans le triangle $AA'H$ par l'exercice 6.

Enfin, une preuve astucieuse de ce problème consiste à remarquer que A est l'orthocentre du triangle BHC, et ainsi le symétrique A'' de A par rapport à M est également l'antipode de H dans (BHC). Ainsi la droite de milieux dans AHA'' est nulle autre que $(O'M)$. On obtient alors directement $(AN)//(O'M)$ et $AN = \frac{1}{2}AH = O'M$, ce qui conclut.

5 Géométrie : Axe radical (Lilas et Melvil)

Ce cours a pour but d'introduire la notion d'axe radical. C'est une notion fondamentale en géométrie olympique car elle sert très souvent et son champ d'application est immense : démontrer un alignement, une cocyclicité, une concourance, des égalités de longueur, etc... Mais pour savoir l'utiliser dans des problèmes difficiles et en temps limité, encore faut-il acquérir les bons automatismes.

Dans ce cours on établit dans un premier temps tous les résultats importants à connaître sur l'axe radical. Puis dans un second temps, on s'entraîne sur quelques exercices bien choisis qui font travailler les configurations classiques utilisant l'axe radical.

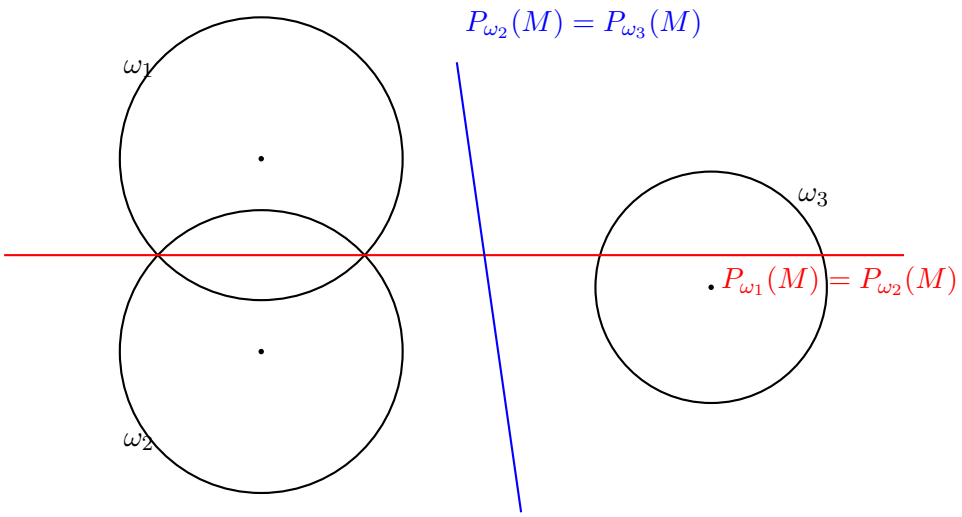
Si vous connaissez déjà le cours et souhaîtez acceder directement aux exercices cliquez ici.

Cours

Pour suivre le cours d'axe radical, il est nécessaire de connaître la puissance d'un point.

Définition 1 (Axe radical)**.** On appelle axe radical de deux cercles ω_1 et ω_2 l'ensemble des points X du plan ayant la même puissance d'un point par rapport à ω_1 et ω_2.

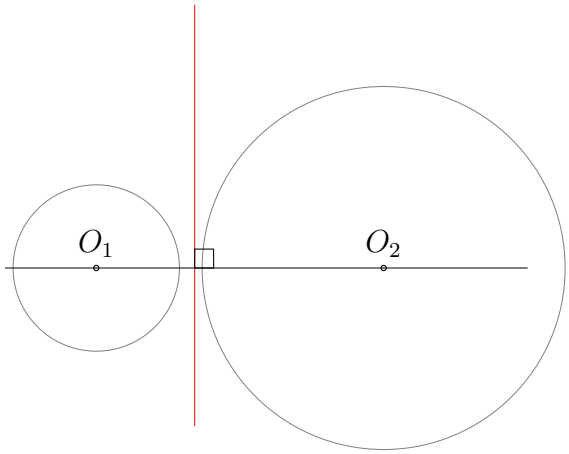
Exemple 2. Voici désormais à quoi ressemble un axe radical sur une figure :



On remarque que l'axe radical est presque toujours une droite, c'est d'ailleurs pour ça qu'on l'appelle "axe". Voici le "théorème fondamental de l'axe radical" qui détaille exactement les différents cas possibles.

Théorème 3.
Soient deux cercles ω_1 (resp. ω_2) de centre O_1 (resp. O_2) et de rayon R_1 (resp. R_2). L'axe radical de ω_1 et ω_2 prend une des 3 formes suivantes :

— (Cas général) Si les cercles ne se sont pas concentriques (i.e. $O_1 \neq O_2$) alors l'axe radical est **une droite perpendiculaire à l'axe** O_1O_2.

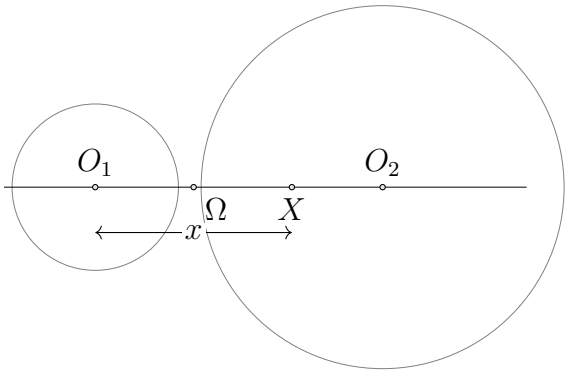


— Si les cercles sont concentriques mais de rayons différents (i.e. $O_1 = O_2$ et $R_1 \neq R_2$) alors l'axe radical **ne contient aucun point.**

— Si les cercles sont confondus (i.e. $O_1 = O_2$ et $R_1 = R_2$) alors l'axe radical correspond **au plan entier**.

Démonstration.

Si les cercles sont non concentriques : Dans un premier temps, étudions le problème sur la droite (O_1O_2). Pour faciliter les calculs, on prendra un repère orthonormal dont le centre est O_1 et la droite des abscisses est (O_1O_2).



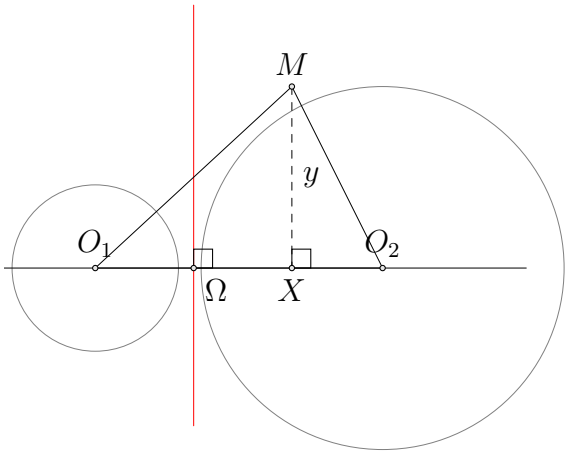
Soit X un point de la droite (O_1O_2) paramétrisé par l'absisse x. En notant $d = O_1O_2$ on peut calculer ses puissances par rapport aux cercles ω_1 et ω_2 :

$$P_{\omega_1}(X) = O_1X^2 - R_1^2 = x^2 - R_1^2 \qquad P_{\omega_2}(X) = O_2X^2 - R_2^2 = (x-d)^2 - R_2^2$$

Ainsi, X appartient à l'axe radical si et seulement si

$$x^2 - R_1^2 = (x-d)^2 - R_2^2 \iff x = \frac{R_1^2 - R_2^2 + d^2}{2d}$$

On note Ω le point vérifiant cette équation.
Passons maintenant au cas général, soit M un point du plan dont on note X le projeté orthogonal sur la droite (O_1O_2) et y son ordonnée.

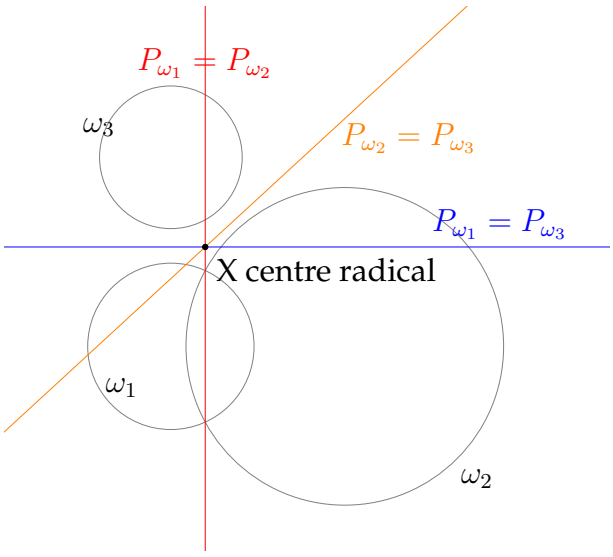


Ainsi M appartient à l'axe radical si et seulement si

$$\begin{aligned}
& P_{\omega_1}(M) &&= P_{\omega_2}(M) \\
\iff\ & O_1M^2 - R_1^2 &&= O_2M^2 - R_2^2 \\
\iff\ & O_1X^2 + y^2 - R_1^2 &&= O_2X^2 + y^2 - R_2^2 \\
\iff\ & O_1X^2 - R_1^2 &&= O_2X^2 - R_2^2 \\
\iff\ & X &&= \Omega
\end{aligned}$$

Donc l'axe radical correspond exactement à la droite perpendiculaire à (O_1O_2) passant par Ω.
Les deux autres cas sont plus simples à traiter, les preuves sont laissées aux soins du lecteur. □

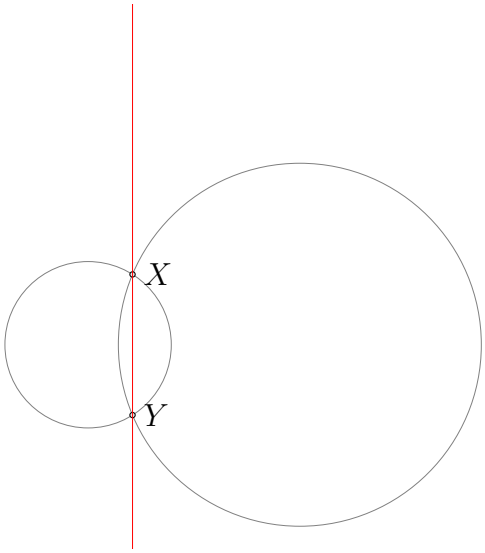
Corollaire 4 (centre radical)**.**
Soient ω_1, ω_2 et ω_3 trois cercles de centres non alignés, alors les 3 axes radicaux associés à ces cercles sont tous **concourants** en un point que l'on nomme le centre radical.



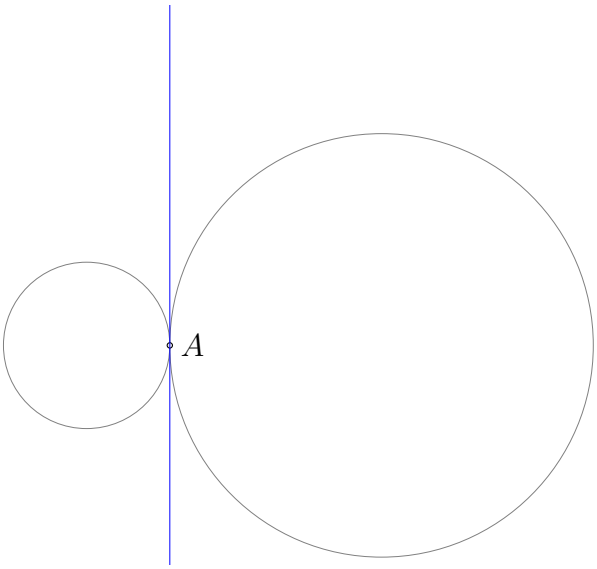
Démonstration. Puisque les centres des cercles ne sont pas alignés, les droites (O_1O_2) et (O_2O_3) ne sont pas parallèles, donc les axes radicaux de ω_1, ω_2 et ω_2, ω_3 non plus ce qui permet de définir X leur intersection. Par definition des axes radicaux, on sait que $P_{\omega_1}(X) = P_{\omega_2}(X)$ et $P_{\omega_2}(X) = P_{\omega_3}(X)$. Par transitivité, on en déduit $P_{\omega_1}(X) = P_{\omega_3}(X)$ ce qui montre que X, appartient à l'axe radical des cercles ω_1, ω_3 □

Corollaire 5 (Cercles sécants)**.**
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles sécants non concentriques :

— Si ω_1 et ω_2 s'intersectent en deux points $X \neq Y$, alors l'axe radical est la droite (XY)



— Si ω_1 et ω_2 sont tangents en un point A, alors l'axe radical est la *tangente* commune aux deux cercles et passant par A



Corollaire 6.
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles non concentriques. Pour toute droite AA' tangente à ω_1 en A et à ω_2 en A', l'axe radical des deux cercles coupe le segment $[AA']$ en son milieu.

Exercices

Exercice 1
Soient Γ et Ω deux cercles s'intersectant en A et B. Soit t une tangente commune aux deux cercles. On note P le point de tangence de t avec Γ et Q celui avec Ω. Montrer que (AB) coupe le segment (PQ) en son milieu.

Exercice 2
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles tangents extérieurement en T. Soit (PQ) une tangente commune (avec P et Q les points de tangence avec Γ_1 et Γ_2 respectivement).
Montrer que PQT est un triangle rectangle.

Exercice 3
Soient C_1 et C_2 deux cercles qui s'intersectent en $U \neq V$. Soient A, X des points de C_1 et B, Y des points de C_2. On suppose que les angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AYB}$ sont droits. Montrer que (AX), (BY) et (UV) sont concourantes.

Exercice 4
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Soient M et N des points quelconques sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Soient P et Q les points d'intersection des cercles de diamètres $[BN]$ et $[CM]$.
Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 5
Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note O un point sur ω. Le projeté orthogonal de O sur $[AB]$ est H. Le cercle de centre O et de rayon OH recoupe ω en X et Y . Montrer que X, Y et le milieu de $[OH]$ sont alignés.

Exercice 6
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, t et t' deux tangentes communes aux cercles. On note T_1 et T_2 les points de tangence de t avec ω_1 et ω_2 respectivement et T_1' et T_2' les points de tangence de t' avec ω_1 et ω_2 respectivement. Soit M le milieu de $[T_1T_2]$ et P_1 et P_2 les intersections respectives de $[MT_1']$ et $[MT_2']$ avec ω_1 et ω_2. Montrer que le quadrilatère $P_1P_2T_1'T_2'$ est cyclique.

Exercice 7
Soient ABC, un triangle avec ω son cercle circonscrit. Soit S, le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Soient $X \in (AB)$ et $Y \in (AC)$ tq $(XY)//(BC)$. On prend P (resp. Q),la seconde intersection de (SX) (resp. SY) avec ω et $R = PQ \cap (XY)$. Montrer que (AR) est tangent à ω.

Exercice 8
Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note M et N les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. On note P l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (AD)$ et Q l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (BC)$. Montrer que (MN) est perpendiculaire à (PQ).

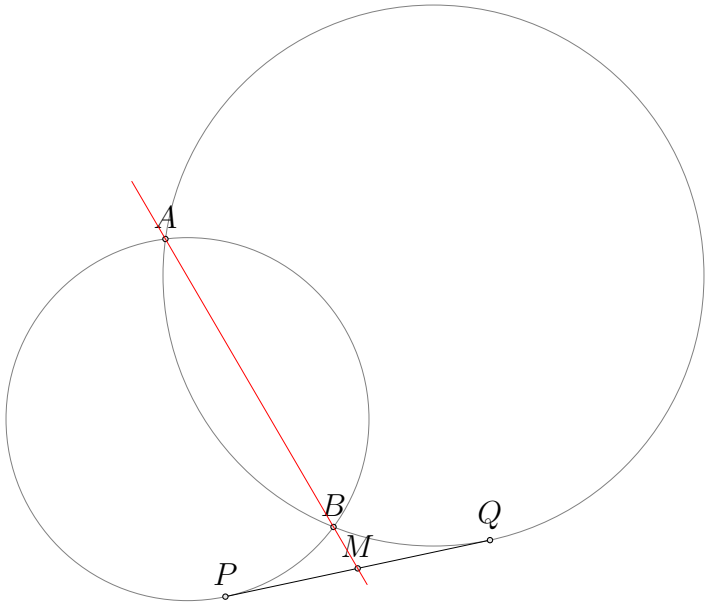
Exercice 9
Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la

droite (BC) en un point P. Soient E et F les pieds des hauteurs issues des sommets B et C respectivement. Soit Q le point d'intersection de la droite (EF) avec la parallèle à la droite (BC) passant par le point A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. Montrer que les droites (AM) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 10
Soit ABC un triangle, et $P \in [AB], Q \in [AC]$ tels que $AP = AQ$. Soient R, S des points distincts, sur le segment $[BC]$ tels que $S \in [BR]$ et tels que $\widehat{BPS} = \widehat{PRS}$, et $\widehat{CQR} = \widehat{QSR}$. Montrer que P, Q, R, S sont cocycliques.

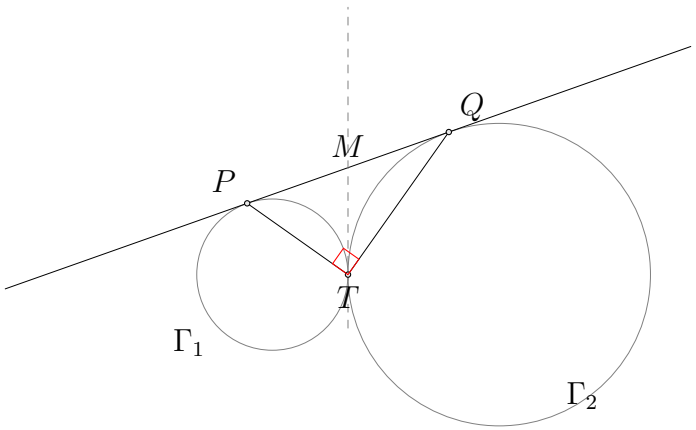
Solutions

Solution de l'exercice 1



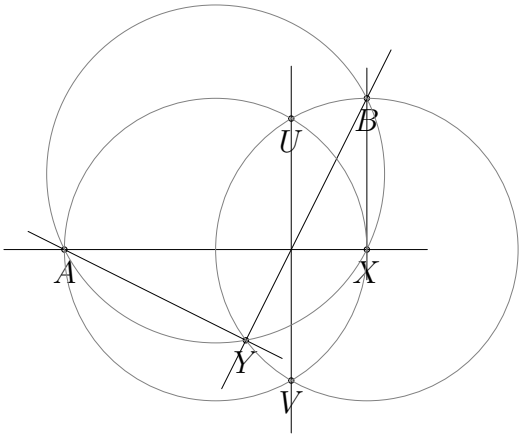
Comme Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en A et B, (AB) est l'axe radical de ces deux cercles.
Si on note M le point d'intersection de (AB) et $[PQ]$, on sait donc que la puissance de M par rapport aux deux cercles est la même, et donc $MP^2 = MQ^2$ d'où $MP = MQ$ et M est bien le milieu de $[PQ]$.

Solution de l'exercice 2



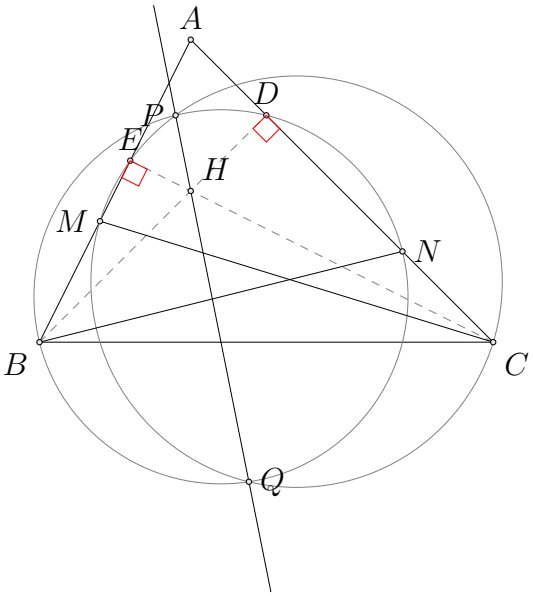
Traçons l'axe radical des deux cercles : c'est leur tangente commune. Si on pose M le milieu de $[PQ]$, on remarque que M est sur l'axe radical. Par puissance de point on a alors $MT^2 = MQ^2 = MP^2$ donc T est sur le cercle de diamètre $[PQ]$. Le triangle PQT est donc rectangle en T.

Solution de l'exercice 3



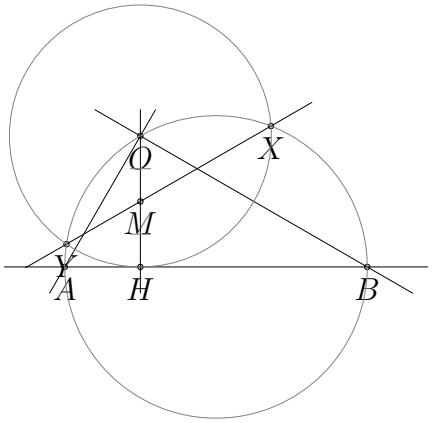
Comme $\widehat{AXB} = \widehat{AYB} = 90$, $AXYB$ est cyclique. Les trois droites mentionnées sont donc les axes radicaux des cercles $(AXYB), C_1, C_2$ et sont donc concourantes (ou parallèles, c'est-à-dire concourantes sur la droite à l'infini).

Solution de l'exercice 4



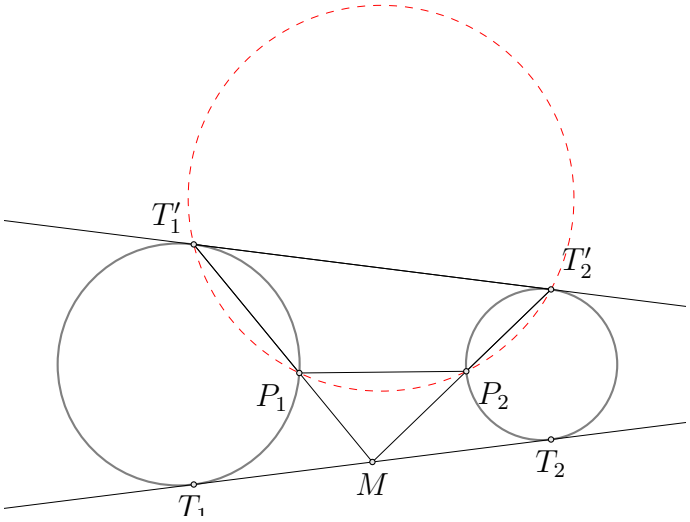
Notons D et E les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. Les angles $\widehat{CEM}$ et $\widehat{BDN}$ sont des angles droits, donc E appartient au cercle de diamètre $[CM]$ et F au cercle de diamètre $[BN]$.
De plus $\widehat{BEC} = \widehat{BDC} = 90$ donc par la réciproque de l'angle inscrit, B, E, D, C sont cocycliques.
On en déduit que $HB \times HD = HC \times HE$ donc H a la même puissance par rapport au cercle de diamètre $[CM]$ que par rapport au cercle de diamètre $[BN]$. H est donc sur l'axe radical des deux cercles, donc sur (PQ).

Solution de l'exercice 5



Soit M le milieu de $[OH]$. On nomme D l'intersection, autre que H, de (OH) avec le cercle de centre O et de rayon OH. On nomme C l'intersection, autre que O, de (OH) et du cercle de diamètre AB. Il faut montrer que M est sur l'axe radical des deux cercles. Pour cela, montrons que M a la même puissance par rapport aux deux cercles. On note $d = MO$. On a $MH = d$ et $OH = 2d$, mais on a aussi $HC = HO = 2d$ par symétrie d'axe (AB) et $OD = OH = 2d$ par symétrie de centre O. On a donc $MO \cdot MC = d \cdot 3d = 3d^2$ et $MH \cdot MD = d \cdot 3d = 3d^2$, d'où $MO \cdot MC = MH \cdot MD$, ce qui conclut par puissance du point M.

Solution de l'exercice 6

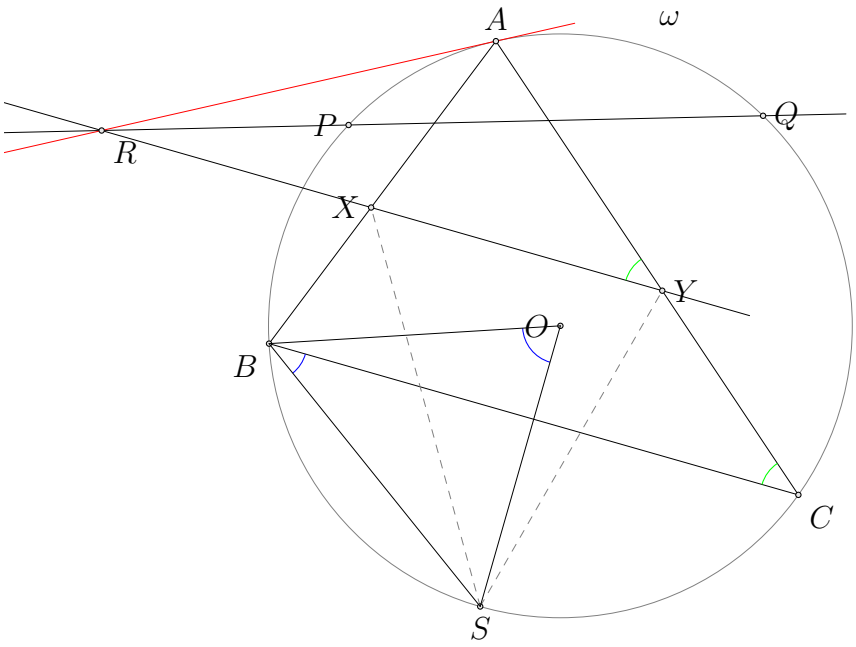


Comme M est le milieu de $[T_1, T_2]$, une tangente commune aux deux cercles, M est sur l'axe radical de ω_1 et ω_2. Donc M à la même puissance par rapport aux deux cercles.

$$P_{\omega_1}(M) = MP_1 \times MT_1' = P_{\omega_2}(M) = MP_2 \times MT_2'$$

Par la réciproque de la puissance d'un point, P_1, P_2, T_1' et T_2' sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7

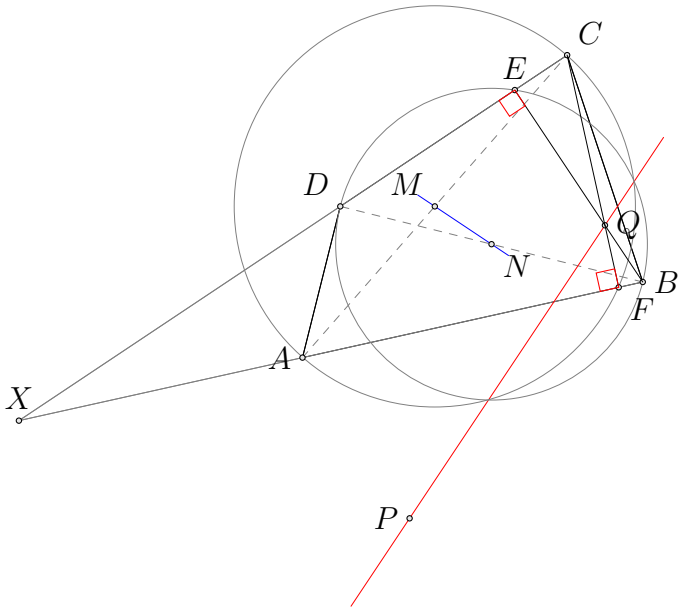


Montrons que PQ, XY et la tangente en A à ω, sont les axes radicaux de trois cercles, le premier est ω, le deuxième le cercle circonscrit à AXY et le troisième celui à $PQYX$. Ce quadrilatère est bien cocyclique car par chasse aux angles comme $\widehat{BOS} = \widehat{CBS}$, on a

$$\widehat{PQY} = \widehat{PQB} + \widehat{QBS} = \widehat{PSB} + \widehat{BCS} = \widehat{PSB} + \widehat{CBS} = 180 - \widehat{PXY}.$$

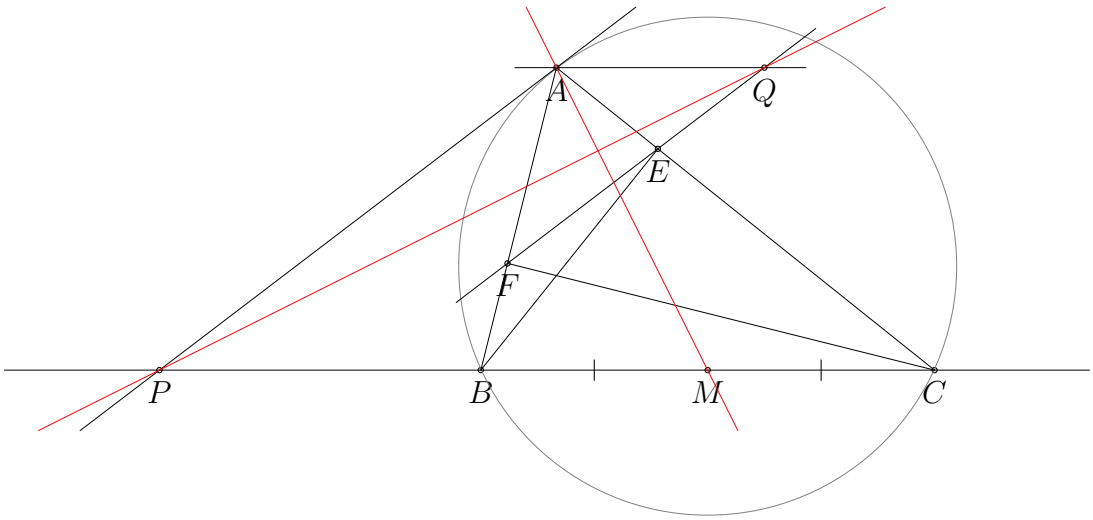
Comme $\widehat{AYX} = \widehat{ACB}$, la tangente en A à ω est la même que celle au cercle circonscrit à AXY, donc celle-ci est l'axe radical. Finalement les trois axes radicaux s'intersectent en un point, donc on obtient le résultat voulu.

Solution de l'exercice 8



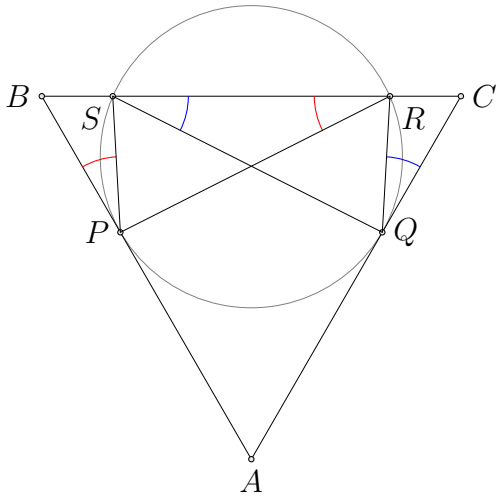
Traçons ω_1 le cercle de centre M passant par A et ω_2 le cercle de centre N passant par B.
Si on note E le projeté orthogonal de B sur (CD) et F celui de C sur (AB), on a $(AB)\perp(CF)$ et $(CD)\perp(DE)$ donc $F \in \omega_1$, $E \in \omega_2$ et C, E, F, B sont cocycliques.
On en déduit par puissance de point que $QB \times QE = QF \times QC$ donc Q a la même puissance par rapport aux deux cercles. On fait de même pour P, et (PQ) est donc l'axe radical de ω_1 et ω_2. Elle est donc perpendiculaire à la droite (MN), qui relie les deux centres.

Solution de l'exercice 9



Par puissance d'un point on a $PA^2 = PB \cdot PC$ donc P est sur l'axe radical d du cercle point A et de $(BCFE)$. On a $\widehat{QAE} = \widehat{QAC} = \widehat{ACB} = \widehat{AFE}$ par angle inscrit donc (AEF) est tangent à (QA) et donc par puissance d'un point, $QA^2 = QE \cdot QF$ et donc Q est aussi sur d. Puisque M et A sont les centres des cercles mentionnés, on obtient la relation voulue.

Solution de l'exercice 10



Le plus dur ici est certainement de savoir quoi faire avec la condition d'angles. En fait, celle-ci peut nous rappeler une relation d'angle tangentiel, et c'est justement le cas : la condition $\widehat{BPS} = \widehat{PRS}$ revient à dire que AB est tangent au cercle circonscrit à PRS (qu'on note ω_1). De même, AC est tangent au cercle circonscrit à QRS (qu'on note ω_2). L'énoncé nous demande de prouver que ces deux cercles sont confondus. Et là vient la magie :
Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors on peut considérer leur axe radical. Comme S et R appartiennent tous deux à ω_1 et à ω_2, $(SR) = (BC)$ est ledit axe radical. Mais comme

$$\mathcal{P}_{\omega_1}(A) = AP^2 = AQ^2 = \mathcal{P}_{\omega_2}(A)$$

par notre observation de tangence initiale, $A \in (BC)$, contradiction.
Ainsi, $\omega_1 = \omega_2$, et P, Q, R, S sont cocycliques.

6 Algèbre : Relations de Viète, technique s,p (Martin)

Cours

Proposition 1.
Soit $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n) \cdot c$, avec c un réel constant non nul.
Pour un réel a, on a $P(a) = 0$ si et seulement si $a \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Proposition 2.
Si (a, b) et (c, d) sont deux couples de réels tels que $a + b = c + d$ et $ab = cd$, alors $a = c$ et $b = d$ ou $a = d$ et $b = c$.
Autrement dit, à l'ordre près, il existe au plus un couple de réels ayant une somme et un produit donnés.

Démonstration. On considère la fonction $P(x) = (x - a)(x - b)$, qui s'annule exactement sur l'ensemble $\{a, b\}$. En développant, on trouve que

$$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab = x^2 - (c + d)x + cd = (x - c)(x - d)$$

Donc $\{a, b\} = \{c, d\}$, puis $(a, b) = (c, d)$ ou $(a, b) = (d, c)$. □

▶ Généralisons ce résultat.

Définition 3 (Polynômes)**.**
Un polynôme en plusieurs variables $a_1, a_2, ..., a_n$ est une expression de la forme

$$k_1 \cdot a_1^{u_1} \cdot a_2^{v_1} \cdot ... \cdot a_n^{z_1} + ... + k_m \cdot a_1^{u_m} \cdot a_2^{v_m} \cdot ... \cdot a_n^{z_m}$$

où $k_1, ..., k_m$ sont des réels constants et $u_1, v_1, ..., z_1, u_2, v_2, ..., z_2, ..., u_m, v_m, ..., z_m$ sont des entiers positifs constants.
Autrement dit, il s'agit d'une somme de produits de variables.

Exemple 4.
Polynômes à 3 variables :
- $P(a, b, c) = 3a^2b + abc^3 - 6b^2c$
- $P(r, s, t) = 1 + r + \pi s - 2rs^2$

Polynômes à 2 variables :
- $P(x, y) = xy$
- $P(x, y) = x + y$
- $P(a, b) = 7a^4b - b^4 + 3ab$

Polynômes à 1 variable :
- $P(x) = x^2 - (a + b)x + ab$ pour a, b des réels constants.
- $P(x) = 42$
- $P(x) = 7x^7 + 6x^6 + 4x^4 + x$

Ne sont pas des polynômes :
- $P(x, y) = x^y$
- $P(a, b) = \frac{a}{b}$

Définition 5 (Polynômes symétriques)**.**
Un polynôme en plusieurs variables $a_1, a_2, ..., a_n$ est dit symétrique si changer l'ordre des variables ne change pas l'expression du polynôme.

Exemple 6.
Un polynôme P en 2 variables est symétrique si et seulement si $P(x,y) = P(y,x)$.
Un polynôme P à 3 variables est symétrique si et seulement si

$$P(a,b,c) = P(a,c,b) = P(b,a,c) = P(b,c,a) = P(c,a,b) = P(c,b,a)$$

Polynômes symétriques :
- $P(a,b,c) = 3a^2bc + 3b^2ac + 3c^2ab$
- $P(x,y) = x^2 + y^2$

Polynômes non symétriques :
- $P(a,b,c) = 3a^2b - 2c$
- $P(a,b,c,d) = 3a^2bc + 3b^2cd + 3c^2da + 3d^2ab$

Définition 7 (Polynômes symétriques élémentaires)**.**
Pour $n \geq 1$ et k entre 0 et n, le k-ème polynôme symétrique élémentaire à n variables, qu'on note ici $P_k(a_1, ..., a_n)$, est la somme des produits de k variables distinctes parmi $a_1, ..., a_n$.
Il est surtout important de comprendre et retenir les cas $n = 2, n = 3$ et $n = 4$, détaillés ci-dessous.

Exemple 8.

variable(s)	$P_0(a_1, ..., a_n)$	$P_1(a_1, ..., a_n)$	$P_2(a_1, ..., a_n)$	$P_3(a_1, ..., a_n)$	$P_4(a_1, ..., a_n)$
1	1	a	$-$	$-$	$-$
2	1	$a+b$	ab	$-$	$-$
3	1	$a+b+c$	$ab+bc+ca$	abc	$-$
4	1	$a+b+c+d$	$ab+ac+ad+bc+bd+cd$	$abc+bcd+cda+dab$	$abcd$

Remarque 9.
Nous voyons que ces polynômes sont symétriques. Le théorème suivant justifie l'adjectif «élémentaire». Nous ne donnons pas ici sa démonstration.

Théorème 10 (Théorème fondamental des polynômes symétriques)**.**
Tout polynôme symétrique à n variables peut s'écrire comme polynôme en les polynômes symétriques élémentaires à n variables.
Par «polynôme en les polynômes symétriques élémentaires à n variables», il faut comprendre une somme de produits de polynômes symétriques élémentaires à n variables.

Exemple 11.
En reprenant les exemples précédents :
$P(a,b,c) = 3a^2bc + 3b^2ac + 3c^2ab = 3(a+b+c)(abc) = 3P_1(a,b,c)P_3(a,b,c)$
$P(x,y) = x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = P_1(x,y)^2 - 2P_2(x,y)$

Proposition 12 (Formules de Viète)**.**
Pour des réels $a_1, ..., a_n$, on a

$$(x-a_1)\cdot ... \cdot (x-a_n) = x^n - P_1(a_1, ..., a_n)x^{n-1} + P_2(a_1, ..., a_n)x^{n-2} - ... + (-1)^n P_n(a_1, ..., a_n)$$

Il s'agit d'une somme de termes de la forme $(-1)^k P_k(a_1, ..., a_n)x^{n-k}$.

Remarque 13.
Ainsi, si $a_1, ..., a_n$ correspondent aux coefficients de la forme factorisée d'un polynôme en une variable, $P_1(a_1, ..., a_n), P_2(a_1, ..., a_n), ..., P_n(a_1, ..., a_n)$ correspondent aux coefficients de sa forme développée.

Démonstration. En développant le produit $(x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_n)$, pour obtenir un terme en x^{n-k}, il faut «choisir» le x dans $n - k$ facteurs, donc le $-a_i$ dans les k restants. On obtient alors un produit de k variables distinctes parmi les $a_1, ..., a_n$, précédé par le signe $(-1)^k$. En faisant la somme de tous les termes en x^{n-k}, on obtient comme coefficient $(-1)^k$ fois la somme de tous les produits possibles de k variables distinctes parmi $a_1, ..., a_n$, soit $(-1)^k P_k(a_1, ..., a_n)$. □

Théorème 14.
Si $(a_1, ..., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ sont deux n-uplets de réels tels que, pour tout entier k entre 1 et n, on ait $P_k(a_1, ..., a_n) = P_k(b_1, ..., b_n)$, alors $(b_1, ..., b_n)$ est une permutation de $(a_1, ..., a_n)$.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}(x - a_1) \cdot ... \cdot (x - a_n) &= x^n - P_1(a_1, ..., a_n)x^{n-1} + ... + (-1)^n P_n(a_1, ..., a_n) \\ &= x^n - P_1(b_1, ..., b_n)x^{n-1} + ... + (-1)^n P_n(a_1, ..., a_n) \\ &= (x - b_1) \cdot ... \cdot (x - b_n)\end{aligned}$$

donc ce polynôme s'annule exactement sur $\{a_1, ..., a_n\} = \{b_1, ..., b_n\}$. □

Remarque 15.
On retrouve bien la proposition n°2 pour le cas $n = 2$.

Dans un problème faisant intervenir des variables $a_1, ..., a_n$, si toutes les expressions sont symétriques en $a_1, ..., a_n$ et s'expriment comme des polynômes symétriques en $a_1, ..., a_n$ (ou éventuellement des quotients de polynômes symétriques en $a_1, ..., a_n$), le théorème fondamental des polynômes symétriques élémentaires nous assure que faire le changement de variable

$$a_1, ..., a_n \mapsto P_1(a_1, ..., a_n), P_2(a_1, ..., a_n), ..., P_n(a_1, ..., a_n)$$

permettra toujours d'exprimer les expressions en jeu. Autrement dit, ce changement de variable «ne nous fait pas perdre d'information». Cependant, comme tout changement de variable, cela peut, selon le problème, devenir contre-productif car très calculatoire.
Pour $n = 2$ on a $a, b \mapsto ab, a + b$ et pour $n = 3$ on a $a, b, c \mapsto a + b + c, ab + bc + ca, abc$.

Si on réussit à montrer que $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ ont les mêmes polynômes symétriques élémentaires, alors ce sont les mêmes à permutation près.

Si on est en présence de variables $a_1, ..., a_n$ et de leurs polynômes symétriques élémentaires, on peut s'intéresser à la fonction $f(x) = (x - a_1)...(x - a_n)$, qui fait le lien entre les deux.

Il est facile (mais pas toujours rapide) de calculer les $P_k(a_1, ..., a_n)$ lorsqu'on connaît $a_1, ..., a_n$ (cela revient à passer de la forme factorisée à la forme développée du polynôme dans les formules de Viète).
Nous pouvons maintenant nous demander comment retrouver $a_1, ..., a_n$ en connaissant les $P_k(a_1, ..., a_n)$ (cela revient à passer de la forme développée à la forme factorisée du polynôme dans les formules de Viète).
Nous ne sommes pas certains que toutes les valeurs pour les polynômes symétriques élémentaires correspondent à des valeurs réelles pour les $a_1, ..., a_n$, car nous pouvons par exemple trouver des polynômes qui ne s'annulent jamais et donc ne peuvent pas se factoriser sous la forme $(x - a_1) \cdot \ldots \cdot (x - a_n)$.

• Pour $n = 2$:
On a

$$x^2 - sx + p = 0 \iff \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{s^2}{4} + p = 0 \iff \left(x - \frac{s}{2}\right)^2 = \frac{s^2 - 4p}{4}$$

Il est donc nécessaire et suffisant d'avoir $s^2 \geq 4p$ pour qu'il y ait des solutions.
Dans ce cas, les solutions sont donc $x = \frac{s \pm \sqrt{s^2-4p}}{2}$.
Nous en déduisons la proposition suivante (mais il est important de retenir la méthode utilisée pour résoudre cette équation).

Proposition 16.
Soient s et p deux réels. Il existe deux réels a et b tels que $a + b = s$ et $ab = p$ si et seulement si $s^2 \geq 4p$. Dans ce cas, on a

$$\{a, b\} = \left\{\frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}\right\}$$

Démonstration. Nous avons montré précédemment qu'il n'y a pas de solutions si $s^2 < 4p$.
Si $s^2 \geq 4p$, il suffit de vérifier que les deux solutions fournies conviennent.
On a bien $\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} + \frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} = s$ et $\frac{s+\sqrt{s^2-4p}}{2} \times \frac{s-\sqrt{s^2-4p}}{2} = \frac{s^2-(s^2-4p)}{4} = p$. □

Si nous imposons par ailleurs que a et b sont positifs, on a le résultat suivant :

Proposition 17.
Soient s et p deux réels. Il existe deux réels a et b positifs tels que $a + b = s$ et $ab = p$ si et seulement si $s^2 \geq 4p$ et si s et p sont positifs. Dans ce cas, on a

$$\{a, b\} = \left\{\frac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}, \frac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}\right\}$$

Démonstration. Le sens direct vient du théorème précédent et du fait que si a et b sont positifs, leur somme et leur produit le sont.
Pour le sens réciproque, d'après le théorème précédent, si $s^2 \geq 4p$, nous avons bien les solutions recherchées. Si a ou b est nul, l'autre vaut s donc est positif. Si a et b sont non nuls, ils sont de même signe, car $p \geqslant 0$, et ils sont positifs, car $s \geqslant 0$. □

$s^2 \geq 4p$ est la seule condition sur la somme et le produit de deux réels quelconques. Il est important de s'en souvenir dans un problème d'inégalité où on réalise le changement de variable $a, b \mapsto a + b, ab$, d'autant plus que cette inégalité (1) doit être reliée à l'inégalité arithmético-géométrique (2) :
(1) pour a, b réels, on a $(a + b)^2 \geq 4ab$
(2) pour a, b réels positifs, on a $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
Pour le cas d'égalité, on a $s^2 = 4p$ si et seulement si $a = b$.

• Pour $n = 3$, il existe une condition similaire à $s^2 - 4p \geqslant 0$, bien que plus complexe et donc peu exploitable en pratique.

• Pour $n = 4$, il n'existe pas de condition similaire (voir le problème #4567 de Mathraining).

• Pour $n = 5$, il n'existe pas de condition pour déterminer si des $a_1, ..., a_n$ existent en fonction de valeurs données pour les $P_k(a_1, ..., a_n)$.

Exercices

Résolutions numériques d'équations :

Exercice 1
Trouver tous les réels x tels que $x + \frac{3}{x} = 4$.

Exercice 2
Trouver tous les réels x, y tels que $x + y = 1$ et $xy = -6$.

Exercice 3
Trouver tous les réels x, y tels que $x + y = -3$ et $x^3y + xy^3 = 10$.

Exercice 4 (JBMO Shortlist 2008, A4)
Trouver tous les réels x, y, z tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 2008 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6024^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2008} \end{cases}$$

Équations :

Exercice 5 (JBMO 2020, P1)
Trouver tous les réels a, b, c tels que

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Exercice 6 (JBMO 2010, P1)
Soient a, b, c, d des réels tels que

$$abc - d = 1, bcd - a = 2, cda - b = 3, dab - c = -6$$

Prouver que $a + b + c + d \neq 0$.

Exercice 7
Soient a, b, c, x, y, z des réels strictement positifs tels que $a + b + c = x + y + z$ et $abc = xyz$.
Prouver que si $a \leq x < y < z \leq c$, alors $a = x, b = y$ et $c = z$.

Polynômes :

Exercice 8
On dit qu'un polynôme $P(x, y)$ est antisymétrique si $P(x, y) = -P(y, x)$.
Montrer que tout polynôme antisymétrique $P(x, y)$ est de la forme $P(x, y) = (x - y)Q(x, y)$, où $Q(x, y)$ est symétrique.
Ceci se généralise aux cas avec plus de variables.

Exercice 9 (Austrian MO 1987, P6)
Trouver tous les polynômes $P(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$ tels que $a_1, a_2, ..., a_n$ soient les racines de $P(x)$, comptées avec multiplicités.
Cet exercice est significativement plus difficile que les autres.
La multiplicité de a est le plus grand entier k tel qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que $P(x) = (x - a)^kQ(x)$. Ainsi, le polynôme $P(x) = x^3 + x^2 - x - 1 = (x - 1)(x + 1)^2$ est une solution, car ses racines sont 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 2, tandis que ses coefficients sont $1, -1$ et -1.

Inégalités :

Exercice 10
Soient a, b, c des réels tels que $a + b + c > 0, bc + ac + ab > 0$ et $abc > 0$. Montrer que $a, b, c > 0$.

Exercice 11
Soient a, b des réels strictement positifs. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a^2 + ab + b^2}{3}} + \sqrt{ab} \leqslant a + b$$

Exercice 12
Soient x, y deux réels strictement positifs tels que $xy(x - y) = 4$.
Montrer que $x + y \geqslant \sqrt{12}$.

Exercice 13 (JBMO Shortlist 2024, A2)
Soient a, b, c trois réels tels que $a + b + c = 0$ et $abc = -16$.
Trouver la plus petite valeur que peut prendre

$$M = \frac{a^2 + b^2}{c} + \frac{b^2 + c^2}{a} + \frac{c^2 + a^2}{b}$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Pour $x \neq 0$, on a

$$x + \frac{3}{x} = 4 \iff x^2 - 4x + 3 = 0 \iff (x-2)^2 - 1 = 0 \iff x - 2 = \pm 1 \iff x = 1 \text{ ou } x = 3$$

Solution de l'exercice 2
Soient x et y des solutions.
On sait que x et y sont solutions de l'équation en u suivante : $u^2 - (x+y)u + xy = 0$.
On résout donc :

$$u^2 - u - 6 = 0 \iff \left(u - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \iff u - \frac{1}{2} = \pm\frac{5}{2} \iff u = 3 \text{ ou } u = -2$$

Donc $x = 3$ et $y = -2$ ou $x = -2$ et $y = 3$.

Solution de l'exercice 3
Soient x et y des solutions. On pose $s = x + y$ et $p = xy$.
Alors $s = -3$ et $10 = x^3y + xy^3 = p(x^2 + y^2) = p(s^2 - 2p)$.
Donc $9p - 2p^2 = 10$, soit $p^2 - \frac{9}{2}p + 5 = 0$.
Ainsi $p = \frac{\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 4 \cdot 5}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 80}}{4}$, donc $p = 2$ ou $p = \frac{5}{2}$.
- Si $p = \frac{5}{2}$, $s^2 = 9 < 10 = 4p$, donc il n'y a pas de solution.
- Si $p = 2$, on trouve, de manière similaire à l'exercice précédent, que $x = -2$ et $y = -1$ ou $x = -1$ et $y = -2$.

Solution de l'exercice 4
Comme $6024 = 3 \cdot 2008$, on pose $a = \frac{x}{2008}$, $b = \frac{y}{2008}$ et $c = \frac{z}{2008}$.
Ainsi :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 9 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = \frac{1}{2}((a+b+c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)) = \frac{1}{2}(1^2 - 9) = -4 \\ abc = \frac{ab+bc+ca}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = \frac{-4}{1} = -4 \end{cases}$$

D'après les formules de Viète, a, b et c sont solutions de l'équation en u suivante :

$$u^3 - u^2 - 4u - 4 = 0$$

Or $u^3 - u^2 - 4u - 4 = (u-1)(u^2 - 4) = (u-1)(u-2)(u+2)$.
Donc $\{a, b, c\} = \{1, 2, -2\}$ et $\{x, y, z\} = \{2008, 4016, -4016\}$.

Solution de l'exercice 5
On a $a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. On en déduit que $(a+b+c)(abc) = (ab + bc + ca)$ (1).
On trouve aussi que $ab+bc+ca = \frac{1}{2}((a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)) = \frac{1}{2}((\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2 - (\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})) = \frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}$. On en déduit que $(ab + bc + ca)(abc) = a + b + c$ (2).

Avec les égalités (1) et (2), on a donc $ab+bc+ca=0 \iff a+b+c=0$.
Comme $a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)$, on a aussi $a+b+c=ab+bc+ca=0 \implies abc=0$.
Or, pour que les inverses soient bien définis, on a $abc \neq 0$.
En raisonnant par l'absurde, on en déduit que $ab+bc+ca \neq 0$ et $a+b+c \neq 0$.

En faisant le produit des égalités (1) et (2), puis en divisant par $(ab+bc+ca)(a+b+c)$, qui est bien non nul, on trouve finalement que $(abc)^2=1$, soit $abc=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}$.

Ainsi, on a : $a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, $ab+bc+ca=\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$ et $abc=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{c}$.
Donc on en déduit que $\{a,b,c\}=\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\}$.
On vérifie aisément que tous les triplets satisfaisant cette égalité sont solutions.
Comme les variables sont symétriques, on peut vérifier que les 3 cas suivants couvrent bien toutes les permutations possibles, en fonction du nombre de leurs éventuels points fixes.
- Pour 3 points fixes, on a $a=\frac{1}{a}$, $b=\frac{1}{b}$ et $c=\frac{1}{c}$, donc $a=\pm1$, $b=\pm1$ et $c=\pm1$.
- Pour 1 point fixe, on a $a=\frac{1}{a}$, $b=\frac{1}{c}$ et $c=\frac{1}{b}$, donc $a=\pm1$ et $c=\frac{1}{b}$. On remarque qu'en prenant $b=\pm1$, ce cas couvre le premier cas, où au moins deux variables, parmi les trois, étaient égales.
- Pour 0 point fixe, on a $a=\frac{1}{b}$, $b=\frac{1}{c}$ et $c=\frac{1}{a}$, donc $a=\frac{1}{b}=c=\frac{1}{a}$, et on retombe sur le premier cas.
Les solutions sont donc les triplets de la forme $(x,\frac{1}{x},\pm1),(x,\pm1,\frac{1}{x})$ et $(\pm1,x,\frac{1}{x})$, pour x un réel non nul.

Solution de l'exercice 6
On remarque que la somme des égalités donne $abc+bcd+cda+dab=a+b+c+d$.
On suppose par l'absurde que $a+b+c+d=0$.
Alors, d'après les formules de Viète :

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=x^4+ux^2+v$$

où u,v sont des réels constants.
On en déduit notamment que cette fonction est paire et s'annule en a, donc aussi en $-a$. On a donc $-a\in\{a,b,c,d\}$.
- Si $a=-a$, alors $a=0$ et les égalités de l'énoncé deviennent $-d=1, bcd=2, -b=3$ et $-c=-6$. Donc il n'y a pas de solution.
- Si $a=-b$, la deuxième égalité de l'énoncé devient $bcd+b=2$, tandis que la troisième devient $-cdb-b=3$. Donc il n'y a pas de solution.
- Si $a=-c$, on trouve, avec la deuxième et la quatrième égalité de l'énoncé, que $bcd+c=2$ et $-dcb-c=6$. Donc il n'y a pas de solution.
- Si $a=-d$, on trouve, avec la première et la deuxième égalité de l'énoncé, que $-dbc-d=1$ et $bcd+d=2$. Donc il n'y a pas de solution.
Donc $a+b+c+d\neq0$.

Solution de l'exercice 7
On pose $q_1=ab+bc+ca$ et $q_2=xy+yz+zx$.
Alors, d'après les formules de Viète :

$$\begin{aligned}(u-a)(u-b)(u-c)-(u-x)(u-y)(u-z) &= (u^3-(a+b+c)u^2+q_1u-abc)\\ &\quad -(u^3-(x+y+z)u^2+q_2u-xyz)\\ &= (q_1-q_2)u\end{aligned}$$

Pour $u = a$, on a $0 \leqslant 0 - (a-x)(a-y)(a-z) = (q_1 - q_2)u$, donc $q_1 - q_2 \leqslant 0$.
Pour $u = c$, on a $0 \geqslant 0 - (c-x)(c-y)(c-z) = (q_1 - q_2)u$, donc $q_1 - q_2 \geqslant 0$.
Alors $q_1 = q_2$. Donc $\{a, b, c\} = \{x, y, z\}$.
Comme $a < y$ et $a < z$, alors $a = x$. De même, comme $c > x$ et $c > y$, alors $c = z$.
Par déduction, $b = y$.

Solution de l'exercice 8
Soit $P(x, y)$ un polynôme antisymétrique.
Pour tout terme $k \cdot x^a y^b$ dans P, P étant antisymétrique, on trouve aussi un terme $-k \cdot x^b y^a$.
Notamment, si $a = b$, alors $k = 0$.
Or, si $a > b$, on a $kx^a y^b - kx^b y^a = k(x^a y^b - x^b y^a) = k(x-y)(x^{a-1}y^b + x^{a-2}y^{b+1} + ... + x^b y^{a-1})$, avec $x^{a-1}y^b + x^{a-2}y^{b+1} + ... + x^b y^{a-1}$ un polynôme symétrique.
En écrivant $P(x, y)$ comme une somme de termes de la forme $kx^a y^b - kx^b y^a$ avec $a > b$, on peut factoriser $P(x, y)$ par $(x - y)$, et le facteur restant est une somme de polynômes symétriques, donc un polynôme symétrique.

Solution de l'exercice 9
On comprend qu'on cherche tous les polynômes tels que

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$$

où $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des entiers.
Soit P un tel polynôme.
Tout d'abord, soit z le nombre de coefficients nuls consécutifs en partant de a_n (éventuellement $z = 0$) et soit $m = n - z$. Alors $P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-z}x^z = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_{n-z})x^z$.
En divisant par x^z, on voit que, si $m \geqslant 1$, alors $Q(x) = x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + ... + a_m = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_m)$ est aussi solution, et on voit que, si $m = 0$, alors x^n est solution.
On suppose pour la suite que $m \geqslant 1$. On a donc cette fois-ci $a_m \neq 0$ par définition de z.

a) Si $m = 1$, on doit avoir $Q(x) = x + a_1 = (x - a_1)$ et $a_1 \neq 0$, impossible.

b) Si $m \geqslant 2$:
Les formules de Viète donnent notamment $(-1)^m a_1 a_2 ... a_m = a_m$, donc $a_1 a_2 ... a_{m-1} = (-1)^m$. Comme $a_1, a_2, ..., a_n$ sont des entiers, pour tout i entre 1 et $m - 1$, on a $|a_i| = 1$.
De plus, il y a $m - 1$ variables, dont le produit vaut $(-1)^m$, donc il y a un nombre impair de 1.
Soit $2i - 1$ le nombre de 1 parmi $a_1, ..., a_{m-1}$, avec donc $1 \leqslant i \leqslant \frac{m}{2}$.
Il y a notamment au moins un 1 parmi $a_1, ..., a_{m-1}$, et ainsi $Q(1) = 0$.
Or $Q(1) = 1 + a_1 + ... + a_m$.
Donc $a_m = Q(1) - (a_1 + ... + a_{m-1}) - 1 = -(2i - 1 - (m - 1 - (2i - 1))) - 1 = m - 4i$.
Ainsi, $Q(x) = (x-1)^{2i-1}(x+1)^{m-2i}(x - m + 4i)$.
Essayons de calculer quelques coefficients avec les formules de Viète :
Pour a_1, on a $a_1 = -(a_1 + ... + a_m) = -(Q(1) - 1) = 1$.

Pour a_2, on a

$$\begin{aligned}
a_2 &= P_2(\underbrace{1,...,1}_{2i-1 \text{ fois}},\underbrace{-1,...,-1}_{m-2i \text{ fois}},m-4i)\\
&= \tbinom{2i-1}{2}\cdot 1+\tbinom{m-2i}{2}\cdot 1+(2i-1)(m-2i)\cdot(-1)+(2i-1)\cdot(m-4i)(1)+(m-2i)\cdot(m-4i)(-1)\\
&= (2i-1)(i-1)+\tfrac{(m-2i)(m-2i-1)}{2}+(1-2i)(m-2i)+(m-4i)((2i-1)-(m-2i))\\
&= 2i^2-3i+1+(m-2i)(\tfrac{m-2i-1}{2}+1-2i)+(m-4i)(4i-1-m)\\
&= 2i^2-3i+1+(m-2i)(\tfrac{m-6i+1}{2})-m^2+8im-m+4i-16i^2\\
&= -14i^2+i+1-m+8im-m^2+\tfrac{m^2-8im+12i^2+m-2i}{2}\\
&= -\tfrac{1}{2}(m^2+m)-8i^2+4im+1
\end{aligned}$$

Comme $|a_2|=1$, on a $-\frac{1}{2}(m^2+m)-8i^2+4im+1\in\{-1,1\}$, soit $m^2+m+16i^2-8im\in\{0,4\}$.
Essayons donc de calculer i.

b)1) Si $m^2+m+16i^2-8im=0$, le discriminant du trinôme est $64m^2-4\cdot 16\cdot(m^2+m)=-64m<0$. Il n'y a donc pas de solution

b)2) Si $m^2+m+16i^2-8im=4$, le discriminant du trinôme est $64m^2-4\cdot16\cdot(m^2+m-4)=64(4-m)$.

b)2)*i*) Si $m\geqslant 5$, le discriminant est strictement néfatif et il n'y a pas de solution.

b)2)*ii*) Si $m=4$, le discrimant est nul et $i=\frac{8m}{2\cdot16}=1$. On a alors $a_m=m-4i=0$, absurde.

b)2)*iii*) Si $m=3$, on a $1\leqslant i\leqslant\frac{3}{2}$, donc $i=1$, puis $Q(x)=(x-1)^1(x+1)^1(x-3+4)=(x^2-1)(x+1)=x^3+x^2-x-1$, ce qui donne une solution.

b)2)*iv*) Si $m=2$, on a $1\leqslant i\leqslant\frac{2}{2}$, donc $i=1$, puis $Q(x)=(x-1)^1(x+1)^0(x-2+4)=(x-1)(x+2)=x^2+x-2$, ce qui donne une autre solution.

Finalement les solutions sont les polynômes x^n, $x^n(x-1)(x+2)$ et $x^n(x-1)(x+1)^2$ pour tout $n\geq 0$.

Solution de l'exercice 10
D'après les formules de Viète, il existe $u,v,w>0$ tels que $(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-ux^2+vx-w$. Notamment, pour tout $x\leqslant 0$, on a $x^3\leqslant 0$, $-ux^2\leqslant 0$, $vx\leqslant 0$ et $-w<0$, donc $x^3-ux^2+vx-w<0$, ainsi $(x-a)(x-b)(x-c)\neq 0$. Enfin, $x\notin\{a,b,c\}$ et $a,b,c>0$.

Solution de l'exercice 11
On pose $s=a+b$ et $p=ab$. On cherche alors à montrer que $\sqrt{\frac{s^2-p}{3}}+\sqrt{p}\leqslant s$.
Or :

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\tfrac{s^2-p}{3}}+\sqrt{p}\leqslant s\\
\iff\ &\tfrac{s^2+2p}{3}+2\sqrt{\tfrac{p(s^2-p)}{3}}\leqslant s^2\\
\iff\ &2\sqrt{\tfrac{p(s^2-p)}{3}}\leqslant\tfrac{2}{3}(s^2-p)\\
\iff\ &\sqrt{3p}\leqslant\sqrt{s^2-p}\\
\iff\ &3p\leqslant s^2-p\\
\iff\ &4p\leqslant s^2
\end{aligned}$$

Donc $\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}+\sqrt{ab}\leqslant a+b$.

Solution de l'exercice 12
La contrainte n'étant pas symétrique, on utilise $(x-y)=\sqrt{(x-y)^2}$ (comme $x,y>0$ et que

$xy(x-y)=4$, on a $x-y>0$).
Donc, en posant $s=x+y$ et $p=xy$, on a $p\sqrt{s^2-4p}=4$.
Alors $s^2-4p=\frac{16}{p^2}$, soit $s^2=\frac{16}{p^2}+2p+2p\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{16}{p^2}\cdot 2p\cdot 2p}=12$.
Comme $s\geqslant 0$, on a finalement $x+y=s\geqslant\sqrt{12}$.

Solution de l'exercice 13
On remarque que :

$$\begin{array}{rcll} M & = & \frac{a^2+b^2}{c}+\frac{b^2+c^2}{a}+\frac{c^2+a^2}{b} & \\ & = & \frac{a^3b+ab^3+b^3c+bc^3+ac^3+a^3c}{abc} & \\ & = & \frac{a^3(b+c)+b^3(a+c)+c^3(a+b)}{abc} & \\ & = & \frac{-a^4-b^4-c^4}{abc} & (a+b+c=0) \\ & = & \frac{a^4+b^4+c^4}{16} & \end{array}$$

De plus, comme $abc=-16$, il y a 1 ou 3 réels négatifs parmi a,b,c. Comme $a+b+c=0$, il y en a 1. Supposons par symétrie que $c<0$ et $a,b>0$. On pose $s=a+b>0$ et $p=ab$.
Alors comme $a+b+c=0$, $s=-c$, donc $sp=-abc=16$.
Enfin, $s^3\geq 4sp=64$, donc $s\geqslant 4$.
Alors $c^4=s^4\geqslant 4^4$ et $a^4+b^4\geqslant\frac{(a+b)^4}{8}=\frac{s^4}{8}\geqslant 32$ (déduit, par exemple, par inégalité des moyennes -il s'agit du problème #6111 de Mathraining-).
Ainsi, $M=\frac{a^4+b^4+c^4}{16}\geqslant\frac{32+4^4}{16}=2+4^2=18$.
Enfin, pour avoir égalité, il faut que $s^2=4p$, donc $a=b$. Alors $abc=pc=\frac{s^2}{4}c=\frac{c^2}{4}c=-16$, soit $c^3=-64$. On trouve $c=-4$ et $a=b=2$. On a bien $M=\frac{2^2+2^2}{-4}+\frac{2^2+(-4)^2}{2}+\frac{(-4)^2+2^2}{2}=-\frac{8}{4}+\frac{20}{2}+\frac{20}{2}=18$.
La valeur minimale que peut prendre M est donc 18.

7 Algèbre : Équations fonctionnelles 2 (Tristan)

Injectivité

Définition 1.
Soit $f : E \to F$. On dit que f est injective sur E si pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$,

$$f(x) \neq f(y),$$

c'est-à-dire

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Ainsi, l'injectivité permet de « simplifier » par f.

Exemple 2.
La fonction

$$f : x \longmapsto x^2$$

est injective sur $\mathbb{R}^+$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, dans $\mathbb{R}^+$, si on a

$$f(a + b) = f(c),$$

on sait que

$$a + b = c,$$

mais pas dans $\mathbb{R}$. On sait ici cependant que

$$a + b = \pm c.$$

Exercice 1
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(-f(f(x)) + f(y)).$$

Remarque 3.
Pour prouver l'injectivité, on essaie en général de montrer que, pour tous x, y,

$$f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y.$$

Pour cela, on prend deux éléments a, b de l'ensemble de définition et on suppose

$$f(a) = f(b).$$

À partir de cette égalité, on cherche à montrer que $a = b$.

Exemple 4.
On considère la fonction cube

$$f(x) = x^3.$$

Pour prouver que cette fonction est injective sur $\mathbb{R}$, on prend deux réels a, b tels que $f(a) = f(b)$.

On a alors

$$a^3 = b^3,$$

donc

$$a = b.$$

Ainsi, f est injective.

Surjectivité

Définition 5.
Soit $f : E \to F$. On dit que f est surjective sur F si, pour tout $x \in F$, il existe $y \in E$ tel que

$$f(y) = x.$$

C'est-à-dire que l'on « atteint » F en entier.
Ainsi, on peut poser $z = f(x)$ sans perte d'information dans une équation fonctionnelle.

Exemple 6.
La fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$$

est surjective sur $\mathbb{R}^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Remarque 7.
Pour prouver la surjectivité, on essaie d'arriver à une équation de la forme

$$f(X) = Z,$$

où Z prend toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée de la fonction.
Ceci prouve que f peut aussi prendre toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée.

Exercice 2
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout couple de réels (x, y) :

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y).$$

Exemple 8.
On reprend l'exemple précédent :

$$f(x) = x^3.$$

Or x^3 parcourt $\mathbb{R}$, donc f parcourt $\mathbb{R}$.
Ainsi, f est surjective sur $\mathbb{R}$.
Comme elle est également injective, f est bijective sur $\mathbb{R}$.

Points particuliers

Certains ensembles de points particuliers peuvent s'avérer très utiles dans certains problèmes.

Par points particuliers, il faut comprendre les racines de f, c'est-à-dire les x tels que

$$f(x) = 0,$$

ou ses points fixes, c'est-à-dire les k tels que

$$f(k) = k,$$

ou encore d'autres points respectant une propriété commune.

Définition 9.
Pour une fonction f, un point fixe est un élément x de l'ensemble de départ tel que

$$f(x) = x.$$

Définition 10.
Pour une fonction f, un élément x de l'ensemble de départ est appelé une racine de f si

$$f(x) = 0.$$

En général, quand on étudie les points fixes ou les racines, rien ne nous garantit qu'il en existe. On dit simplement : si k est un hypothétique point fixe, alors il respecte telle ou telle condition.
Il se pourrait même que l'on arrive à des conditions contradictoires pour k. On aurait alors prouvé qu'il n'existe aucun point fixe, ce qui peut se révéler utile par la suite.

Exercices

Exercice 3
Parmi les équations fonctionnelles suivantes, déterminer lesquelles n'admettent que des solutions injectives, surjectives ou bijectives.

Dans chaque cas,

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

1. $$f(x + f(y)) = 2f(x) + y.$$
2. $$f(f(x)) = 0.$$
3. $$f(f(x)) = \sin(x).$$
4. $$f(x + y) = f(x)f(y).$$

Exercice 4
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x.$$

Exercice 5

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + x) = f(x) + x$$

et

$$f(f(2x) - x) = x - 2f(x).$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout couple d'entiers (x, y) :

$$f(x + f(y)) = f(x) - y.$$

Exercice 7
Existe-t-il des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(f(x)) = x^3$$

et

$$f(g(x)) = x^2 ?$$

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous naturels a et b :

$$f(f(a) + f(b)) = a + b.$$

Exercice 9
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x :

$$f(x^3 + x) \leqslant x \leqslant (f(x))^3 + f(x).$$

Exercice 10 (IMO 1983, P1 modifié)
Déterminer les fonctions

$$f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$$

vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,
$$f(xf(y)) = yf(x).$$
2. Pour tout $x > 1$,
$$f(x) < 1.$$

Exercice 11 (Kyrgyzstan 2012)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y :

$$f\big(f(x)^2 + f(y)\big) = xf(x) + y.$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

Analyse

Soit f une potentielle solution.

On applique la substitution $(x, f(x))$:

$$f(2f(x)) = 2x + f(0).$$

Ainsi, soient $a, b \in \mathbb{R}^+$. Si $f(a) = f(b)$, alors

$$2a = f(2f(a)) - f(0) = f(2f(b)) - f(0) = 2b,$$

donc $a = b$.

Ainsi, f est injective.

On applique maintenant la substitution $(0, y)$:

$$f(f(0) + y) = f(-f(f(0)) + f(y)).$$

Comme f est injective, on peut simplifier par f :

$$f(0) + y = -f(f(0)) + f(y).$$

Ainsi,

$$f(y) = y + f(0) + f(f(0)).$$

Donc f est une fonction affine : il existe un réel constant c tel que

$$f(x) = x + c.$$

Vérification

En injectant $f(x) = x + c$ dans l'équation initiale, on obtient

$$f(f(x) + y) = x + y + 2c,$$

tandis que

$$2x + f(-f(f(x)) + f(y)) = x + y.$$

Ainsi,

$$2c = 0,$$

donc

$$c = 0.$$

La seule fonction solution est donc

$$\boxed{f(x) = x}.$$

Solution de l'exercice 2

Soit f une potentielle solution.

Pour

$$\left(\frac{y + f(0)}{2}, 0\right),$$

on obtient

$$f\left(\left(\frac{y+f(0)}{2}\right)^2+f(0)\right)=y.$$

Ainsi, f est surjective.
On peut donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$, choisir y tel que

$$f(y)=-x^2.$$

L'équation donne alors

$$f(0)=2x+x^2$$

pour tout $x\in\mathbb{R}$, ce qui est absurde.
Il n'existe donc aucune fonction solution.

Solution de l'exercice 3
1. En posant $x=0$, on obtient

$$f(f(y))=2f(0)+y.$$

Si $f(a)=f(b)$, alors

$$f(f(a))=f(f(b)),$$

donc

$$2f(0)+a=2f(0)+b,$$

d'où $a=b$.
Ainsi, f est injective.
De plus, l'expression

$$2f(0)+y$$

parcourt $\mathbb{R}$ lorsque y parcourt $\mathbb{R}$. Ainsi $f\circ f$ est surjective, donc f est surjective.
Par conséquent, f est bijective.

2. Supposons par l'absurde que f soit surjective.
Pour tout $y\in\mathbb{R}$, il existe alors x tel que

$$f(x)=y.$$

Ainsi,

$$f(y)=f(f(x))=0.$$

Donc f est la fonction nulle, qui n'est pas surjective : contradiction.
Supposons maintenant par l'absurde que f soit injective.
Pour $x\neq y$, on aurait $f(x)\neq f(y)$. Mais

$$f(f(x))=f(f(y))=0,$$

ce qui contredit l'injectivité de f.
Par conséquent, f n'est ni injective ni surjective.
On peut également remarquer que la fonction nulle est solution.

3. Injectivité
On distingue deux cas.

Si
$$f(0) = f(\pi),$$
alors f n'est pas injective.

Sinon,
$$f(0) \neq f(\pi),$$
mais
$$f(f(0)) = \sin(0) = 0 = \sin(\pi) = f(f(\pi)).$$
Ainsi, f n'est pas injective.

Surjectivité

On a
$$(f \circ f)(x) = \sin(x),$$
donc $f \circ f$ est à valeurs dans $[-1, 1]$ et n'est pas surjective sur $\mathbb{R}$.

Or, si f était surjective, alors $f \circ f$ serait également surjective.

Ainsi, f n'est pas surjective.

4. La fonction nulle est solution. Elle n'est ni injective ni surjective.

On ne peut donc pas affirmer que les solutions sont nécessairement injectives ou surjectives.

Solution de l'exercice 4

Soit f une potentielle solution.

En prenant $y = 0$, on obtient
$$f(f(f(x))) = x + f(0) - f(f(0)).$$
Le membre de droite parcourt $\mathbb{R}$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$. Ainsi, f est surjective.

Par conséquent, $f(y)$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle. On peut donc remplacer $f(y)$ par un réel quelconque t.

En prenant $x = 0$ dans l'équation initiale, on obtient
$$f(f(f(0))) + f(t) = t.$$
Ainsi,
$$f(t) = t - f(f(f(0))).$$
Donc f est de la forme
$$f(x) = x + a$$
pour une certaine constante réelle a.

En injectant cette expression dans l'équation initiale, on trouve
$$a = 0.$$
La seule solution est donc
$$\boxed{f(x) = x}.$$

Solution de l'exercice 5

Soit f une potentielle solution.

La première condition nous incite à étudier les points fixes.
Supposons que $k \in \mathbb{R}$ soit tel que

$$f(k) = k.$$

Par la première condition,

$$f(f(k) + k) = f(k) + k,$$

donc

$$f(2k) = 2k.$$

La deuxième condition nous donne alors

$$f(f(2k) - k) = k - 2f(k),$$

d'où

$$f(k) = -k.$$

Or $f(k) = k$. Ainsi

$$k = -k,$$

donc

$$k = 0.$$

Nous avons donc montré que tout point fixe éventuel de f est nul :

$$\{k \in \mathbb{R} \mid f(k) = k\} \subseteq \{0\}.$$

Or, la première condition affirme que

$$f(f(x) + x) = f(x) + x.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, le réel $f(x) + x$ est un point fixe de f. Il est donc nécessairement nul :

$$f(x) + x = 0.$$

Par conséquent,

$$f(x) = -x.$$

Vérifions que cette fonction convient :

$$f(f(x) + x) = f(0) = 0 = f(x) + x,$$

et

$$f(f(2x) - x) = f(-3x) = 3x = x - 2f(x).$$

L'unique solution est donc

$$\boxed{f(x) = -x}.$$

Solution de l'exercice 6
Soit f une potentielle solution.
Pour

$$(x, y) = (0, f(0) - y),$$

on obtient

$$f(f(f(0)-y))=y.$$

Ainsi, f est surjective.
De plus, avec $(0,y)$,

$$f(f(y))=f(0)-y.$$

Supposons qu'il existe $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que

$$f(a)=f(b).$$

Alors

$$a=f(0)-f(f(a))=f(0)-f(f(b))=b.$$

Ainsi, f est injective.
Avec $(x,0)$, on obtient

$$f(x+f(0))=f(x).$$

Par injectivité,

$$x+f(0)=x,$$

donc

$$f(0)=0.$$

Ainsi, avec $(0,y)$,

$$f(f(y))=-y.$$

L'équation initiale devient alors

$$f(x+f(y))=f(x)+f(f(y)).$$

Comme f est surjective, on peut poser

$$z=f(y)$$

sans perte de généralité. On obtient donc

$$f(x+z)=f(x)+f(z).$$

Ainsi, f est additive sur $\mathbb{Z}$.
En posant

$$a=f(1),$$

on obtient par récurrence

$$f(n)=an$$

pour tout $n\in\mathbb{N}$.
De plus,

$$0=f(0)=f(n-n)=f(n)+f(-n),$$

donc la formule se généralise à tout $n\in\mathbb{Z}$:

$$f(n)=an.$$

En réinjectant dans l'équation initiale,

$$a(x + ay) = ax - y.$$

Ainsi,

$$a^2 = -1,$$

ce qui est impossible dans $\mathbb{Z}$.

Il n'existe donc aucune fonction solution.

Solution de l'exercice 7

Soient f et g de potentielles solutions.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$f(a) = f(b).$$

Alors

$$a^3 = g(f(a)) = g(f(b)) = b^3,$$

donc

$$a = b.$$

Ainsi, f est injective.

En substituant $f(y)$ à x dans la deuxième équation, on obtient

$$f(g(f(y))) = f(y)^2.$$

Or, d'après la première équation,

$$g(f(y)) = y^3.$$

Ainsi,

$$f(y^3) = f(y)^2.$$

En prenant successivement $y = 0$, $y = 1$ et $y = -1$, on obtient

$$f(0) = f(0)^2, \qquad f(1) = f(1)^2, \qquad f(-1) = f(-1)^2.$$

Par conséquent,

$$f(0), f(1), f(-1) \in \{0, 1\}.$$

Trois réels distincts $-1, 0, 1$ ont donc leurs images dans un ensemble ne contenant que deux éléments.

Par le principe des tiroirs, il existe deux éléments distincts $a, b \in \{-1, 0, 1\}$ tels que

$$f(a) = f(b),$$

ce qui contredit l'injectivité de f.

Il n'existe donc pas de fonctions f et g convenant.

Solution de l'exercice 8

Pour $b = 0$, on obtient

$$f(f(a) + f(0)) = a.$$

Ainsi, f est surjective.

De plus, si

$$f(n) = f(m),$$

alors

$$f(f(n) + f(0)) = f(f(m) + f(0)),$$

donc

$$n = m.$$

Ainsi, f est injective.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
On prend successivement $(a, b) = (n, 1)$ et $(a, b) = (n + 1, 0)$:

$$f(f(n) + f(1)) = n + 1$$

et

$$f(f(n + 1) + f(0)) = n + 1.$$

Par injectivité,

$$f(n) + f(1) = f(n + 1) + f(0).$$

Ainsi,

$$f(n + 1) = f(n) + f(1) - f(0).$$

Posons

$$A = f(0) \qquad \text{et} \qquad B = f(1).$$

On a donc

$$f(n + 1) = f(n) + B - A.$$

Par récurrence,

$$f(n) = A + n(B - A).$$

Posons

$$d = B - A.$$

Alors

$$f(n) = A + dn.$$

En réinjectant dans l'équation initiale, on obtient

$$A + d\big(2A + d(a + b)\big) = a + b.$$

Ainsi,

$$d^2 = 1$$

et

$$A(1 + 2d) = 0.$$

On en déduit

$$A = 0.$$

Comme f est à valeurs dans $\mathbb{N}$, le cas $d = -1$ est impossible. Ainsi

$$d = 1.$$

Finalement,

$$\boxed{f(n) = n}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Solution de l'exercice 9

Soit f une potentielle solution.

On pose

$$g : x \longmapsto x^3 + x.$$

L'inéquation devient

$$f(g(x)) \leqslant x \leqslant g(f(x)).$$

La fonction g est strictement croissante et bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa réciproque g^{-1} est donc également strictement croissante.

À partir de

$$x \leqslant g(f(x)),$$

on peut composer par g^{-1} :

$$g^{-1}(x) \leqslant f(x).$$

D'autre part,

$$f(g(x)) \leqslant x.$$

En remplaçant x par $g^{-1}(x)$, on obtient

$$f(x) \leqslant g^{-1}(x).$$

Ainsi,

$$f(x) \leqslant g^{-1}(x) \leqslant f(x),$$

donc

$$f(x) = g^{-1}(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

L'unique solution est donc

$$\boxed{f = g^{-1}},$$

où

$$g(x) = x^3 + x.$$

Solution de l'exercice 10

Source : cours d'équations fonctionnelles de la POFM.

On remarque que la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

est une solution du problème. Nous allons montrer que c'est la seule.

La forme de l'équation fonctionnelle et de la solution envisagée nous incite à étudier les expressions du type

$$xf(x).$$

1. Montrons que f est bijective.

Pour $x = 1$, on obtient

$$f(f(y)) = yf(1)$$

pour tout $y > 0$.

Comme

$$f(1) > 0,$$

si $a, b > 0$ vérifient

$$f(a) = f(b),$$

alors

$$af(1) = f(f(a)) = f(f(b)) = bf(1),$$

donc

$$a = b.$$

Ainsi, f est injective.

De plus, lorsque y parcourt $\mathbb{R}^{+*}$, le réel

$$yf(1)$$

parcourt également $\mathbb{R}^{+*}$.

Puisque

$$f(f(y)) = yf(1),$$

la fonction f est surjective.

Ainsi, f est bijective.

2. Étudions les points fixes de f.

Notons

$$F = \{x > 0 \mid f(x) = x\}.$$

En prenant $x = y$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient

$$f(xf(x)) = xf(x).$$

Ainsi,

$$xf(x) \in F$$

pour tout $x > 0$.

Montrons maintenant que

$$1 \in F.$$

Comme f est bijective, il existe un unique $c > 0$ tel que

$$f(c) = 1.$$

Or

$$cf(c) = c$$

est un point fixe. Plus directement, en prenant $x = 1$ et $y = c$,

$$f(f(c)) = cf(1).$$

Comme $f(c) = 1$, on obtient

$$f(1) = cf(1).$$

Puisque

$$f(1) > 0,$$

on en déduit

$$c = 1.$$

Ainsi,

$$f(1) = 1,$$

et donc

$$1 \in F.$$

3. Montrons que F est stable par passage à l'inverse.
Soit $x \in F$. Alors

$$f(x) = x.$$

Comme $f(1) = 1$, on a

$$1 = f\left(\frac{1}{x}\, x\right) = f\left(\frac{1}{x} f(x)\right).$$

En utilisant l'équation fonctionnelle,

$$f\left(\frac{1}{x} f(x)\right) = xf\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi,

$$xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1,$$

donc

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x}.$$

Par conséquent,

$$x \in F \Longrightarrow \frac{1}{x} \in F.$$

4. Déterminons F.
Supposons qu'il existe un point fixe $a \neq 1$.
Si

$$a > 1,$$

alors, par la deuxième condition,

$$f(a) < 1.$$

Mais si a est un point fixe,

$$f(a) = a > 1,$$

ce qui est impossible.
Si

$$0 < a < 1,$$

alors

$$\frac{1}{a} > 1.$$

Comme F est stable par passage à l'inverse,

$$\frac{1}{a} \in F,$$

ce qui est impossible d'après le cas précédent.

Ainsi,

$$F = \{1\}.$$

Or, pour tout $x > 0$,

$$xf(x) \in F.$$

Donc

$$xf(x) = 1,$$

et finalement

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}.$$

Solution de l'exercice 11

Soit f une potentielle solution. On note

$$P(x, y) : \qquad f\big(f(x)^2 + f(y)\big) = xf(x) + y.$$

1. Montrons que f est bijective.

Pour un x fixé, lorsque y parcourt $\mathbb{R}$, le membre de droite

$$xf(x) + y$$

parcourt tout $\mathbb{R}$.

Ainsi, f est surjective.

Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(a) = 0.$$

En appliquant $P(a, y)$, on obtient

$$f(f(y)) = y$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

Ainsi,

$$f \circ f = \mathrm{Id}\,.$$

En particulier, f est bijective et

$$f^{-1} = f.$$

2. Montrons que $f(x)^2 = x^2$.

À partir de

$$f\big(f(x)^2 + f(y)\big) = xf(x) + y,$$

on applique f aux deux membres. Comme $f(f(t)) = t$, on obtient

$$f(x)^2 + f(y) = f(xf(x) + y).$$

Ainsi,

$$f(xf(x) + y) = f(y) + f(x)^2. \tag{1}$$

On remplace maintenant x par $f(x)$ dans cette relation. Comme

$$f(f(x)) = x,$$

on obtient

$$f(f(x)x + y) = f(y) + x^2. \tag{2}$$

Les membres de gauche de (1) et (2) sont identiques. Par conséquent,

$$f(x)^2 = x^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi,

$$f(x) \in \{x, -x\}. \tag{3}$$

En particulier,

$$f(0) = 0.$$

3. Montrons que le signe est le même partout.

Soit $a \neq 0$.

D'après (3), deux cas sont possibles.

Premier cas : $f(a) = a$**.**

La relation (1) donne alors, pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(y + a^2) = f(y) + a^2. \tag{4}$$

Supposons qu'il existe $y \neq 0$ tel que

$$f(y) = -y.$$

Alors, par (4),

$$f(y + a^2) = -y + a^2.$$

Mais d'après (3),

$$f(y + a^2) = y + a^2$$

ou

$$f(y + a^2) = -(y + a^2).$$

Dans le premier cas,

$$-y + a^2 = y + a^2,$$

donc $y = 0$, contradiction.

Dans le second cas,

$$-y + a^2 = -y - a^2,$$

donc $a = 0$, contradiction.

Ainsi, pour tout $y \neq 0$,

$$f(y) = y.$$

Comme $f(0) = 0$, on obtient

$$f(x) = x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Deuxième cas : $f(a) = -a$**.**

La relation (1) donne

$$f(y - a^2) = f(y) + a^2.$$

En remplaçant y par $y + a^2$, on obtient

$$f(y + a^2) = f(y) - a^2. \tag{5}$$

Supposons qu'il existe $y \neq 0$ tel que

$$f(y) = y.$$

Alors

$$f(y + a^2) = y - a^2.$$

Mais, d'après (3),

$$f(y + a^2) = y + a^2$$

ou

$$f(y + a^2) = -(y + a^2).$$

Dans le premier cas, on obtient $a = 0$, contradiction.

Dans le second cas, on obtient $y = 0$, contradiction.

Ainsi, pour tout $y \neq 0$,

$$f(y) = -y.$$

Comme $f(0) = 0$, on obtient

$$f(x) = -x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Vérification.

Pour

$$f(x) = x,$$

on a

$$f\big(f(x)^2 + f(y)\big) = f(x^2 + y) = x^2 + y = xf(x) + y.$$

Pour

$$f(x) = -x,$$

on a

$$f\big(f(x)^2 + f(y)\big) = f(x^2 - y) = -x^2 + y = xf(x) + y.$$

Les deux fonctions conviennent.

Les seules solutions sont donc

$$\boxed{f(x) = x} \qquad \text{et} \qquad \boxed{f(x) = -x}.$$

8 Géométrie : Pot-pourri (Kevin et Mathieu)

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle, P le pied de la hauteur issue de A. On pose D et E les projetés de P sur (AC) et (AB), on considère M et N les milieux de $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que M, N, E et D sont cocycliques.

Exercice 2
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice intérieure issue de A dans ABC. On pose T l'intersection de la tangente en A au cercle circonscrit à ABC avec (BC). Montrer que $TA = TD$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle acutangle. La hauteur issue de B dans ABC intersecte le cercle de diamètre $[AC]$ en K et L, et la hauteur issue de C dans ABC intersecte le cercle de diamètre $[AB]$ en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Exercice 4
Les points A, M_1, M_2 et C se trouvent dans cet ordre sur une droite. Soit k_1 le cercle de centre M_1 passant par A et k_2 le cercle de centre M_2 passant par C. Les deux cercles se coupent aux points E et F. Une tangente commune de k_1 et k_2 est tangente à k_1 en B et à k_2 en D. Montrer que les droites (AB), (CD) et (EF) se coupent en un seul point.

Exercice 5
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. Les cercles circonscrits aux triangles ABD et BCD recoupent les côtés $[AB]$ et $[BC]$ en E et F respectivement. Montrer que $AE = CF$.

Exercice 6
Soit ABC un triangle, soit Γ_B le cercle passant par B et tangent au segment $[AC]$ en A, et soit Γ_C le cercle passant par C et tangent au segment $[AB]$ en A. Les cercles Γ_B et Γ_C se recoupent au point D. La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point E. Montrer que D est le milieu de $[AE]$.

Exercice 7
Soit Ω un cercle. X et Y deux points sur ce cercle. On pose Γ un cercle tangent intérieurement à Ω en Z et tangent à (XY) en W. Montrer que (ZW) passe par le milieu de l'arc XY qui ne contient pas Z.

Exercice 8
Soient ABC un triangle et D l'intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec $[BC]$. La médiatrice de $[AD]$ recoupe la bissectrice issue de B en M et celle issue de C en N. Montrer que les points A, M, N et I sont sur un même cercle, avec I le centre du cercle inscrit.

Exercice 9
Soit $ABCD$ un trapèze circonscriptible, avec $(AB) \,//\, (CD)$ et $AB > CD$. Le cercle inscrit au

triangle ABC est tangent aux côtés $[AB]$ et $[AC]$ en M et N respectivement. Montrer que le centre du cercle inscrit à $ABCD$ appartient à la droite (MN).

Exercice 10
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit ω. Soit D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{BAD} = \widehat{CAO}$. Soit E le second point d'intersection de la droite (AD) avec ω. On note respectivement M, N et P les milieux des segments $[BE]$, $[OD]$ et $[AC]$. Montrer que les points M, N et P sont alignés.

Solutions

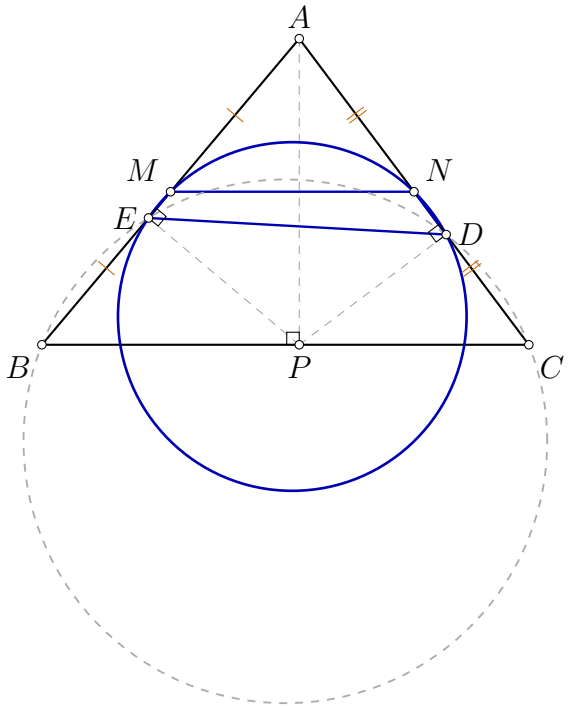
Solution de l'exercice 1
Tout d'abord, d'après la relation d'Euler dans APB et APC, on a que :

$$AE \times AB = AP^2 \; AD \times AC = AP^2$$

Donc, par la réciproque de puissance d'un point, B, C, E et D sont cocycliques. Or comme $AM = \frac{1}{2}AB$ et $AN = \frac{1}{2}AC$, donc :

$$AM \times AE = \frac{1}{2}AB \times AE = \frac{1}{2}AC \times AD = AN \times AD$$

Ce qui nous donne que E, D, M et N sont cocycliques



Solution n°2 de l'exercice 1
Tout d'abord, on a que $\widehat{AEP} = \widehat{ADP} = 90$, ainsi A, D, P et E sont cocycliques. Donc :

$$\widehat{MED} = \widehat{APD} = 90 - \widehat{DPC} = \widehat{ACB}$$

Or d'après la droite des milieux :

$$\widehat{ACB} = \widehat{MND}$$

Donc M, N, D et E sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2
On a par l'angle tangentiel que :

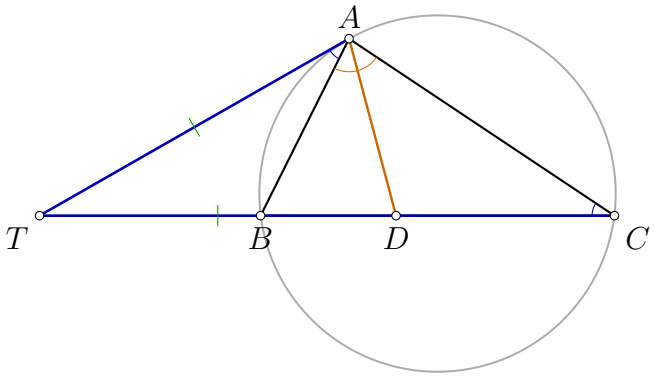
$$\widehat{TAB} = \widehat{ACB}$$

D'autre part, par la définition de la bissectrice :

$$\widehat{BAD} = \widehat{DAC}$$

Donc :

$$\widehat{TAD} = \widehat{TAB} + \widehat{BAD} = \widehat{ACB} + \widehat{DAC} = \widehat{ADT}$$

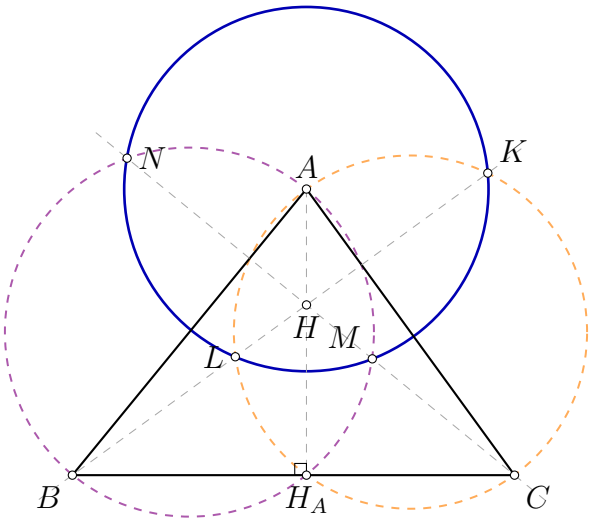


Solution de l'exercice 3
Tout d'abord, on remarque que le cercle Γ_B de diamètre $[AC]$ passe par les pieds des hauteurs issues de A et de C. De même, le cercle Γ_C de diamètre $[AB]$ passe par les pieds des hauteurs issues de A et B. Notons H_A le pied de la hauteur issue de A et H l'orthocentre du triangle ABC.

En écrivant la puissance de l'orthocentre par rapport à chacun des deux cercles, il vient

$$\mathcal{P}_{\Gamma_B}(H) = HL \times HK = HA \times HH_A,$$
$$\mathcal{P}_{\Gamma_C}(H) = HM \times HN = HA \times HH_A.$$

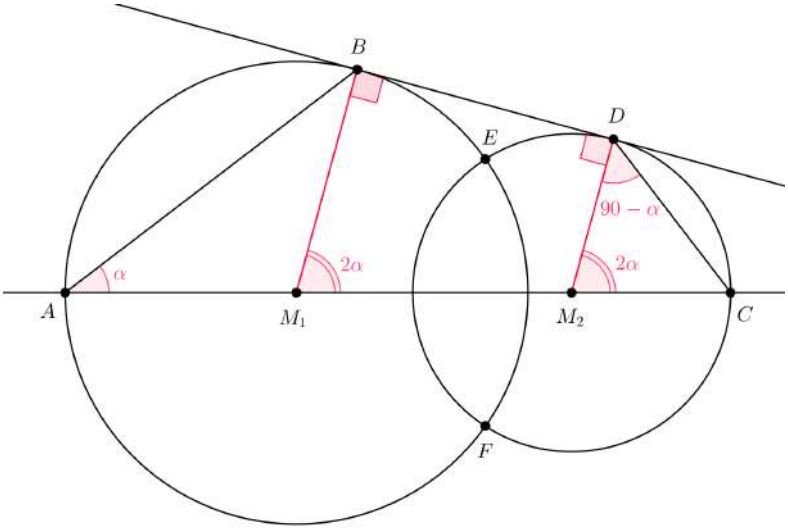
Dès lors, $\mathcal{P}_{\Gamma_B}(H) = \mathcal{P}_{\Gamma_C}(H) = HA \times HH_A$. Par conséquent, on a $HL \times HK = HM \times HN$, ce qui prouve que K, L, M et N sont cocycliques.



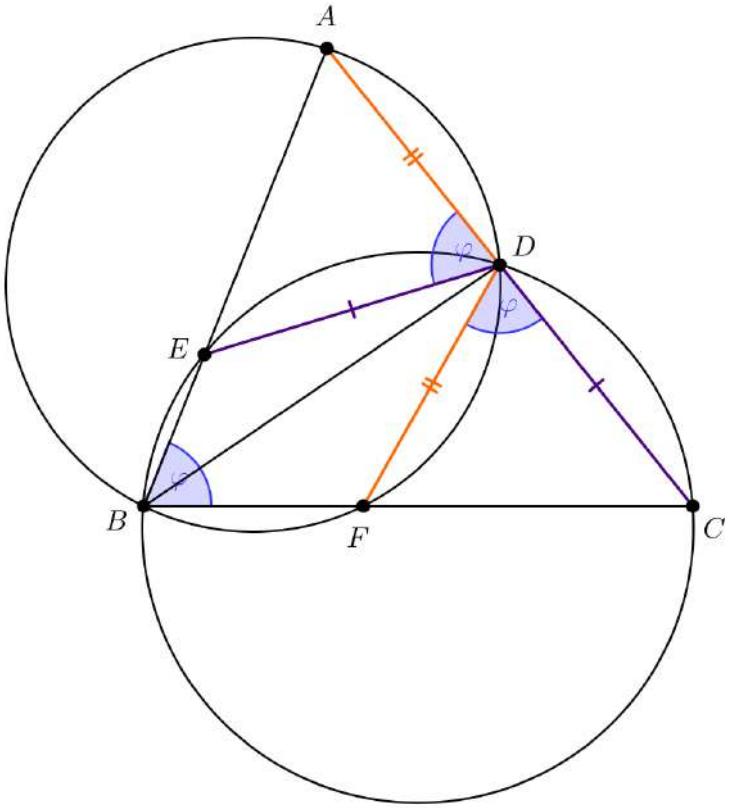
Solution de l'exercice 4

Notons X l'intersection des droites (AB) et (CD). Comme (EF) est l'axe radical des cercles k_1 et k_2, pour montrer que $X \in (EF)$, il suffit de montrer que X a même puissance par rapport à k_1 et k_2, c'est-à-dire que $XA.XB = XC.XD$. Ainsi, il est suffisant pour conclure de prouver que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Pour cela, on fait une chasse aux angles. Par le théorème de l'angle au centre, $\widehat{CM_1B} = 2\widehat{CAB}$. Les droites (M_1B) et (M_2D) sont toutes les deux perpendiculaires à la tangente commune (BD), elles sont donc parallèles entre elles et ainsi $\widehat{CM_2D} = \widehat{CM_1B}$. Le triangle CM_2D étant isocèle en M_2, $\widehat{CDM_2} = \frac{180-\widehat{CM_2D}}{2} = 90 - \widehat{CAB}$. L'angle $\widehat{BDM_2}$ est droit et on en déduit que $\widehat{BDC} = 180 - \widehat{CAB}$, ce qui achève la démonstration.



Solution de l'exercice 5
D'après le théorème du pôle Sud appliqué dans les triangles ABF et CBE, nous savons que d'une part $DA = DF$ et d'autre part que $DE = DC$. Qui plus est, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{CBE} = \widehat{EDA}$ (cocyclicité de B, C, D et E) et $\widehat{ABF} = \widehat{FDC}$ (cocyclicité de A, B, F, D). Ainsi, $\widehat{ADE} = \widehat{FDC}$. Mis avec les égalités de longueurs précédentes, on en conclut que les triangles ADE et FDC sont superposables, ce qui implique que $AE = CF$.

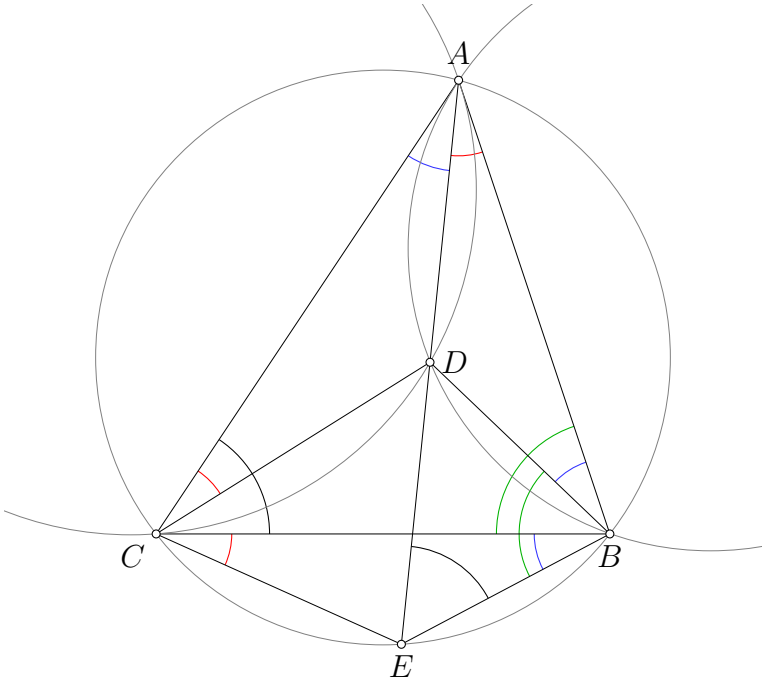


Solution n°2 de l'exercice 5
Comme ce qu'on cherche à prouver ne semble pas traduire de propriété angulaire intéressante, une approche métrique semble plus appropriée. Écrivons donc les puissances des points A et C par rapport aux cercles circonscrits à BDC et ADB respectivement :

$$AE \cdot AB = AD \cdot AC \text{ et } CA \cdot CD = CF \cdot CB$$

En faisant le quotient de ces deux relations, il vient $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC} \cdot \frac{AE}{CF}$. Or, d'après le théorème de la bissectrice, $\frac{AD}{CD} = \frac{AB}{BC}$, d'où $\frac{AE}{CF} = 1$, ce qui donne le résultat escompté.

Solution de l'exercice 6



On traduit les hypothèses sous formes d'égalités d'angles. Ainsi, on observe que, par angle tangentiel pour $\mathcal{C}_B$ puis par angle inscrit dans le cercle circonscrit à ABC :

$$\widehat{DBA} = \widehat{CAD} = \widehat{CAE} = \widehat{CBE}$$

De même on obtient que $\widehat{BCE} = \widehat{DCA}$. Ainsi on a

$$DBA \sim DAC \sim EBC$$

D'autre part, puisque $\widehat{DBA} = \widehat{CBE}$, on a

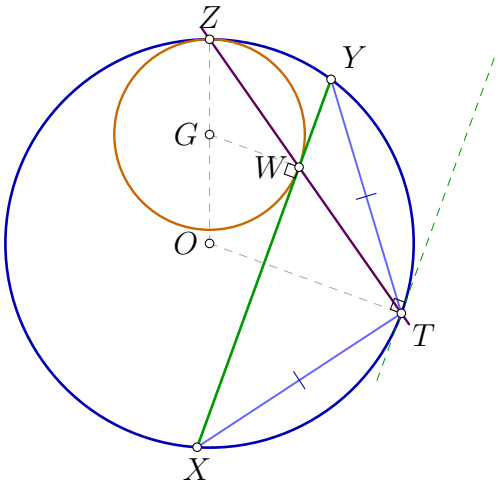
$$\widehat{DBE} = \widehat{DBC} + \widehat{CBE} = \widehat{DBC} + \widehat{DBA} = \widehat{CBA}$$

et par angle inscrit $\widehat{DEB} = \widehat{AEB} = \widehat{BCA}$. Ainsi on a $DBE \sim ABC$. On a alors toutes les égalités de rapports qu'il faut pour conclure :

$$DA \underset{DBA\sim DAC}{=} DB \cdot \frac{AB}{AC} \underset{DBE\sim ABC}{=} DE \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = DE$$

Solution de l'exercice 7

On pose T la seconde intersection de (ZW) avec Ω. On considère l'homothétie de centre Z qui envoie le cercle Γ sur le cercle Ω. Ainsi, cette homothétie envoie W sur T. Donc (XY) est envoyé avec sur la tangente à Ω en T.
Ainsi, on obtient que le trapèze dégénéré $XTTY$ est isocèle car, ils appartiennent à un même cercle. Ainsi XTY est isocèle en T.

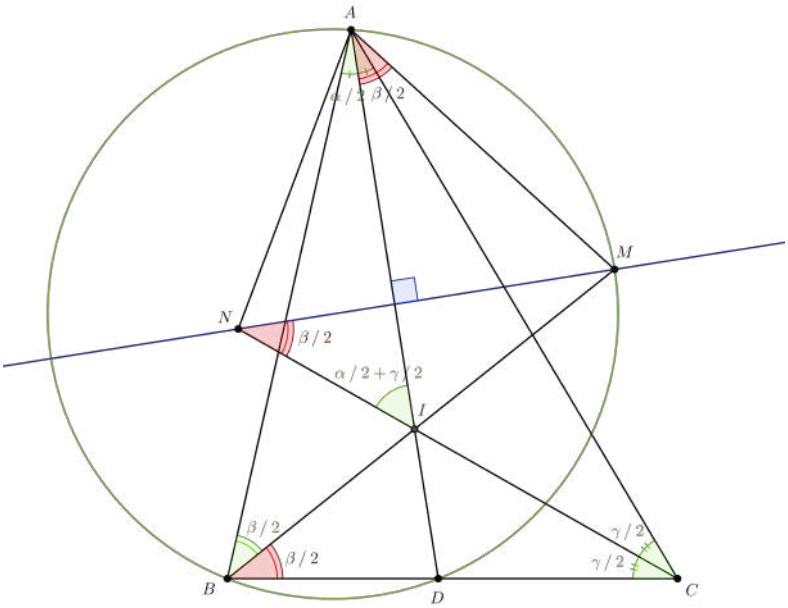


Solution de l'exercice 8

Le point M est défini comme l'intersection de la médiatrice de $[AD]$ avec la bissectrice de $\widehat{ABD}$. D'après le théorème du pôle Sud, M, A, B et D sont donc cocycliques. On en déduit que $(BD, BM) = (AD, AM) = \frac{(BC,BA)}{2}$. Par ailleurs,

$$\begin{aligned}(NM, NI) &= (NM, IA) + (AI, AC) + (CA, CI) \text{ (relation de Chasles)}\\ &= 90 + \frac{(AB, AC)}{2} + \frac{(CA, CB)}{2} \text{ par définition de } I\\ &= \frac{(AB, CB)}{2} \text{ d'après la relation de Chasles}\end{aligned}$$

Dès lors, $(NM, NI) = (AM, AI)$, ce qui prouve que A, M, I et N sont cocycliques.



Solution de l'exercice 9

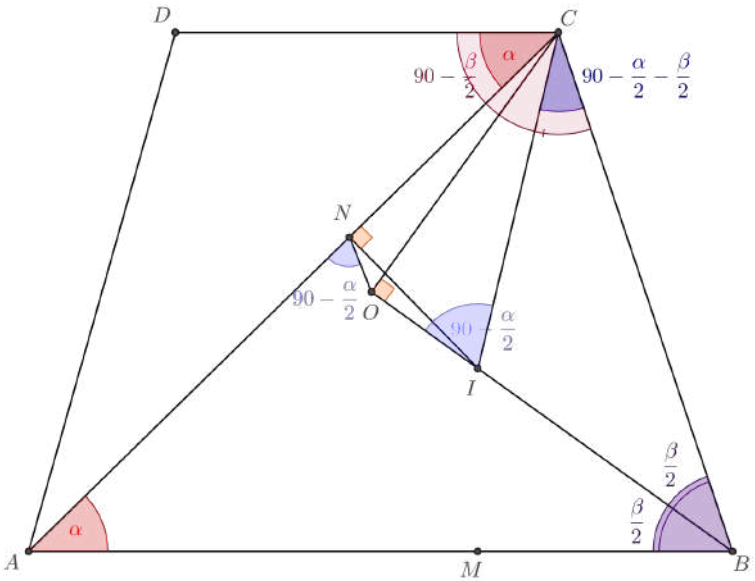
Le triangle AMN étant isocèle en A, $(NA, NM) = 90 - \frac{(AB,AC)}{2}$. Pour prouver que N, O et M sont alignés, il suffit donc de montrer que $(NA, NO) = 90 - \frac{(AB,AC)}{2}$.

$ABCD$ étant un trapèze, $(CD, CB) = 180 - (BC, BA)$. Puisque O est le centre du cercle inscrit à $ABCD$, on a $(CO, CB) = \frac{(CD,CB)}{2} = 90 - \frac{(BC,BA)}{2}$. De plus, I étant le centre du cercle inscrit à ABC, $(BC, BI) = \frac{(BC,BA)}{2}$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned}
(OB, OC) &= (OB, BC) + (BC, OC) \text{ par la relation de Chasles,} \\
&= -(BC, OB) - (OC, BC) \\
&= -(BC, BI) - (CO, CB) \text{ car } B, I \text{ et } O \text{ sont alignés,} \\
&= -90 \text{ d'après les calculs faits précédemment,} \\
&= 90 \text{ par définition modulo 180 des angles orientés.}
\end{aligned}$$

Par ailleurs, par définition du point N, $(IN) \perp (AC)$. Ainsi, $(OB, OC) = (NI, NC)$, si bien que N, O, I et C sont cocycliques d'après le théorème de l'angle inscrit. On sait alors que $(NA, NO) = (IC, IO)$. Pour conclure, on calcule enfin

$$\begin{aligned}
(IC, IO) &= (IC, BC) + (BC, BI) \text{ d'après la relation de Chasles,} \\
&= \frac{(CA, CB)}{2} + \frac{(BC, BA)}{2} \text{ par définition du point I,} \\
&= \frac{(CA, BA)}{2} \text{ encore par Chasles,} \\
&= 90 - \frac{(AB, AC)}{2}.
\end{aligned}$$



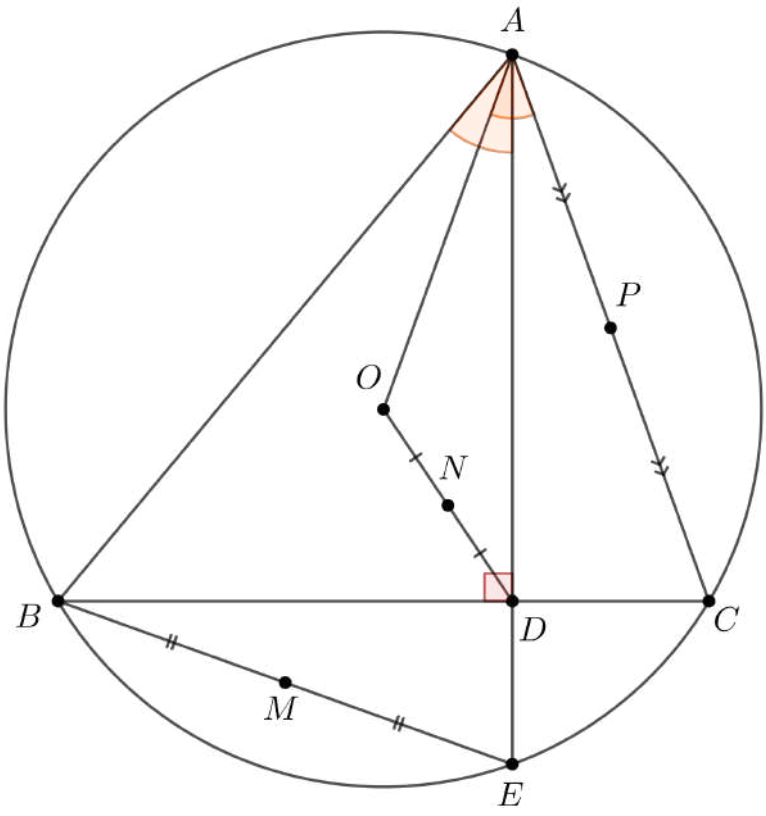
Solution de l'exercice 10
Tout d'abord, on a que $\widehat{CAO} = 90 - \widehat{ABC}$ par angle au centre et car AOC est isocèle en O, or $\widehat{BAD} = \widehat{CAO} = 90 - \widehat{ABC}$, donc D est le pied de la hauteur issue de A dans ABC.
On considère H l'orthocentre de ABC. On a que le symétrique de H par rapport à (BC) est E car il est l'intersection de (AD) avec le cercle circonscrit à ABC. Donc D est le milieu de $[HE]$.
En particulier, par la droite des milieux :

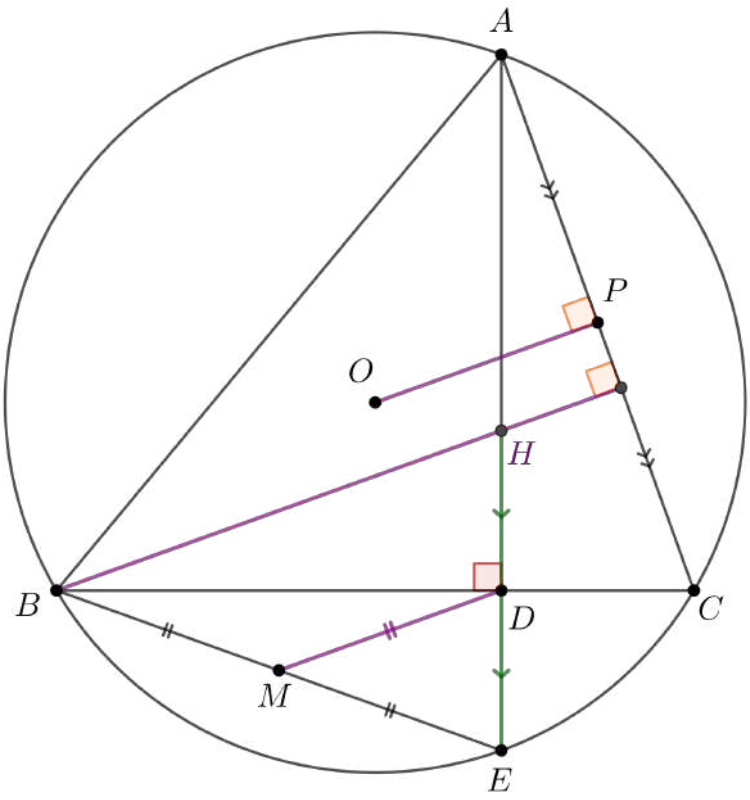
$$(MD)//(BH)$$

Or, $(BH)\perp(AC)$ et on a aussi que P est le milieu de $[AC]$, donc $(OP)\perp(AC)$ car OAC est isocèle en O, donc $(OP)//(MD)$.
On va montrer que $OPDM$ est un parallélogramme, ce qui permettra de conclure que M, N et P sont alignés.
On va montrer que $(OM)//(DP)$.
Comme O est le centre du cercle circonscrit à ABC et que E appartient aussi à ce cercle. Alors $(OM)\perp(BE)$, il suffit donc de montrer que $(DP)\perp(BE)$. Or on a que, P est le milieu de l'hypothenus dans le triangle rectangle ADC, donc :

$$\widehat{ADP} = 90 - \widehat{ACB} = 90 - \widehat{BED}$$

Ce qui conclut.




A
P
O
H
B
D
C
M
E

2 Entraînement de mi-parcours

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC}$ obtus. Soient P un point sur $[BC]$, ω_1 le cercle circonscrit au triangle APB et ω_2 le cercle circonscrit au triangle APC. Soit Q un point sur l'arc $\overset{\frown}{BP}$ de ω_1 contenant A tel que $\widehat{QBA} = \widehat{ABP}$. Soit R un point sur l'arc $\overset{\frown}{PC}$ de de ω_2 contenant A tel que $\widehat{PCA} = \widehat{ACR}$. Montrer que QAR est isocèle en A.

Exercice 2
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, montrer que

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

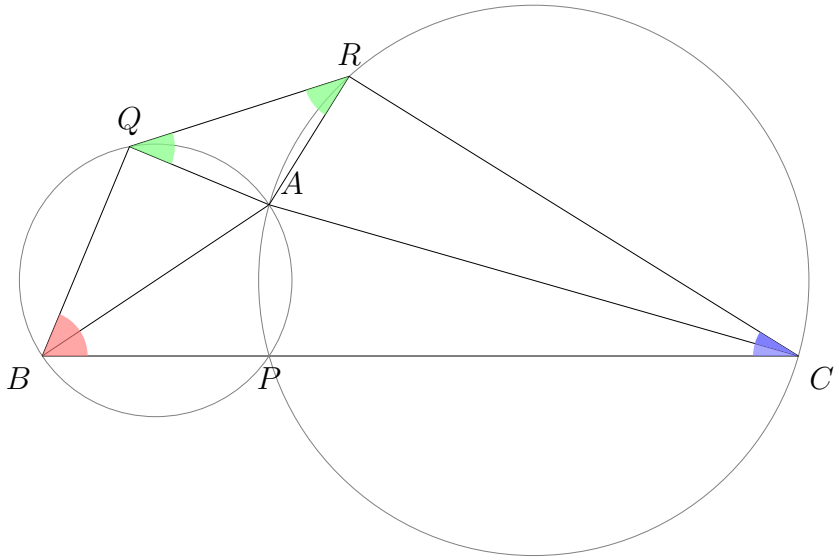
Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x(x + f(y))) = (x + y)f(x)$$

Exercice 4
Soit ABC un triangle. Soit P un point dans le triangle et Q et R sur les côtés (AB) et (AC) respectivement de telle sorte que $BCQR$ soit cyclique. On note X (resp. Y) l'intersection du cercle circonscrit de QAP (resp. PRA) et du cercle circonscrit au quadrilatère $BCQR$. On note Z l'intersection des droites (BY) et (CX). Montrer que les points P, A et Z sont alignés.

Solutions

Solution de l'exercice 1



D'arpès le théorème du pôle sud effectué dans les cercles ω_1 et ω_2, $QA = PA$ et $RA = PA$. Ainsi QAR est isocèle en A.

Solution de l'exercice 2

Par inégalité arithmético-géométrique on obtient les 3 inégalités suivantes :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} \geq 2\frac{a}{c}$$

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq 2\frac{b}{a}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{a^2}{b^2} \geq 2\frac{c}{b}$$

En sommant ces inégalités, on obtient $2\left(\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2}\right) \geqslant 2\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}\right)$, d'où on obtient

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geqslant \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$$

Solution de l'exercice 3

On remarque que les fonctions nulle et identité sont solutions, nous allons voir que ce sont les seules.

Supposons qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$, montrons que f est injective. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$. En posant les substitutions $x = x_0$ et $y = a, b$, on obtient

$$f(x_0(f(x_0 + f(a)) = (x_0 + a)f(x_0)$$

$$f(x_0(f(x_0 + f(b)) = (x_0 + b)f(x_0)$$

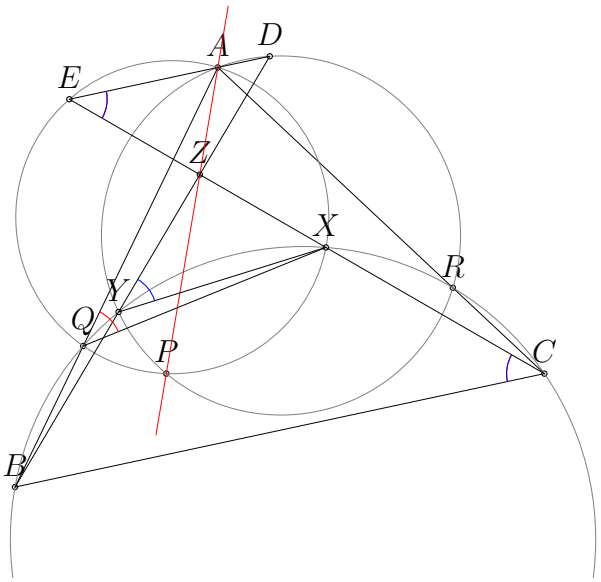
Donc $(x_0 + a)f(x_0) = (x_0 + b)f(x_0)$ soit $a = b$, f est injective.

Pour exploiter l'injectivité, il faut que le terme multiplicatif $(x+y)$ devant le membre de droite soit égal à 1. Pour $y \neq 1$, on substitue $x = 1 - y$, ce qui donne

$$f((1-y)(1-y+f(y))) = f(1-y)$$
$$\implies (1-y)(1-y+f(y)) = 1-y$$
$$\implies f(y) = y$$

Pour obtenir la valeur de $f(1)$ on substitue $y = 1$, x réel tel que $x \neq 0, 1$ et $x(x+f(1)) \neq 1$ (de telles valeurs existent car une équation de degré 2 admet au plus 2 solutions), alors $x(x+f(1)) = x(x+1) \implies f(1) = 1$.
Les seules solutions possibles sont donc $f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 4



Soient D et E les intersections respectives de (BZ) et (CZ) avec les cercles circonscrits de APR et APQ. Par angle inscrit, $\widehat{AEX} = \widehat{AQX} = 180° - \widehat{BQX} = \widehat{BCX}$, d'ou (EA) et (BC) sont parallèles par angles altérnes intérnes. De même, (DA) et (BC) sont parallèles. Donc E, A, D sont alignés. Mais alors, par angle inscrit et puis par angles alternes internes, $\widehat{DYX} = 180° - \widehat{XYB} = \widehat{XCB} = \widehat{DEX}$. Donc, par angle inscrit, $DEYX$ est cocyclique. Donc $(AP), (EX)$ et (DY) sont concourantes car ce sont les axes radicaux des cercles circonscrits de $DEYX, AXPQE$ et $AYPRD$, ce qui conclu.

3 Deuxième partie : Arithmétique et Combinatoire

1 Combinatoire : TD de révisions (Arthur)

Principes des tiroirs

Exercice 1
Édouard veut placer 5 points à l'intérieur d'un carré de côté 1. Une fois les points placés, il mesure la plus petite distance d entre deux points. Quelle est la plus grande valeur possible de d ?

Exercice 2
Julie choisit $n+1$ entiers distincts dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Églantine, sa grande sœur, affirme sans voir l'ensemble, qu'elle peut trouver deux entiers distincts n, m choisis par Julie, et tels que n divise m. A-t-elle nécessairement raison ?

Exercice 3
Albert a trouvé une suite de n entiers positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Antoine, son grand frère, affirme sans voir la suite, qu'il peut trouver deux indices i, j avec $i \leqslant j$ tels que $a_i + \cdots + a_j$ est divisible par n. A-t-il nécessairement raison ?

Invariants et coloriages

Exercice 4
Aliénor écrit au tableau les nombres $1, 2, \ldots, 2025$. À chaque étape, elle efface deux nombres a et b de son choix, puis écrit à leur place le nombre $|a-b|$. Elle répète l'opération jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre au tableau. Ce dernier nombre peut-il être égal à 0 ?

Exercice 5
Aliénor a placé une sauterelle dressée sur chacune des cases d'une grille 5×5. À son signal, toutes les sauterelles sautent simultanément sur une case adjacente (horizontalement ou verticalement). Est-il possible que toutes les cases de la grille contiennent une sauterelle après le saut ?

Exercice 6
Aliénor a placé une sauterelle sur chacun des points de coordonnées $(0,0), (0,1)$ et $(1,0)$. En un tour, une sauterelle peut sauter au dessus d'une autre sauterelle, c'est-à-dire que si une sauterelle est sur le point P et qu'une autre est sur le point Q, la première peut sauter sur le symétrique central de P par rapport à Q. Est-il possible qu'une sauterelle atteigne le point $(1,1)$?

Principe de l'extremum

Exercice 7
Georges affirme qu'il a trouvé n points dans le plan, tel que chaque fois que l'on prend deux

points de l'ensemble, le milieu du segment qui les relie est également un point de l'ensemble. Que peut valoir n ?

Exercice 8
Un tournoi de ping-pong a lieu entre les n élèves du stage Animath. Tous les matchs entre deux élèves sont joués, et il n'y a pas d'égalité. Montrer qu'il existe un élève U pour lequel, pour tout autre élève W, soit U a battu W, soit il existe un élève V tel que U a battu V et V a battu W.

Exercice 9
Amandine veut trouver n points du plan, tels qu'aucune droite ne passe par exactement deux d'entre eux. Malheureusement, Kelly lui affirme que la seule façon de faire est de placer les n points sur une même droite. A-t-elle raison ?

Jeux

Exercice 10
Blanche et Balthazar jouent avec n jetons disposés aux sommets d'un n-gone régulier. Tour à tour, en commençant par Blanche, un joueur retire soit un jeton, soit deux jetons occupant des positions consécutives sur le cercle (les deux jetons devant encore être présents). Le joueur qui ne peut plus jouer perd. Qui gagne, selon la valeur de n ?

Exercice 11
Édouard et Églantine jouent à un jeu sur une grille 8×8. Édouard commence par poser une pièce sur une case vide de la grille. Ensuite, tour par tour, chaque joueur doit poser une pièce sur une case vide de la grille, qui est adjacente à la case où le joueur précédent a posé sa pièce. Le joueur qui ne peut pas jouer perd. Qui gagne si les deux joueurs jouent parfaitement ?

Exercice 12
Timothée et Théotime jouent à un jeu. Ils ont n tas de pièces. Tour par tour, un joueur choisit un des tas avec le plus de pièces et enlève un nombre de pièces strictement positif de ce tas. Le joueur qui ne peut pas jouer perd. Trouver un critère simple pour savoir qui gagne étant donnée la position initiale.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Si Édouard place les 5 points sur les 4 coints du carré et un point au centre, la plus petite distance d entre deux points sera de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Édouard ne peut pas faire mieux : en effet, si on divise le carré en 4 sous-carrés de côté $\frac{1}{2}$, il y aura au moins un sous-carré contenant 2 points, et la distance entre ces deux points sera au plus $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solution de l'exercice 2
Oui, Églantine a raison. En effet, on peut regrouper les entiers de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ en tiroirs de la forme $2^a \cdot b$ où b est impair. Il y a n tiroirs de ce type, et Julie choisit $n+1$ entiers distincts, donc par le principe des tiroirs, il y aura au moins un tiroir contenant deux entiers distincts n, m choisis par Julie. Comme les deux entiers sont dans le même tiroir, l'un divise l'autre.

Solution de l'exercice 3
Oui, Antoine a raison. Considérons les sommes partielles $S_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Il y a n sommes partielles, et chacune peut être réduite modulo n à un reste compris entre 0 et $n-1$. Si l'une de ces sommes partielles est congruente à 0 modulo n, alors nous avons trouvé un sous-ensemble dont la somme est divisible par n. Sinon, par le principe des tiroirs, parmi les n sommes partielles, au moins deux doivent avoir le même reste modulo n. Supposons que $S_i \equiv S_j \mod n$ avec $i < j$. Alors, $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ est divisible par n, ce qui prouve l'affirmation d'Antoine.

Solution de l'exercice 4
Non, ce n'est pas possible. La parité de la somme est un invariant, et elle est impair au début du processus.

Solution de l'exercice 5
Non, ce n'est pas possible. Pour le voir, colorions la grille en noir et blanc comme un échiquier. Chaque sauterelle part d'une case noire ou blanche et atterrit sur une case de couleur opposée. Ainsi, après un saut, le nombre de sauterelles sur les cases noires et blanches reste le même. Or, la grille 5×5 contient 13 cases d'une couleur et 12 de l'autre, donc il est impossible que toutes les cases contiennent une sauterelle après le saut.

Solution de l'exercice 6
Non, ce n'est pas possible. On colorie les cases du plan en 4 couleurs selon la parité de leurs coordonnées. À chaque saut, une sauterelle reste sur une case de la même couleur que celle où elle se trouvait initialement. Or, le point $(1, 1)$ est de couleur différente de celle des points $(0, 0), (0, 1)$ et $(1, 0)$, donc aucune sauterelle ne peut atteindre le point $(1, 1)$.

Solution de l'exercice 7
On doit avoir $n \leqslant 1$. Sinon, considérons les deux points les plus proches de l'ensemble. Le milieu du segment qui les relie est également un point de l'ensemble, ce qui contredit le fait que ces deux points étaient les plus proches. Ainsi, l'ensemble ne peut contenir qu'un seul point ou aucun point.

Solution de l'exercice 8
On choisit un élève U qui a gagné le plus de matchs, et supposons qu'il existe un élève W qui n'a pas été battu par U, où par l'un des élèves que U a battu. Alors, W a battu tous les élèves que U a battu, y compris U, ce qui contredit le fait que U a gagné le plus de matchs.

Solution de l'exercice 9
Oui, Kelly a raison. Considérons la paire $(AB), C$ telle que C n'est pas sur (AB), et qui minimise la distance entre C et la droite (AB). Une telle paire existe car tous les points ne sont pas alignés. La droite (AB) passe par un troisième point D de l'ensemble, car sinon la droite (AB) passerait par exactement deux points de l'ensemble. Renommons les points A, B et D de sorte que D soit entre A et B. Alors, soit $(AC), D$ soit $(BC), D$ est une paire qui contredit la minimalité de la distance entre C et la droite (AB). Ainsi, tous les points doivent être alignés.

Solution de l'exercice 10
Blanche gagne si et seulement si $n = 1$ ou $n = 2$. En effet, dans ces cas, elle peut vider le plateau en un seul coup. Pour $n \geqslant 3$, Balthazar peut symétriser la partie en jouant au milieu du segment de jetons restants, et répondre à chaque coup de Blanche par un coup symétrique. Ainsi, Balthazar peut toujours jouer et gagner.

Solution de l'exercice 11
C'est Églantine qui gagne si les deux joueurs jouent parfaitement. En effet, elle peut couvrir la grille avec des dominos de sorte que chaque domino recouvre deux cases adjacentes. Chaque fois qu'Édouard place une pièce sur une case, Églantine peut placer sa pièce sur l'autre case du domino correspondant. Ainsi, Églantine peut toujours jouer et gagner.

Solution de l'exercice 12
Le joueur qui commence gagne si et seulement si le nombre de tas avec le plus grand nombre de pièces est impair.

Notons k le nombre de tas avec le plus grand nombre de pièces au début de la partie. Pendant les k premiers coups, les joueurs vont enlever des pièces de ces tas, et suivant la parité de k, le joueur qui commence ou le joueur qui joue en second va être le dernier à réduire un de ces tas à un nombre inférieur au maximum initial.

On montre par vol de stratégie que c'est ce joueur J qui gagne. En effet, imaginons que ce joueur J retire une unique pièce de ce tas. Supposons que l'autre joueur a une stratégie gagnante dans cette situation, et commence par retirer x pièces d'un tas avec $k - 1$ pièces. Alors, J pouvait retirer $x + 1$ pièces du tas avec k pièces au lieu de retirer une seule pièce, et ainsi se retrouver dans une situation gagnante.

2 Arithmétique : TD de révisions (Eva)

Ce cours est fortement inspiré du génial cours d'Hadriel de l'an dernier. Nous avons traité les exercies $1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 13, 14$.

Divisibilité

Exercice 1
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1 \mid 3n+2$.

Exercice 2
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $2n+1 \mid n+2$.

Exercice 3
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $2n+1 \mid 5n+2$.

Exercice 4
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n-3 \mid 2n^2-n+3$.

Exercice 5
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n-1 \mid 3n^3-2n^2+5n+1$.

Exercice 6
Soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $2x+1 \mid 8y$. Montrer que $2x+1 \mid y$.

Nombres premiers

Exercice 7
Montrer que si n est à la fois un carré parfait et un cube parfait, alors il est une puissance sixième parfaite.

Exercice 8
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 9
Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Exercice 10
Soit p un nombre premier et a, b deux entiers tels que $p^3|ab$. Montrer que $p^2|a$ ou $p^2|b$.

Exercice 11
Soit x, y des entiers. Montrer que si $x^2 \mid xy+x+y$, alors $x^2 \mid x+y$.

Modulo

Exercice 12
Déterminer les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^5 - 2n^4 + 5n^3 - n^2 - 8n + 5 = 0$.

Exercice 13
Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

Exercice 14
Existe-t-il a et b entiers tels que $a^2 + b^2 = 10^{100} + 3$?

Exercice 15
Existe-t-il des entiers a et b tels que $3a^2 = b^2 + 1$?

Exercice 16
Trouver tous les triplets (x, y, l) d'entiers naturels vérifiant $x^3 + y^3 - 53 = 7^l$.

Exercice 17
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}$ tels que $4^n + n^4$ soit premier.

Solutions

Solution de l'exercice 1
$n+1 \mid 3n+2 \iff n+1 \mid 3(n+1)-1 \iff n+1 \mid -1$. La seule solution est donc $n=0$.

Solution de l'exercice 2
$2n+1 \mid n+2$ implique $2n+1 \leqslant n+2$ car $n+2>0$. Ainsi, $n \leqslant 1$. Réciproquement, 0 et 1 sont bien solution.

Solution de l'exercice 3

$$2n+1 \mid 5n+2 \iff 2n+1 \mid 2(2n+1)+n \iff 2n+1 \mid n.$$

On remarque que 0 est solution. Si $n \neq 0$, $2n+1 \mid n$ implique $2n+1 \leqslant n$ donc $n \leqslant -1$ ce qui n'est pas possible. Ainsi la seule solution est $n=0$.

Solution de l'exercice 4
On fait la division euclidienne du polynome $2X^2-X+3$ par $X-3$:

$$2n^2-n+3 = 2n(n-3)+5n+3 = (2n+5)(n-3)+18.$$

Ainsi $n-3 \mid 2n^2-n+3 \iff n-3 \mid 18$. Les solutions sont donc $0,1,2,4,5,6,9,12,21$.

Solution de l'exercice 5
On fait la division euclidienne du polynome $3X^3-2X^2+5X+1$ par $X-1$:
$3n^3-2n^2+5n+1 = 3n^2(n-1)+n^2+5n+1 = (3n^2+n)(n-1)+6n+1 = (3n^2+n+6)(n-1)+7$.
Ainsi $n-1 \mid 3n^3-2n^2+5n+1 \iff n-1 \mid 7$. Les solutions sont donc $0,2,8$.

Solution de l'exercice 6
$2x+1$ est premier avec 2. Ainsi le lemme de gauss nous dit que $2x+1 \mid y$.

Solution de l'exercice 7
On regarde la décomposition en facteurs premiers de n. Puisque n s'écrit a^2 et b^3 pour certains a,b entiers, chaque exposant de chaque premier dans la décomposition en facteurs premiers de n est divisible par 2 et 3, donc par 6. n est donc une puissance sixième.

Solution de l'exercice 8
Supposons par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers congrus à 3 mod 4. On les note $p_1,...p_n$. On distingue deux cas selon la parité de n :

Cas 1 : n impair. Dans ce cas, $p_1...p_n \equiv 3[4]$. Donc $N_1 := p_1...p_n+4 \equiv 3[4]$. Soit q un diviseur premier de N_1. q est impair car N_1 est impair, et q est premier avec chaque p_i. Ainsi q est égal à aucun p_i, donc est congru à 1 modulo 4. Ainsi chaque diviseur premier de N_1 est congru à 1 modulo 4. Donc N_1 est congru à 1 modulo 4, absurde.

Cas 2 : n pair. Dans ce cas, $p_1...p_n \equiv 1[4]$. Donc $N_2 := p_1...p_n+2 \equiv 3[4]$. Soit q un diviseur premier de N_2. q est impair car N_2 est impair, et q est premier avec chaque p_i. Ainsi q est égal à aucun p_i, donc est congru à 1 modulo 4. Ainsi chaque diviseur premier de N_2 est congru à 1 modulo 4. Donc N_2 est congru à 1 modulo 4, absurde.

Solution de l'exercice 9
Premièrement, si $n=1$, 2^n-1 n'est pas premier.
Si n est composé, on peut noter $n=ab$ avec $a,b>1$. On a donc $2^n-1 = 2^{ab}-1 = (2^a)^b-1 = (2^a-1)(2^{a(b-1)}+...+1)$ qui n'est pas premier. Ainsi si 2^n-1 est premier, n est premier aussi.

Solution de l'exercice 10
Supposons que p^2 ne divise ni a ni b. Alors $v_p(a) \leqslant 1$ et $v_p(b) \leqslant 1$. On déduit que $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b) \leqslant 2$, ce qui contredit le fait que $p^3 \mid ab$.

Solution de l'exercice 11
$x^2 \mid xy + x + y \iff x^2 \mid x^2 + xy + x + y \iff x^2 \mid (x+1)(x+y)$. Or x et $x+1$ sont premiers entres eux donc x^2 et $x+1$ sont premiers entres eux. Le lemme de gauss nous donne donc que $x^2 \mid x + y$.

Solution de l'exercice 12
Prenant l'équation modulo n, on trouve que $n \mid 5$. Ainsi n vaut 1 ou 5. On vérifie que 5 n'est pas solution (car le terme 5^5 est trop grand pour être compensé par le reste de l'équation), et 1 est solution. La seule solution est donc $n = 1$.

Solution de l'exercice 13
Les valeurs que prennent n^3 lorsque n varie de 0 à 8 modulo 9 sont :
$0, 1, -1, 0, 1, -1, 0, 1, -1$. On vérifie que lorsqu'on somme trois valeurs consécutives, ca fait bien 0 modulo 9 à chaque fois.

Solution de l'exercice 14
Regardant modulo 4, on veut que $a^2 + b^2 \equiv 3[4]$. Or a^2 et b^2 ne peuvent que etre congru à 0 ou 1 modulo 4, donc $a^2 + b^2$ ne peut pas etre congru à 3 modulo 4. Il n'y a donc pas de solutions.

Solution de l'exercice 15
Regardant modulo 4, le coté gauche peut que etre congru à 0 ou 3, et le coté droit peut que etre congru à 1 ou 2. Il n'y a donc pas de solutions.

Solution de l'exercice 16
Commencons par traiter le cas $\ell = 0$. Dans ce cas, on veut (x, y) tel que $x^3 + y^3 = 54$. puisque $4^3 = 64 > 54$, on sait que x et y seront $\leqslant 3$. On trouve pour seule solution $(3, 3, 0)$ dans ce cas.
On traite maintenant le cas $\ell > 0$. Prenant l'équation modulo 7, on obtient :

$$x^3 + y^3 \equiv 4[7].$$

Or x^3 peut etre congru que à $0, 1$ ou -1 modulo 7. Donc $x^3 + y^3$ peut etre congru que à $5, 6, 0, 1, 2$ modulo 7, et en particulier pas à 4. Il n'y a donc pas de solutions dans ce cas.
La seule solution est donc $(3, 3, 0)$.

Solution de l'exercice 17
On commence par traiter les cas $n = 0, 1$. Si $n = 0, 4^n + n^4 = 1$ donc n'est pas premier. Si $n = 1$, et $4^n + n^4 = 5$ est premier.
Si n est pair $\geqslant 2$, $4^n + n^4$ est divisible par 2 et est plus grand que 2 donc n'est pas premier.
Si n est impair plus grand strictement que 1, on pose $n = 2k + 1$ avec $k > 0$. On a donc $4^n + n^4 = (2k+1)^4 + 4^{2k+1} = (2k+1)^4 + 4(2^k)^4$. On va utiliser l'identité de Sophie Germain : $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2)$. Dans notre cas, on obtient : $4^n + n^4 = ((2k+1)^2 + 2(2k+1)2^k + 2^{2k+1})((2k+1)^2 - 2(2k+1)2^k + 2^{2k+1})$. Ces deux termes sont strictement plus grands que 1 pour tout $k > 0$. $4^n + n^4$ n'est donc pas premier dans ce cas.

On trouve donc que le seul n tel que $n^4 + 4^n$ soit premier est 1.

3 Arithmétique : Ordre multiplicatif 1 (Hugo)

Ce cours (surtout la liste d'exercices) s'appuie sur ceux donnés lors de précédents stages de Valbonne, notamment celui de Gaëtan en 2025.

Cours

Dans tout le cours, n et a désigneront des entiers et nous prendrons $n \geqslant 2$. Nous noterons également p un nombre premier.

Rappel 1 (Sur l'inverse)**.**
a admet un inverse modulo n si et seulement si $\mathrm{PGCD}(a, n) = 1$, c'est-à-dire qu'il existe $b \in \mathbb{Z}$ tel que $ab \equiv 1\ [n]$. Alors, si c, d sont des entiers tels que $ac \equiv ad\ [n]$ nous pouvons en déduire $c \equiv d\ [n]$. Enfin, un produit d'éléments inversibles est inversible.

La théorie de l'ordre consiste à étudier les solutions pour $x > 0$ à l'équation $a^x \equiv 1\ [n]$. Remarquons tout d'abord que si une telle solution existe, alors a^{x-1} est un inverse de a, donc nécessairement $\mathrm{PGCD}(a, n) = 1$.

Réciproquement, supposons a et n sont premiers entre eux et étudions la suite $\left(a^k\right)_{k\geqslant 1}$ modulo n. Il n'y a qu'un nombre fini de restes possibles modulo n, par le principe des tiroirs infini, on dispose de $k, l \in \mathbb{N}^*$ avec $k > l$ tels que $a^k \equiv a^l\ [n]$, donc par le rappel, $a^{k-l} = 1$. Ainsi, nous avons montré :

Proposition 2 (Existence de l'ordre)**.**
L'équation $a^x \equiv 1\ [n]$ a une solution $x \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si a est premier avec n.

Nous allons maintenant trouver des x explicites pour lesquels $a^x \equiv 1$ avant de donner une description plus précise des solutions à cette équation qui aboutira à la notion d'ordre.

Petit théorème de Fermat

Théorème 3 (Petit Fermat)**.**
Pour tout entier a et nombre premier p, $a^p \equiv a\ [p]$. Ainsi, si p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1\ [p]$

Afin de prouver ce résultat, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 4.
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, alors $(a+b)^p \equiv a^p + b^p\ [p]$

Démonstration. Nous savons grâce au binôme de Newton que :

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^{p-k} b^k \quad (*)$$

Or, soit $k \in [\![1, p-1]\!]$, alors $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ mais $k < p$ et $p - k < p$ donc p ne divise ni $k!$ ni $(p-k)!$. Or p divise $p! = k!(n-k)!\binom{p}{k}$, donc par le lemme d'Euclide, p divise $\binom{p}{k}$, autrement dit $\binom{p}{k} \equiv 0\ [p]$ et $(*)$ devient :

$$(a+b)^p \equiv a^p + b^p\ [p]$$

□

Mettons en évidence le résultat que nous venons de prouver, il peut parfois être utile :

Lemme 5.
Soit p un nombre premier et $k \in [\![1, p-1]\!]$, alors p divise $\binom{p}{k}$.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du petit théorème de Fermat :

Démonstration. Prouvons le résultat pour $a \geqslant 0$ par récurrence :

Initialisation : Pour $a = 0$ on a $0^p \equiv 0\ [p]$, le résultat est tout aussi évident pour $a = 1$.

Hérédité : Supposons que $a^p \equiv a\ [p]$, alors $(a+1)^p \equiv a^p + 1^p\ [p]$ par le lemme. Ainsi, par hypothèse de récurrence, $(a+1)^p \equiv a+1\ [p]$, ce qui achève l'hérédité.

Ainsi, par le principe de récurrence, le théorème est démontré pour $a \geqslant 0$, pour $a < 0$, on peut appliquer le cas précédent à $a + kp$ pour k assez grand. □

Nous avons donc obtenu un exposant solution de $a^x \equiv 1$ dans le cas où n est premier. Nous allons maintenant généraliser ce résultat.

Théorème d'Euler-Fermat

Définition 6.
On appelle *indicatrice d'Euler* et on note φ la fonction qui à n associe le nombre d'entiers premiers avec n dans entre 0 et $n-1$. Il s'agit donc du nombre d'inversibles modulo n.

Exemple 7.
Pour $n = 10$, les entiers premiers avec 10 et inférieurs à 10 sont $\{1, 3, 7, 9\}$ donc $\varphi(10) = 4$.

On donne les premières valeurs de φ à titre d'exemple :

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\varphi(n)$	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4

Avant d'expliquer comment calculer φ, présentons son intérêt majeur :

Théorème 8 (Euler-Fermat)**.**
Si a est premier avec n, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$.

Démonstration. Fixons a premier avec n. Pour $x \in \mathbb{Z}$, on notera $\bar{x}$ l'unique élément de $[\![0, n-1]\!]$ tel que $\bar{x} \equiv x\ [n]$ c'est-à-dire le reste dans la division euclidienne de x par n. Soit $E = \{x_1, \ldots, x_{\varphi(n)}\}$ l'ensemble des entiers de $[\![0, n-1]\!]$ premiers avec n.

Soit $i, j \in [\![1, \varphi(n)]\!]$ avec $i \neq j$. D'après le rappel, ax_i et ax_j sont inversibles modulo n donc $\overline{ax_i} \in E$. De plus, $x_i \not\equiv x_j\ [n]$, ainsi $ax_i \not\equiv ax_j$ et donc $\overline{ax_i} \neq \overline{ax_j}$.

Posons $E' = \{\overline{ax_1}, \ldots, \overline{ax_{\varphi(n)}}\}$, nous avons montré que $E' \subset E$ et que $\overline{ax_1}, \ldots, \overline{ax_{\varphi(n)}}$ étaient deux-à-deux distincts, donc $|E'| = \varphi(n)$. Ainsi, $E = E'$.

Soit P le produit des éléments de E, nous avons donc :

$$\begin{aligned} P &= \overline{ax_1} \times \cdots \times \overline{ax_{\varphi(n)}} && \text{car } E = E' \\ &\equiv ax_1 \times \cdots \times ax_{\varphi(n)}\ [n] && \text{car } \bar{x} \equiv x \\ &\equiv a^{\varphi(n)} P\ [n] \end{aligned}$$

Or, P est inversible modulo n, donc en simplifiant : $a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$ □

Expliquons maintenant comment calculer φ en pratique

Proposition 9 (Calcul de φ)**.**

— Pour tout nombre premier p, $\varphi(p) = p - 1$

— Pour tout nombre premier p et $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1)$

— Pour tous $a, b \geqslant 2$ premier entre eux, $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$.

— Si la décomposition en produit de facteur premiers de n est $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i > 0$ pour tout i et $p_1, \ldots, p_r$ deux-à-deux distincts, alors :

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i - 1}\right) = \prod_{i=1}^{r} \left(p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)\right) = n \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Démonstration. Le dernier point découle immédiatement du deuxième et du troisième. Le premier est un cas particulier du deuxième (il montre au passage que le petit théorème de Fermat est un cas particulier du théorème d'Euler).

Montrons le deuxième point. Un entier n'est pas premier avec p^α si et seulement s'il est divisible par p. Il y a exactement $1 + \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ multiples de p entre 0 et n inclus, donc $p^\alpha - \varphi(p^\alpha) = 1 + \left\lfloor \frac{p^\alpha - 1}{p} \right\rfloor = 1 + p^{\alpha-1} - 1 = p^{\alpha-1}$.

Le troisième point est une conséquence du théorème des restes chinois, qui n'est pas l'objet de ce cours. On pourra consulter le cours du groupe C du stage de Valbonne 2025 pour une preuve. □

Ordre multiplicatif

Nous avons jusqu'ici trouvé des solutions explicites à l'équation $a^x \equiv 1\ [n]$, nous aimerions maintenant avoir une description plus précise de l'ensemble des solutions et c'est cet objectif qui va nous amener à la notion d'ordre.

Définition 10.
Si a est premier avec n, on appelle *ordre (multiplicatif) de a modulo n* le plus petit entier $x \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^x \equiv 1\ [n]$. On le notera ici $\omega_n(a)$.

Remarquons que l'ordre existe bien d'après soit le théorème d'Euler-Fermat, soit la proposition 2. Énonçons maintenant le résultat qui donne toute sa force à la notion d'ordre

Théorème 11 (Propriété fondamentale de l'ordre)**.**
Si a est premier avec n et $x \in \mathbb{N}$, alors $a^x \equiv 1\ [n]$ **si et seulement si** $\omega_n(a)$ divise x.

Démonstration. Sens si : Supposons que $\omega_n(a)$ divise x, alors $k := \frac{x}{\omega_n(a)}$ est entier et l'on a :

$$a^x = \left(a^{\omega_n(a)}\right)^k \equiv 1^k \equiv 1\ [n]$$

Sens seulement si : Supposons que $a^x \equiv 1\ [n]$, écrivons la division euclidienne de x par $\omega_n(a)$: $x = \omega_n(a)q + r$ avec $r \in [\![0, \omega_n(a) - 1]\!]$. Par le point précédent, $a^{\omega_n(a)q} \equiv 1\ [n]$ donc :

$$1 \equiv a^x \equiv a^{\omega_n(a)q} a^r \equiv a^r\ [n]$$

Ainsi, si $r \neq 0$, on aurait $r \in \mathbb{N}^*, a^r \equiv 1\ [n]$ et $r < \omega_n(a)$, ce qui contredirait la définition de $\omega_n(a)$. Ainsi, $r = 0$ et $\omega_n(a)$ divise x. □

Il est alors très intéressant d'associer ce résultat au deux théorèmes précédents, pour obtenir le fait très utile suivant :

Corollaire 12.
Pour tout $a \in \mathbb{Z}$ premier avec n, on a $\omega_n(a) \mid \varphi(n)$. Dans le cas premier, si p ne divise pas a, alors $\omega_p(a) \mid p-1$.

Ainsi, grâce à informations modulo p, c'est-à-dire de la forme p divise X, nous pouvons obtenir une autre information de la forme ω divise $p-1$: un intérêt majeur de l'ordre modulaire est qu'il permet de « faire passer p de l'autre côté de la divisibilité. »

Signalons un point de vigilance : si $a^x \equiv 1\ [n]$ pour un $x \in \mathbb{N}^*$, on sait que l'on peut définir $\omega_n(a)$ et alors $\omega_n(a) \mid x$ et $\omega_n(a) \mid \varphi(n)$. Cependant, **on ne connaît pas alors la valeur de $\omega_n(a)$!** Il faut se garder d'écrire trop rapidement $x \mid \varphi(n)$! Il est aussi bon de se rappeler que $\omega_n(a) = 1$ est toujours possible (cela signifie $a \equiv 1\ [n]$). Ainsi, l'information $a^x \equiv 1\ [n]$ suffit rarement et il faut souvent exploiter une autre donnée du problème pour déterminer $\omega_n(a)$.

Un cas très favorable est celui où x est lui-même un nombre premier, notons donc $q = x$, alors puisque $\omega_n(a) \mid q$, nous savons que $\omega_n(a) \in \{1, q\}$, pour en déduire $q \mid \varphi(n)$, il reste à montrer que $a \not\equiv 1\ [n]$ si cela est possible.

Avant de conclure, signalons une dernière propriété de l'ordre :

Proposition 13.
On suppose $\mathrm{PGCD}(a, n) = 1$, alors les nombres $a, a^2, \ldots, a^{\omega_n(a)}$ sont deux-à-deux distincts modulo n.

Démonstration. Soit $i, j \in [\![1, \omega_n(a)]\!]$ tels que $a^i \equiv a^j\ [n]$. Sans perte de généralité, disons que $i \leqslant j$. Alors $a^{j-i} \equiv 1\ [n]$ mais $0 \leqslant j-i \leqslant j-1 < \omega_n(a)$, donc par définition de l'ordre $j-i = 0$ c'est-à-dire $i = j$. □

À retenir

Rappelons les résultats les plus importants de ce cours : pour $a \in \mathbb{Z}$, p un nombre premier tel que $p \nmid a$, $n \geqslant 2$ un entier premier avec a et $x \in \mathbb{N}$ on a :

$$a^{p-1} \equiv 1\ [p] \qquad a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n] \qquad a^x \equiv 1\ [n] \iff \omega_n(a) \mid x \qquad \omega_p(a) \mid p-1 \qquad \omega_n(a) \mid \varphi(n)$$

Exercices

Les exercices sont regroupés par sections selon l'avancement nécessaire dans le cours pour les résoudre, et classés par difficulté croissante à l'intérieur d'une section.

Petit théorème de Fermat

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que 11 divise $2^{30n+2} + 7^{10n+1}$.

Exercice 2 (Envoi 2024-2025 TN P10)
Quel est le PGCD de l'ensemble des $a^7 - a$ pour $a \in \mathbb{Z}$?

Exercice 3
Quelles valeurs peut prendre a^9 modulo 19 ?

Exercice 4
Soit p un diviseur premier impair de n^2+1, montrer que $p \equiv 1\ [4]$.

Exercice 5 (IMO 2005 P4, dur)
Trouver tous les $a \in \mathbb{N}^*$ tels que a soit premier avec $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Théorème d'Euler-Fermat

Exercice 6
Quels sont les deux derniers chiffres dans l'écriture décimale de 197^{243} ?

Exercice 7
Quel est le reste dans la division euclidienne de $17^{29^{31}}$ par 13 ?

Exercice 8
Soit n premier avec 30, montrer qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1.

Exercice 9
Montrer que pour tout n impair, $n \mid 2^{n!} - 1$

Ordre multiplicatif

Exercice 10
Soit p un nombre premier et q un facteur premier de $2^p - 1$, montrer que $q > p$.

Exercice 11
Soit p, q des nombres premiers avec q qui divise $1 + p + \cdots + p^{p-1}$, montrer que $q \equiv 1\ [p]$.

Exercice 12 (Entraînement Valbonne 2025 B P1)
Soit p un nombre premier, on suppose que p divise $2^{2^n} + 1$, montrer que 2^{n+1} divise $p - 1$.

Exercice 13
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \geqslant 2$, $n \mid \varphi(a^n - 1)$

Solutions

Solution de l'exercice 1
D'après le petit théorème de Fermat, puisque 2 et 7 ne sont pas divisibles par 11, on a $2^{10} \equiv 7^{10} \equiv 1\ [11]$. Ainsi :

$$2^{30n+2} + 7^{10n+1} \equiv \left(2^{10}\right)^{3n} \times 2^2 + \left(7^{10}\right) \times 7^1 \equiv 4 + 7 \equiv 0\ [11]$$

Solution de l'exercice 2
Notons d ce PGCD.

Puisque $2^7 - 2 = 126 = 2 \times 3^2 \times 7$, il s'ensuit que $d|126$, et que d ne peut être divisible que par les termes intervenant dans la décomposition en facteurs premiers de 126. Grâce au petit théorème de Fermat, on sait que pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$:

— $a^7 \equiv a\ [7]$
— $a^3 \equiv a\ [3]$ donc $a^6 \equiv a^2$ et $a^7 \equiv a^3 \equiv 3\ [3]$
— $a^2 \equiv a\ [2]$ donc $a^7 \equiv a^6 \equiv a^5 \equiv \cdots \equiv a\ [2]$

Ainsi, on en déduit que $2, 3, 7$ divisent toujours $a^7 - a$, donc divisent d. Comme $2, 3, 7$ sont deux-à-deux premiers entre eux, on déduit que $2 \times 3 \times 7 = 42$ divise d.

Il reste à décider si $d = 42$ ou si $d = 126$. Pour cela, on peut remarquer que $9|3^7$ mais que $9 \nmid 3$, ainsi 9 ne divise pas $3^7 - 3$ donc 9 ne divise pas d. Cela permet de conclure que le pgcd recherché vaut $d = 42$.

Solution de l'exercice 3
Soit $a \in \mathbb{Z}$, posons $x = a^9$. Si 19 divise a, alors $x \equiv 0$; on suppose donc le contraire pour la suite. Alors, par le petit théorème de Fermat :

$$x^2 = a^{18} \equiv 1\ [19] \quad \textit{i. e.} \quad 19 \mid x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

Ainsi, par le lemme d'Euclide, on a $19 \mid x+1$ ou $19 \mid x-1$, c'est-à-dire, $x \equiv \pm 1\ [19]$.
Pour conclure, a^9 peut valoir $-1, 0$ ou 1 modulo 19.

Solution de l'exercice 4
Remarquons que p ne divise pas n car sinon il diviserait 1. Nous avons $n^2 \equiv -1\ [p]$, donc puisque $\frac{p-1}{2}$ est entier et par le petit théorème de Fermat :

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(n^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv n^{p-1} \equiv 1\ [p]$$

Alors, si $\frac{p-1}{2}$ était impair, cela signifierait $1 \equiv -1\ [p]$ donc $p \mid 2$ ce qui est exclu. Ainsi $\frac{p-1}{2}$ est pair donc $4 \mid p-1$ c'est-à-dire $p \equiv 1\ [4]$.

Solution de l'exercice 5
L'astuce est de considérer $n = -1$, on alors $u_{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0$, donc u_{-1} est divisible par tous les entiers.

Tentons de formaliser cette heuristique. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier, d'après le petit théorème de Fermat, puisque p ne divise ni 2, ni 3, ni 6 :

$$u_{p-2} \equiv 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1\ [p]$$

Ainsi, $6u_{p-2} \equiv \frac{6}{2} + \frac{6}{3} + \frac{6}{6} - 6 \equiv 3+2+1-6 \equiv 0\ [p]$, donc $p \mid 6u_{p-2}$ et par le lemme d'Euclide, $p \mid u_{p-2}$.

Ainsi, si a est premier avec u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors les seuls facteurs premiers de a sont éventuellement 2 ou 3.

On calcule maintenant les premiers termes $u_1 = 10$ et $u_2 = 48 = 3 \times 16$. Ainsi, $2 \mid u_2$ et $3 \mid u_2$, donc a ne peut pas non plus avoir ni 2 ni 3 comme facteurs premiers.

Ainsi, la seule solution possible est $a = 1$ et réciproquement, 1 est bien premier avec tous les u_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 6
Il suffit de calculer le reste modulo 100. On a $197 \equiv -3\ [100]$. Or -3 et 100 sont premiers entre eux, donc, par le théorème d'Euler-Fermat, puisque $\varphi(100) = \varphi(4)\varphi(25) = 2 \times 20 = 40$, on a : $(-3)^{40} \equiv 1\ [100]$. Or, $243 = 6 \times 40 + 3$, donc :

$$197^{243} \equiv (-3)^{6\times 40+3} \equiv \left((-3)^{40}\right)^6 \times (-3)^3 \equiv -27 \equiv 73\ [100]$$

Ainsi, l'écriture décimale de 197^{243} termine par 73.

Solution de l'exercice 7
On a $17^{29^{31}} \equiv 4^{29^{31}}$ [31], or 4 est premier avec 31, donc par le théorème d'Euler-Fermat, $4^{12} \equiv 1$ [31]. On cherche donc le reste dans la division euclidienne de 29^{31} par 12.

Puisque $\varphi(12) = 4$ et que $31 = 7 \times 4 + 3$, on a par le théorème d'Euler (5 et 12 sont premiers entre eux) :

$$29^{31} \equiv 5^{31} \equiv \left(5^4\right)^7 \times 5^3 \equiv 5 \times 25 \equiv 5\ [12]$$

Ainsi, $29^{31} = 12k + 5$ pour un certain $k \in \mathbb{N}$, donc :

$$17^{29^{31}} \equiv \left(4^{12}\right)^k \times 4^5 \equiv 1 \times 16 \times 16 \times 4 \equiv 3 \times 3 \times 4 \equiv 3 \times (-1) \equiv 10\ [13]$$

Solution de l'exercice 8
Commençons par donner une expression des nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 1 :

$$a_k := \underbrace{11\cdots11}_{k \text{ chiffres}} = 1 + 10 + 100 + \cdots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{10 - 1}$$

Ainsi $9a_k = 10^k - 1$. Or, nous savons que n est premier avec 30, donc avec 10 aussi et par la théorème d'Euler-Fermat :

$$10^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n] \quad \textit{i. e.} \quad n \mid 9a_{\varphi(n)}$$

Or, n est aussi premier avec 3, donc avec 9 et par le lemme de Gauss, nous en concluons que n divise $a_{\varphi(n)}$.

Solution de l'exercice 9
On a clairement étant donnée la définition, $\varphi(n) \leqslant n$, donc $\varphi(n) \mid n!$. Posons $k = \frac{n!}{\varphi(n)}$, puisque n est impair, il est premier avec 2 et par le théorème d'Euler-Fermat :

$$2^{n!} \equiv \left(2^{\varphi(n)}\right)^k \equiv 1^k \equiv 1\ [n]$$

Ainsi, $n \mid 2^{n!} - 1$.

Solution de l'exercice 10
On a $2^p \equiv 1\ [q]$ donc $\omega \mid p$, avec ω l'ordre de 2 modulo q. Si $\omega = 1$ alors $2^1 \equiv 1\ [q]$ donc $q \mid 1$, absurde.

Ainsi, $\omega = p$ et donc $p \mid q - 1$ mais $q - 1 > 0$ donc $p \leqslant q - 1 < q$ et on a bien $p < q$.

Solution de l'exercice 11
L'énoncé implique que q divise $(p-1)(1 + p + \cdots + p^{p-1}) = p^p - 1$, donc $p^p \equiv 1\ [q]$. Ainsi, soit ω l'ordre de p modulo q, $\omega \mid p$. Si $\omega = 1$ alors $p \equiv 1\ [q]$ mais donc :

$$0 \equiv 1 + p + \cdots + p^{p-1} \equiv p \equiv 1\ [q] \quad \text{ce qui est absurde.}$$

Alors, $\omega = p \mid q - 1$ c'est-à-dire $q \equiv 1\ [p]$

Solution de l'exercice 12
L'hypothèse de l'énoncé nous indique que $2^{2^n} \equiv -1\ [p]$. Nous voulons obtenir un diviseur

de $p-1$, nous cherchons donc à faire intervenir l'ordre multiplicatif en mettant au carré cette équation :

$$2^{2^{n+1}} \equiv 1\ [p]$$

Soit donc ω l'ordre de 2 modulo p, on a $\omega \mid 2^{n+1}$, donc $\omega = 2^a$ avec $a \leqslant n+1$. Or, on a clairement $p \neq 2$ puisque $2^{2^n}+1$ est impair (ou bien car on a montré que 2 admettait un ordre modulo p). Ainsi $2^{2^n} \equiv -1 \not\equiv 1\ [p]$, donc $\omega \nmid 2^n$. Ainsi, $a > n$ et donc $a = n+1$.

Alors, nous pouvons conclure que 2^{n+1} divise $p-1$ par le petit théorème de Fermat.

Solution de l'exercice 13

On a directement $a^n \equiv 1\ [a^n-1]$ donc a admet un ordre ω modulo a^n-1 et on a $\omega \leqslant n$. On sait que $\omega \mid \varphi(a^n-1)$, on voudrait donc montrer que $\omega = n$.

Or $a^n-1 \mid a^\omega-1$ et ces deux nombres sont strictement positifs, donc $a^\omega-1 \geqslant a^n-1$ *i. e.* $a^\omega \geqslant a^n$ et ainsi $\omega \geqslant n$.

Par double inégalité, $\omega = n$ et $n \mid \varphi(a^n-1)$.

4 Combinatoire : Double comptage (Maxime)

Ce cours reprend intégralement l'excellent cours de double comptage de Noé donné à Valbonne au groupe B l'année denière. J'ai aussi rajouté un exercice du TD d'Hugo de double comptage donné à Valbonne au groupe C, dont voici l'énoncé :

Exercice 1
Soient $p, n > 1$. Dans un groupe de n personnes, deux personnes distinctes ont toujours au plus p connaissances en commun. On considère que si A connaît B alors B connaît A. Soit a le nombre de paires non ordonnées $\{A, B\}$ telles que A et B se connaissent. Montrer que $a \leqslant \sqrt{pn^3}$.

Je vous laisse vous référer à son TD dans le poly pour un corrigé.

5 Combinatoire : Grilles (Tiphaine et Théo)

Quelques conseils dans le cas de problème de grilles :

— Tester les petits cas. Remplacer les tailles de la grille par des petits nombres aide. Expérimenter dans le cas de problèmes de jeux.

— Utiliser des coloriages pour savoir si telle forme pave une grille. Deux types de raisonnement standard permettent de montrer qu'une grille n'est pas pavable. Le premier consiste à colorier la grille avec un certain nombre de couleurs, de sorte que la pièce occupe le même nombre de cases de chaque couleur, mais la grille ne contient pas autant de couleurs de chaque type. Le second consiste à trouver un coloriage de la grille pour lequel la pièce ne recouvre pas autant de cases de chaque couleur. Si la grille contient le même nombre de cases de chaque couleur, cela peut aboutir à une contradiction, par exemple en montrant que le nombre de pièces utilisées doit être pair, alors que cela n'est pas possible.
Bien entendu, il y a plein d'autres possibilités, mais celles-ci sont les plus standards.

— Dans un problème de jeux, le plus simple est d'utiliser des symétries de la grille, ou d'associer les cases de la grille en paires, par exemple avec un pavage par domino. Ainsi, le second joueur peut toujours jouer dans la seconde case de la paire.

— Utiliser la récurrence pour passer d'une grille de taille n à une grille de taille $n+1$ (car une grille de taille $n+1$ admet une sous-grille de taille n). Mais attention, dans le cas des problèmes de maximum, le maximum pour la grille de taille $n+1$ n'est pas forcément obtenu en regardant le maximum pour une grille de taille n.

Exercices

Exercice 1
Dans chaque case d'une grille 5×5, Eva ecrit $0, 1, -1$. On suppose que la somme des nombres de chaque colonne est positive ou nulle, et la somme des nombres de chaque ligne est négative ou nulle. Quel est le plus petit nombre de 0 qu'il peut y avoir sur la grille ?

Exercice 2
On dispose de cinq couleurs et d'une grille 99×99. On colorie certains carrés de la grille avec l'une des cinq couleurs de sorte que

— Chaque couleur apparaît le même nombre de fois dans la grille.

— Aucune ligne et aucune colonne ne contient des cases de couleur différente.

— Chaque couleur apparaît dans autant de lignes que de colonnes.

Quelle est le plus grand nombre possible de cases que l'on peut colorier en suivant ces règles ?

Exercice 3
On considère une grille 10×10. Pour chaque type de pièce de la figure ci-dessous, dire si l'on peut recouvrir la grille avec uniquement ce type de pièces sans chevauchement (rotations autorisées).

(a) (b) (c) (d)

Exercice 4
Trouver toutes les valeurs de n telles qu'une grille de taille $n \times n$ peut être pavée par des pièces de type a.

Exercice 5
Paul et Oscar jouent à un jeu sur un échiquier 2025×2025, avec initialement un 0 dans chaque case. En commençant par Paul, ils doivent ajouter 1 à un nombre de la grille, pour un total de 2^{2025} ajouts. A la fin du jeu, on note $l_1, \ldots, l_{2025}$ la somme des nombres dans chacune des lignes et $c_1, \ldots, c_{2025}$ la somme des nombres dans chacune des colonnes. Oscar gagne si pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2025$, il existe $1 \leqslant j \leqslant 2025$ tel que $l_i = c_j$ et pour tout $1 \leqslant j \leqslant 2025$, il existe $1 \leqslant i \leqslant 2025$ tel que $c_j = l_i$. Sinon, c'est Paul qui gagne. Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 6 (Envoi junior 2022)
Anatole souhaite colorier une grille de taille $n \times n$ en noir et blanc de sorte à ce que quatre cases coloriées de la même couleur ne forment jamais un rectangle. Déterminer pour quels n celui-ci peut faire cela ?

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un quadrillage $2^n \times 2^n$ et on enlève une case. Est-il toujours possible, quelle que soit la case enlevée, de couvrir le nouveau quadrillage avec des L-triominos ?

Exercice 8 (Envoi junior 2022)
Un ensemble de n cellules d'une grille $n \times n$ est dit réparti s'il ne comprend jamais deux cellules dans la même ligne ou la même colonne. De combien de façon peut-on colorier certaines (éventuellement aucune) cases d'une grille $n \times n$ de sorte que tous les ensembles répartis contiennent le même nombre de cases coloriées ?

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}$. Alice et Bob jouent à un jeu : ils dessinent une grille de taille 8×8 (donc avec 64 cases). Alice colorie n cases de la grille en rouge. Bob colorie ensuite 4 colonnes entières et 4 lignes entières en noir. A la fin, s'il reste une case rouge, Alice gagne. Alice et Bob jouent de manière optimale. Déterminer le plus petit n tel que Alice gagne.

Exercice 10 (Ukraine MO)
Sur une grille 100×300, Anna et Maena jouent à un jeu. Elles colorient chacune à leur tour une case, Anna en bleu et Maena en rouge. Anna commence et elles s'arrêtent seulement lorsque toutes les cases sont coloriées. Une suite de cases est un ensemble de cases dans lequel toutes cases consécutives ont un côté en commun. Anna gagne si elle arrive à créer une suite de cases bleues d'au moins 201 cases. Montrer que Maena peut empêcher Anna de gagner.

Exercice 11 (Tour final Suisse 2015)
Les cases d'un échiquier 8×8 sont blanches. Un coup consiste à échanger les couleurs des cases d'un rectangle 3×1 ou 1×3 (les cases blanches deviennent noires et les cases noires deviennent blanches). Est-il possible d'aboutir en un nombre fini de coups à la configuration où toutes les cases de l'échiquier sont noires ?

Exercice 12 (JBMO 2023, C1)
On considère une grille de taille 2023×2023, dans laquelle chaque carré unité est colorié en

rouge ou en bleu. On suppose qu'il existe exactement 1012 colonnes avec une majorité de cases rouges et exactement 1012 lignes avec une majorité de cases bleues. Quelle est la taille maximale d'un carré monochrome dans la grille ?

Exercice 13 (OFM 2022, sujet junior)
On considère un tableau $n \times n$, avec $n \geqslant 1$. Alice souhaite colorier k cases de ce tableau de sorte qu'il existe une unique manière de placer n jetons sur des cases coloriées sans que deux jetons ne se trouvent sur la même ligne ou la même colonne. Quelle est la valeur maximale de k pour laquelle le souhait d'Alice est réalisable ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

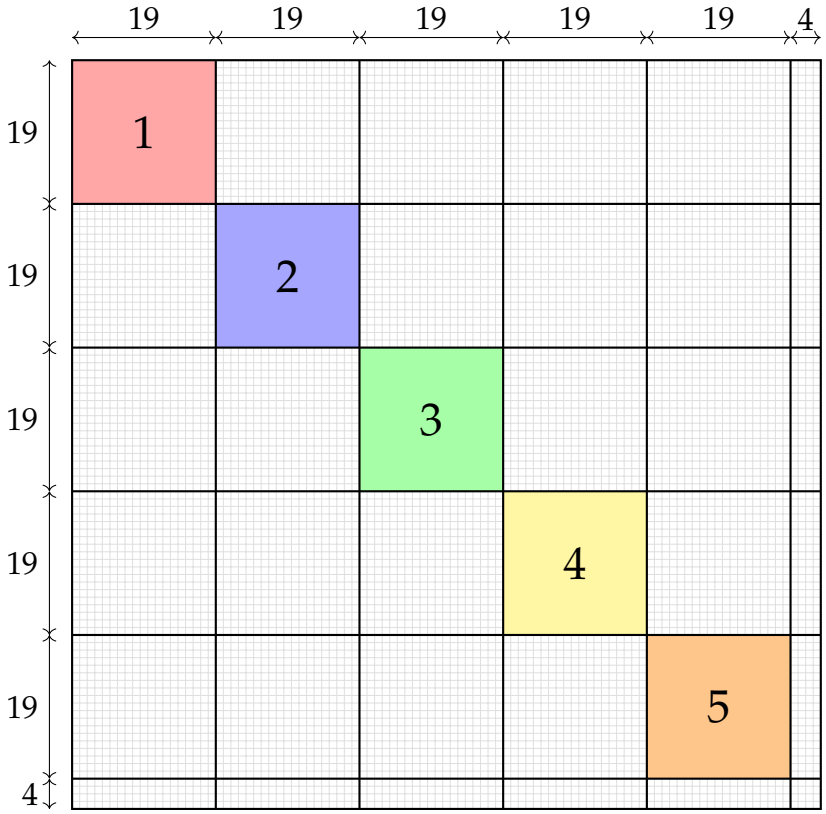
Notons c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 les sommes des colonnes, et $\ell_1, \ldots, \ell_5$ les sommes des lignes. Par hypothèse $c_i \geqslant 0$ pour tout i, et $\ell_j \leqslant 0$ pour tout j. Or la somme de tous les nombres de la grille vaut à la fois $l_1 + \cdots + l_5$ mais aussi $c_1 + \cdots + c_5$, donc est à la fois positive et négative, donc vaut 0. En particulier, chacun des c_i vaut 0.

Ainsi chaque colonne a une somme paire, donc dans chaque colonne il y a forcément un zéro (sinon la somme serait impaire). Réciproquement, la construction suivante convient.

0	1	1	-1	-1
-1	0	1	1	-1
-1	-1	0	1	1
1	-1	-1	0	1
1	1	-1	-1	0

Solution de l'exercice 2

Notons $a_1, \ldots, a_5$ le nombre de lignes dans lesquels chaque couleur, numérotée de 1 à 5, apparaît. Comme $a_1 + \cdots + a_5 = 99$, il existe i tel que $a_i \leqslant 99/5$, donc $a_i \leqslant 19$. Ainsi comme la couleur en question apparaît dans au plus 19 colonnes, elle apparaît au plus dans les 19^2 intersections colonnes et lignes mentionnées. Comme chaque couleur apparaît autant, il y a au plus 5×19^2 carrés colorés. Réciproquement, voici une configuration atteignant cette borne.



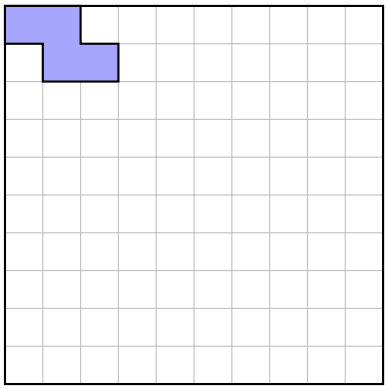
Solution de l'exercice 3

Notons que chaque pièce utilise 4 cases. Donc pour paver la grille 10×10, il faut 25 pièces de chaque type.

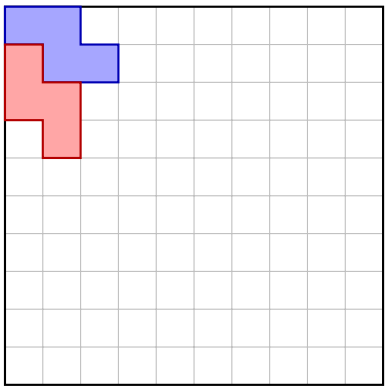
a Pour la pièce de type a, considérons le coloriage en échiquier naturel de la grille. Une pièce recouvre à chaque fois 3 cases noires et 1 case blanche, ou l'inverse. En particulier, comme la grille contient autant de cases blanches que noires, et que chaque pièce couvre soit 2 cases noires de plus que de blanche soit l'inverse, il faut autant de pièces avec un surplus de cases blanches qu'avec un surplus de cases noires. Ce qui est impossible, car le nombre de pièces totales est impair.

b Pour la pièce de type b, on colorie une colonne sur 2 en noir, et les autres en blanc. On remarque que chaque pièce couvre soit 3 cases blanches et 1 case noire, soit l'inverse, et on conclut de même que dans le cas a.

c Pour la pièce c, pour couvrir le coin en haut à droite de la grille, on a besoin d'utiliser soit la pièce telle que dessinée, soit la pièce obtenue en la retournant et la tournant de $90°$. Dans tous les cas, quitte à retourner la grille, on est dans la situation suivante :

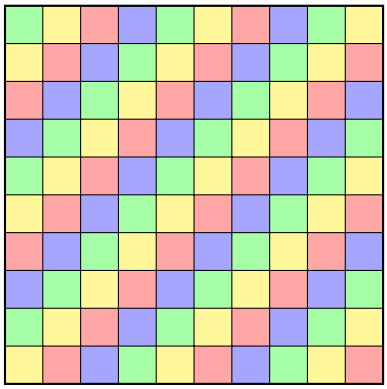


Pour couvrir le carré juste en dessous du coin, il faut forcément utiliser la pièce de la façon suivante :



Pour couvrir la case juste en dessous dans la première colonne, on doit alors utiliser une nouvelle pièce dans le même sens que la rouge, et ainsi de suite. A un moment le processus sort de la grille, donc il n'est pas possible de paver la grille.

d On considère le pavage en 4 couleurs suivant :

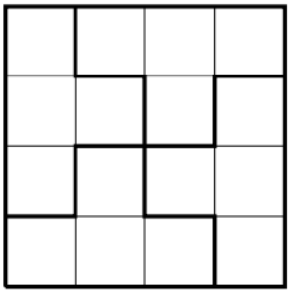


Chaque pièce recouvre 4 cases de couleur différente, donc si la grille est pavable, elle doit avoir le même nombre de cases de chaque couleur. Or ce n'est pas le cas. On peut le remarquer en comptant chaque couleur à la main, mais c'est long. Ou simplement en remarquant que facilement toute grille dont une dimension est divisible par 4 est pavable par la forme de l'énoncé, donc contient autant de chaque couleur. Or la grille constitué des 8 premières lignes de la grille 10×10 vérifie cela, et celle constituée des cases appartenant au 8 premières colonnes et aux deux dernières lignes aussi. Donc cela donne que la grille 10×10 a le même nombre de cases de chaque couleur si et seulement si le carré 2×2 en bas à droite vérifie cela, or celui-ci n'a pas de cases bleues, donc la grille n'a pas autant de cases de chaque couleur.

Ce raisonnement, certes plus compliqué que compter, s'applique plus facilement dans des cas plus généraux.

Solution de l'exercice 4

En testant les petits cas, on se rend compte qu'on peut paver la grille 4×4 par la forme voulue.



En particulier, si $4 \mid n$, on peut découper chaque grille $n \times n$ en blocs 4×4, et paver chacun de ses blocs. Ainsi si $4 \mid n$, la forme de l'énoncé permet de paver une grille 4×4

Montrons maintenant que pour que la grille soit pavable par des tetraminos en T, il est nécessaire que $4 \mid n$. Déjà notons que comme chaque forme recouvre 4 cases, le nombre de cases de la grille, c'est-à-dire n^2, est divisible par 4, donc 2 divise n.

Ensuite la preuve est la même qu'à la question précédente, puisque le coloriage en échiquier d'une grille $n \times n$ avec n pair contient autant de cases blanches que de cases noires.

Solution de l'exercice 5

On va montrer qu'Oscar gagne. Pour cela, on va imposer à Oscar une contrainte plus forte :

celui-ci souhaite garantir que $c_i = l_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2025$. Pour cela, lorsque Rémi joue sur la case (i, j), Oscar joue sur la case (j, i).

Au cours de ces deux tours, si $i \neq j$ l_i et c_j augmentent de 1 du fait de l'action d'Oscar ; et l_j et c_i augmentent de 1 du fait de l'action de Rémi. On conserve donc les égalités $l_j = c_j$ et $l_i = c_i$. Si $i = j$, à la suite des deux actions, l_i et c_i augmentent de 2, donc $l_i = c_i$.

À la fin, $c_i = l_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2025$, et donc Oscar remporte la partie.

Oscar possède ainsi une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 6

On va montrer que ce n'est pas possible pour $n \geqslant 5$, et que c'est possible pour $n \leqslant 4$.

Pour cela, on observe tout d'abord que, si c'est possible pour un certain n, alors c'est possible pour tout $k \leqslant n$. En effet, à partir d'une grille de taille $n \times n$ satisfaisant les hypothèses, la sous-grille formée des k premières lignes et colonnes vérifie également les hypothèses. Il suffit donc de montrer que ce n'est pas possible pour $n = 5$ et de fournir une construction pour $n = 4$.

— **Cas $n = 5$:** Considérons une grille 5×5 coloriée. Dans chaque colonne, il existe une couleur présente au moins 3 fois d'après le principe des tiroirs. Par le même principe, il y a au moins 3 colonnes pour lesquelles cette couleur majoritaire est la même (supposons sans perte de généralité qu'il s'agit du blanc).

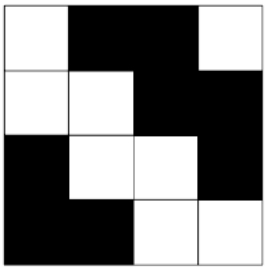
Notons a, b et c ces trois colonnes. La colonne a contient au moins 3 cases blanches, situées aux lignes x, y et z.

— Si la colonne b (ou c) contient au moins 2 cases blanches parmi les lignes x, y et z (par exemple aux lignes x et y), alors les intersections des lignes x, y et des colonnes a, b forment un rectangle dont les 4 sommets sont blancs.

— Sinon, les colonnes b et c contiennent chacune au plus une case blanche sur les lignes x, y et z. Comme elles contiennent au moins 3 cases blanches au total, leurs deux cases situées sur les deux lignes restantes doivent être blanches. Ces deux lignes et les colonnes b, c forment alors un rectangle monochrome blanc.

Dans tous les cas, on obtient une contradiction. Ainsi, le cas $n = 5$ est impossible.

— **Cas $n = 4$:** La construction suivante convient (aucune sous-grille rectangulaire n'a ses 4 sommets de la même couleur) :



Par conséquent, la taille maximale recherchée est $n = 4$.

Solution de l'exercice 7

On raisonne par récurrence sur $n \geqslant 1$ pour montrer que l'on peut effectivement paver un quadrillage de taille $2^n \times 2^n$ privé d'une case quelconque par des L-triominos.

— **Initialisation ($n = 1$) :** Pour $n = 1$, le quadrillage est de taille $2^1 \times 2^1 = 2 \times 2$ (soit 4 cases au total). Lorsqu'on en retire une case, il reste exactement 3 cases formant un L, que l'on peut recouvrir directement avec un unique L-triomino.

— **Hérédité :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que la propriété est vraie pour tout quadrillage de taille $2^n \times 2^n$ privé d'une case.

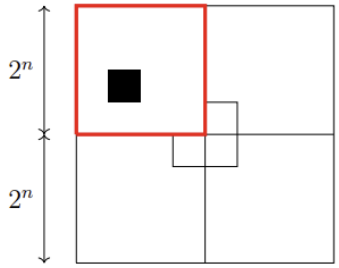
Considérons un carré de taille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ auquel on a retiré une case. Divisons ce carré en 4 sous-carrés de taille $2^n \times 2^n$:

— L'un de ces quatre sous-carrés contient la case initialement retirée. Par hypothèse de récurrence, ce sous-carré privé de sa case manquante peut être entièrement pavé par des L-triominos.

— On place ensuite un L-triomino au centre de la grille globale, de manière à recouvrir exactement une case de chacun des trois autres sous-carrés (celles touchant le centre).

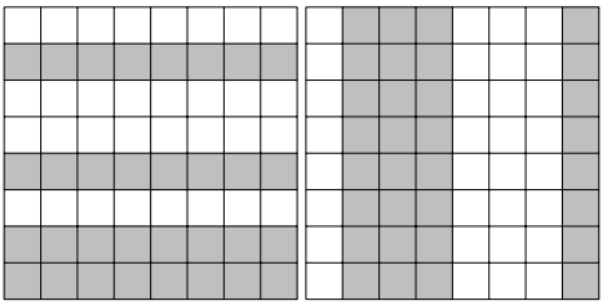
— Chacun de ces trois sous-carrés restants se retrouve alors privé d'une case (celle occupée par le L-triomino central). Par hypothèse de récurrence, ils peuvent tous trois être entièrement pavés par des L-triominos.

Ainsi, le quadrillage de taille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ privé d'une case est entièrement pavable par des L-triominos, ce qui achève la récurrence.



Solution de l'exercice 8

On remarque qu'un ensemble quelconque de lignes est un coloriage qui fonctionne, et un ensemble quelconque de colonnes aussi, comme le montre la figure :



Montrons que ce sont les seuls. On se fixe un ensemble de cases coloriées qui fonctionne. Supposons que sur la ligne a, la cellule (a, b) est coloriée mais pas (a, c). Prenons un ensemble

réparti qui contient (a, b) et (a', c) (c'est possible, par exemple en associant à chacune des lignes (sauf la ligne a et a') une colonne (sauf la colonne b et c) de manière bijective). Si on remplace ces deux cellules par (a', b) et (a, c), on conserve bien un ensemble réparti. La seule possibilité pour que le nombre de cases coloriées soit conservé est que la cellule (a', b) soit coloriée mais pas (a', c).

Ainsi, si on prend une case coloriée et que sa ligne entière n'est pas coloriée, alors sa colonne entière est coloriée. Par symétrie, si sa colonne entière n'est pas coloriée, alors sa ligne entière est coloriée. Ainsi, soit toute sa ligne est coloriée, soit toute sa colonne est coloriée (éventuellement les deux).

Supposons maintenant que la ligne a est coloriée ainsi que la colonne b, et montrons alors que toutes les cases de la grille sont coloriées. Supposons par l'absurde qu'il existe une case (c, d) non coloriée. On a donc $a \neq c$ et $b \neq d$. On fixe un ensemble réparti contenant (a, b) et (c, d). En les remplaçant par (a, d) et (c, b), on gagne une case coloriée, ce qui est absurde.

Finalement, pour obtenir une configuration valide, on choisit d'abord une orientation (lignes ou colonnes) puis, par exemple si on prend les lignes, on choisit quelles lignes on veut colorier, et on colorie intégralement ces lignes, et seulement celles-ci. En observant qu'un ensemble réparti possède une case dans chaque ligne et chaque colonne exactement, on en déduit que le coloriage ainsi obtenu est valide.

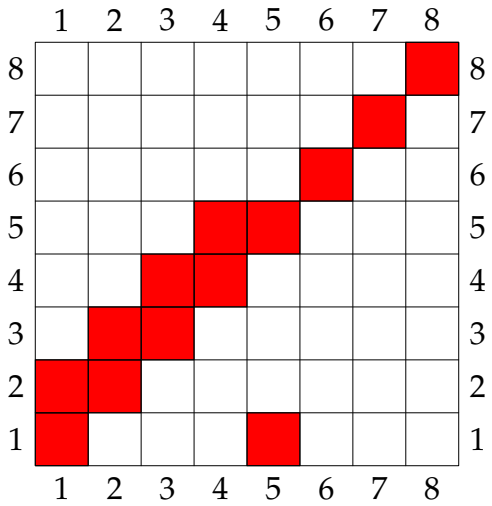
On compte alors $2 \cdot 2^n$ configurations (2^n pour chaque orientation). Cependant, deux d'entre elles ont été comptées deux fois, à savoir la configuration où tout est colorié et celle où rien n'est colorié.

Il y a donc en tout $2^{n+1} - 2$ façons de colorier la grille.

Solution de l'exercice 9

Notons déjà qu'un tel n existe : si Alice colorie toute la grille en rouge, Bob ne pourra pas tout repeindre en noir avec 4 colonnes et 4 lignes. Essayons de trouver des n pour lesquels Bob est sûr de gagner : si $n \leqslant 8$ Bob peut colorier la colonne des 4 premiers points, puis la ligne des 4 suivants (si tout est colorié en noir il colorie n'importe quoi), donc Alice perd peu importe la répartition.Essayons d'étendre la construction : Bob a naïvement envie de colorier les colonnes "les plus remplies" et d'espérer qu'à la fin il reste moins de 4 points à colorier. Pour cela il suffit qu'il y ait au moins 4 colonnes avec un seul point. Ainsi si $n \leqslant 12$, Bob colorie les 4 colonnes les plus remplies. Montrons qu'il reste au plus 4 cases rouges : soit toutes les colonnes restantes contiennent chacune au plus 1 case rouge et dans ce cas il reste au plus 4 cases rouges, soit il existe une colonne contenant au moins 2 cases rouges, dans ce cas les colonnes noircies précédemment contiennent chacun au moins 2 cases rouges, il y a donc au moins 8 cases rouges déjà coloriées en noir, il reste donc au plus 4 cases rouges. Il reste alors 4 cases rouges à colorier, et Bob peut colorier chacune de leur ligne. Donc Bob gagne coup sûr s'il y a au plus 12 carrés rouges.

Essayons maintenant de montrer que pour 13 Alice peut gagner. On peut déjà se rendre compte que l'argument précédent ne tient plus pour montrer qu'Alice gagne. Pour qu'Alice espère gagner idéalement, il faudrait 5 colonnes et 5 lignes avec 2 cases rouges, les trois restantes avec une case rouge. On peut commencer à colorier la diagonale, et essayer de colorier 5 cases dans les 5 premières colonnes et ligne, une dans chaque. Après quelques tatonnements on obtient le coloriage suivant.



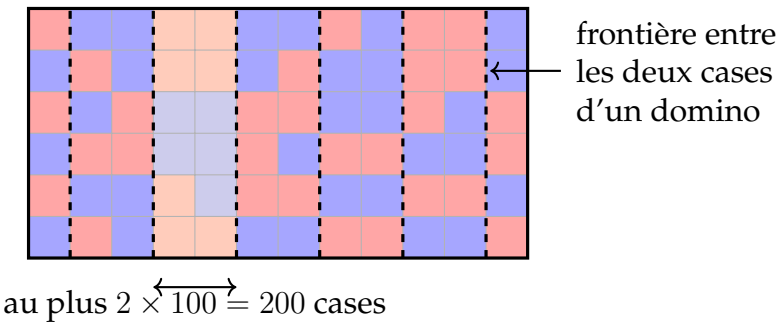
Supposons que Bob peut gagner. Dans ce cas il doit utiliser 3 de ces lignes ou colonnes pour colorier la case $(6,6)$, $(7,7)$, $(8,8)$ et il ne peut colorier aucune autre case rouge en noir lorsqu'il le fait. Supposons qu'il arrive à colorier les cases rouges dans le carré 5×5 inférieur avec les 5 colonnes/lignes qu'il lui reste à colorier (rappelons qu'il ne peut pas colorier 5 colonnes ou 5 lignes). Ainsi à symétrie près, Bob peut colorier les cases du carré d'en base avec 4 colonnes et 1 lignes, ou 3 colonnes et 2 lignes. Si Bob colorie quatre colonnes, il reste deux cases rouges sur deux lignes différentes à colorier, il ne peut donc pas toutes les colorier. S'il a colorié exactement 3 colonnes, il reste 4 cases rouges à colorier avec les deux lignes. Or il est clair que les quatre cases restantes occupent au moins trois lignes distinctes, ce qui est absurde. On en déduit donc que Bob ne peut pas gagner. $n = 13$ est donc bien le plus petit n qui convient.

Solution de l'exercice 10

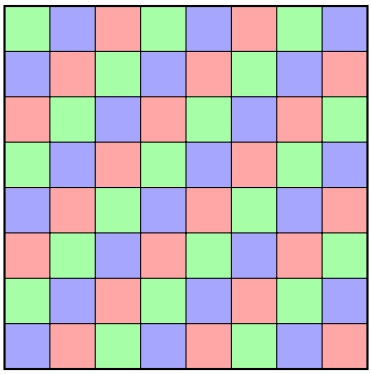
Pavons la grille 100×300 par des dominos disjoints de taille 1×2 horizontalement.

Maena adopte la stratégie d'appariement suivante : chaque fois qu'Anna colorie une case d'un domino en bleu, Maena colorie immédiatement l'autre case du même domino en rouge. Ainsi, chaque domino contient exactement une case bleue et une case rouge.

Considérons les arêtes qui séparent les deux cases de chaque domino, qui forment donc 150 "frontières" verticales. Avec sa stratégie, comme deux cases séparées par une arête ne sont pas de même couleur, Anna ne peut pas, dans sa suite de cases bleues, franchir une telle séparation. Ainsi, comme chaque zone entre deux frontières verticales contient au plus 200 cases, Anna ne peut créer une suite de cases bleues d'au moins 201 cases.



Solution de l'exercice 11
On colorie la grille en trois couleurs de la façon suivante :

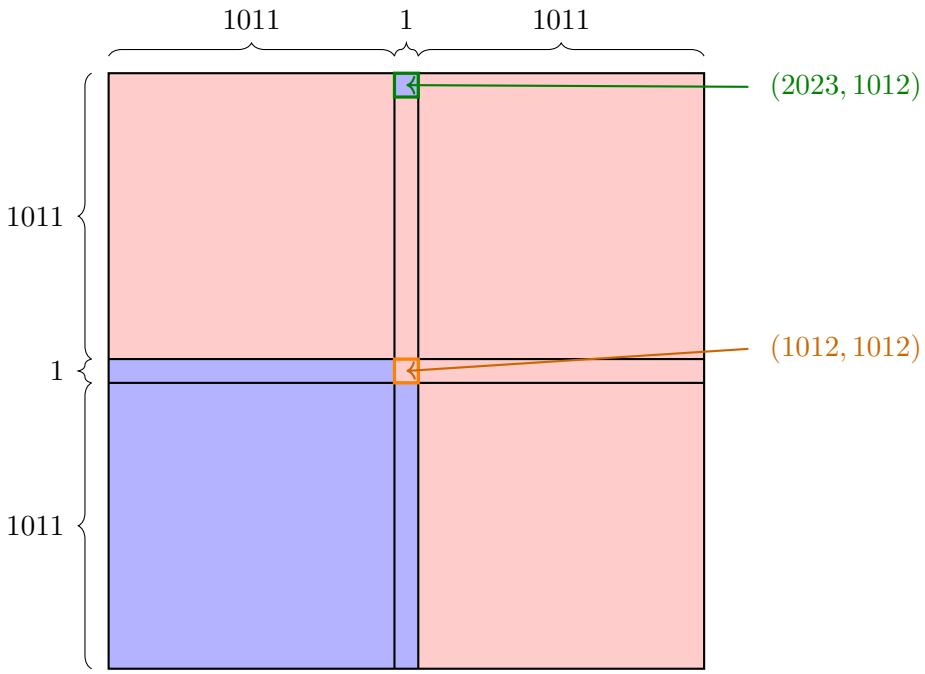


Il y a 21 cases vertes, 21 cases rouges et 22 cases bleues. Supposons qu'il est possible d'aboutir en un nombre fini de coups à la configuration où toutes les cases de l'échiquier sont noires, et notons n le nombre de coup correspondant. Chaque coup change l'état de trois cases de couleurs différentes. Comme les 21 cases vertes ont changé de couleur à la fin, chacune des cases vertes a changé de couleurs un nombre impair de fois. Donc le nombre total de mouvement affectant une case verte est une somme de 21 nombres impairs donc impair : n est imapir.

En faisant le même raisonnement sur les cases bleues, on obtient que n est pair, ce qui est absurde. Ainsi il n'est pas possible que toutes les cases soient noires simultanément.

Solution de l'exercice 12
Notons qu'il ne peut pas y avoir de carré monochrome de taille supérieure ou égale à 1012. En effet, sinon au moins 1012 colonnes et lignes auraient une majorité de cette couleur, ce qui contredit la contrainte sur les colonnes si le carré est rouge, sur les lignes si le carré est bleu.

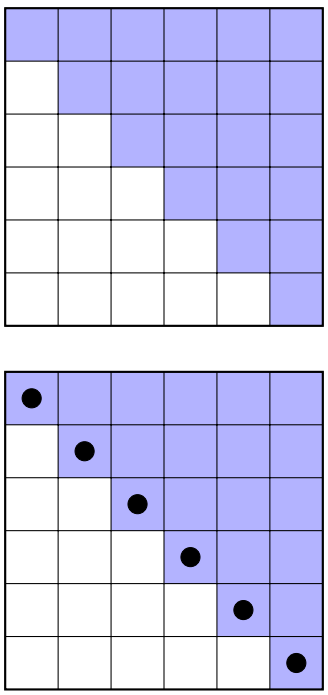
Essayons de montrer qu'il peut y avoir un carré monochrome de taille 1011. Pour cela, on numérote les lignes de gauche à droite, les colonnes de bas en haut, et on colorie en bleu toutes les cases (i, j) avec $1 \leqslant i, j \leqslant 1012$, sauf $i = j = 1012$, et en rouge tout le reste. Actuellement les 1011 premières lignes et colonnes ont une majorité bleue, et les autres ont une majorité rouge. Il suffit de rajouter une case bleue en colonne 1012 et en ligne 2023 : seule la colonne 1012 change de couleur majoritaire. On a donc bien un carré de taille 1011 monochrome, et la contrainte de l'énoncé est vérifiée.



Ainsi la taille maximale d'un carré monochrome dans la grille est 1011×1011.

Solution de l'exercice 13

Tout d'abord, notons que si Alice colorie les cases de la diagonale et au-dessus (cf le schéma suivant), alors il n'y a qu'une manière de placer n jetons dans des lignes et colonnes différentes. En effet, il faut un jeton dans la colonne de gauche, donc dans la ligne la plus haute. Puis dans la deuxième colonne, le jeton ne peut être dans la ligne la plus haute, donc doit forcément être dans la ligne juste en-dessous, le jeton de la troisième colonne doit être dans la troisième ligne la plus haute, et ainsi de suite (cf le schéma ci-dessous). Ainsi $k \geqslant \frac{n(n+1)}{2}$.



Soit k un entier pour lequel Alice peut colorier k cases de sorte à ce qu'il y ait alors une unique manière de placer n jetons dans des lignes et colonnes différentes. Notons $(1, a_1), \ldots, (n, a_n)$ les positions des jetons pour l'unique placement des n jetons dans des lignes et colonnes distinctes, où dans (i, a_i), i désigne le numéro de la ligne, et a_i le numéro de la colonne. Ainsi les a_i sont deux à deux distincts.

Notons que pour tout $i \neq j$, les cases (i, a_j) et (j, a_i) ne peuvent être toutes les deux coloriées : sinon on pourrait enlever les deux jetons des cases (i, a_i) et (j, a_j), les mettre sur les cases (i, a_j) et (j, a_i) et avoir une autre manière de placer n jetons sur des lignes et colonnes différentes. Ainsi pour tout couple (i, j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$ (qui sont au nombre de $\binom{n}{2}$, on a une case non coloriée parmi (i, a_j) et (j, a_j). Comme les a_k sont deux à deux distincts, les $\binom{n}{2}$ cases sont deux à deux distinctes.

Il y a donc au moins $\binom{n}{2}$ cases non coloriées, donc le nombre de cases coloriées vaut au plus $n^2 - \binom{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi $k \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

Donc la valeur maximale que peut prendre k est $\frac{n(n+1)}{2}$.

6 Arithmétique : Ordre multiplicatif 2 (Erik)

Le but de ce TD est de revenir sur la notion d'ordre découverte lors du premier cours sur ce sujet, en introduisant l'astuce consistant en considérer le plus petit facteur premier.

Exercices

Exercice 1
Que vaut le reste de la division euclidienne de 28^{123} par 25 ?

Exercice 2
Quel est le reste le division euclidienne de $11...11$ avec 56 fois le chiffre 1 par 29 ?

Exercice 3
Montrer que si n et m sont deux entiers distincts, alors $2^{2^n}+1$ et $2^{2^m}+1$ sont premiers entre eux.

Exercice 4
Trouver tous les entiers n tels que $n \mid 2^n - 1$.

Exercice 5
Trouver tous les entiers n impairs tels que $n \mid 3^n + 1$.

Exercice 6
Trouver toutes les suites (a_n) d'entiers strictement positifs telles que pour tout entier n,

$$a_n \mid 2^{a_{n+1}} - 1$$

Exercice 7
Trouver tous les couples d'entiers (m, n) tels que

$$mn \mid \left(2^{2^n}+1\right)\left(2^{2^m}+1\right)$$

Exercice 8
Trouver tous les nombres premiers p tels que $2^p + p \mid 3^p + p$.

Exercice 9
Existe-t-il deux entiers a, b tels que $19^{19} = a^3 + b^4$?

Exercice 10
Soit(a_n) une suite telle que pour tout entier n, $a_{n+1} = 2^{a_n}$. Montrer que pour tout entier N, la suite (a_n) est stationnaire modulo N (c'est-à-dire qu'il existe un rang k tel que si $n \geq k$, alors $a_n \equiv a_k \pmod N$).

Indice : comment se comporte la suite (2^n) modulo N ?

Solutions

Exercice 1
Que vaut le reste de la division euclidienne de 28^{123} par 25 ?

Solution de l'exercice 1
On calcule $\varphi(25) = 5 \cdot 4 = 20$, et comme 28 est premier avec 25, par Euler-Fermat :

$$28^{123} \equiv (28^{20})^6 \cdot 28^3 \equiv 1^6 \cdot 3^3 \equiv 2 \pmod{25}$$

Exercice 2
Quel est le reste le division euclidienne de $11...11$ avec 56 fois le chiffre 1 par 29 ?

Solution de l'exercice 2
On appelle x ce nombre. On a alors :

$$x = 1 + 10 + \ldots + 10^{55} = \frac{10^{56} - 1}{10 - 1}$$

Or comme 29 est premier et ne divise pas 10, par le petit théorème de Fermat, $10^{28} \equiv 1 \pmod{29}$, et donc $10^{56} \equiv 1 \pmod{29}$. Ainsi, on a que $29 \mid 9 \cdot x$, et comme 29 et 9 sont premiers entre eux, 29 divise x.

Exercice 3
Montrer que si n et m sont deux entiers distincts, alors $2^{2^n} + 1$ et $2^{2^m} + 1$ sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 3
Soit d le plus grand commun diviseur de ces deux nombres. Étudions ce que le fait que $d \mid 2^{2^n} + 1$ signifie.

On a alors $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{d}$, et donc en mettant au carré, $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{d}$. Ainsi, si $d > 2$, $-1 \not\equiv 1 \pmod{d}$ donc en nottant ω l'ordre de 2 modulo d, $\omega \mid 2^{n+1}$ mais $\omega \not| 2^n$. Cela signifie que $\omega = 2^{n+1}$.

Mais comme d divise aussi $2^{2^m} + 1$, on trouve par le même raisonnement que $w = 2^{m+1}$.

C'est impossible car m et n sont distincts. On a donc que d vaut 1 ou 2, mais la seconde option est impossible car 2 ne divise pas $2^{2^n} + 1$, ce qui conclut.

Exercice 4
Trouver tous les entiers n tels que $n \mid 2^n - 1$.

Solution de l'exercice 4
Supposons par l'absurde que $n > 1$. Soit p le plus petit facteur premier de n. On a $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ donc si ω est l'ordre de 2 modulo p, on a $\omega \mid n$. Or par le petit théorème de Fermat, $\omega \mid p - 1$. Comme tous les facteurs premiers de n sont supérieurs à p par définition de p, et ceux de $p - 1$ son strictement inférieurs à p, le pgcd de $n - 1$ et $p - 1$ est 1. Ainsi, $\omega = 1$, donc $p \mid 2^1 - 1 = 1$, absurde !

La seule solution potentielle est donc $n = 1$, et on vérifie qu'elle en est bien une.

Exercice 5
Trouver tous les entiers n impairs tels que $n \mid 3^n + 1$.

Solution de l'exercice 5
Supposons par l'absurde que $n > 1$. Soit p le plus petit facteur premier de n. On a $3^n \equiv -1 \pmod{p}$ donc $3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$. Ainsi, l'ordre de 3 modulo p divise $2n$. Comme il divise aussi $p-1$ et que n et $p-1$ sont premiers entre eux, il divise 2. Ainsi, p divise $3^2 - 1 = 8$, donc $p = 2$ ce qui contredit le fait que n est impair.

La seule solution est donc $n = 1$ qui marche bien.

Exercice 6
Trouver toutes les suites (a_n) d'entiers strictement positifs telles que pour tout entier n, $a_n \mid 2^{a_{n+1}} - 1$.

Solution de l'exercice 6
On peut remarquer tuot d'abord que la suite constante égale à 1 vérifie l'énoncé.

Ensuite, la suite ne peut pas contenir de terme pair. La condition se réécrit $o_{a_n}(2) \mid a_{n+1}$, donc on ne peut pas non plus avoir de terme a_n tels que $o_{a_n}(2)$ est pair. C'est par exemple le cas de $3, 5$. En fait, on a même mieux : comme si $3 \mid m$, alors $3 \mid m \mid 2^{o_m(2)} - 1$, on a que $o_3(2) \mid o_m(2)$, et donc on ne peut pas non plus avoir m dans la suite, sinon le prochain terme sera pair ! On ne peut donc pas avoir de multiples de 3 ou 5.

La prochaine possibilité est d'avoir un terme égal à 7. Mais maintenant, comme l'ordre de 2 modulo 7 est 3, cela signifierait que le prochain terme est un multiple de 3, ce qui est exclu comme montré précédemment.

On a alors deux manières (qui sont les mêmes dans le fond) de voir les choses :

— soit on montre par récurrence que, si l'on note $2 = p_1 < p_2 < \dots$ les nombres premiers, pour tout entier k, les termes de la suite ne sont pas des multiples de p_1 ni $p_2, \dots$, ni p_k. On a déjà fait l'initialisation. Si la propriété est vraie au rang k, supposons par l'absurde que $p_{k+1} \mid a_n$ pour un certain n. Alors $p_{k+1} \mid 2^{a_{n+1}} - 1$, donc $o_{p_{k+1}}(2) \mid a_{n+1}$. Or l'ordre de 2 modulo p_{k+1} ne vaut pas 1 ($2^1 - 1$ n'a pas de facteur premier) et il est strictement inférieur à p_{k+1} donc il a un facteur premier parmi $p_1, \dots, p_k$. On retrouve donc ce facteur dans a_{n+1}, ce qui est impossible par hypothèse de récurrence.

— soit on montre que si l'on note p_n le plus petit diviseur premier de a_n tant que $a_n \neq 1$ (si $a_n = 1$, tous les termes précédents valent 1 en remontant les termes un par un, donc si p_N est défini, p_n aussi pour $n \geq N$). L'argument précédent se reformule alors en (p_n) est strictement décroissante, ce qui es impossible.

Ainsi, la seule suite solution est celle constante égale à 1.

Exercice 7
Trouver tous les couples d'entiers (m, n) tels que

$$mn \mid \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^m} + 1\right)$$

Solution de l'exercice 7
Supposons par l'absurde que m et n sont différents de 1.

On peut considérer p le plus petit facteur premier de mn. Par le lemme d'Euclide, et quitte à échanger m et n, on peut supposer que $p \mid 2^{2^n} + 1$. On a alors $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$, et donc en mettant au carré, $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. Ainsi, comme $p \neq 2$, $-1 \not\equiv 1 \pmod{d}$ donc en nottant ω l'ordre de 2 modulo d, $\omega \mid 2^{n+1}$ mais $\omega \not| 2^n$. Cela signifie que $\omega = 2^{n+1}$. Or on a $\omega \mid p - 1$, donc

$p > \omega = 2^{n+1} \geq n+1$. Mais cela signifie que n a un facteur premier strictement plus petit que p, de qui est absurde !

Si $n = 1$, on doit résoudre $m \mid 5 \cdot (2^{2^m}+1)$. Par le même raisonnement, si p est un facteur premier de $2^{2^m}+1$ alors $p \geq m+1$, ce qui montre que m et $2^{2^m}+1$ sont premiers entre eux. Donc par le lemme de Gauss, la divisibilité précédente est équivalent à $m \mid 5$.

On trouve alors les couples solutions : $(1,5), (1,1), (5,1)$.

Exercice 8

Trouver tous les nombres premiers p tels que $2^p + p \mid 3^p + p$.

Solution de l'exercice 8

Soit p un tel nombre premier impair. Soit q un diviseur premier de 2^p+p. On a donc également $q \mid 3^p + p$, ce qui signifie que $3^p \equiv 2^p \pmod{q}$. Comme q est impair, 2 est inversible modulo q, donc :

$$(3 \cdot 2^{-1})^p \equiv 1 \pmod{q}$$

donc l'ordre de $3 \cdot 2^{-1}$ divise p. Comme p est premier, il vaut soit 1 soit p. Dans le premier cas, $3 \equiv 2 \pmod{q}$, ce qui est impossible. Ainsi, l'ordre vaut p, et donc par petit Fermat, on a $p \mid q-1$ c'est-à-dire $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Le raisonnement précédemment étant vrai pour tout facteur premier de 2^p+p, il montre que $2^p + p \equiv 1 \pmod{p}$ (si on écrit 2^p+p comme produit de facteurs premiers, chacun d'entre eux vaut 1 modulo p). Mais par le petit théorème de Fermat, on a $2^p + p \equiv 2 \pmod{p}$, ce qui contrdit ce que l'on vient de trouver.

Ainsi, la seule éventuelle solution est 2, mais $2^2 + 2 \not| 3^2 + 2$ donc il n'y a pas de solution.

Exercice 9

Existe-t-il deux entiers a, b tels que $19^{19} = a^3 + b^4$?

Solution de l'exercice 9

Cet exercice illustre l'utilisation de l'ordre pour trouver modulo quel nombre il peut être intéressant de travailler. On veut un nombre n tel que a^3 et b^4 ne peuvent pas prendre beaucoup de valeurs (sinon on risque de ne pas apprendre grand chose). Cela arrive quand $3 \mid \varphi(n)$ et $3 \mid \varphi(n)$ (car alors si a est premier avec n, $(a^3)^{\frac{\varphi(n)}{3}} \equiv 1 \pmod{n}$ donc si $\varphi(n)$ n'est pas trop grand on n'aura a priori pas beaucoup de valeurs possibles). Et cela nous invite donc à regarder l'équation modulo 13 qui vérifie les deux "critères" qu'on s'était fixés.

Les valeurs possibles des cubes sont $0, 1, -1, 5, -5$ et celles des puissances 4-ièmes sont $0, 1, 3, -4$. Et on calcule : $19^{19} \equiv 6^7 \equiv (6^2)^3 \cdot 6 \equiv (-3)^3 \cdot 6 \equiv -6 \pmod{13}$. On vérifie alors que l'équation ne peut pas avoir de solution modulo 13 donc n'en a pas.

Exercice 10

Soit(a_n) une suite telle que pour tout entier n, $a_{n+1} = 2^{a_n}$. Montrer que pour tout entier N, la suite (a_n) est stationnaire modulo N (c'est-à-dire qu'il existe un rang k tel que si $n \geq k$, alors $a_n \equiv a_k \pmod{N}$).

Indice : comment se comporte la suite (2^n) modulo N ?

Solution de l'exercice 10

On remarque que si l'on fixe N et que l'on étudie la suite $b_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \cdot b_n$, elle est périodique à partir d'un certain rang modulo N : par le principe des tiroirs, il existe $0 \leq k < l \leq N$ tels que $b_k \equiv b_l \pmod{N}$, et comme $b_n \equiv b_m \pmod{N}$ implique que $b_{n+1} \equiv b_{m+1} \pmod{N}$,

cela signifie que la suite est périodique à partir du rang k. De plus, si l'on note T la plus petite période, on a $T \leq N$ et la suite prend T valeurs différentes dans chaque période. Ainsi, comme on ne peut pas avoir 0 et 1 dans la période (si l'on a 0, la suite ne peut plus prendre d'autre valeur), on a que $T \leq N-1$. Dans le cas où N est impair, on a $T = o_N(2)$ et on a bien que l'ordre est inférieur à $N-1$.

L'idée astucieuse est alors de remarquer que comme a_n devient arbitrairement grande, au bout d'un moment, la valeur de $a_{n+1} = 2^{a_n}$ ne dépend donc plus que de la valeur de a_n modulo T. Donc pour conclure, il suffit en fait de montrer que la suite (a_n) est stationnaire modulo T ! C'est là que l'étude de la valeur de T se révèle utile : comme $T < N$, on peut recommencer le même raisonnement avec la période des puissances de 2 modulo T etc... jusqu'à tomber sur une période de 1, pour laquelle la suite est bien stationnaire.

Pour l'écrire formellement, on devrait alors rédiger une réccurence...

7 Arithmétique : Équations dipohantiennes (Hadrien et Emilhan)

Idées utiles

- Trouver des solutions pour deviner si un argument va marcher, ou éliminer ce cas-là (cfr cas d'égalité dans les inégalités)
- Factoriser par $pgcd$ si l'énoncé est homogène
- Remplacer un nombre pair par $2x$, ...
- Développer et factoriser
- Essayer des modulos intéressants, comme $2, 3, 4$ ou 8 par exemple
- Étudier les $pgcd$ des différents facteurs apparaissant de part et d'autre d'une égalité

Arguments modulaires

Si une équation diophantienne admet une solution alors elle en admet une aussi en regardant modulo n. Par contraposée, si une équation diophantienne n'admet pas de solution modulo n elle n'admet donc pas de solution.

Exemple 1. Trouver tous les couples (x, k) d'entiers naturels tels que

$$x^2 = 4k + 3$$

Solution : En étudiant l'équation modulo 4, on obtient $x^2 \equiv 3[4]$. Or, les carrés modulo 4 ne peuvent valoir que 0 ou 1 donc cette équation n'admet pas de solution.

Remarque 2. Pour les carrés, regarder modulo 3, 4 ou 8 peut s'avérer intéressant. Quant à eux, les cubes prennent peu de valeurs modulo 7 et 9, par exemple.
Plus généralement, si l'on étudie des puissances k-ièmes, il est intéressant de regarder ce qu'il se passe modulo n lorsque $k \mid \phi(n)$ puisque l'on sait que $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ dès que $(a, n) = 1$.

Descente infinie

La descente infinie est une technique de preuve qui sert à montrer qu'une équation ne peut pas avoir de solution. Généralement, elle consiste à montrer que si une certaine solution existait, une infinité d'autres solutions naturelles mais plus petites existeraient, ce qui est absurde.
L'exemple le plus connu de descente infinie est le suivant :

Exemple 3. Le nombre réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.
Solution : Supposons par l'absurde qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On en déduit que $a^2 = 2b^2$, donc $2 \mid a$. Par conséquent, $4 \mid a^2$ et ainsi $2 \mid b$. En remplaçant a par $\frac{a}{2}$ et b par $\frac{b}{2}$, on trouve alors des naturels non nuls a', b' plus petits tels que $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$. Une façon plus rapide de conclure est de supposer que $(a, b) = 1$, de sorte que le fait qu'ils soient pairs tous les deux constitue une contradiction.

Une bonne source de descente infinie est le lemme suivant :

Lemme 4. Si $x, y \in \mathbb{Z}$ sont tels que $3 \mid x^2 + y^2$, alors $3 \mid x$ et $3 \mid y$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que les carrés valent 0 ou 1 modulo 3, donc la seule façon d'avoir une somme de deux carrés qui soit divisible par 3 est que les deux carrés soient eux-mêmes divisibles par 3. □

Factoriser

Lorsque l'on résout une équation diophantienne, factoriser permet de mettre en évidence des relations de divisibilité.

Proposition 5. (Factorisation de Bernoulli) Soit n un entier naturel, a et b des réels, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Et si n est impair on a :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Remarque 6. Les identités les plus courantes sont $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ et $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$, ou encore $x^3 + 1 = (x+1)(x^2-x+1)$.

Une fois que l'on a trouvé une factorisation, il est souvent utile de se demander si nos facteurs peuvent partager des diviseurs premiers afin de savoir où l'on peut les répartir.

Exemple 7.
- Si $5^m = x(x+5)$, on sait que les deux facteurs de droite doivent être des puissances de 5, mais leur pgcd divise 5 donc on sait (puisque $x(x+5)$ ne peut être égal à 1) que l'un des deux termes vaut ± 5.
- Si $5^m = x(x+4)$, on sait que l'un des deux facteurs x et $x+4$ n'est pas divisible par 5 et vaut donc ± 1.
- On peut complexifier un peu nos exemples en rajoutant un autre nombre premier : si $3 \cdot 5^m = x(x+4)$, l'un des facteurs vaut ± 3 ou ± 1, et on peut traiter les cas à la main.

Arguments de divisibilité

Proposition 8. (Lemme de Gauss) Soit $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. Si $a|bc$ mais que a est premier avec c alors $a|b$.

Remarque 9. Ce lemme nous permet de simplifier des relations de divisibilité et d'utiliser des arguments de taille, par exemple.

Exemple 10. Si $n \geqslant 0$ et $2n+1 \mid (n+1)\cdot(n+4)$, alors $2n+1 \mid n+4$ car $(2n+1, n+1) = (1, n+1) = 1$, donc $2n+1 \leqslant n+4$, puis $n \leqslant 3$ (et $n = 3$ est la seule solution).

Proposition 11. (Lemme d'Euclide) Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre premier. Si $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$.

Ces lemmes, qui découlent du théorème de Bézout, permettent de montrer l'existence et l'unicité de la décomposition en facteurs premiers, de laquelle découle par exemple les faits suivants :

- Si $ab = p^k$ avec a et b des entiers naturels et p un nombre premier, alors a et b sont des puissances de p.
- Si $ab = x^2$ avec a, b et x des entiers naturels et si a et b sont premiers entre eux, alors a et b sont tous les deux des carrés parfaits. Plus généralement, on peut exprimer a, b de la forme $a = dy^2$, $b = dz^2$ avec $d = pgcd(a, b)$ et y, z des nombres entiers.

Exercices

Modulos

Exercice 1
Trouver tous les triplets $(x, y, l) \in \mathbb{N}^3$ tels que $x^3 + y^3 - 53 = 7^l$.

Exercice 2
Trouver les entiers positifs n tels que $3 | n \cdot 2^n - 1$

Exercice 3
Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (m, n) pour lesquels :

$$1 + 2^n + 3^n + 4^n = 10^m.$$

Exercice 4
Trouver les triplets d'entiers (x, y, n) tels que

$$n^2 = 17x^4 - 32x^2y^2 + 41y^4.$$

Factorisations

Exercice 5 (Futur poly de Martin)
Soit p un nombre premier et m et n des entiers. On suppose que $p^2 + m^2 = n^2$. Montrer que $n = m + 1$.

Exercice 6
Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers naturels tel que : $3^m + 1 = n^2$.

Exercice 7
Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers naturels tels que $2^m - 1 = 3^n$.

Exercice 8
Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers naturels tels que $m + n = m \cdot n$.

Exercice 9
Trouver tous les couples d'entiers naturels non nuls (x, n) tels que

$$3 \cdot 2^x + 4 = n^2.$$

Divers

Exercice 10
Déterminer tous les triplets d'entiers (a, b, n) strictement positifs vérifiant :

$$a! + b! = 2^n.$$

Exercice 11
Trouver tous les nombres premiers p tels qu'il existe $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p.$$

Exercice 12
Soit p un nombre premier. Trouver tous les couples de naturels non nuls et premiers entre eux (m, n) tels que

$$\frac{p+m}{p+n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{p^2}.$$

Exercice 13
Trouver tous les nombres premiers p, q, r et les entiers $k \geqslant 1$ vérifiant

$$p^2 + q^2 + 16r^2 = 9k^2 + 1.$$

Exercice 14
Déterminer tous les nombres de la forme

$$20252025 \cdots 2025$$

(constitués d'un ou plusieurs blocs $'2025'$) qui sont des carrés de naturels strictement positifs.

Solutions

Solution de l'exercice 1
La présence du membre de droite nous incite à étudier cette équation modulo 7.

Si $l = 0$, alors on veut trouver tous les naturels x, y qui sont tels que $x^3 + y^3 = 54$. En calculant $0^3 = 0$, $1^3 = 1$, $2^3 = 8$, $3^3 = 27$ et $4^3 = 64 > 54$, on voit que seul le couple $(3, 3)$ est solution. On a donc vérifié que $(3, 3, 0)$ était la seule solution pour lorsque $l = 0$.

Si (x, y, l) était une solution pour laquelle $l \geqslant 1$, on trouverait en passant l'équation modulo 7 :

$$x^3 + y^3 \equiv 4 \pmod 7.$$

Or, les cubes ne prennent que les valeurs ± 1 modulo 7, donc il est impossible que la somme de deux cubes ait un reste de 4 modulo 7.

En conclusion, la seule solution est $(3, 3, 0)$.

Solution de l'exercice 2
On veut étudier le reste de $n \cdot 2^n - 1$ modulo 3. Pour cela, il faut connaître le reste de n modulo 3 et le reste de 2^n modulo 3. Or, $2^2 \equiv 1 \pmod 3$. Il nous suffit donc de connaître la parité de n et le reste modulo 3 de n. On liste alors les restes du membre de droite modulo 3 en fonction des valeurs de n :

$$0 \cdot 2^0 - 1 = 0 \equiv 2 \pmod 3 \quad ; \quad 1 \cdot 2^1 - 1 = 1 \equiv 1 \pmod 3$$

$$2 \cdot 2^2 - 1 = 7 \equiv 1 \pmod 3 \quad ; \quad 3 \cdot 2^3 - 1 = 23 \equiv 2 \pmod 3$$

$$4 \cdot 2^4 - 1 \equiv 1 \cdot 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3 \quad ; \quad 5 \cdot 2^5 - 1 \equiv 2 \cdot 2 - 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

Par nos remarques précédentes, ces calculs suffisent car ajouter 6 à n ne va changer ni son reste modulo 3, ni sa parité. On peut donc en déduire que les naturels solutions sont exactement ceux de la forme $6k + 4$ ou $6k + 5$, où $k \geqslant 0$ est un nombre naturel.

Solution de l'exercice 3
Commençons par remarquer que si $m = 1$, on a la solution $(1, 1)$ et que si $m = 2$, on a la solution $(2, 3)$.
Supposons désormais par l'absurde que (m, n) soit un couple solution avec $m \geqslant 3$. On devrait donc avoir $n > 3$ puisque le membre de gauche grandit avec n. En étudiant l'équation modulo 8, les termes 2^n, 4^n et 10^m s'annulent tous, et il reste :

$$1 + 3^n \equiv 0 \pmod 8.$$

Or, puisque $3^2 = 9 \equiv 1 \pmod 8$, les puissances de 3 ne prennent que les valeurs 1 et 3 modulo 8. Ainsi, il est impossible que 8 divise $3^n + 1$.

En conclusion, les seuls couples solutions sont $(1, 1)$ et $(2, 3)$.

Solution de l'exercice 4
On va montrer par descente infinie que $(0, 0, 0)$ est la seule solution.
Comme un carré ne peut valoir que 0 ou 1 modulo 3, il est pertinent de tenter une étude modulo 3 pour essayer de voir où ça nous mène. Pour ce faire, on remarque que si (x, y, n) est solution, alors modulo 3, on a

$$n^2 \equiv -x^4 - 2x^2y^2 - y^4 \equiv -(x^2 + y^2)^2 \pmod 3.$$

Ainsi, $n^2 + (x^2+y^2)^2$ est divisible par 3. Or, un carré vaut 0 ou 1 modulo 3 donc la seule manière qu'une somme de deux carrés soit divisible par 3, c'est que chacun des termes le soit. Donc n et x^2+y^2 sont divisibles par 3. De même, il en découle que x et y sont divisibles par 3. En réinjectant dans l'équation, on en déduit que $3^4 = 81$ divise n^2 et donc 9 divise n, donc $(\frac{x}{3}, \frac{y}{3}, \frac{n}{9})$ est une autre solution. Or, si on avait une solution avec x, y ou n non nul (et quitte à les changer en leurs opposés, ce qui ne change pas les valeurs des carrés, positifs), on pourrait obtenir une suite strictement décroissante d'entiers naturels, ce qui est absurde (c'est le principe de la descente infinie). On en déduit que la seule solution potentielle est $(0,0,0)$.

Réciproquement, le triplet $(x,y,n) = (0,0,0)$ convient puisque les deux membres de l'équation s'annulent. L'unique solution de l'équation est donc $(0,0,0)$.

Solution de l'exercice 5
Notons que $n^2 > m^2$ donc $n > m$. L'équation se factorise sous la forme

$$p^2 = n^2 - m^2 = (n-m)(n+m).$$

Donc $n-m$ est un diviseur de p^2, de sorte que $n-m = 1, p$ ou p^2. Si $n-m \geqslant p$, alors

$$\frac{p^2}{n-m} \leqslant n-m,$$

ce qui est absurde. On en déduit que $n-m=1$, comme voulu.

Solution de l'exercice 6
L'équation de départ se réécrit :

$$3^m = n^2 - 1 = (n-1)\cdot(n+1).$$

Ainsi, si (m,n) est une solution, alors $n \geqslant 2$ et $n-1$ et $n+1$ sont deux puissances de 3. Cependant, $n+1 = (n-1)+2$, donc 3 ne divise pas à la fois $n-1$ et $n+1$. La seule puissance de 3 qui n'est pas divisible par 3 est 1, et puisque $0 < n-1 < n+1$, on en déduit donc que $n-1=1$, ou encore $n=2$, donc $m=1$.

Réciproquement, le couple $(1,2)$ est bien solution.

Solution de l'exercice 7
Soit (m,n) un couple solution. Si $n=0$, on trouve $m=1$. Sinon, $n>0$, donc en passant l'équation modulo 3, on trouve :

$$2^m - 1 \equiv (-1)^m - 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

En particulier, m doit être pair. Mais alors

$$3^n + 1 = 2^m = (2^{\frac{m}{2}})^2.$$

On sait par l'exercice précédent que la seule solution potentielle dans ce cas est $n=1$ et $2^{\frac{m}{2}} = 2$, ou encore $(m,n) = (2,1)$.

Réciproquement, on vérifie que les couples $(1,0)$ et $(2,1)$ sont bien solutions.

Solution de l'exercice 8
Soit (m,n) un couple solution. L'équation de l'énoncé revient à

$$1 = 1 - n - m + m\cdot n = (m-1)(n-1).$$

Les deux facteurs de droite divisent 1 et sont de même signe car leur produit est positif. Ainsi, $m-1=n-1=1$ ou $m-1=n-1=-1$. D'où $m=n=0$ ou $m=n=2$.

Vérification : Si $m=n=0$, $m+n=0=m\cdot n$ et si $m=n=2$, $m+n=4=m\cdot n$.
Ainsi, les solutions sont $(0,0)$ et $(2,2)$.

Solution n°2 de l'exercice 8
Soit (m,n) un couple solution.
On sait que $m \mid m$ et $m \mid m\cdot n$, donc $m \mid m\cdot n - m = n$. De même, on trouve $n \mid m$. Puisque les deux nombres sont positifs, on en déduit que $m=n$. En réinjectant dans l'équation de départ, on trouve alors $2m=m^2$. Soit $m=0$, soit on peut diviser par m et obtenir $m=2$.

Réciproquement, les couples $(0,0)$ et $(2,2)$ sont bien solutions.

Solution de l'exercice 9
Soit (x,n) un couple solution. On sait que $3\cdot 2^0+4=7$ n'est pas un carré parfait, donc $x>0$. En particulier, le membre de gauche est pair, donc $2 \mid n$.
Mais alors $4 \mid n^2$ et $4 \mid 4$, donc $4 \mid 3\cdot 2^x$. Ainsi, on doit avoir $x \geqslant 2$. En notant $n=2m$ et $x=y+2$, avec $m>0$ et $y\geqslant 0$, l'équation de départ devient :

$$3\cdot 2^y+1=m^2.$$

En factorisant, on obtient :

$$3\cdot 2^y=m^2-1=(m-1)\cdot(m+1).$$

Si $y=0$, on trouve $m=2$. Cela correspond à $x=2$ et $n=4$.
Si $y>0$, alors les deux facteurs de droite doivent être pairs. Cependant, $(m-1,m+1)=(m-1,2)=2$, donc l'un des deux facteurs n'est pas divisible par 4. Puisque l'on sait qu'exactement l'un des deux facteurs est divisible par 3, il nous reste donc 4 cas à traiter.

Premier cas : Si $m-1=2$, on trouve $m+1=4$, ce qui est impossible car $3 \mid (m-1)\cdot(m+1)$.
Deuxième cas : Si $m-1=6$, alors $m+1=8$. Cela correspond à $n=14$ et $x=6$.
Troisième cas : Si $m+1=2$, alors $m-1=0$, ce qui est impossible.
Quatrième cas : Si $m+1=6$, on a $m-1=4$. Cela correspond à $n=10$ et $x=5$.

Réciproquement, les couples $(x,n)=(2,4)$, $(6,14)$ et $(5,10)$ sont bien solutions, et ce sont donc les seuls.

Solution de l'exercice 10
Soit (a,b,n) un triplet solution. Supposons sans perte de généralité que $a\leqslant b$, quitte à les échanger.
L'idée principale de l'exercice est de remarquer que si $a\geqslant 3$, alors $3 \mid a!+b!=2^n$, ce qui est impossible. Ainsi, on sait que $a\leqslant 2$.

Si $a=1$, on veut que $b!=2^n-1$ soit impair (puisque $1-1=0$ n'est pas une factorielle), donc $b=1$ (car $b\geqslant a$).
Si $a=0$, on trouve de même $b=0$ ou $b=1$.
Si $a=2$, on sait que $b!=2^n-2$ est divisible par 2 mais pas par 4 (car $2-2=0$ n'est toujours pas une factorielle et que $4 \mid 2^n$ pour $n>1$), donc $b=2$ ou $b=3$.

Réciproquement, et par symétrie, on vérifie que les couples solutions sont exactement $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$, $(2,3)$ et $(3,2)$.

Solution de l'exercice 11
On développe le membre de gauche pour le factoriser :

$$5p = xy^2 - xp + yx^2 - yp = xy(x+y) - p(x+y) = (x+y)(xy-p).$$

Il y a peu de valeurs possibles pour chaque facteur car 5 et p sont premiers. On a donc 4 cas à traiter :

— $x+y = 5p$ et $xy = p+1 < 5p = x+y$. D'où $(x-1)(y-1) = xy - x - y + 1 < 1$. Donc $(x-1)(y-1) = 0$ car le produit est positif puisque les deux facteurs sont positifs. Ainsi, sans perte de généralité, on a $x = 1$, ce qui donne $y = 5p-1$ donc $p+1 = xy = 5p-1$ d'où $p = \frac{1}{2}$, absurdité.

— $x+y = 5$ et $xy = 2p$. Encore une fois, x et y ont peu de valeurs possible. Soit $x = 2, y = p$ auquel cas $p = 3$ (de même pour $x = p, y = 2$), soit $x = 1, y = 2p$ auquel cas $p = 2$ (de même pour $x = 2p, y = 1$). On obtient ainsi les solutions $(x, y, p) = (2, 3, 3)$, $(3, 2, 3)$, $(4, 1, 2)$ et $(1, 4, 2)$.

— $x+y = p$ et $xy = p+5 < x+y$. On obtient, comme précédemment, $x = 1$ donc $y = p-1$, d'où $p+5 = xy = p-1$, absurdité.

— $x+y = 1$, ce qui n'est pas possible puisque x et y sont plus grands que 1.

Vérification : Si $x = 2, y = 3, p = 3$ alors $x(y^2-p)+y(x^2-p) = 2\cdot 6 + 3\cdot 1 = 15 = 5p$. De même pour $x = 3, y = 2, p = 3$. Si $x = 4, y = 1, p = 2$, alors $x(y^2-p) + y(x^2-p) = 4\cdot(-1) + 1\cdot 14 = 10 = 5p$ et de même pour $x = 1, y = 4, p = 2$.

Solution de l'exercice 12
On développe l'égalité qui nous est donnée, et on obtient :

$$np^3 + mnp^2 = p^3m + p^2nm + pn + n^2$$

$$\iff np^3 = p^3m + pn + n^2.$$

On en déduit que $p \mid n^2$, donc n s'écrit sous la forme pn', avec $n' \in \mathbb{N}^*$. De plus, $(m, n) = 1$ donc $p \nmid m$. On réécrit donc :

$$n'p^2 = pm + n' + n'^2.$$

Puisque $(n, m) = 1$, on a également $(n', m) = 1$, donc $n' \mid p$. Il nous reste donc deux cas à traiter :
Cas 1 : $n' = 1$.
L'équation de départ est alors équivalente à

$$p^2 = pm + 2.$$

Il faut donc que $p = 2$, et $4 = 2m + 2$. Si $p = 2$, on vérifie en effet que $(1, 2)$ est bien solution.
Cas 2 : $n' = p$.
L'équation de départ est alors équivalente à

$$p^2 = m + 1 + p \iff m = p^2 - p - 1.$$

On vérifie réciproquement que $(p^2, p^2 - p - 1)$ est bien solution car $p \nmid p+1$.
En conclusion, le seul couple solution est $(p^2, p^2 - p - 1)$, sauf si $p = 2$, auquel cas $(1, 2)$ est une solution également.

Solution de l'exercice 13
En regardant modulo 3 l'égalité donne $p^2+q^2+r^2 \equiv 0[3]$. Or les carrés modulo 3 valent soit 1, soit 0. Ainsi, exactement deux nombres parmi $\{p,q,r\}$ valent 0 modulo 3. De plus p, q et r sont des nombres premiers donc exactement deux d'entre eux valent 3.
On distingue deux cas.
Cas 1 : $p=q=3$.
On obtient $18+16r^2=9k^2+1$, d'où $17=(3k-4r)(3k+4r)$.
Ainsi $3k-4r=1$ et $3k+4r=17$, donc $k=3, r=2$
Cas 2 : $r=3$ et p où q vaut 3. On peut supposer $p=3$ par symétrie.
On obtient $152=9k^2-q^2=(3k-q)(3k+q)$
Or $152=2^3\cdot 19$, de plus $3k-q$ et $3k+q$ sont de même parité ce qui nous donne deux cas :

— $3k-q=2$ et $3k+q=76$, donc $k=13$ et $q=37$

— $3k-q=4$ et $3k+q=38$, donc $k=7$ et $q=17$

On obtient ainsi les solutions $(3,3,2,3), (3,37,3,13), (37,3,3,13), (17,3,3,7)$ et $(3,17,3,7)$ qui fonctionnent en les vérifiant.

Solution de l'exercice 14
Soit $k>0$ le nombre de blocs 2025 qui apparaissent. Par hypothèse, on dispose de $x\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$45^2\cdot(1+10^4+\cdots+10^{4(k-1)})=x^2.$$

On en déduit que $45 \mid x$ et donc, en factorisant, qu'il existe $y\in\mathbb{N}^*$ tel que

$$\frac{10^{4k}-1}{10^4-1}=y^2.$$

Ainsi,

$$(10^{2k}+1)\cdot(10^k+1)\cdot(10^k-1)=101\cdot 11\cdot(3y)^2.$$

Le point clef est le fait que les trois facteurs de gauche sont premiers entre eux. En effet, le pgcd de 10^k+1 et 10^k-1 divise 2 mais ces nombres sont impairs car $k>0$ et $(10^k-1)\cdot(10^k+1)=10^{2k}-1$ est premier avec $10^{2k}+1$ pour les mêmes raisons.
Cela implique que l'un des trois facteurs de gauche est nécessairement un carré parfait car seuls le facteur divisible par 11 et le facteur divisible par 101 peuvent ne pas être un carré parfait. Montrons que cela n'est possible que lorsque $k=1$.

Un nombre de la forme 10^j+1, avec $j\geqslant 0$, ne peut pas être un carré parfait car

$$10^j+1\equiv 1+1\equiv 2 \pmod 3.$$

De plus, si $k\geqslant 2$, alors

$$10^k-1\equiv 0-1\equiv 3 \pmod 4$$

ne peut pas être un carré parfait non plus. La seule possibilité est donc que $k=1$.

Réciproquement, si $k=1$, le nombre considéré dans l'énoncé est $2025=45^2$, qui est bien un carré parfait. Ainsi, 2025 est la seule solution.

8 Combinatoire : Pot-pourri (Lucile et Gaëtan)

Exercices

Exercice 1
Hadriella et Lucien placent alternativement des cavaliers, blancs pour Hadriella et noirs pour Lucien, sur un échiquier (8×8). Un cavalier ne peut pas être posé sur une case déjà occupée ou sur une case menacée par un cavalier adverse. Le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu. Sachant qu'Hadriella commence, qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 2
Soit n un entier strictement positif. De combien de manières peut-on écrire n comme somme de plusieurs termes entiers strictement positifs ? (On considère qu'un ordre différent compte comme une autre somme, par exemple $3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ a 3 manières.)

Exercice 3
Déterminer le nombre de pavages d'une bande $1 \times n$ que l'on peut réaliser avec des dominos 1×1 et 1×2.

Exercice 4
Montrer sans calcul que $F_nF_m + F_{n-1}F_{m-1} = F_{n+m-1}$ pour tous m, n, où (F_n) est la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Exercice 5
Est-il possible d'écrire les entiers de 0 à $2^n - 1$ dans un certain ordre, de sorte que deux entiers consécutifs aient une écriture en base 2 qui ne varie que d'un chiffre ?

Exercice 6 (Gas Station Problem)
Sur une piste automobile circulaire, il y a un certain nombre fini de stations d'essence. L'essence totale disponible dans ces stations est exactement l'essence requise pour faire un tour de piste. Montrer qu'il existe un point de la piste duquel on peut partir sans essence et faire un tour complet de la piste.

Exercice 7
17 élèves du groupes B, parmi lesquels il y a 5 filles et 12 garçons, se mettent en cercle. Montrer qu'on peut trouver parmi eux 7 élèves consécutifs dont exactement 3 sont des filles.

Exercice 8
Les entiers naturels de 1 à 50 (inclus) sont écrits au tableau. Combien d'entiers au minimum faut-il supprimer pour s'assurer que pour tous entiers x et y restants, $x + y$ ne soit pas un nombre premier ?

Exercice 9
Au tableau, n entiers positifs ou nuls sont écrits. Le plus grand diviseur commun à ces n entiers est 1. Une opération consiste à remplacer deux entiers x et y avec $x \leq y$ par $2x$ et $y - x$. Pour quelles configurations initiales est-il possible de finir après un certain nombre fini d'opérations avec $n - 1$ zéros écrits au tableau ?

Exercice 10 (Coupe Animath 2021)
On a placé 8 fourmis sur les arêtes d'un cube dont la longueur des arêtes vaut 1. Pour tout réel positif d, on dit que deux fourmis sont à distance d si la première fourmi doit parcourir une distance d'au moins d pour rejoindre la deuxième fourmi uniquement en se déplaçant le long des arêtes du cube. Démontrer qu'il existe deux fourmis à distance inférieure ou égale à 1.

Exercice 11
Certaines routes de bateau à double sens relient les différentes îles de l'archipel Micronésien. Il peut y avoir une route dont l'île de départ et de destination sont identiques, mais pour toute paire d'îles (non forcément distinctes) il y a au plus une route les connectant. Martine remarque qu'elle ne peut pas emprunter 3 routes distinctes d'affilée, quelle que soit son île de départ. Montrer que le nombre de routes est inférieur ou égal au nombre d'îles.

Exercice 12
Notons I_n le nombre de sous-ensemble de cardinal impair et P_n le nombre de sous-ensembles de cardinal pair de $\{1, \cdots, n\}$. Que valent I_n et P_n ?

Solutions

Solution de l'exercice 1
Il suffit à Lucien de toujours jouer son coup sur la case symétrique de la case où Hadriella vient de jouer par rapport au centre de l'échiquier. On montre par récurrence que cela est toujours possible en jouant de cette manière.

En effet, avant le coup de Lucien, on a pour chaque case qu'elle est occupée ou attaquée si et seulement son symétrique l'est. Comme il est impossible qu'une case attaque son symmétrique, Lucien peut toujours jouer.

Comme il y a un nombre fini de cavaliers à placer, Hadriella va se retrouver bloquée et Lucien dispose donc d'une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 2
On écrit l'équation $n = 1 + 1 + ... + 1$, puis on colorie chaque $+$ soit en noir soit en rouge. Simplifier les blocs $1 + ... + 1$ dont tous les $+$ sont noirs donne une écriture de n comme recherchée. On vérifie facilement que ce processus est réversible, et donne donc une bijection entre les sommes donnant n et les colorations de nos $+$. Comme on ne compte pas la somme où tous les $+$ sont noirs, il y a $2^{n-1} - 1$ sommes.

Solution de l'exercice 3
On procède par récurrence, en notant f_n le nombre de pavages pour une bande $1 \times n$.

On vérifie facilement $f_1 = 1$ et $f_2 = 2$.

Si $n \geq 2$, on fait une disjonction de cas selon la taille du domino le plus à gauche : si c'est un 1×1, il reste à paver une bande $1 \times (n-1)$ donc il y a f_{n-1} tels pavages. De même si c'est un 1×2 on trouve f_{n-2} pavages. On en déduit $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$.

On en déduit (récurrence immédiate) que $f_n = F_{n+1}$ où (F_n) est la suite de Fibonnacci définie à l'exo suivant. Si on n'est pas satisfait de cette réponse, on peut en déduire une forme explicite par la formule de Binet.

Solution de l'exercice 4
On utilise l'exercice précédent. F_{n+m-1}, correspond au nombre de façon de paver une bande de taille $n + m - 2$. $F_n F_m$ correspond de son côté au nombre de façon de paver deux bandes de taille $n - 1$ et $m - 1$. On reconnait donc le nombre de façon de pavé une bande de taille $n + m - 2$ avec une séparation après $n - 1$ carreaux. S'il n'y a pas cette sépartion, alors les carreaux $n - 1$ et n sont recouverts par un domino 1×2. Á gauche de celui-ci, il y a une bande de taille $n - 2$ et à droite une bande de taille $m - 2$, qui peuvent être recouverte de $F_{n-1}F_{m-1}$ manières différentes. On a donc fait une disjonction de cas selon si la jonction entre les carreaux $n - 1$ et n est recouverte par un domino ou pas.

Solution de l'exercice 5
On procède par récurrence sur n. Supposons que cela est possible pour un certain n, on écrit les numéros $a_0, a_1, \cdots, a_{2^n-1}$. Entre a_i et a_{i+1}, il n'y a qu'un chiffre de différence. On remarque que c'est aussi le cas entre $a_i + 2^n$ et $a_{i+1} + 2^n$. On remarque également que, entre a_{2^n-1} et $a_{2^n-1} + 2^n$, il n'y a qu'un chiffre de différence,, car a_{2^n-1} s'écrit avec au plus n chiffres en base 2. On peut donc organiser les 2^{n+1} entiers de 0 à $2^{n+1} - 1$ de la sorte

$$a_0, a_1, \cdots, a_{2^n-1}, a_{2^n-1} + 2^n, \cdots, a_i + 2^n, a_{i-1} + 2^n, a_0 + 2^n$$

Solution de l'exercice 6
On parcourt la piste en s'autorisant à avoir une quantité négative d'essence, et on enregistre

notre niveau d'essence tout au cours du parcours. On peut supposer qu'on consomme l'essence à vitesse constante.

On obtient une courbe affine par morceaux dont l'ordonnée à la fin coïncide avec l'ordonnée au début (puisque l'essence requise pour faire le tour est exactement l'essence totale obtenue dans les stations).

Cette courbe admet un minimum. Partir de ce point minimum fait que la courbe d'essence obtenue lorsque l'on part de ce point ne passera jamais en dessous du point de départ, où notre réservoir est par définition à 0 : on aura donc toujours de l'essence pour faire le tour de la piste, comme voulu.

Solution n°2 de l'exercice 6

On peut également procéder par récurrence sur le nombre de station. Si il y a une station, alors une voiture partant de cette station peut faire le tour de la piste. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour n station. Il existe une station qui contient assez d'essence pour aller jusqu'à la station suivante, sinon la quantité d'essence totale serait strictement inférieure à la quantité nécessaire pour faire un tour de piste.

Solution de l'exercice 7

On note un score associé à chaque groupe de 7 élèves consécutifs, qui correspond au nombres de filles dans le groupe. On suppose par l'absurde que le score ne vaut jamais 3. Or le score varie de $+1, 0$ ou -1 quand on se déplace sur le cercle. Donc si il y a un score de 4 et un score de 2, alors entre les deux groupes, il y a un groupe de score 3, ce qui est impossible. Donc les scores sont soit tous supérieurs à 4 ou tous inférieurs à 2. Si tous les scores sont supérieurs à 4. On a plus de 8 avec 14 élèves consécutifs,ce qui est impossible.

Donc tous les scores sont inférieurs à 2. Il y a ensuite deux façons de trouver une contradiction. On peut enchaîner les raisonnements par l'absurde. Si on considère 14 élèves consécutifs, il y a au plus 4 filles, donc il y a au moins une filles parmi les 3 élèves restants. Mais ce raisonnement est indépendants des 3 élèves côtes à côtes choisi. Donc pour tout trio d'élèves consécutifs, il y a au moins une fille parmi les 3 élèves. Donc si considère 15 élèves consécutifs, il y a au moins 5 filles, les 2 élèves restants sont donc des garçons. Le raisonnement est indépendants du groupe de 15 élèves choisis, donc toute paire est constituée de garçons, alors tous les élèves sont des garçons, ce qui est absurde.

Pour trouver l'absurdité, nous pouvons également procéder par double comptage. Si tous les scores sont inférieurs à 2. Alors la somme des scores différents est inférieure à 34. Or cette somme correspond au nombre de filles comptées 7 fois. (une fois par groupe de sept). Il y a 5 filles, donc la somme des scores vaut 35. Donc 35 est inférieur à 34, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 8

On peut répartir les nombres par paires afin d'utiliser le principe des tiroirs. 53 est premiers, on répartis donc les nombres de 3 à 50 par pairs (a, b) tel que $a + b = 53$. 1 et 2 constituent une paire car $1 + 2 = 3$. Donc on peut choisir au plus 25 nombres. Cela est possible en sélectionnant tous les nombres d'une même parité, en effet leur somme sera toujours paire et plus strictement plus grande que 2.

Solution de l'exercice 9

On fait quelques essais pour comprendre quelle peut être la configuration finale. Montrons que le plus grand diviseur impair des n nombres est au plus 1.

Initialement c'est le cas, et si à un instant c'est le cas, et que l'on remplace x et y par $2x$ et $x - y$, alors tout diviseur impair d commun aux nombre écrits après cette transformation

divise $2x$, donc x car d est impair, et divise $x - y$ donc divise y. Or cela veut dire que d divise le plus grand diviseur commun impair des n entiers avant l'opération, donc $d = 1$. De plus le somme des n nombres écrits est constante. Ainsi, pour que $n - 1$ nombres soient nuls, il faut que le dernier soit égal à la somme initialement. Si cet entier admet un diviseur impair d, alors d est un diviseur impair des n nombres, et par conséquent $d = 1$. Ainsi la somme des n nombres est une puissance de 2. Supposons que la somme des n entiers vaut 2^m réciproquement. Supposons qu'après un certain nombre d'étapes le PGCD des n nombres est 2^k avec $k < m$. Alors il existe deux entiers dont la valuation 2-adique est k. Si on les remplace par $2x$ et $y - x$, leur valuation 2-adique augmente. Si on continue ainsi, après un certain nombre d'étapes, 2^{k+1} divise tous les entiers. Ainsi, après un nombre fini d'étapes, le PGCD des n nombres est 2^m. Or La somme des n entiers est 2^m, donc on a bien $n - 1$ des n entiers qui sont nuls. C'est donc possible si et seulement si la somme des n nombres est une puissance de 2.

Solution de l'exercice 10

Dans toute la suite, on utilise uniquement la distance décrite dans l'énoncé, et on note $d(X, Y)$ la distance entre deux points X et Y . On note $F_1, ..., F_8$ les fourmis. A chaque fourmi F_i , on associe le sommet S_i duquel elle est le plus proche. Si une fourmi se trouve sur le milieu d'une arête, on choisit au hasard ce sommet parmi les deux sommets aux extrémités de l'arête en question. Pour tout indice i, on a donc $d(Fi, Si) \leq \frac{1}{2}$.

S'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $S_i = S_j$, alors $d(Fi, Si) + d(Fj, Si) = d(Fi, Si) + d(Fj, Sj) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, donc on a un chemin de longueur inférieure ou égal à 1 passant par les arêtes du cube et qui relie les deux fourmis F_i et F_j.

En revanche, si les sommets S_i sont tous deux à deux distincts, et puisqu'il y a 8 sommets sur le cube, chaque sommet est le sommet le plus proche d'exactement une fourmi. Soit D la plus grande des distances $d(Fi, Si)$. Quitte à renuméroter les fourmis, on peut supposer que $D = d(F1, S1)$. Soit i l'indice tel que la fourmi F_1 est sur l'arête reliant le sommet S_1 au sommet S_i . Puisque chaque sommet est le sommet le plus proche d'exactement une fourmi, l'indice i existe bien. On a alors $d(Fi, Si) + d(Si, F1) = d(Fi, Si) + 1 - D \leq D + 1 - D = 1$, donc les fourmis F_1 et F_i sont à distance inférieure ou égale à 1, comme désiré.

Solution de l'exercice 11

Soit C une composante connexe du graphe dont les sommets sont les îles et les arêtes les routes de bateau, et soit v un sommet de C.

Si il existe une arête reliant v à lui même, alors aucun voisin de v (autre que lui-même) n'a de voisin autre que v, sinon on aurait un chemin de longueur 3. On connait donc exactement la forme de notre composante connexe, et on voit bien que son nombre d'arêtes et son nombre de sommets sont tous deux égaux à $\deg(v)$.

Sinon, C n'a pas d'arête reliant un sommet à lui même, et est donc un graphe simple. On remarque que C est acyclique, car un cycle est au moins de longueur 3 et donnerait un chemin de longueur 3 passant par des arêtes distinctes. Donc C est un arbre, et a donc moins d'arêtes que de sommets.

Comme sur chaque composante connexe on a moins d'arêtes que de sommets, c'est aussi le cas du graphe total, et cela conclut.

Solution de l'exercice 12

Voici une preuve combinatoire.

Soient respectivement $\mathcal{I}_n$ et $\mathcal{P}_n$ les ensembles des sous-ensembles de taille paire et impaire de $\{1, ..., n\}$.

On considère l'ensemble des paires $\{A, A\backslash\{n\}\}$ pour chaque sous-ensemble A qui contient n. On remarque que chaque sous-ensemble de $\{1, ..., n\}$ apparait une et une seule fois dans une de ces paires.

Or dans chacune de ces paires, il y a exactement un sous-ensemble appartenant à $\mathcal{I}_n$ et un à $\mathcal{P}_n$ (vu qu'on change la parité du cardinal lorsqu'on enlève un élément). On en déduit que $\mathcal{I}_n$ et $\mathcal{P}_n$ ont le même cardinal, c'est-à-dire $I_n = P_n$.

Vu que $I_n + P_n = |\mathcal{I}_n \cup \mathcal{P}_n| = |$sous-ensembles de $\{1, ..., n\}| = 2^n$, on en déduit $I_n = P_n = 2^{n-1}$.

Solution n°2 de l'exercice 12

Soit A un élément de I_n, A est de cardinal k impair. Il y a $\binom{n}{k}$ façon de choisir un élément de cardinal k. On en déduit

$$card(I_n) = \sum_{1 \leqslant 2l+1 \leqslant n} \binom{n}{2l+1}$$

De même, on déduit

$$P_n = \sum_{1 \leqslant 2l \leqslant n} \binom{n}{2l}$$

. On reconnaît la formule du binôme de Newton $I_n + P_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

On peut également écrire la différence de I_n et de P_n, en remarquant que $(-1)^{2l} = 1$ et $(-1)^{2l+1} = (-1)$.

$P_n - I_n = \sum_{1 \leqslant 2l \leqslant n} \binom{n}{2l} - \sum_{1 \leqslant 2l+1 \leqslant n} \binom{n}{2l+1} = \sum_{1 \leqslant 2l \leqslant n} (-1)^{2l} \binom{n}{2l} + \sum_{1 \leqslant 2l+1 \leqslant n} (-1)^{2l+1} \binom{n}{2l+1} =$
$\sum_{1=k}^{n} (-1)^k (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0$ On en déduit que $I_n = P_n = 2^{n-1}$

4 Entraînement de fin de parcours

Exercices

Exercice 1
On pave une grille 8×8 avec des dominos 1×2 et 2×1. Soit l une droite parallèle à deux des côtés de la grille qui ne coupe aucune case et sépare la grille en deux sous-grilles non vides. Montrer qu'il est impossible que l coupe exactement un domino.

Exercice 2
Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On suppose que $n \mid 2^n + 1$. Montrer que $3 \mid n$.

Exercice 3
Trouver tous les triplets d'entiers naturels (m, n, z) tels que

$$2^m + 3^n = z^2.$$

Exercice 4
Une grille 5×100 est constituée de 500 carrés unité. Parmi ces 500 carrés, n sont coloriés en noir et les autres sont coloriés en blanc. Deux carrés partageant un côté sont dits *adjacents*. On suppose que chaque carré a au plus deux carrés adjacents coloriés en noir. Trouver la valeur maximale que peut prendre n.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Raisonnons par l'absurde et considérons une droite l telle que décrite dans l'énoncé et qui ne traverse qu'un seul domino. Quitte à effectuer une rotation, on peut supposer que l est parallèle aux côtés droit et gauche de la grille.

Retirons le domino traversé par l. La droite l sépare le nouveau pavage en deux pavages disjoints, chacun d'un côté de la droite. Si on note $k \in \{1, \cdots, 5\}$ le nombre de colonnes à gauche de l, le pavage de gauche pave un rectangle $k \times 8$ privé d'une case, qui contient $8k-1$ cases. Or chaque domino couvre deux cases, donc il est absurde qu'une forme comportant un nombre impair de cases soit pavée par des dominos. On aboutit à une absurdité et cela conclut.

Solution de l'exercice 2
Puisque n vaut au moins 2, il possède au moins un facteur premier. Soit p le plus petit facteur premier de n. L'équation de départ implique en particulier que $2^n + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, et donc que

$$2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}.$$

On peut commencer par remarquer que $p \neq 2$ puisque $2^n + 1$ est impair. Ainsi, l'ordre de 2 modulo p, noté ω, existe. On sait en outre que $\omega \mid 2n$ et que $\omega \mid p-1$ par théorème de petit-Fermat.
De plus, puisque p est le plus petit facteur premier de n, on sait que $(n, p-1) = 1$, donc $(n, \omega) = 1$, et par conséquent $\omega \mid 2$. Par définition, cela implique que

$$3 = 2^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

donc $p \mid 3$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 3
On commence par regarder modulo 3 : deux cas se présentent, ou bien $n = 0$, ou bien $3^n \equiv 0 \pmod{3}$. On commence par traiter ce deuxième cas : on a alors $(-1)^m \equiv 2^m \equiv z^2 \pmod{3}$; or un carré modulo 3 vaut 0 ou 1. Ainsi $(-1)^m \equiv 1$ et donc m est pair.

On écrit $m = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$. On a

$$3^n = z^2 - 2^{2k} = (z - 2^k)(z + 2^k).$$

Comme 3 est un nombre premier, on en déduit que $z - 2^k$ et $z + 2^k$ sont tous deux des puissances entières de 3. Or si 3 divisait ces deux quantités, on aurait $3 \mid (z + 2^k) - (z - 2^k) = 2^{k+1}$ ce qui serait contradictoire : ainsi la plus petite des deux est nécessairement égale à 1. Par suite, on a $z - 2^k = 1$ et donc $z + 2^k = 2^{k+1} + (z - 2^k) = 2^{k+1} + 1$. D'après ce qui précède on peut donc écrire $2^{k+1} + 1 = 3^n$.

Revenons à l'équation initiale : on regarde modulo 4. Mettant de côté le cas $m = 0$. Puisque m est pair et donc $\geqslant 2$, on a $2^m \equiv 0 \pmod{4}$ et donc $(-1)^n \equiv 3^n \equiv z^2 \equiv 0$ ou $1 \pmod{4}$. On en déduit que n est pair ou $m = k = 0$.

Si $m = k = 0$, on a $3^n = 3$ donc $n = 1$ et on a $z = 2$ ce qui fournit une solution.
Sinon on écrit $n = 2l$ avec $l \in \mathbb{N}$. On a $2^{k+1} = 3^{2l} - 1 = (3^l - 1)(3^l + 1)$.

Comme 2 est premier, 3^l-1 et 3^l+1 sont tous deux des puissances de 2 ; or ces deux entiers diffèrent de 2 : comme $2^{x+1}-2^x=2^x$ pour tout $x\geq 0$, on en déduit qu'on a nécessairement $3^l-1=2$ et $3^l+1=4$. On en déduit $l=1$ donc $n=2$, puis en remontant on trouve $m=4$ et $z=5$ ce qui donne une nouvelle solution.

Reste à traiter le cas $n=0$. Dans ce cas on a $2^m=z^2-1=(z-1)(z+1)$.

Le même raisonnement que précedemment (en remplaçant 3^l par z) nous donne $z=3$, puis $m=3$, ce qui donne une nouvelle solution.

Finalement, nos triplets solutions sont $(0,1,2),(4,2,5)$ et $(3,0,3)$.

Solution de l'exercice 4

Commençons par la construction. On note chaque case (i,j) avec $1\leqslant i\leqslant 5$ et $1\leqslant j\leqslant 100$: on suppose que la grille a 5 lignes et 100 colonnes. Essayons de regarder quelles sont les cases les plus favorables à colorier. Les coins sont très favorables car ils ont deux cases voisines, on les colorie en noir. Les cases au bord de la grille ont au plus trois cases voisines, on peut donc tenter de les colorier en noir : la grille obtenue vérifie l'énoncé. Essayons de colorier d'autres cases : on ne peut plus colorier la deuxième ou la quatrième colonne, sans contredire la première condition. On ne peut colorier ni $(3,2)$ ni $(3,99)$ sans avoir le même problème. On colorie alors les cases de la forme $(3,i)$ avec $3\leqslant i\leqslant 98$. On a alors $100+100+3+3+(98-3+1)=302$ cases coloriées en noir.

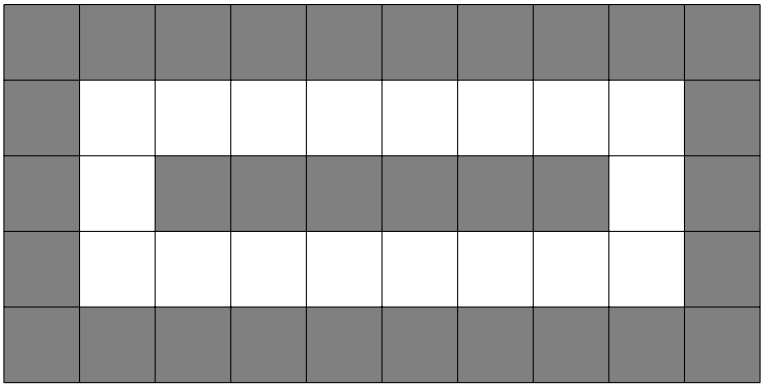


FIGURE 1 – Le coloriage pour une grille 5×10.

Soit n un nombre joli, on regarde une configuration vérifiant l'énoncé avec n cases noires. Notons a le nombre de coins coloriés en noir (on a donc $a\leqslant 4$), b le nombre de cases au bord qui ne sont pas des coins coloriés en noirs (on a donc $b\leqslant 202$) et c le nombre de cases internes coloriées en noir. Chaque coin a deux voisins, chaque case au bord qui n'est pas un coin en a 3, chaque case interne en a 4, donc les cases noires ont $2a+3b+4c$ voisins (les voisins sont comptés autant de fois qu'ils ont de voisins coloriés en noir). Comme chaque case a au plus deux voisins coloriés en noir, on a $2a+3b+4c\leqslant 1000$. Or $n=a+b+c$, donc on a :

$$1000\geqslant 4a-8+4b-202+4c=4n-210.$$

On a donc $n\leqslant \frac{1210}{4}=302.5$ et comme n est entier, on obtient $n\leqslant 302$. Ainsi 302 est le plus grand nombre joli.

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre et Arithmétique 316
1 Algèbre : Polynômes 1 (Mathieu) 316
2 Arithmétique : Problèmes de taille (Akin et Anatole) 321
3 Arithmétique : Ordre multiplicatif (Lilas) 327
4 Algèbre : Polynômes 2 (Théo) 334
5 Algèbre : Équations fonctionnelles 1 (Rémi) 343
6 Arithmétique : Théorème des restes chinois (Tristan et Antoine D) 349
7 Arithmétique : Pot-pourri (Antoine S et Hadriel) 357
8 Algèbre : Équations fonctionnelles 2 (Melvil) 362
2 Entraînement de mi-parcours 374
3 Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie 377
1 Combinatoire : Double Comptage (Hugo) 377
2 Géométrie : Chasse aux rapports (Lucile) 388
3 Géométrie : Axe radical (David et Serge) 389
4 Combinatoire : Récurrence (Félix) 402
5 Combinatoire : Invariants (Eva et Gaëtan) 410
6 Géométrie : Similitudes (Anatole) 415
7 Géométrie : Pot-pourri (Tiphaine et Arthur) 424
8 Combinatoire : Pot-pourri (Antoine D) 430
4 Entraînement de fin de parcours 438

1 Première partie : Algèbre et Arithmétique

1 Algèbre : Polynômes 1 (Mathieu)

Le cours a porté sur les notions suivantes :

— Définition des polynômes à coefficients réels
— Notion de coefficients constant et dominant, de degré
— Degré de PQ et $P+Q$ en fonction des degrés de P et Q
— Théorème d'identification des coefficients
— Théorème de la division euclidienne
— Notion de racine (sans la multiplicité)
— Factorisation d'un polynôme dont on connaît des racines
— Un polynôme de degré n a au plus n racines
— Théorème de la rigidité : trop de racines $\Rightarrow$ polynôme nul

Les résultats abordés et leurs démonstrations peuvent être trouvés dans le polycopié suivant.

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les polynômes P tels que pour tout réel x, on a $2P(x) = P(2x)$.

Exercice 2
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt[3]{x^2+1}$ n'est pas un polynôme.

Exercice 3
Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tous réels a, b et c :

$$P(a+b-2c) + P(b+c-2a) + P(c+a-2b) = 3P(a-b) + 3P(b-c) + 3P(c-a).$$

Exercice 4
Effectuer la division euclidienne de $x^4 + 3x^2 + 2x + 1$ par $x^2 - 2$.

Exercice 5
Déterminer le reste de la division euclidienne du polynôme $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ par $x - 1$ et par $x^2 - 1$.

Exercice 6
Soit P un polynôme unitaire de degré 2025 tel que $P(1) = 1, P(2) = 2, \ldots, P(2025) = 2025$. Combien vaut $P(2026)$?

Exercice 7
Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que $P(0) = 0$ et pour tout réel x, on a $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$.

Exercice 8
Déterminer tous les polynômes P satisfaisant l'équation suivante pour tout réel x :

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2).$$

Exercice 9
Déterminer tous les polynômes P tels que pour tout x, on a $P(x)^2 = P(x + 1)P(x - 1)$.

Exercice 10
Soit P un polynôme réel unitaire à coefficients positifs, de degré n et admettant n racines réelles. On suppose que $P(0) = 1$. Montrer que $P(2) \geqslant 3^n$.

Exercice 11
Soit n un nombre naturel, et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tel que

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \leqslant a_0 + a_1 + \cdots + a_k.$$

pour tout nombre réel $x \in [0, 1]$.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
En $x = 0$, on a $2P(0) = P(0)$ donc $P(0) = 0$. Notons n le degré de P et a_n son coefficient dominant. Le coefficient dominant du polynôme $2P(x)$ est $2a_n$ et le coefficient dominant de $P(2x)$ est $2^n a_n$. Donc $2^n = 2$ et $n = 1$. Donc P est de degré 1, c'est-à-dire P est linéaire. Réciproquement, toute fonction de la forme $P(x) = ax$ est solution.

Solution de l'exercice 2
Supposons qu'il existe un polynôme P à coefficient réel de degré n tel que $f(x) = P(x)$ pour tout réel x. En élevant au cube, on obtient $x^2 + 1 = P(x)^3$. En prenant le degré, on doit avoir $3n = 2$. Donc n n'est pas entier, ce qui importe la contradiction recherchée.

Solution de l'exercice 3
En prenant $a = b = c = 0$, on trouve $P(0) = 0$. En prenant seulement $b = c = 0$ et en laissant varier a, il vient

$$P(a) + P(-2a) + P(a) = 3P(a) + 3P(0) + 3P(-a),$$

c'est-à-dire $P(-2a) = P(a) + 3P(-a)$. Notons n le degré de P. En examinant le coefficient dominant de chaque membre de l'équation précédente, on a $(-2)^n = 1 + 3 \times (-1)^n$. Comme $1 + 3 \times (-1)^n$ vaut 4 ou -2 selon la parité de n, on a $n = 2$ ou $n = 1$. Puisque $P(0) = 0$, les solutions sont de la forme $P(x) = \alpha x^2 + \beta x$ avec α et β des réels. On vérifie que de telles fonctions sont effectivement solutions du problème.

Solution de l'exercice 4
On trouve $x^4 + 3x^2 + 2x + 1 = (x^2 - 2)(x^2 + 5) + (2x + 11)$.

Solution de l'exercice 5
Soit $P(x) = x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$. Le théorème de la division euclidienne nous donne l'existence de deux polynômes $Q(x)$ et $R(x)$ tels que

$$P(x) = (x - 1)Q(x) + R(x).$$

Comme $x-1$ est de degré 1, $R(x)$ est un polynôme constant et il suffit donc de l'évaluer en une valeur pour le connaître entièrement. En prenant $x=1$ dans l'égalité précédente, il vient $R(x)=P(1)=6$.

Remarque : on peut aussi trouver ce résultat en observant que

$$P(x)=(x-1)+(x^3-1)+(x^9-1)+(x^{27}-1)+(x^{81}-1)+(x^{243}-1)+6$$

et en utilisant que x^n-1 est divisible par $x-1$ pour tout entier $n\geqslant 1$.

On raisonne de la même façon pour la deuxième question de l'exercice : on écrit

$$P(x)=(x^2-1)Q(x)+R(x),$$

avec $R(x)$ de degré inférieur ou égal à 1. On cherche donc $R(x)$ sous la forme $ax+b$ avec a et b deux réels. En évaluant en 1 et en -1 dans l'égalité précédente, on obtient respectivement $a+b=P(1)=6$ et $a-b=P(-1)=-6$. On en déduit que $a=6$ et $b=0$, de sorte que $R(x)=6x$.

Solution de l'exercice 6

Les conditions de l'énoncé font qu'on ne peut pas directement accéder aux racines de P. En revanche, le polynôme $Q(x)=P(x)-x$ est unitaire, de degré 2025 et on connaît 2025 de ses racines : les entiers de 1 à 2025. On connaît donc explicitement ce polynôme : $Q(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-2025)$. On en déduit que

$$P(x)=Q(x)+x=(x-1)(x-2)\cdots(x-2025)+x$$

et que $P(2026)=2025!+2026$.

Solution de l'exercice 7

L'énoncé donne $P(0)=0$. En prenant $x=0$ dans la relation fonctionnelle de P, on obtient $P(0^2+1)=P(0)^2+1$ soit $P(1)=1$. En prenant $x=1$, il vient $P(2)=2$, puis on obtient successivement $P(5)=5$, $P(26)=26$, etc. Une récurrence immédiate montre alors que la suite définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=u_n^2+1$ vérifie $P(u_n)=u_n$ pour tout entier n. Le polynôme $P(x)-x$ possède ainsi une infinité de racines : les termes de la suite u_n. Il est donc nul et on en conclut que $P(x)=x$ est la seule solution au problème.

Solution de l'exercice 8

Remarquons tout d'abord que le polynôme nul est une solution de l'équation de l'énoncé.

On suppose désormais que P est une solution de l'équation et que P est non nul. Réécrivons tout d'abord l'équation de l'hypothèse. Elle est en effet équivalente à

$$(x-2)(x-4)P(x)=x(x+2)P(x-2).$$

En substituant x par 0 on trouve $8P(0)=0$ soit $P(0)=0$. En substituant x par -2 on trouve $24P(-2)=0$ soit $P(-2)=0$. En substituant x par 4 on a $0=24P(2)$ soit $P(2)=0$. Le polynôme P a donc au moins 3 racines : $-2,0,2$. Ainsi x, $x-2$ et $x+2$ divisent tous les trois le polynôme P, donc il existe un polynôme Q tel que $P(x)=x(x-2)(x+2)Q(x)$ pour tout réel x. En remplaçant P par $x(x-2)(x+2)Q(x)$ dans l'équation on trouve

$$(x-2)(x-4)x(x+2)(x-2)Q(x)=x(x+2)(x-4)x(x-2)Q(x-2).$$

ce qui est équivalent à

$$(x-4)(x+2)(x-2)x\big[(x-2)Q(x)-xQ(x-2)\big]=0.$$

Donc pour tout x différent de $-2, 0, 2, 4$ on a $(x-2)Q(x) - xQ(x-2) = 0$. Le polynôme $R(x) = (x-2)Q(x) - xQ(x-2)$ admet une infinité de racines (il suffit de prendre tous les x entiers différents de $-2, 0, 2, 4$) donc il s'agit du polynôme nul. Donc pour tout réel x on a $(x-2)Q(x) - xQ(x-2) = 0$. En particulier, pour $x = 0$ on a $-2Q(0) = 0$ donc $Q(0) = 0$ donc 0 est racine du polynôme Q donc x divise Q. Donc il existe un polynôme S tel que $Q(x) = xS(x)$ et l'équation se réécrit

$$(x-2)xS(x) = x(x-2)S(x-2)$$

soit encore

$$x(x-2)\big[S(x-2) - S(x)\big] = 0,$$

donc pour x différent de 0 et différent de 2 on a $S(x-2) = S(x)$. En particulier, par une récurrence immédiate on trouve que $S(x) = S(4)$ pour tout entier pair strictement supérieur à 2. En posant $c = S(4)$, on s'aperçoit que le polynôme T défini par $T(x) = S(x) - c$ admet une infinité de racines donc il s'agit du polynôme nul. Donc $S(x) = c$ pour tout réel x ce qui implique que $P(x) = x(x-2)(x+2)xS(x) = x^2(x^2-4)c$ avec c un réel non nul.

Réciproquement, on vérifie que ce polynôme est bien solution de l'équation polynomiale puisqu'on a

$$(x-2)(x-4)P(x) = (x-2)(x-4)x^2(x^2-4)c = x(x+2)P(x-2).$$

Les solutions sont donc tous les polynômes P définis par $P(x) = x^2(x^2-4)c$ avec c un réel et ce sont les seules, en remarquant que le polynôme nul correspond au cas où $c = 0$.

Solution de l'exercice 9
Si $P(x) \neq 0$ et $P(x-1) \neq 0$, on peut réécrire l'égalité sous la forme

$$\frac{P(x)}{P(x-1)} = \frac{P(x+1)}{P(x)}.$$

Le nombre d'entiers n tels que $P(n) = 0$ ou $P(n-1) = 0$ est fini, car sinon P serait nul par rigidité. Ainsi, pour une infinité d'entiers n, le quotient $\frac{P(n)}{P(n-1)}$ est constant. Il existe donc une constante c telle que $P(n) = cP(n-1)$. Par rigidité, cette égalité est également vraie pour tout réel et on peut identifier les coefficient dominants, ce qui donne $c = 1$. D'où $P(x) = P(x-1)$ pour tout x. En particulier, P est constant sur tous les nombres naturels. Dès lors, le polynôme $P(x) - P(0)$ a une infinité de racines et est donc nul, ce qui prouve que P est constant. Réciproquement, les polynômes constants sont bien solutions du problème.

Solution n°2 de l'exercice 9
Notons comme d'habitude $P(x) = a_n x^n + \cdots + a_0$ avec $a_n \neq 0$. On regarde le coefficient du terme de degré $2n-2$ de chaque côté de l'égalité. Après développement, on trouve

$$a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2a_n a_{n-2} - na_n^2.$$

Ainsi, $na_n^2 = 0$. Puisque $a_n \neq 0$, on a nécessairement $n = 0$ de sorte que P est constant.

Solution de l'exercice 10
Notons $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$. Comme les coefficients $a_{n-1}, \ldots, a_0$ sont positifs, on a pour $x > 0$, $P(x) > x^n > 0$. Puisque de plus $P(0) = 1$, P est strictement positif sur l'ensemble des réels positifs. Ainsi, toutes les racines de P sont négatives. On peut donc écrire P sous la forme

$$P(x) = (x + \alpha_1) \cdots (x + \alpha_n),$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des réels strictement positifs. Avec ces notations, l'égalité $P(0) = 1$ implique que $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$. On écrit alors

$$P(2) = (2 + \alpha_1) \cdots (2 + \alpha_n) = (1 + 1 + \alpha_1) \cdots (1 + 1 + \alpha_n),$$

ce qui permet d'utiliser l'inégalité arithmético-géométrique sur chacune des parenthèses :

$$P(2) \geqslant 3\sqrt[3]{\alpha_1} \cdots 3\sqrt[3]{\alpha_n} \geqslant 3^n$$

puisque $\alpha_1 \cdots \alpha_n = 1$.

Solution de l'exercice 11
Il suffit de prouver que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \leq \max_{0 \leq k \leq n} a_0 + \cdots + a_k$$

C'est évident pour $n = 0$. Pour $n = 1$, il s'agit de montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et $x \in [0, 1]$, on a

$$a + bx \leq \max(a, a + b).$$

Supposons le contraire, c'est-à-dire qu'il existe $y \in [0, 1]$ tel que $a + by > \max(a, a + b)$. Par conséquent, $a + by \geq a$ donc $b > 0$. De plus $a + by \geq a + b$ d'où $y > 1$, ce qui est une contradiction.

Procédons maintenant par récurrence sur n. Supposons que la propriété est vraie pour $n = k$. Alors pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} &= a_0 + x(a_1 + \cdots + a_k x^{k-1} + a_{k+1} x^k) \\
&\leq a_0 + x \left(\max_{1 \leq i \leq k+1} a_1 + \cdots + a_i \right) \text{ par hypothèse de récurrence} \\
&\leq \max \left(a_0, a_0 + \max_{1 \leq i \leq k+1} a_1 + \cdots + a_i \right) \text{ d'après le cas } n = 1 \\
&\leq \max_{0 \leq i \leq k+1} a_0 + \cdots + a_i,
\end{aligned}$$

ce qui prouve le résultat pour $n = k + 1$. Par conséquent, le résultat initial est vrai pour tout n.

2 Arithmétique : Problèmes de taille (Akin et Anatole)

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les entiers $a, b \geq 0$ tels que $2^a + 2^b = a^2 + b^2 - 2$

Exercice 2
Trouver tous les entiers n tels que $n^2 + 2 | n^3 + 3n + 1$

Exercice 3
Trouver tous les entiers $a, b \geq 0$ tels que $2^a = b^2 + b + 4$.

Exercice 4 (APMO 2011 P1)
Trouver tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que les trois nombres $a^2 + b + c, b^2 + c + a, c^2 + a + b$ sont des carrés parfaits.

Exercice 5 (OFM 2024 P4)
Trouver tous les entiers $n \geq 2$ tels qu'il existe n entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 2$ tels que pour tous les indices $i \neq j$, on ait $a_i \mid a_j^2 + 1$.

Exercice 6
On dispose de deux entiers a, b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n a + b$ est un carré parfait. Montrer que $a = 0$.

Exercice 7 (BMO 2024 P3)
Soit $a, b > 0$ deux entiers distincts tels que $3^a + 2$ divise $3^b + 2$. Montrer que $b > a^2$.

Exercice 8
Trouver le plus petit entier $n \geq 2$ tel qu'il existe n entiers strictement positifs $a_1, \ldots a_n$ tels que

$$a_1^2 + \cdots + a_n^2 | (a_1 + \cdots + a_n)^2 - 1$$

Exercice 9 (EMC 2024 P1)
On dit qu'une paire d'entiers distincts (a, b) est binaire si $ab + 1$ est une puissance de 2. Pour un ensemble S de n entiers strictement positifs, combien peut-il y avoir de paires binaires constituées d'éléments de S, au maximum ?

Exercice 10 (EMO 2026 P1)
Déterminer tous les entiers $n \geq 1$ vérifiant la propriété suivante : l'ensemble $\{1, 2 \ldots, 2n - 1, 2n\}$ peut être partitionné en deux ensembles disjoints A et B de cardinal n, tel que la somme des éléments de A divise la somme des éléments de B.

Solutions

Solution de l'exercice 1
L'égalité se réécrit $(2^a - a^2 + 1) + (2^b - b^2 + 1) = 0$.
Or, on remarque que $2^n - n^2 + 1$ est toujours positif si n est un entier positif, et est nul si et seulement si $n = 3$. Montrons le par récurrence.

Initialisation : C'est vrai pour $n = 1, 2, 3, 4$.
Hérédité : Supposons que, pour $n \geq 4$, on a $2^n - n^2 + 1 > 0$, c'est-à-dire $2^n \geq n^2$. Montrons que c'est vrai pour $n + 1$. On a

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2n^2$$

Or $n^2 \geq 4n \geq 2n + 1$ donc $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \geq (n + 1)^2$. On en déduit alors $2^{n+1} \geq (n + 1)^2$, ce qui achève la récurrence.

On a donc $(2^a - a^2 + 1) + (2^b - b^2 + 1) = 0$, et chacun des deux termes est positif. Ainsi, chaque terme est nul, donc $a = b = 3$. Réciproquement, il s'agit bien d'une solution, et c'est donc la seule.

Solution de l'exercice 2
L'idée est de trouver un multiple de $n^2 + 2$ proche de $n^3 + 3n + 1$ pour pouvoir le soustraire à $n^3 + 3n + 1$ et obtenir une contrainte de taille. Plus précisément, nous savons que $n^2 + 2$ divise $n(n^2 + 2) = n^3 + 2n$, donc

$$n^2 + 2 \mid n^3 + 3n + 1 - (n^3 + 2n) = n + 1.$$

Cependant, au vu des inégalités

$$n^2 - n + 1 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \text{et} \quad n^2 + n + 1 = \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0,$$

nous avons $n^2 + 2 > n + 1$ et $n^2 + 2 > -n - 1$, c'est-à-dire $n^2 + 2 > |n + 1|$. Ainsi, puisque le membre de gauche divise le membre de droite, nous devons avoir $n + 1 = 0$, ou encore $n = -1$. Réciproquement, on vérifie bien que $n = -1$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 3
On remarque que le membre de droite est proche d'un carré parfait. On peut donc essayer d'encadrer ce terme entre deux carrés parfaits consécutifs. Pour que cela aboutisse, il faudrait que le membre de gauche soit un carré parfait lui-même, donc que a soit pair. Montrons-le.

Si on teste les différentes possibilités modulo 3, on remarque qu'on ne peut pas avoir $b^2 + b + 4 \equiv 2[3]$. Or, si a est impair, on a $2^a \equiv 2[3]$. Ainsi, a ne peut pas être impair.

On en déduit que $b^2 + b + 4 = (2^{\frac{a}{2}})^2$ est un carré parfait. Or, si $b \geq 4$,

$$b^2 < b^2 + b + 4 < b^2 + 2b + 1 = (b + 1)^2$$

donc $b^2 + b + 4$ est compris strictement entre deux carrés parfaits consécutifs et ne peut en être un lui-même.

Il reste à traiter $b = 0, 1, 2, 3$. On remarque que les seules solutions sont $b = 0$ et $b = 3$, qui donnent les couples $(a, b) = (2, 0)$ et $(a, b) = (4, 3)$.

Solution de l'exercice 4
Supposons sans perte de généralité $a \leq b \leq c$. On remarque que

$$c^2 \leq c^2 + a + b \leq c^2 + 2c < (c + 1)^2.$$

Ainsi, puisque $c^2 + a + b$ est un carré, nous devons avoir $c^2 + a + b = c^2$, ou encore $a = b = 0$. Ensuite, puisque $a^2 + b + c$ est un carré, nous savons que c doit être un carré à son tour. Réciproquement, tout triplet où deux des variables sont nulles et l'autre est un carré convient.

Solution de l'exercice 5
Donnons-nous $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de tels entiers que l'on ordonne avec $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$. A première vue, la divisibilité la plus contraignante concernant la taille est $a_n \mid a_1^2 + 1$, qui donne $a_n \leq a_1^2 + 1$. Ce n'est pas assez restrictif. En vue d'obtenir davantage de divisibilités, on se rend compte que les a_i sont premiers entre eux deux à deux. En effet, si deux indices $i \neq j$ sont tels que a_i et a_j partagent un diviseur d, alors on a $d \mid a_i \mid a_j^2 + 1$ et $d \mid a_j \mid a_j^2$, d'où l'on tire $d \mid 1$ puis $d = 1$. En particulier, les a_i sont deux à deux distincts.
Ainsi, puisque $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2 \mid a_1^2 + 1$, on a en fait $a_n a_{n-1} \ldots a_2 \mid a_1^2 + 1$. Cette fois-ci, le membre de gauche semble bien plus grand que le membre de droite. En effet, dès que $n \geq 3$, on a

$$a_n a_{n-1} \ldots a_2 \geq a_n a_{n-1} \geq (a_1 + 1)(a_1 + 1) > a_1^2 + 1,$$

ce qui rend impossible la divisiblité annoncée. Ainsi, nous devons avoir $n = 2$. Réciproquement, $n = 2$ convient en prenant $a_1 = 2$ et $a_2 = 5$.

Solution de l'exercice 6
Soit $c_n \in \mathbb{N}$ tel que $c_n^2 = 2^n a + b$. En comparant aux rangs n et $n + 1$, on trouve $2c_n^2 = c_{n+1}^2 + b$. Cette équation seule ne suffit pas à conclure. Cependant, en combinant cette égalité pour n et $n + 1$, on obtient $4c_n^2 = c_{n+2}^2 + 3b$. On en déduit

$$(2c_n)^2 - c_{n+1}^2 = 3b$$

On a donc mis en évidence deux carrés dont la différence est une constante, $3b$. Comme les c_n sont de plus en plus grands, cela semble contradictoire. Montrons-le.
On a $(2c_n - c_{n+1})(2c_n + c_{n+1}) = 3b$ donc

$$2c_n + c_{n+1} | 3b$$

Supposons débà $b > 0$. Les c_n sont positifs donc pour tout n, $c_n \leq 3b$. Ainsi, $2^n a + b \leq (3b)^2$. On en déduit que $2^n a$ est borné, ce qui implique immédiatement que $a = 0$.
Si $b = 0$, on a que a et $2a$ sont des carrés parfaits, ce qui est impossible si $a > 0$.

Solution de l'exercice 7
On remarque que $3^b \equiv 3^{b-a} \cdot 3^a \equiv -2 \cdot 3^{b-a}[3^a + 2]$. On peut en fait itérer cet argument avec

$b-2a, b-3a, \ldots$. Ceci nous incite à considérer la division euclidienne de b par a : écrivons $b = ra + s$ avec $1 \leq s \leq a$ (ce n'est pas tout à fait la division euclidienne, mais cette forme permet de simplifier les calculs).

On a alors

$$3^b + 2 \equiv (3^a)^r \cdot 3^s + 2 \equiv (-2)^r \cdot 3^s - 3^a \equiv 3^s((-2)^r - 3^{a-s})[3^a + 2]$$

Or, 3^s est premier avec $3^a + 2$, donc $3^a + 2 | (-2)^r - 3^{a-s}$.

On remarque que $(-2)^r - 3^{a-s} \neq 0$ (sinon $r = a - s = 0$, donc $b = a$). Ainsi, $|(-2)^r - 3^{a-s}| \geq 3^a + 2$. Ainsi,

$$2^r + 3^{a-s} \geq 3^a + 2$$

donc

$$2^r \geq 3^a - 3^{a-1} + 2 = 2 \cdot 3^{a-1} + 2$$

ce qui se réécrit $2^{r-1} > 3^{a-1}$. On en déduit immédiatement $r > a$, et donc $b > a^2$.

Solution de l'exercice 8

On peut commencer par remarquer que $a_1 + \cdots + a_n$ est impair. En effet, dans le cas contraire, $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \equiv a_1 + \cdots + a_n \equiv 0$ donc le membre de gauche est pair, mais le membre de droite est impair, absurde.

On déduit que $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$ est pair. L'argument de parité précédent nous invite à préciser cette étude. On va donc chercher si $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$ est divisible par $4, 8 \ldots$. La présence des multiples carré nous invite à regarder chaque terme avec des modulos bien choisis.

Par exemple, modulo 4, $(a_1 + \ldots + a_n)^2 \equiv 1$ donc 4 divise $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$. Ne nous arrêtons pas en si bon chemin, nous savons également que les carrés des nombres impairs ne peuvent que valoir 1 modulo 8. Ainsi, $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$ est divisible par 8. Or 8 est premier avec $a_1^2 + \ldots + a_n^2$ qui est impair. On déduit de tout cela que

$$8(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \mid (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$$

Enfin, une autre remarque que l'on peut formuler sur l'énoncé est qu'il implique la somme des carrés de nombres d'un côté et le carré de la somme des nombres de l'autre côté. Ceci fait penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ou à l'inégalité des moyennes arithmétiques et quadratiques. On peut donc essayer de comparer les quantités $8(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$ et $(a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$.

Cette idée de comparer les termes est cohérente avec ce que l'on cherche à montrer. La divisibilité obtenue donne que $8(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1$. Or, dans l'inégalité des moyennes arithmétiques et quadratiques, le carré de la somme est plus petit que la somme des carrés des éléments multipliée par le nombre de variables. On se doute donc que l'inégalité obtenue va être fausse pour n trop petit, ce qui va nous fournir la borne souhaitée. Plus précisement,

$$8(a_1^2 + \ldots + a_n^2) \leqslant (a_1 + \ldots + a_n)^2 - 1 \leqslant n(a_1^2 + \ldots + a_n^2) - 1 < n(a_1^2 + \ldots + a_n^2)$$

où l'inégalité au milieu correspond à l'inégalité des moyennes arithémtiques et quadratiques. On obtient finalement que $n > 8$ donc $n \geqslant 9$.

Réciproquement, on cherche 9 entiers satisfaisant la propriété. On peut s'attendre à ce que de petits entiers fonctionnent. On peut donc chercher des a_i valant 1 ou 2. Finalement, on trouve qu'en prenant $a_1 = \cdots = a_7 = 1$ et $a_8 = a_9 = 2$, on a bien 15 qui divise $11^2 - 1 = 120 = 15 \times 8$.

La réponse attendue est donc $n = 9$.

Solution de l'exercice 9

On remarque tout d'abord qu'une paire binaire est toujours constituée de deux entiers impairs. Ensuite, une bonne idée dans cet exercice est de s'intéresser à la possibilité qu'un nombre appartienne à plusieurs paires binaires. Supposons que $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ soient tels que (a, b) et (a, c) soient binaires. Soit $k, l \in \mathbb{N}_0$ tels que $ab + 1 = 2^k$ et $ac + 1 = 2^l$. Disons que $b < c$, de sorte que $k < l$. En soustrayant ces deux égalités, on trouve

$$a(c - b) = 2^l - 2^k = 2^k(2^{l-k} - 1).$$

En particulier, on a $2^k \mid a(c - b)$. Cependant, a doit être impair, donc d'après le lemme de Gauss nous avons $ab + 1 = 2^k \mid c - b$. Une fois n'est pas coutume, cette divisibilité nous donne une information cruciale sur la taille de nos objets : on a

$$c > c - b \geq ab + 1 > a.$$

Nous avons ainsi montré que si $a \in \mathbb{N}_0$ forme une paire binaire avec b et c ($b \neq c$), alors au moins un des deux est plus grand que a. Autrement dit, tout entier est le plus grand élément d'au plus une paire binaire.

Notons maintenant $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ les éléments de S. D'après ce que l'on a montré, chacun des $n - 1$ entiers $a_2, a_3, \ldots, a_n$ est le maximum d'au plus une paire binaire. De plus, a_1 ne peut être le maximum d'une paire binaire à éléments dans S. Ainsi, il y au total au plus $n - 1$ paires binaires à éléments dans S.

Réciproquement, l'ensemble

$$S = \{1 = 2^1 - 1, 3 = 2^2 - 1, \ldots, 2^n - 1\}$$

est de cardinal n et possède $n - 1$ paires binaires. En effet, pour chaque $k \in [\![2, n]\!]$, $(1, 2^k - 1)$ est une paire binaire. Finalement, le maximum recherché est $n - 1$.

Solution de l'exercice 10

Soit n un entier qui convient et A et B les deux ensembles associés, dont on note S_A et S_B les sommes de leurs éléments. Il existe un entier $k \geq 1$ tel que $S_B = kS_A$. L'idée est que le rapport de S_B sur S_A n'est pas très grand. En effet, on a $S_B \leq (n + 1) + (n + 2) + \ldots + 2n = \frac{n(3n+1)}{2}$ et $S_A \geq 1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Ainsi,

$$k = \frac{S_B}{S_A} \leq \frac{3n + 1}{n + 1} < 3.$$

Puisque k est entier, on doit avoir $k \in \{1, 2\}$. Ensuite, puisque la somme $S_A + S_B$ est connue, il convient d'écrire

$$(k + 1)S_A = S_A + S_B = 1 + 2 + \ldots + 2n = n(2n + 1),$$

de sorte que $n(2n+1)$ soit divisible par $k+1$, égal à 2 ou 3. On cherche alors naturellement une condition sur n modulo 6. En tatonnant, on se rend compte que lorsque $n \equiv 5 \pmod 6$, $n(2n+1)$ n'est divisible ni par 2 ni par 3 (et donc pas par $k+1$), ce qui montre qu'un tel n ne peut convenir.
Réciproquement, montrons que les n qui ne sont pas congrus à 5 modulo 6 conviennent. En effet, pour un tel n, un peu d'attention montre que 2 ou 3 divise $n(2n+1)$. En particulier, il existe $k \in \{1,2\}$ tel que $k+1$ divise $n(2n+1)$. En partant de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$ et en ajoutant 1 aux éléments de l'ensemble un à un (en commençant par n jusqu'à arriver à $2n$, puis par $n-1$ jusqu'à arriver à $2n-1$ et ainsi de suite) on remarque que n'importe quel entier entre $\frac{n(n+1)}{2}$ et $n(2n+1)$ peut s'écrire comme somme des éléments d'un sous-ensemble de cardinal n de $\{1,2,\dots,2n\}$. Puisque l'on a

$$\frac{n(n+1)}{2} \leq \frac{n(2n+1)}{3} \leq \frac{n(2n+1)}{k+1} < n(2n+1),$$

nous savons qu'il existe un sous-ensemble A de cardinal n vérifiant $S_A = \frac{n(2n+1)}{k+1}$. En prenant pour B son complémentaire, on a bien $S_B = n(2n+1) - S_A = kS_A$ divisible par S_A. Cela conclut.

3 Arithmétique : Ordre multiplicatif (Lilas)

Cours

Ce cours est essentiellement une réplique de celui de Melvil de Valbonne 2025.

Exercices

Exercice 1
Montrer que $11 \mid 7^{20n+1} + 2^{10n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2
Calculer le reste de la division de $10^{10^{100}}$ par 7.

Exercice 3
Soit p un nombre premier. Montrer que tout diviseur premier de $2^p - 1$ est strictement plus grand que p.

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ premier avec 10. Montrer qu'il existe un multiple de n qui ne s'écrit qu'avec des 1.

Exercice 5
Soit n et b deux entiers strictement positifs. Soit p un nombre premier impair divisant $b^{2^n} + 1$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{n+1}m + 1$.

Exercice 6
Soit p un nombre premier et q un diviseur premier du nombre $1 + p + ... + p^{p-1}$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 7
Montrer que pour tout entier $n > 0$, $n \mid \phi(2^n - 1)$.

Exercice 8
Déterminer tous les nombres premiers p tels que $2^p + p$ divise $3^p + p$.

Exercice 9
Trouver tous les couples de nombres premiers (p, q) tels que $pq \mid 2^p + 2^q$.

Utiliser le plus petit diviseur :

Exercice 10
Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $3^n - 2^n$ n'est pas divisible par n.

Exercice 11
Trouver tous les entiers $n > 0$ tels que $n \mid 2^n - 1$.

Exercice 12
Trouver tous les entiers $n > 0$ impairs tels que $n \mid 3^n + 1$.

Exercice 13
Trouver tous les couples d'entiers (n, p) avec p premiers, $0 < n \leq 2p$ et :

$$n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$$

Exercice 14
Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \mid 2^{u_{n+1}} - 1$

Solutions

Solution de l'exercice 1
11 est premier, 7 et 2 sont premiers avec 11 donc d'après le petit théorème de Fermat :

$$7^{10} \equiv 2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$$

donc :

$$7^{20n+1} + 2^{10n+2} \equiv 7 + 4 \equiv 0 \pmod{11}$$

Solution de l'exercice 2
D'aprés le petit théorème de Fermat, $10^6 \equiv 1 \pmod 7$. Il suffit donc de calculer le reste de 10^{100} dans la dision eulcidienne par 6. Il faut faire trés attention à ne pas utiliser le théorème de Fermat ici car 10 et 6 ne sont pas premiers entre eux. On décompose alors... Le reste vaut 4.

Solution de l'exercice 3
Soit q un diviseur premier de $2^p - 1$. Il est bien premier avec 2 car $2^p - 1$ étant impair, il n'admet pas 2 comme diviseur. Alors, soit ω l'ordre de 2 modulo q. On a

$$2^p \equiv 1 \pmod q \iff \omega \mid p$$

Or p étant premier, $\omega = 1$ ou $\omega = p$ car il s'agit des seuls diviseurs positifs de p. Si $\omega = 1$, on a

$$2^1 \equiv 1 \pmod q$$

$$\implies 1 \equiv 0 \pmod q \implies q = 1$$

Ce qui est absurde. Donc $\omega = p$. De plus, d'aprés le petit théorème de Fermat, on a $2^{q-1} \equiv 1 \pmod q$, d'où $\omega \mid q - 1$. En remplaçant ω par sa valeur, on obtient

$$p \mid q - 1$$

Comme $q - 1 \neq 0$, cela implique donc

$$p \leqslant q - 1 \implies p < q$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 4
Commençons par écrire sous une forme plus intéressante le nombre $a = 1...1$ qui s'écrit avec x chiffres 1.

$$x = 1 + ... + 10^{a-1} = \frac{10^a - 1}{9}$$

Pour obtenir le résultat il faut donc

$$10^a \equiv 1 \pmod{9n}$$

Comme $9n$ est premier avec 10, il suffit de choisir $a = \varphi(9n)$ et de conclure en utilisant le petit théorème de Fermat.

Solution de l'exercice 5
Regardons modulo p : $b^{2^n} = -1 \pmod{p}$ donc $b^{2^n} = -1 \pmod{p}$. En élevant au carré l'égalité précédente, $b^{2^{n+1}} = 1 \pmod{p}$. Notons ω l'ordre de b modulo p qui existe d'après l'équation précédente. Comme $b^{2^{n+1}} = 1 \pmod{p}$, ω divise 2^{n+1} donc ω s'écrit sous la forme 2^k avec $k \in [\![1, n+1]\!]$.

Si $k \leqslant n$, comme $\omega = 2^k$ divise 2^n, $-1 = b^{2^n} = 1 \pmod{p}$ donc $p = 2$. Ceci est impossible car p est impair. On en déduit que $\omega = 2^{n+1}$. Par le théorème de Fermat, ω divise $p - 1$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{n+1}m + 1$.

Solution de l'exercice 6
Premiérement, rappelons la facorisation suivante :

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & q \mid 1 + p + \cdots + p^{p-1} \\ \implies & q \mid (p-1)(1 + p + \cdots + p^{p-1}) \\ \implies & q \mid p^p - 1 \end{aligned}$$

On a donc $p^p \equiv 1 \pmod{q}$. Bien entendu, $q \neq p$ (autrement on aurait $1 \equiv 0 \pmod{p} \implies p = 1$) et p admet donc un ordre ω modulo q. On a par conséquent :

$$\begin{aligned} & \omega \mid p \\ \implies & \omega = 1 \text{ ou } \omega = p \\ & \omega = 1 \text{ ou } \omega = p \end{aligned}$$

Ainsi, $\omega = 1$ nous donne

$$p^1 \equiv 1 \pmod{q}$$

. Mais alors,

$$0 \equiv 1 + p + \cdots + p^{p-1} \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 \equiv p \pmod{q}$$

D'où $q \mid p$ et donc $q = p$, absurde car $p \neq q$.

Comme $\omega \mid q - 1$ par Fermat, $\omega = p$ donne

$$\begin{aligned} & p \mid q - 1 \\ \iff & q \equiv 1 \pmod{p} \end{aligned}$$

On a donc bien $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Solution de l'exercice 7
Motivation derrière le raisonnement : on maîtrise très mal l'indicatrice d'Euler, on a souvent besoin de la décomposition en produit de facteurs premiers pour la calculer explicitement, et dans notre cas, nous n'avons pas beaucoup d'information à propos de la décomposition en facteurs premiers de $2^n - 1$. Ainsi, on ne va pas tenter de faire des calculs explicites avec l'indicatrice d'Euler : il ne nous reste plus qu'un choix pour avoir des informations et divisibilités sur ϕ, c'est le théoréme d'Euler.

Pour faire apparaître $\phi(2^n - 1)$, il faut donc regarder modulo $2^n - 1$. Si on prend a premier avec $2^n - 1$ et ω_a son ordre, on aura

$$\omega_a \mid \phi(2^n - 1)$$

Ici, le a astucieux paraét étre 2. Il nous faut donc calculer ω_2 et espérer qu'il valle n. On a bien $2^n \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$, donc $\omega_2 \mid n$ d'où $\omega_2 \leqslant n$. De plus

$$2^{\omega_2} \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$$

$$\iff \text{Il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 2^{\omega_2} = k(2^n - 1) + 1$$

$k = 0$ donne $2^{\omega_2} = 1$ d'où $\omega_2 = 0$, ce qui est absurde car un ordre vaut au moins 1. Il s'ensuit que $k \geqslant 1$, autrement dit :

$$2^{\omega_2} = k(2^n - 1) + 1 \geqslant (2^n - 1) + 1$$

$$2^{\omega_2} \geqslant 2^n$$

Donc enfin, $\omega_2 \geqslant n$. On a $\omega_2 \geqslant n$ et $\omega_2 \leqslant n$: il s'ensuit que $\omega_2 = n$. On a donc bien $n \mid \phi(2^n - 1)$.

Solution de l'exercice 8
On peut tout de suite conclure que p est impair car lorsque $p = 2$, 4 ne divise pas 11.
Soit q un diviseur premier de $2^p + p$, q est impair car $2p + p$ est impair.
Par ailleurs,

$$q \mid 2^p + p \mid 3^p + p$$

Donc

$$-p \equiv 2^p \equiv 3^p \pmod{q}$$

Puisque q est impair, 2 admet un inverse modulo q, ainsi

$$\left(\frac{3}{2}\right)^p \equiv 1 \pmod{q}$$

Soit ω l'ordre de $\dfrac{3}{2}$ modulo q, $\omega \mid p$ donc $\omega = 1$ ou $\omega = p$. Si $\omega = 1$, $3 \equiv 2 \pmod{q}$ ce qui est impossible donc $\omega = p$. Par petit Fermat, on sait que

$$\omega \mid q - 1$$

donc $p \mid q - 1$ d'où $q \equiv 1 \pmod{p}$.
Ainsi, $2^p + p$ n'admet que des divieurs premiers congrus é 1 modulo p, donc lui même est

congru é 1 moludulo p. On obtient alors $2^p + p \equiv 1 \pmod p \implies 2 \equiv 1 \pmod p$ ce qui est impossible donc l'équation n'admet aucune solution.

Solution de l'exercice 9
Supposons que pq divise $2^p + 2^q$. Supposons tout d'abord que $p \neq 2$ et $q \neq 2$, dans ce cas p et q sont premiers avec 2. En particulier modulo p, par le petit théorème de Fermat, $0 \equiv 2^p + 2^q \equiv 2 + 2^q \pmod p$, donc $2^{q-1} + 1 \equiv 0 \pmod p$ en simplifiant par 2. Ainsi on a $2^{q-1} \equiv -1 \pmod p$ donc $2^{2(q-1)} \equiv 1 \pmod p$.

Notons ω l'ordre de 2 modulo q qui existe et divise $2(q-1)$ mais pas $q-1$ car $2^{q-1} \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod p$ vu que $p \neq 2$. En particulier pour tout p premier impair, $V_p(\omega) \leqslant V_p(2(q-1)) = V_p(q-1)$. Comme ω ne divise pas $q-1$, il existe p' premier tel que $V_{p'}(\omega) > V_{p'}(q-1)$, donc p' ne peut être impair. On a donc $p' = 2$, donc $V_2(\omega) > V_2(q-1)$.

Or ω divise $2(q-1)$, donc $V_2(\omega) \leqslant 1 + V_2(q-1)$. Ainsi on a $V_2(\omega) = 1 + V_2(q-1)$. Or par Petit Fermat, ω divise $p-1$, donc $1 + V_2(q-1) = V_2(\omega) \leqslant V_2(p-1)$.

De même par symétrie, $1 + V_2(p-1) \leqslant V_2(q-1)$, donc en sommant les deux inégalités précédentes, $2 + V_2(p-1) + V_2(q-1) \leqslant V_2(p-1) + V_2(q-1)$ ce qui est absurde.

On en déduit donc que soit $p = 2$, soit $q = 2$. Par symétrie supposons $p = 2$.

Alors $2q$ divise $4 + 2^q$. En particulier, modulo q, si $q \neq 2$ $0 \equiv 4 + 2^q \equiv 4 + 2 \equiv 6 \pmod q$ par le théorème de Petit Fermat. Ainsi on a $q = 2$ ou 3. Réciproquement, $(2,2)$ convient car 4 divise $4 + 4 = 8$, $(2,3)$ et $(3,2)$ conviennent car 6 divise $2^3 + 2^2 = 12$.

Ainsi les couples solution sont $(2,3), (3,2), (2,2)$.

Solution de l'exercice 10
Soit $n \geqslant 2$, supposons par l'absurde que n divise $3^n - 2^n$. Comme $n > 1$, on prend p le plus petit diviseur premier de n. On a :

$$3^n \equiv 2^n \pmod p$$

Comme $n > 0$, $3^n - 2^n$ est impair donc n est impair et donc p aussi. Donc 2 possède un inverse k modulo p. On a alors :

$$(3k)^n \equiv 1 \pmod p$$

Donc l'ordre ω de $3k$ modulo p divise n et $p-1$ grâce au théorème de Fermat ainsi :

$$\omega < p$$

ω est plus petit que tous les diviseurs premiers de n, pourtant $\omega \mid n$ donc $\omega = 1$. En multipliant par 2 :

$$3 \equiv 2 \pmod p$$

donc $p = 1$ ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 11
Tout d'abord, $n = 1$ est une solution.
Supposons maintenant $n > 1$ tel que $n \mid 2^n - 1$ et p le plus petit diviseur premier de n.

$$2^n \equiv 1 \pmod p$$

Donc l'ordre ω de 2 modulo p divise n. Par ailleurs

$$\omega \leq \phi(p) < p$$

donc ω est plus petit que tous les diviseurs premiers de n, pourtant $\omega \mid n$ donc $\omega = 1$. Ainsi,

$$2 \equiv 1 \pmod{p} \implies p = 1$$

Impossible, donc n ne peut admettre de plus petit diviseur premier, ainsi la seule solution de l'équation est 1.

Solution de l'exercice 12
Premièrement, $n = 1$ est solution. Maintenant, considérons le cas $n \geqslant 2$: n possède donc au moins un diviseur premier, soit p le plus petit d'entre eux. Nous avons

$$3^n \equiv -1 \pmod{p}$$

Nous savons manipuler l'ordre et le théorème de Fermat, et nous venons de voir é l'exo 7 que ces manipulations peuvent permettre de résoudre des exercices de ce type. Le seul problème est donc d'avoir un -1 plutôt qu'un 1. L'astuce consiste donc à mettre notre égalité au carré pour faire apparaître le 1 ! Ainsi,

$$(3^n)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{p}$$

$$3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$$

Maintenant, soit ω l'ordre de 3 modulo p. On a

$$1 \leqslant \omega < p$$

Puis, $3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ donne

$$\omega \mid 2n$$

Enfin, $3^n \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p}$. En effet, sinon on aurait $p = 2$ or n est impair. Ainsi,

$$\omega \nmid n$$

Alors, $\omega \mid 2n$ fait que s'il existe un nombre premier q autre que 2 divisant ω, on aurait $q \mid \omega \mid 2n$

$$q \mid 2n$$

Or $pgcd(q, 2) = 1$ donc par le lemme de Gauss, $q \mid n$. Donc q est un diviseur premier de n strictement inféreur à p (q divise ω donc il est inférieur à ω, lui-même strictement inférieur à p), absurde !

Alors, il s'ensuit que ω est une puissance de deux. D'autre part, n est impair donc la plus grande puissance de 2 divisant $2n$ est 1 : ainsi,

$$\omega = 2^1 = 2 \text{ ou } \omega = 2^0 = 1$$

$\omega = 1$ ne convient pas puisque $1 \mid n$ or $\omega \nmid n$.

Ainsi, $\omega = 2$.

Donc,

$$3^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$8 \equiv 0 \pmod{p}$$

D'où $p = 2$, or n est impair : absurde. En conclusion, la seule solution est $n = 1$.

Solution de l'exercice 13

Avant de commencer le coeur de l'exercice il est toujours bon d'exclure des petits cas, on remarque que pour tout p premier le couple $(1, p)$ est solution. Désormais on supposera $n > 1$. Si $p = 2$, $n \mid 2$ donc $(2, 2)$ est l'unique solution dans ce cas. Désormais on supposera p impair. Puisque n est strictement plus grand que 1, il admet un plus petit diviseur premier q.

$$(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$$

$$(p-1)^{2n} \equiv 1 \pmod{q}$$

Donc ω l'ordre de $p-1$ modulo q divise $2n$ et $\omega < q$ donc ω est premier avec tous les divieurs premiers de n, ainsi $\omega \mid 2$.
Si $\omega = 1$, alors $(p-1)^1 \equiv 1 \pmod{q}$ donc $1 \equiv -1 \pmod{q} \implies q = 2$, impossible car le terme de droite dans la division est impair. Donc $\omega = 2$.
Puisque $\omega = 2$

$$(p-1)^2 \equiv 1 \pmod{q}$$

$$p(p-2) \equiv 0 \pmod{q}$$

Or $\omega \not\equiv 1$ donc $(p-1) \not\equiv 1 \equiv q \implies p - 2 \not\equiv 0 \pmod{q}$. Donc q divise p donc nécessairement $q = p$.
Retour à l'énoncé, on se rappelle que $0 < n \leq 2p$, or n est un multiple de p donc $n = p$ ou $n = 2p$. Si $n = 2p$ alors son plus petit diviseur est 2 et on a déjé traité ce cas. Donc $n = p$.
On obtient alors $(p-1)^p + 1 \equiv 0 \pmod{p}^{p-1}$. En développant avec le binôme de Newton on obtient

$$(p-1)^p + 1 = p^p - \binom{p}{1}p^{p-1} + \ldots + \binom{p}{3}p^3 - \binom{p}{2}p^2 + \binom{p}{1}p - 1 + 1 \equiv p^2 \pmod{p^3}$$

Tous les termes sont divisibles par p^3 sauf éventuellement les 3 derniers et $\binom{p}{2}p^2 = \dfrac{p(p-1)}{2}p^2$ est un multiple de p^3 car $\dfrac{p-1}{2}$ est un entier. Conclusion : $p^3 \nmid (p-1)^p + 1$ donc $p - 1 < 3 \implies p = 2$ ou $p = 3$.
Le cas $p = 2$ a déjà été traité, pour $p = 3$, la démonstration de $n = p$ tient toujours donc $n = 3$, et on trouve notre dernier couple solution $(3, 3)$ car $9 \mid 8 + 1$. Finalement les solutions de l'équation sont $(1, p); (2, 2)$ et $(3, 3)$.

Solution de l'exercice 14

Soit (u_n) une suite vérifiant l'énoncé. Montrons que (u_n) est constante égale é 1. On considère l'ensemble

$$E = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathbb{N}, p \mid u_n\}$$

On suppose par l'absurde que E est non vide. Soit q sont plus petit élément, et m tel que $q \mid u_m$. On a donc $q \mid 2^{u_{m+1}} - 1$, donc l'ordre ω de 2 modulo q divise u_{m+1}. L'ordre ne vaut pas 1 car $q > 1$. Ainsi il existe r premier tel que $r \mid \omega \mid u_{m+1}$. Donc $r \in E$ et $r < q$, ce qui contredit la minimalité de q. E est donc vide. Ainsi (u_n) est constante égale à 1. Réciproquement cette suite vérifie bien les conditions de l'énoncé. La seule solution est donc la suite constante égale à 1.

4 Algèbre : Polynômes 2 (Théo)

Le premier exercice avait pour objectif de revoir des notions vues au cours précédent. Le cours est repris de ce cours pour la partie Variations oscillations, et relations de Viète, et de celui-ci pour l'interpolation de Lagrange. Les exercices ont été allègrement repris des cours des années passées de Georges, Benoit, Gabriel (cités par ordre chronologique).

Exercices

Exercice 1
Déterminer tous les polynômes à coefficients réels P tels que $P(x)(x+1) = (x-1)P(x+1)$ pour tout x réel.

Variations et ordre de grandeur

Exercice 2
Soit P et Q deux polynômes à coefficient réels tels qu'il existe $N > 0$ tel que pour tout $x \geqslant N$, $P(x) > |Q(x)|$. Montrer que $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$.

Est-ce que le résultat persiste si on remplage $P(x) > |Q(x)|$ par $P(x) > Q(x)$?

Exercice 3
Soit P et Q des polynômes à coefficients réels, et dont le coefficient dominant est positif. On suppose que $P(P(x)) = Q(Q(x))$ pour tout réel x. Montrer que $P = Q$.

Exercice 4
Existe-t-il un polynôme réel P tel que $P(n) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$?

Exercice 5
Soit P un polynôme à coefficient réel tel que

$$xP(x)P(1-x) + x^3 + 100 \geqslant 0$$

pour tout réel x. Montrer que P est de la forme $X + b$ ou $-X + b$.

Viète

Exercice 6
Déterminer tous les réels x tels que $x + \frac{2}{x} = 3$.

Exercice 7
Déterminer tous les couples de réels x, y tels que $x + y = 11$ et $xy = 24$.

Exercice 8
Déterminer tous les réels a, b tels que $a + b = 3$ et $a^2 + b^2 = 29$

Exercice 9
Déterminers tous les réels a, b, c tels que $a + b + c = 2$, $a^2 + b^2 + c^2 = 6$, $a^3 + b^3 + c^3 = 8$

Exercice 10
Soit a, b, c les racines de $X^3 - 3X + 1$. Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

Exercice 11 (JBMO 2020, P1)
Déterminer tous les réels a, b, c tels que

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

et

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Exercice 12 (JBMO Shortlist 2008, A4)
Déterminer tous les réels x, y, z qui satisfont le système

$$\begin{cases} x + y + z = 2008 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6024^2 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2008} \end{cases}$$

Exercice 13 (JBMO 2010, P1)
Soit a, b, c, d des réels tels que

$$abc - d = 1, bcd - a = 2, cda - b = 3, dab - c = -6.$$

Prouver que $a + b + c + d \neq 0$.

Exercice 14
Soient $a, b, c, x, y, z > 0$ des réels tels que $a + b + c = x + y + z$ et $abc = xyz$. On suppose de plus que $a \leq x < y < z \leq c$. Montrer que $a = x, b = y, c = z$.

Interpolation de Lagrange

Exercice 15
Déterminer les polynômes P de degré 2 à coefficients réels tels que $P(0) = 4$ et $P(1) = P(2) = 2$.

Exercice 16
Soient $n \geqslant 1$, $a_1, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts, et $b_1, \ldots, b_n$ des réels. Déterminer les polynômes P tels que $P(a_i) = b_i$ pour tout entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exercice 17
Soit P un polynôme à coefficient réels tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que P est à coefficients rationnels.

Peut-on dire que si $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ alors P est à coefficients entiers ?

Exercice 18
Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels, on note n son degré. Montrer que si $k_0, \ldots, k_n$ sont des entiers 2 à 2 distincts, il existe un entier i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $|P(k_i)| \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
En évaluant en $x = 1$, on obtient $2P(1) = 0$, donc $P(1) = 0$. En évaluant en -1, on obtient $0 = -2P(0)$, donc $P(0) = 0$. Comme P admet comme racine 0 et 1, on pose $P(X) = (X-1)XQ(X)$ avec Q un polynôme à coefficient réel.

En réinjectant dans l'équation initiale, on obtient que pour tout x réel, $Q(x)(x-1)x(x+1) = (x-1)(x+1-1)(x+1)Q(x+1)$, donc en simplifiant $Q(x) = Q(x+1)$ pour tout réel x différent de $0, 1, -1$. Ainsi le polynôme $Q(x) - Q(x+1)$ s'annule en une infinité de réels (tous sauf 3), donc est nul : on a ainsi $Q(x) = Q(x+1)$ pour tout réel x. En particulier en prenant $x = 0$, puis $x = 1$, puis $x = 2$, etc, on trouve $Q(0) = Q(1) = Q(2) = \cdots = Q(n)$ pour tout entier positif n. Ainsi le polynôme $Q(X) - Q(0)$ a une infinité de racines (tous les entiers positifs), donc est nul. Le polynôme Q est donc constant, il existe donc un réel C tel que $P(X) = CX(X-1)$.

Réciproquement, si P est de cette forme, on a

$$(X-1)P(X+1) = C(X-1)(X+1)X = (X+1)P(X),$$

donc P est bien solution. Les solutions sont les polynômes de la forme $C(X-1)X$ pour C réel.

Solution de l'exercice 2
Soit P et Q vérifiant l'énoncé. Notons que $P = 0$ n'est pas possible, donc si Q est constant, $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$.

Si Q n'est pas constant, notons d son degré et d' celui de P. Pour tout $x > 0$, on a $\frac{P(x)}{x^d} > \frac{|Q(x)|}{x^d}$. Le terme de droite tend vers $|c|$ lorsque x tend vers $+\infty$, où c est le coefficient dominant de Q. Si $d' < d$, on a $\frac{P(x)}{x^d} = \frac{P(x)}{x^{d'}} x^{d'-d}$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ (car le premier terme tend vers le coefficient dominant de P, et le second vers 0), donc en passant à la limite l'inégalité, $0 \geqslant |c|$, ce qui est absurde.

Ainsi on a bien que $\deg(P) \geqslant \deg(Q)$. Si on suppose uniquement $P(x) > Q(x)$ pour tout x réel, en prenant $P(X) = 1 + X^2$ et $Q(X) = -1 - X^4$, on a bien $P(x) > 0 > Q(x)$ pour tout réel x. Pourtant $\deg(P) = 2 < 4 = \deg(Q)$. L'énonce n'est donc plus vrai.

Solution de l'exercice 3
Déjà notons que si P est constant, Q l'est aussi. En effet, si Q était de degré au moins 1, $Q(x)$ tendrait vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, donc $Q(Q(x))$ aussi, alors que $P(P(x))$ resterait constant, ce qui est absurde. Ainsi soit P et Q sont tous les deux constants, et donc égaux d'après l'équation, soit ils sont tous les deux de degré au moins 1.

Plaçons nous dans le cas où P et Q sont de degré au moins 1, et supposons $P \neq Q$. Ainsi $P - Q$ est un polynôme non nul. Soit il est de degré au moins 1 et tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ en $+\infty$, soit il est constant, mais dans tous les cas, pour x assez grand, soit $P(x) - Q(x)$ est toujours strictement négatif, soit toujours strictement positif. Quitte à échange P et Q, supposons $P(x) > Q(x)$ pour x assez grand.

Comme P est de coefficient dominant positif, et de degré au moins 1, il est croissant lorsque x est assez grand. Ainsi dès que x est assez grand (pour que P soit croissant à partir de $Q(x)$, et que $P(x) > Q(x)$), on a $P(P(x)) > P(Q(x))$. De plus, dès que x est assez grand (pour que $Q(x)$ dans l'intervalle où $P > Q$), on a $P(Q(x)) > Q(Q(x))$. En combinant les deux

inégalités, pour x assez grand, $P(P(x)) > Q(Q(x))$ ce qui est absurde. Ainsi $P = Q$ dans tous les cas.

Solution de l'exercice 4
Notons que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $0 \leqslant P(n) \leqslant n$ par hypothèse. Donc si P n'est pas constant, en notant d son degré, on a $0 \leqslant \frac{P(n)}{n^d} \leqslant n^{1-d}$ et dès que $d \geqslant 2$, lorsque n tend vers $+\infty$, n^{1-d} tend vers 0, donc $\frac{P(n)}{n^d}$ aussi. Or $\frac{P(n)}{n^d}$ tend vers le coefficient dominant de P ce qui est absurde. Donc $d = 1$.

Ainsi P est de degré 0 ou 1, donc de la forme $P(X) = aX + b$. Evaluer en 1 et 2 donne $a + b = 1$ et $2a + b = 3/2$. En soutrayant la première équation à la seconde, $a = 1/2$, puis $b = 1/2$. Ainsi $P(3) = 3a + b = 2$, mais $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$ ne vaut pas 2, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 5
Soit P un polynôme vérifiant l'inégalité Notons d le degré de P, supposons dans le premier temps $d \geqslant 2$. Le polynôme $P(1 - X)$ est aussi de degré d, donc $XP(X)P(1 - X)$ est de degré $2d+1$. Ainsi comme $2d+1 \geqslant 3$, $XP(X)P(1-X)+X^3+100$ est un polynôme de degré $2d+1$. Comme son degré est impair, il tend vers $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$, ce qui est absurde.

Ainsi P est de degré au plus 1, donc P s'écrit de la forme $P(X) = aX + b$. On a donc $XP(X)P(1-X)+X^3+100 = X(aX+b)(a+b-aX)+X^3+100$. Ce polynôme est de degré au plus 3, et son coefficient en X^3 est $-a^2+1$. Si le polynôme est de degré 3, son degré est impair, donc comme précédemment on obtient une contradiction. Ainsi on a forcément $a^2 = 1$, donc $a = \pm 1$. Ainsi $P(X)$ est de la forme $X + b$ ou $-X + b$.

Solution de l'exercice 6
Posons $y = 2/x$, comme $x + y = 3$ et $xy = 2$, x et y sont les racines de $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$, donc $x = 1$ ou 2. Réciproquement, si $x = 1$ ou 2, on a bien $x + \frac{2}{x} = 3$, donc x est bien solution.

Solution de l'exercice 7
On connaît la somme et le produit de x et y, donc par Viète x et y sont les racines de $X^2 - 11X + 24 = (X - 3)(X - 8)$ Ainsi, $(x, y) = (8, 3)$ ou $(3, 8)$. On vérifie réciproquement que ces deux couples sont bien solutions.

Solution de l'exercice 8
On cherche à calculer le produit de a et b. On pourra ensuite conclure par le même argument qu'aux exercices précédents. Pour cela, on peut écrire

$$2ab = (a + b)^2 - (a^2 + b^2) = -20$$

donc $ab = -10$ Ainsi par Viète a et b sont les racines du polynôme $X^2-3X-10 = (X-5)(X+2)$. Ainsi $(a, b) = (5, -2)$ ou $(-2, 5)$. On vérifie réciproquement que les couples $(a, b) = (5, -2)$ et $(a, b) = (-2, 5)$ conviennent bien.

Solution de l'exercice 9
On essaie de calculer $ab + bc + ca$ et abc pour obtenir le polynôme unitaire dont les racines sont a, b, c.

Notons que $4 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 6 + 2(ab + bc + ca)$, donc $ab + bc + ca = -1$.

En élevant l'équation $a+b+c=2$ au cube, on obtient :

$$\begin{aligned}8 &= (a+b+c)^3\\ &= a^3+b^3+c^3+3a^2(b+c)+3b^2(a+c)+3c^2(a+b)+6abc\\ &= -2(a^3+b^3+c^3)+3(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)+6abc\\ &= -16+36+6abc\\ &= 20+6abc\end{aligned}$$

Ainsi $6abc-=12$ donc $abc=-2$. Ainsi le polynôme $P(X)=(X-a)(X-b)(X-c)$ vérifie

$$P(X)=X^3-2X^2-X+2=(X-1)(X^2-X-2)=(X-1)(X+1)(X-2).$$

Ainsi a,b,c sont à permutation près $1,-1,2$, et ces valeurs vérifient le système.

Solution de l'exercice 10
Notons que comme $a^3=3a-1$ par hypothèse, $a^4=3a^2-a$, et de même $b^4=3b^2-b$ et $c^4=3c^2-c$. En sommant, on obtient :

$$a^4+b^4+c^4=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)=3(a+b+c)^2-6(ab+bc+ca)-(a+b+c).$$

Or par Viète $a+b+c=0$ et $ab+bc+ca=-3$, donc $a^4+b^4+c^4=18$.

Solution de l'exercice 11
Ici, les équations sont très symétriques et font penser à des relations de Viète avec (a,b,c) et $(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c})$. Notons tout d'abord que a,b,c ne peuvent être nuls. Pour obtenir une nouvelle équation, on peut essayer de faire apparaître des carrés via la première équation, puis d'utiliser la seconde.

Elevons au carré la première équation : on obtient :

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{2}{ab}+\frac{2}{ac}+\frac{2}{bc}$$

En retranchant la seconde équation à celle-ci et en divisant par 2, on obtient

$$ab+bc+ca=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$$

On a deux relations sur les 3 ce qui n'est malheureusement pas suffisant pour Viète : essayons donc de les manipuler !

$$ab+bc+ca=\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{a+b+c}{abc}$$

et

$$a+b+c=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}$$

En combinant les deux équations,

$$a+b+c = \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{a+b+c}{(abc)^2}$$

En particulier si $a+b+c \neq 0$, on obtient que $\frac{1}{(abc)^2} = 1$, donc $(abc)^2 = 1$ donc $abc = \pm 1$. Trois cas se présentent donc :

— Si $a+b+c = 0$, on a $ab+bc+ca = \frac{a+b+c}{abc} = 0$. Ainsi $0 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2 + 2(ab+bc+ca) = a^2+b^2+c^2$, donc $a = b = c = 0$ ce qui est impossible.
On aurait aussi pu obtenir cette contradiction en utilisant que si x est un réel,

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - abc.$$

En particulier pour $x = a$ on a $a^3 = abc$, de même $b^3 = abc = a^3 = c^3$, donc $a = b = c$. Comme $a+b+c = 3a = 0$, on a $a = b = c = 0$ ce qui est impossible.

— Si $abc = \pm 1$, on a $abc = \frac{1}{abc}$ qui est la troisième relation nécessaire pour utiliser Viète. On sait donc que (a,b,c) est une permutation de $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$.
Si $a = \frac{1}{a}$, on a $a^2 = 1$ donc $a \pm 1$. Supposons que $a \neq \pm 1$, que $b \neq \pm 1$ et que $c \neq \pm 1$. Quitte à échanger b et c, comme (a,b,c) est une permutation de $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$, $a = \frac{1}{b}$. Si $b = \frac{1}{a}$, alors $c = \frac{1}{c}$ ce qui est impossible. On a donc $b = \frac{1}{c}$ et $c = \frac{1}{a}$, donc $a = \frac{1}{b} = c = \frac{1}{a}$ contradiction.
Ainsi soit a, b, c vaut ± 1. Quitte à renommer les variables par symétrie, on peut supposer $a = \pm 1$, on a donc $a = \frac{1}{a}$, donc $(b,c) = (\frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ ou $(\frac{1}{c}, \frac{1}{b})$. Dans le premier cas, on a $(a,b,c) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Dans le second cas, on a $(a,b,c) = (\pm 1, b, \frac{1}{b})$.

Réciproquement les triplets de la forme $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $(\pm 1, t, \frac{1}{t})$ avec t un réel non nul et leurs permutations sont solutions : en effet si $(a,b,c) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, $a = \frac{1}{a}$, $b = \frac{1}{b}$ et $c = \frac{1}{c}$ donc les équations sont vérifiées. Si $(a,b,c) = (\pm 1, t, \frac{1}{t})$, $a = \frac{1}{a}$, $b = \frac{1}{c}$ et $c = \frac{1}{b}$ donc les équations sont vérifiées. En fait on peut même oublier les triplets de la forme $(a,b,c) = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, par principe des tiroirs on a deux variables égales (par exemple b et c, et dans ce cas $b = \frac{1}{c}$, donc on est ramené au deuxième cas. Les triplets solutions sont donc les permutations de triplets de la forme $(\pm 1, t, \frac{1}{t})$

On aurait pu aussi montrer dans le cas $abc = \pm 1$, que $a = \pm 1$ via l'astuce suivante.
Si $abc = 1$, on a $a+b+c = ab+bc+ca$. Posons $S = a+b+c$. On sait que

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - sx^2 + sx - 1.$$

Pour $x = 1$, on a $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - sx^2 + sx - 1 = 0$ donc $a = 1$ ou $b = 1$ et $c = 1$. Le produit des deux restants valant 1 on obtient (a,b,c) est une permutation d'un triplet de la forme $(1, t, \frac{1}{t})$
Si $abc = -1$, on a $a+b+c = -(ab+bc+ca)$. Posons $S = a+b+c$. On sait que

$$(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc = x^3 - sx^2 - sx + 1.$$

Pour $x = -1$, on a $(x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - sx^2 - sx + 1 = -1 - s + s + 1 = 0$ donc $a = -1$ ou $b = -1$ et $c = -1$. On conclut alors en utilisant que le produit des deux autres vaut 1.

Solution de l'exercice 12
On commence par poser $a = \frac{x}{2008}, b = \frac{y}{2008}, c = \frac{z}{2008}$ pour simplifier les équations. Le système

est équivalent à

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ a^2+b^2+c^2=9 \\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1 \end{cases}$$

Comme toujours, on essaie ensuite de se ramener aux valeurs de $ab+bc+ca$ et abc qui nous permettraient d'exprimer a, b, c de façon unique. Pour cela, on utilise que

$$2(ab+bc+ca) = (a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2) = -8$$

donc $ab+bc+ca=-4$. De plus, la troisième égalité donne

$$ab+bc+ca = abc = -4$$

Ainsi, a, b, c sont les trois racines du polynôme $X^3 - X^2 - 4X + 4 =$.
Or, 1 est une racine évidente du polynôme, on peut donc le factoriser :

$$X^3 - X^2 - 4X + 4 = (X-1)(X^2-4) = (X-1)(X-2)(X+2).$$

On obtient donc 6 solutions, où $\{a,b,c\} = \{1,2,-2\}$. Réciproquement, on vérifie aisément que toutes ces solutions conviennent. On obtient donc que les solutions du système initial sont de la forme $\{x,y,z\} = \{2008, 2\cdot 2008, -2\cdot 2008\}$.

Solution de l'exercice 13
On remarque que si on somme les quatre égalités, les constantes s'annulent. On obtient :

$$abc+bcd+cda+dab = a+b+c+d$$

Supposons par l'absurde que $a+b+c+d=0$. On a alors aussi $abc+bcd+cda+dab=0$. Dans ce cas, a, b, c, d sont les 4 racines du polynôme $P(X) = (X-a)(X-b)(X-c)(X-d)$ qui en développant est de la forme $P(X) = X^4 + uX^2 + v$ car les deux autres coefficients sont nuls.
On remarque que P est paire : pour tout x, $P(x) = P(-x)$. Ainsi, si x annule cette fonction, $-x$ aussi.
On sait que $\{a,b,c,d\}$ est l'ensemble des nombres qui annulent cette fonction. On a montré que $-a$ l'annule aussi, donc $-a \in \{a,b,c,d\}$. On distingue alors 4 cas :

1. $-a = a$
   On a alors $a=0$. La première équation donne $d=-1$, la troisième $b=-3$, la quatrième $c=6$ mais alors la deuxième équation n'est pas vérifiée.
2. $-a = b$
   Comme $a+b+c+d=0$, on a alors $c=-d$. La première et la quatrième égalité se réécrivent
   $$c(1-a^2) = 1, c(a^2-1) = -6$$
   Ces égalités ne sont clairement pas compatibles.
3. $-a = c$
   Comme $a+b+c+d=0$, on a alors $d=-b$. De même, la première égalité se réécrit $b(-a^2+1)=1$, et la troisième : $b(a^2-1)=3$, absurde.

4. $-a = d$
   Comme $a+b+c+d = 0$, on a alors $b = -c$. La première égalité se réécrit $a(-b^2+1) = 1$ et la deuxième : $a(b^2-1) = 2$, absurde.

Ainsi, on ne peut pas avoir $a+b+c+d = 0$.

Solution de l'exercice 14

On considère P le polynôme unitaire dont a, b, c sont les racines ($P = (X-a)(X-b)(X-c)$)et Q celui dont x, y, z sont les racines $Q = (X-x)(X-y)(X-z)$. D'après les contraintes, les coefficients en X^3, en X^2 et en X^0 de P et Q sont les mêmes, donc il existe une constante K tel que $P - Q = KX$

On peut évaluer cette égalité en diverses valeurs intelligentes. Commençons par l'évaluer en c :

$$P(c) - Q(c) = -(c-x)(c-y)(c-z) = Kc$$

Le membre de gauche est négatif car $c \geq x, y, z$. Ainsi, $K \leq 0$. Évaluons maintenant en a :

$$P(a) - Q(a) = -(a-x)(a-y)(a-z) = Ka$$

Le membre de gauche est positif car $a \leq x, y, z$. Ainsi $K \geq 0$. On a donc $K = 0$, et ainsi $P = Q$. Les racines sont alors les mêmes (à permutation près), donc forcément vu les inégalités sur a, x, y, z, c, on a $x = a$ et $z = c$. Ainsi on a aussi $b = y$.

Solution de l'exercice 15

D'après l'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme de degré 2 vérifiant cela, qu'on calcule avec la formule adéquate :

$$P = \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)}4 + \frac{X(X-2)}{1(1-2)}2 + \frac{X(X-1)}{2(2-1)}2 = 2(X-1)(X-2) - 2X(X-2) + X(X-1)$$

donc $P = X^2 - 3X + 4$.

Solution de l'exercice 16

Notons L le polynôme interpolateur de Lagrange de degré au plus $n-1$ tel que $L(a_i) = b_i$ pour tout i. Si P est un polynôme tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i, alors $P - L$ admet tous les a_i comme racine, donc $P - L = (X-a_1)\dots(X-a_n)Q(X)$ avec Q un polynôme à coefficient réel. Ainsi $P = L + (X-a_1)\dots(X-a_n)Q(X)$.

Réciproquement un polynôme de la forme précédente vérifie bien $P(a_i) = L(a_i) = b_i$ pour tout i. Ainsi les polynômes solutions sont exactement ceux de la forme $L + (X-a_1)\dots(X-a_n)Q(X)$.

Solution de l'exercice 17

Notons $d \geqslant 0$ un majorant du degré de P, et $q_1, \dots, q_{d+1}$ des rationnels. Le polynôme P est égal au polynôme interpolateur de Lagrange de degré au plus d passant par les points $(q_i, P(q_i))$. On a donc

$$P = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d+1} (X - q_j)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{d+1} (q_i - q_j)} P(q_i).$$

Or chacun des coefficients s'écrit comme une fraction dont les coefficients sont des sommes ou différences de produit de q_i, donc P est à coefficient rationnel.

Cependant, le polynôme $P(X) = \frac{X(X+1)}{2}$ vérifie $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ car pour tout entier n, n ou $n+1$ est pair, donc pour tout entier n, $P(n)$ est entier. Mais celui-ci n'est pas à coefficients entiers.

Solution de l'exercice 18
On suppose sans perte de généralité $k_0 < \cdots < k_n$. Le polynôme étant de degré n, c'est le polynôme interpolateur de Lagrange de degré au plus n valant $P(k_i)$ en chacun des k_i. Ainsi on a l'équation suivante :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \frac{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (X - k_j)}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (k_i - k_j)} P(k_i).$$

En regardant le coefficient dominant, comme P est unitaire, on a :

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (k_i - k_j)} P(k_i).$$

En particulier si pour tout i, $P(k_i) < \frac{n!}{2^n}$, on a :

$$1 = \left| \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (k_i - k_j)} P(k_i) \right| < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} |(k_i - k_j)|} \frac{n!}{2^n}.$$

Or pour tout i entre 0 et n,

$$\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} |(k_i - k_j)| = \prod_{j=0}^{i-1} (k_i - k_j) + \prod_{j=i+1} n(k_j - k_i) \geqslant \prod_{j=0} i - 1(i-j) + \prod_{j=i+1} n(j-i) = i! \times (n-i)!.$$

Donc en reprenant l'inégalité précédente,

$$1 < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{i!(n-i)!} \frac{n!}{2^n} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} = 1.$$

On obtient une contradiction, il existe donc bien i tel que $P(k_i) \geqslant \frac{n!}{2^n}$.

5 Algèbre : Équations fonctionnelles 1 (Rémi)

L'objectif de ce TD est de passer en revue les bases des équations fonctionnelles et de consolider quelques réflexes. On pourra se reporter à l'excellent cours de Martin dans le poly du stage de 2024 pour retrouver la théorie complète.

Voici la liste des thèmes abordés au cours de cette séance :

— égaliser des termes : on cherche des substitutions telles que $A = B$ permettant de simplifier les termes $f(A)$ et $f(B)$ dans l'équation. Voir ex 2, 5.

— exploiter des symétries : si un membre de l'égalité est symétrique en x et y, alors on peut échanger x et y pour obtenir une relation intéressante sur l'autre membre. Voir ex 3, 6.

— injectivité/surjectivité : quand on voit une variable hors des parenthèses, on doit tout de suite penser injectivité et surjectivité. Pour la surjectivité, il suffit dans la grande majorité des cas de choisir la valeur de l'autre variable de sorte à fixer tous les termes du côté de la variable sortie. Pour l'injectivité, si x est la variable hors des parenthèses, il faudra souvent poser $x = a$ puis $x = b$ pour avancer. Voir ex 4, 7, 9, 10, 11, 12.

Énoncé des exercices

Exercice 1 (Slovénie 1999)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) - y) = f(-x) + 2x - y$$

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y$$

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = x + f(f(y))$$

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = f(x - y) + 2y$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

Exercice 7 (Ukraine 2017)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + f(f(y))) = y + f(f(x))$$

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$f(f(x)) = x + 1$$

Exercice 9 (BMO 2023, P1)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x))$$

Exercice 10 (Iran 2020)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y))$$

Exercice 11 (BMO 2022, A1)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x(x + f(y))) = (x + y)f(x)$$

Exercice 12 (IMO 2002, A1)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(f(x) + y\right) = 2x + f\left(f(y) - x\right)$$

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Soit f une solution éventuelle. En remplaçant x par $f(y)$, on trouve

$$f(0) = 1 - f(y) - y$$

ce qui se réécrit

$$f(y) = -y + 1 - f(0).$$

Ainsi, f est de la forme $f(y) = -y + c$ avec c un réel.
Réciproquement, si $f(y) = -y + c$ est solution, alors

$$f(x - f(y)) = -x + f(y) + c = -x - y + 2c.$$

On déduit que $c = 1/2$. La seule fonction solution est donc la fonction $f(x) = -x + 1/2$.

Solution de l'exercice 2
On a deux termes en $f(\dots)$, donc on va chercher une substitution permettant de les annuler. On aimerait donc avoir $f(x) - y = -x$, ce qui est possible en posant $y = f(x) + x$. Ceci nous donne $2x - (f(x) - x) = 0$, ce qui se simplifie directement en $f(x) = x$. Réciproquement, on vérifie que la fonction identité est bien solution.

Solution de l'exercice 3
On va introduire ici un concept très récurrent en équations fonctionnelles : celui de l'étude des symétries dans une équation : dans l'égalité de l'énoncé, on voit que le membre de gauche est symétrique en x et y alors que le membre de droite ne l'est pas, donc en échangeant x et y, on va obtenir une information précieuse. Ici, cela s'écrit ainsi :

$$f(x) + y = f(f(x) + f(y)) = f(f(y) + f(x)) = f(y) + x$$

Il ne reste plus qu'à poser $y = 0$ pour obtenir $f(x) = x + f(0)$, l'exercice est déjà terminé !

Réciproquement, si $f(x) = x + c$, alors $f(f(x) + f(y)) = x + y + 4c$, tandis que $f(x) + y = x + y + c$, donc $c = 0$. Finalement, la seule solution est la fonction identité.

Solution de l'exercice 4
On voit un x isolé en dehors de toutes les parenthèses, donc on se doute qu'on va pouvoir obtenir l'injectivité. Supposons que $f(a) = f(b)$ pour deux réels a et b. En remplaçant x successivement par a puis par b, on obtient :

$$f(f(a) + y) = a + f(f(y))$$

$$f(f(b) + y) = b + f(f(y))$$

En soustrayant terme à terme ces deux égalités, on obtient directement $a = b$, donc f est injective.
Il ne reste plus qu'à poser $x = 0$, ce qui donne $f(f(0) + y) = f(f(y))$, d'où par injectivité $f(0) + y = f(y)$. Réciproquement, toutes les fonctions de la forme $f(x) = x + c$ avec c une constante réelle sont bien solutions.

Solution de l'exercice 5
On cherche une substitution permettant d'annuler les deux termes en $f(\dots)$. On aimerait donc trouver une substitution pour laquelle $f(x) + y = x - y$, soit $2y = x - f(x)$. On pose donc $y = \dfrac{x - f(x)}{2}$, ce qui donne :

$$f\left(f(x) + \frac{x - f(x)}{2}\right) = f\left(x - \frac{x - f(x)}{2}\right) + 2\frac{x - f(x)}{2}$$

Comme prévu, les deux premiers termes se simplifient, et il reste simplement $x - f(x) = 0$, soit $f(x) = x$. Réciproquement, on vérifie que la fonction identité est bien solution.

Solution de l'exercice 6
Dans cette équation, le terme de gauche est symétrique en x et y alors que le terme de droite ne l'est pas. Ainsi, en échangeant x et y, on a $f(f(x)f(y)) = f(x)y = xf(y)$. En posant $y = 1$, cela nous donne $f(x) = xf(1)$ pour tout x.

Réciproquement, si $f(x) = cx$, alors $f(f(x)f(y)) = c^3xy$ tandis que $f(x)y = cxy$ donc $c = 0$ ou $c = \pm 1$. Les solutions sont donc les fonctions $f : x \mapsto 0$, $f : x \mapsto x$ et $f : x \mapsto -x$.

Solution de l'exercice 7
On commence par poser $x = 0$, ce qui donne $f(f(f(y))) = y + f(f(0))$. En particulier, si a et b sont deux réels tels que $f(a) = f(b)$, alors $f(f(f(a))) = f(f(f(b)))$, donc $a + f(0) = b + f(0)$, et finalement, $a = b$. Ainsi, f est injective. En posant $x = y = 0$, on trouve $(f(f(0))) = f(f(0))$, d'où $f(0) = 0$ par injectivité. Enfin, en choisissant $y = 0$, il vient $f(x) = f(f(x))$, d'où finalement $f(x) = x$ à nouveau par injectivité. Réciproquement, l'identité est bien solution.

Solution de l'exercice 8
L'astuce consiste à calculer $f(f(f(x)))$ de deux manières distinctes :
- d'une part, en appliquant f de chaque côté de l'équation initiale, il vient

$$f\Big(f(f(x))\Big) = f\Big(x + 1\Big)$$

- d'autre part, en posant $x = f(y)$, on trouve

$$f\Big(f\Big(f(y)\Big)\Big) = f(y) + 1$$

Cette astuce n'est pas facile à visualiser mais est très utile et doit être maîtrisée. D'après les deux résultats précédents, on obtient donc :

$$f(x + 1) = f(x) + 1$$

Par une récurrence immédiate, si on pose $f(0) = c$, on obtient $f(x) = x + c$.

Réciproquement si l'on remplace cela dans l'équation initiale, on obtient

$$f(f(x)) = f(x) + c = x + 2c.$$

Ainsi, $2c = 1$, donc $f(0) = c = 1/2$. Ceci est impossible, puisque f est à valeurs dans $\mathbb{N}$. Cette équation n'admet donc aucune solution.

Solution de l'exercice 9
On commence par traiter à part le cas $f(f(x)) = 0$ pour tout réel x (on comprendra par la suite pourquoi). L'énoncé se réécrit $f(x + f(y)) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Si f n'est pas la fonction nulle, on choisit un y tel que $f(y) \neq 0$, et on pose $x = -f(y)$, ce qui nous donne $f(0) = 0$. Mais en posant $y = 0$ on trouve alors que f est la fonction nulle.

On peut désormais supposer que $f(f(x)) \neq 0$ pour un certain x. Si a et b sont deux réels tels que $f(a) = f(b)$, alors en remplaçant y par a puis par b successivement, on trouve

$$(a - x)f(f(x)) = xf(x + f(a)) = xf(x + f(b)) = (b - x)f(f(x))$$

On peut bien diviser par $f(f(x))$, et on trouve finalement $a = b$, donc f est injective.

En posant $x = 0$, $y = 1$, on trouve alors $f(f(0)) = 0$. Mais la substitution $y = x \neq 0$ nous indique également que $f(x + f(x)) = 0$. Ainsi, $f(x + f(x)) = f(f(0))$, d'où $f(x) = f(0) - x$ par injectivité (ce résultat est clairement vrai pour $x = 0$ également).

Finalement, les deux solutions possibles sont $f(x) = 0$, et $f(x) = -x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$, et on vérifie réciproquement qu'elles conviennent bien.

Solution n°2 de l'exercice 9
On commence par quelques substitutions basiques :

— $x = y$ donne $f(x + f(x)) = 0$.
— $x = 0$ donne $f(f(0)) = 0$.
— $x = f(0)$ donne $f(0)f(f(0) + f(y)) = (y - f(0))f(0)$

On distingue donc deux cas : soit $f(0) = 0$, soit $f(f(0) + f(y)) = y - f(0)$.

Si $f(f(0) + f(y)) = y - f(0)$, on pose $y = f(x) + x$, de sorte que $f(y) = 0$. On a alors $f(f(0)) = f(x) + x - f(0)$, ce qui se réécrit $f(x) = -x + f(0) + f(f(0))$. On vérifie réciproquement que toutes les fonctions de la forme $f(x) = -x + c$ avec c une constante réelle sont bien solutions.

On suppose désormais que $f(0) = 0$. En posant $y = 0$, on a $f(f(x)) = -f(x)$. On réécrit l'équation de l'énoncé sous la forme $xf(x + f(y)) = (x - y)f(x)$. On fait à nouveau la même substitution $y = f(z) + z$ avec z un réel quelconque, et il vient

$$xf(x) = (x - z - f(z))f(x) = xf(x) - (z + f(z))f(x)$$

Ainsi, $f(x)(z + f(z)) = 0$, donc soit f est la fonction nulle, soit $f(x) = -x$.

Finalement, les deux solutions sont $f(x) = 0$, et $f(x) = -x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 10
Le premier bon réflexe est de voir un x dans le membre de droite, donc on cherche à montrer que f est injective. Si on suppose que $f(a) = f(b)$ pour deux réels, alors en remplaçant x par a puis par b, et en soustrayant les deux égalités obtenues, il vient $2a = 2b$. Ainsi, f est injective.

On pose alors $x = 0$ et $y = f(0)$, et on obtient $f(f(f(0))) = 0$. En prenant ensuite $x = f(f(0))$ et $y = 0$, on obtient $f(f(0)) = -2f(f(0))$, donc $f(f(0)) = 0$. En appliquant f des deux côtés, on trouve $f(f(f(0))) = f(0)$, soit finalement $f(0) = 0$ en combinant avec ce qui précède. On revient à l'équation initiale et on pose $x = 0$. Cela nous donne $f(y) = f(f(y))$, soit $f(y) = y$ par injectivité. On vérifie réciproquement que l'identité est bien solution de l'équation.

Solution de l'exercice 11
On commence par remarquer que la fonction nulle est solution. Supposons désormais qu'il existe un x pour lequel $f(x) \neq 0$. Soient a et b deux réels tels que $f(a) = f(b)$. En posant successivement $y = a$ puis $y = b$, il vient

$$(x + a)f(x) = f(x(x + f(a))) = f(x(x + f(b))) = (x + b)f(x)$$

Ainsi $af(x) = bf(x)$, et comme $f(x) \neq 0$, $a = b$. Ainsi, f est injective. On pose désormais $x = 0$, ce qui donne $f(0) = yf(0)$. Pour $y = 2$, il vient $f(0) = 0$.

Enfin, on pose $x = -f(y)$, et on trouve $f(0) = (-f(y) + y)f(-f(y))$, soit $(f(y) - y)f(-f(y)) = 0$. Mais si $f(-f(y)) = 0$, alors $f(-f(y)) = f(0)$, donc $f(y) = 0$ et finalement $y = 0$, en utilisant deux fois l'injectivité. On en déduit que pour tout $y \neq 0$, $f(y) = y$.

Finalement, les seules solutions sont la fonction nulle et l'identité, qui conviennent bien.

Solution de l'exercice 12
On commence par poser $y = -f(x)$, ce qui donne $f(0) = 2x + f(f(-x) - x))$, ou encore $f(f(-x) - x) = f(0) - 2x$. Or la fonction $x \mapsto f(0) - 2x$ est surjective, donc f aussi.

Comme f est surjective, on dispose d'un réel c tel que $f(c) = 0$. En posant $x = c$, il vient $f(y) = 2c + f(f(y) - c)$. Comme f est surjective, on peut choisir y de sorte que $f(y) = x$, où x est un réel quelconque. Ceci donne $x = 2c + f(x - c)$ pour tout x, ou encore $f(x) = x - c$ après changement de variable.

Réciproquement, toutes les fonctions de la forme $f(x) = x - c$ sont bien solutions.

6 Arithmétique : Théorème des restes chinois (Tristan et Antoine D)

Le cours est identique à celui d'Hugo de l'an dernier. Les exercices quant à eux, sont issus du cours d'Hugo de l'an dernier, et de celui de Théo de 2023 en groupe D.

Exercices

Exercice 1
Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} x \equiv 7\ [5] \\ x \equiv 5\ [7] \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 8\ [10] \\ x \equiv 5\ [14] \end{cases} \qquad \begin{cases} x \equiv 3\ [10] \\ x \equiv 5\ [14] \end{cases}$$

Exercice 2 (Origine du nom)
Supposons qu'un général veuille compter ses soldats, il décide de les faire se ranger par lignes de 11, 13, 15 et 17 et regarde combien de soldats n'appartiennent à aucune ligne.

Quelle est la taille maximale de son armée pour qu'il connaisse alors avec certitude le nombre de soldats ?

Exercice 3
Montrer que deux suites arithmétiques de raison 15 et 49 ont un terme en commun. (Une suite arithmétique de raison r est une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Exercice 4
Combien existe-t-il d'entiers n entre 1 et 30030 inclus tels que tous les nombres premiers entre 1 et 12 divisent soit n, soit $n+1$?

Exercice 5 (Entraînement Valbonne 2021 C)
Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$ premiers entre eux. Montrer qu'il existe $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}$$

Exercice 6 (Valbonne 2024 D)
Pour tout nombre premier p et entier a, montrer qu'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^n \equiv a \pmod{p}$

Exercice 7 (Evan Chen)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $4a^2 + 9b^2 - 1 \equiv 0 \pmod{n}$.

Exercice 8 (IMO 1989 P5)
Montrer que pour tout entier strictement positif n, il existe n nombres consécutifs qui ne sont pas des puissances de nombres premiers.

Exercice 9 (Entraînement Valbonne 2022 C)
Montrer que pour tout nombre premier p, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que p divise $2025^n - n$.

Exercice 10
Soit $n \geqslant 2$. Dénombrer le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x^2 = x \pmod{n}$.

Exercice 11
Déterminer les entiers n strictement positifs tels que $(n^n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ prenne tous les résidus modulo n.

Exercice 12 (USAMO 1991)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la suite suivante est constante modulo n à partir d'un certain rang :

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, 2^{2^{2^{2^2}}}, \dots$$

Exercice 13
Anatole et Théo jouent au jeu suivant : Anatole choisit un nombre premier $p > 2$ et Théo écrit un entier strictement positif a au tableau. Au départ $S = 0$ Chacun leur tour, commençant par Anatole, ils effacent le nombre qu'ils avaient écrit au tour précédent (sauf Anatole au premier tour), et écrivent un nouvel entier strictement plus grand que celui écrit au tableau. Ensuite le joueur dont c'est le tour calcule $a^b + b^a$: le résultat est noté s_l où l est le numéro du tour. Si p divise $s_l(s_1 + 2s_2 + \cdots + ls_l)$, le joueur dont c'est le tour gagne, sinon c'est au tour du joueur suivant.

Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Exercice 14
Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^\star$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est une puissance parfaite.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Premier système : Comme dans la démonstration, on cherche :

— Un inverse de 5 modulo 7 : on peut tenter les 6 possibilités ou bien utiliser l'algorithme d'Euclide : $7 = 5+2$ donc $2 = 7-5$ mais $5 = 2\times 2+1$ donc $1 = 5-2\times 2 = 5-2\times 7-5 = 3\times 5-2\times 7$. Ainsi $3\times 5 \equiv 1\ [7]$.

— Un inverse de 7 modulo 5 : la relation précédente nous indique que -2 convient.

Ainsi $a = -2\times 7 = -14$ vérifie $a \equiv 1\ [5]$ et $a \equiv 0\ [7]$. De même, $b = 3\times 5 = 15$ vérifie $b \equiv 0\ [5]$ et $b \equiv 1[7]$. Ainsi, une solution particulière est $7a + 5b = -98 + 75 = -23 \equiv 12\ [35]$

Le théorème des restes chinois (5 et 7 sont premiers entre eux) nous indique donc que :

$$\begin{cases} x \equiv 7\ [5] \\ x \equiv 5\ [7] \end{cases} \iff x \equiv 12\ [35]$$

On aurait aussi pu deviner que $5+7$ était une solution au système : les calculs ne sont pas toujours nécessaires.

Deuxième système : On a $10 = 2\times 5$ et $14 = 2\times 7$, or $\mathrm{PGCD}(2,5) = \mathrm{PGCD}(2,7) = 1$ donc par le théorème des restes chinois :

$$\begin{cases} x \equiv 8\ [10] \\ x \equiv 5\ [14] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 8\ [2] \\ x \equiv 8\ [5] \\ x \equiv 5\ [2] \\ x \equiv 5\ [7] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0\ [2] \\ x \equiv 3\ [5] \\ x \equiv 1\ [2] \\ x \equiv 5\ [7] \end{cases}$$

La première et la troisième ligne se contredisent : le système n'a aucune solution.

Troisisème système : De même que précédemment, on a :

$$\begin{cases} x \equiv 3\ [10] \\ x \equiv 5\ [14] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 3\ [2] \\ x \equiv 3\ [5] \\ x \equiv 5\ [2] \\ x \equiv 5\ [7] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1\ [2] \\ x \equiv 3\ [5] \\ x \equiv 1\ [2] \\ x \equiv 5\ [7] \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1\ [2] \\ x \equiv 3\ [5] \\ x \equiv 5\ [7] \end{cases}$$

Car cette fois la première et la troisième ligne sont redondantes, on calcule alors :

— Un inverse de $5\times 7 = 35$ modulo 2 : $35 \equiv 1\ [2]$ et 1 convient. On pose $a = 1\times 35 = 35$

— Un inverse de $2\times 7 = 14$ modulo 5 : $14 \equiv -1\ [5]$ et -1 convient. On pose $b = -1\times 14 = -14$

— Un inverse de $2\times 5 = 10$ modulo 7 : $10 \equiv 3\ [7]$ et on a $5\times 3 = 15 \equiv 1\ [7]$ donc 5 convient. On pose $c = 5\times 10 = 50$.

Ainsi, une solution particulière est $a + 3b + 5c = 35 - 42 + 250 = 243 \equiv 33$ et on a donc :

$$\begin{cases} x \equiv 3\ [10] \\ x \equiv 5\ [14] \end{cases} \iff x \equiv 33\ [70]$$

Solution de l'exercice 2
Remarquons que 11, 13, 15 et 17 sont deux à deux premiers entre eux. Les manœuvres de l'armée consistent à regarder le reste modulo 11, 13, 15 puis 17, donc avec le théorème des restes chinois, on pourra connaître la taille de l'armée modulo $N = 11 \times 13 \times 15 \times 17$.

Alors, si la taille de l'armée est inférieure à N, on connaîtra exactement le nombre de soldats : remarquons que $N > 10\,000$. En fait, il suffit même d'avoir une estimation du nombre de soldats précise à 10 000 près pour le connaître alors avec certitude.

Solution de l'exercice 3
On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites arithmétiques de raison 15 et 49 respectivement. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + 15n \equiv u_0\ [15]$ et $v_n = v_0 + 49n \equiv v_0\ [49]$. D'après le théorème des restes chinois , il existe $x_0 \in \mathbb{Z}$, unique modulo 35, tel que $\begin{cases} x_0 \equiv u_0\ [15] \\ x_0 \equiv v_0\ [49] \end{cases}$

Il existe ainsi $n_0, m_0 \in \mathbb{Z}$ tels que $x_0 = u_0 + 15n_0$ et $x_0 = v_0 + 49m_0$, on a presque le résultat désiré, il manque seulement $n_0, m_0 \in \mathbb{N}$ au lieu de $\mathbb{Z}$.

On peut alors rajouter 15×49 autant de fois que nécessaire à x_0 pour obtenir $x = x_0 + 15 \times 49k > u_0, v_0$. Alors il existe $n, m \in \mathbb{N}$ tel que $x = u_0 + 15n = u_n$ et $x = v_0 + 49m = v_m$. x est ainsi bien un terme commun aux deux suites.

Solution de l'exercice 4
Les nombres premiers entre 1 et 12 sont $2, 3, 5, 7, 11$.

Les nombres recherchés par l'énoncé sont ceux tels que pour tout $p \in \{2, 3, 5, 7, 11\}$,

$$n \equiv 0 \text{ ou } -1 \pmod{p}.$$

Chacun des nombres premiers offre deux possibilités, et par le théorème des restes chinois, chaque choix de valeur 0 ou -1 offre une unique valeur modulo 2310, le produit des nombres premiers, pour un total de $2^5 = 32$ telles valeurs. On calcule $30030/2310 = 13$, on trouve finalement $2^5 \times 13 = 416$ entiers solutions.

Solution de l'exercice 5
D'après le théorème des restes chinois ($\mathrm{PGCD}(a, b) = 1$), il suffit de trouver $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$\begin{cases} 1 \equiv a^m + b^n \equiv b^n\ [a] \\ 1 \equiv a^m + b^n \equiv a^m [b] \end{cases}$$

On peut alors prendre $n = \varphi(a)$ et $m = \varphi(b)$.

Solution de l'exercice 6
On commence par écarter le cas où $p \mid a$, il suffit en effet de prendre $n = p$ pour avoir $n^n \equiv 0 \equiv a\ [p]$.

On suppose maintenant $p \nmid a$. On cherche une contrainte qui rendra n^n plus simple. On pourrait penser à $n = k(p-1)$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ mais alors $n^n \equiv 1\ [p]$ et on a plus aucune liberté. On choisit donc plutôt $n = k(p-1)+1$ de sorte que $n^n \equiv n\ [p]$. Ainsi, il suffit de prendre pour n une solution au système :

$$\begin{cases} n \equiv 1\ [p-1] \\ n \equiv a\ [p] \end{cases}$$

Le théorème des restes chinois nous fournit bien l'existence d'une telle solution car $\mathrm{PGCD}(p, p-1) = 1$.

Solution de l'exercice 7
On traite pour commencer le cas où n est une puissance d'un nombre premier, $n = p^\alpha$.

— Si $p \neq 2$ alors 2 admet un inverse c modulo p^α. On vérifie que $(a, b) \equiv (c, 0)\ [p^\alpha]$ convient.

— Si $p = 2$, alors 3 admet un inverse d modulo p^α. On vérifie cette fois que $(a, b) \equiv (0, d)\ [p^\alpha]$ convient.

Dans le cas général, on peut alors décomposer n en produit de puissances de nombres premiers, on obtient alors une liste de congruences qui garantissent que (a, b) soit solution. Le théorème des restes chinois nous fournit alors une solution modulo n.

Solution de l'exercice 8
Pour qu'un nombre ne soit pas une puissance de nombre premier, il faut qu'il soit divisible par au moins deux nombres premiers. On prend donc $2n$ nombres premiers deux-à-deux distincts $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ et on considère les n nombres consécutifs $x, x+1, \ldots, x+n-1$. On voudrait donc que :

$$\begin{cases} x \equiv 0\ [p_1 q_1] \\ x+1 \equiv 0\ [p_2 q_2] \\ \quad \vdots \\ x+n-1 \equiv 0\ [p_n q_n] \end{cases}$$

Le théorème des restes chinois nous fournit l'existence d'une solution à ce système (les modulos sont bien deux-à-deux premiers entre eux car on a choisit des nombres premiers deux-à-deux distincts).

Solution de l'exercice 9
Pour commencer, si $p \mid 2025$ alors on peut prendre $n = 2025$. On suppose donc que p ne divise pas 2025.

Le terme en 2025^n est celui au comportement le plus compliqué, cependant, on le comprend très bien grâce au petit théorème de Fermat lorsque $n = p - 1$ puisqu'alors $2025^{p-1} \equiv 1\ [p]$, cela reste même vrai si n est multiple de $p-1$. Il faudrait alors que $1 - n \equiv 0\ [p]$. On aboutit donc à montrer l'existence d'une solution au système :

$$\begin{cases} n \equiv 0\ [p-1] \\ n \equiv 1\ [p] \end{cases}$$

Ce qui est assuré par le théorème des restes chinois puisque p et $p-1$ sont premiers entre eux. On peut aussi vérifier que $(p-1)^2$ convient.

Solution de l'exercice 10
Déjà le premier réflexe à avoir est de factoriser : on cherche le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x(x-1) = 0 \pmod{n}$. Traitons d'abord le cas où n est une puissance d'un nombre premier différente de 1. Comme x et $x-1$ sont premiers entre eux (car $x-(x-1) = 1$), n divise $x(x-1)$ si et seulement si n divise x ou $x-1$. Ainsi l'équation est équivalente comme x est dans $[\![1, n]\!]$ à $x = n$ ou $x = 1$: il y a deux solutions.

Maintenant il faut traiter le cas général. Déjà on peut remarquer que le nombre de solutions est en fait le nombre de classes de congruence modulo n telles que $x(x-1) = 0$

$(\mathrm{mod}\ n)$. Pour se ramener au cas précédent, on utilise le théorème des restes chinois. Posons $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ avec les p_i des nombres premiers et les a_i des nombres entiers strictement positifs. L'équation est équivalente à pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i^{a_i}$ divise $x(x-1)$ ce qui est équivalent à pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ ou $x = 1 \pmod{p_i^{a_i}}$. L'équation est donc équivalente à l'existence de $(e_1, \dots, e_k)$ dans $\{0,1\}^k$ tels que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x \equiv e_i \pmod{p_i^{a_i}}$. Les $p_i^{a_i}$ étant deux à deux premiers entre eux, si on fixe $(e_1, \dots, e_k)$ dans $\{0,1\}^k$ le système pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x = e_i \pmod{p_i^{a_i}}$ admet une unique solution modulo n. Aussi chaque classe de solution est distincte : si on se donne $(e_1, \dots, e_k) \neq (e'_1, \dots, e'_k)$ dans $\{0,1\}^k$ et qu'on note a la solution modulo n de $x \equiv e_i \pmod{p_i^{a_i}}$, b celle de $x \equiv e'_i \pmod{p_i^{a_i}}$, supposons par l'absurde $a = b$, dans ce cas pour tout i $e_i \equiv a \equiv b \equiv e'_i \pmod{p_i^{a_i}}$ et comme les e_i et e'_i sont dans $\{0,1\}$, on obtient $e_i = e'_i$ ce qui est contradictoire. En particulier il y a autant de classe de solution que de $(e_1, \dots, e_k)$ dans $\{0,1\}^k$ c'est à dire 2^k, avec k le nombre de diviseur premier distinct de n.

En fait le lemme chinois nous donne que le nombre de solution ici modulo n est le même que le produit pour tout i du nombre de solutions modulo $p_i^{a_i}$

Solution de l'exercice 11
Essayons de trouver des conditions simples permettant d'avoir $x \mapsto x^x$ surjectif (ou empêchant clairement cette fonction d'être surjective.

Déjà s'il existe un nombre premier p tel que p^2 divise n, alors on ne peut pas avoir $x^x \equiv p \pmod{n}$. En effet, cela impliquerait que p divise x, donc que p^2 divise x^x, ce qui est contradictoire. Ainsi tout n solution est squarefree.

Soit n un entier strictement positif squarefree, et a un entier. Pour avoir $x^x \equiv a \pmod{n}$, on aimerait avoir $x \equiv a \pmod{n}$ et $x \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$. Supposons n et $\phi(n)$ premier entre eux (ce qui implique n squarefree), alors un tel x existe. Pour tout premier p divisant n, si a est premier avec p, p est aussi premier avec x, donc $x^x \equiv x \equiv a \pmod{p}$ (par Petit Fermat car $p-1$ divise $x-1$). Sinon, a est divisible par p, donc x aussi, donc $x^x \equiv a \pmod{p}$. Dans tous les cas par le lemme chinois, $x^x \equiv a \pmod{p}$. Ceci montre que si n est premier avec $\phi(n)$, n vérifie l'énoncé.

Essayons de montrer la réciproque. Supposons que n vérifie l'énoncé, et que n n'est pas premier avec $\phi(n)$. On sait déjà que n est squarefree, donc il existe deux nombres premiers p et q divisant n tels que p divise $q-1$ (en particulier $p \neq q$). Donnons nous b une racine primitive modulo q. Si $x \mapsto x^x$ est surjective, alors il existe un entier strictement positif x tel que $x^x \equiv 0 \pmod{p}$ et $x^x \equiv b \pmod{q}$. La première équation implique que p divise x, et la seconde que x est premier avec q. On a alors $(x^x)^{(q-1)/p} \equiv x^{(q-1)x/p} \equiv 1 \pmod{q}$, donc $b^{(q-1)/p} \equiv \pmod{q}$ ce qui contredit la définition de b. Ainsi on a une contradiction.

On obtient donc que la propriété de l'énoncé est vraie si et seulement si n et $\phi(n)$ sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 12
On montre le résultat par récurrence forte sur n, il est évident pour $n = 1$.

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, on suppose avoir montré le résultat pour tous les entiers $i \in [\![1, n-1]\!]$. On décompose $n = 2^k m$ avec $k \in \mathbb{N}$ et m impairs. D'après le théorème des restes chinois, il suffit alors de montrer le résultat pour 2^k et m. En effet, une fois la suite constante modulo 2^k et m, elle sera constante modulo $2^k m = n$. Il y a alors plusieurs cas.

— Si $2^k > 1$ et $m > 1$ alors $2^k < n$ et $m < n$ et on conclut grâce à l'hypothèse de récurrence.

— Si $m = 1$ alors $n = 2^k$, alors la suite $1, 2^2, 2^{2^2}, \dots$ est strictement croissante, à partir du moment où elle devient supérieure à k, la suite de l'énoncé est constamment nulle modulo n.

— Si $2^k = 1$ alors $n = m$ est impair et 2 est donc premier avec n. On remarque que c'est l'exposant de 2 qui évolue alors. Or, on sait que pour tout $l \in \mathbb{Z}$, $2^{l\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$. Ainsi, si $a \equiv b\ [\varphi(n)]$, on a $2^a \equiv 2^b\ [n]$. Or, la suite $1, 2, 2^2, 2^{2^2}, \dots$ est constante modulo $\varphi(n)$ par hypothèse de récurrence à partir d'un certain rang (car $\varphi(n) \leqslant n - 1$), on a donc démontré le résultat.

Solution de l'exercice 13

Tout d'abord, essayons de bien comprendre ce que peut valoir $a^b + b^a$ en fonction de a et b modulo p. Par Petit Fermat, cette quantité ne dépend que de la congruence modulo p et $p-1$ de a et b car ceux-ci sont strictement positifs (le cas où a ou b est divisible par p ne pose pas problème).

La valeur de b qui semble donner le moins de possibilités pour cette quantité est $b \equiv 0 \pmod{p-1}$ et $b \equiv 1 \pmod{p}$: notons que ce système a une solution comme $p - (p-1) = 1$, donc p et $p-1$ sont premiers entre eux. Dans ce cas $a^b + b^a$ vaut 2 modulo p si a est premier avec p, 1 sinon.

Notons également que si un des deux joueurs écrit un nombre c divisible par p, et ne gagne pas à ce tour, le joueur suivant peut écrire un multiple de p noté d plus grand que c, et gagner car p divisera $c^d + d^c$.

Ainsi, il semble que n'importe quel joueur peut forcer la main pour que s_j vale toujours 2 modulo p. Dans ce cas, $s_1 + 2s_2 + \cdots + ls_l = l(l+1)$ deviendra divisible par p au bout de $p-1$ tours, il semble donc que si Anatole choisit p impair, Théo gagne. Essayons donc de formaliser cette idée.

Théo va employer la stratégie suivante : si Anatole écrit un nombre divisible par p et ne gagne pas, Théo écrit un nombre divisible par p plus grand et gagne immédiatement. Si Anatole écrit un nombre non divisible par p, Théo écrit un nombre plus grand divisible par $p-1$ et valant 1 modulo p, qui existe par théorème des restes chinois.

Supposons qu'Anatole peut gagner lorsque Théo emploie cette stratégie. Il y a alors deux possibilités :

— Anatole n'écrit jamais d'entier divisible par p. Au k-ième tour, on a $s_k(s_1 + 2s_2 + \cdots + ks_k) \equiv 2k(k+1) \pmod{p}$. Ainsi, cette quantité est divisible par p si et seulement si k ou $k+1$ l'est. Le premier k pour lequel la quantité est divisible par p est $p-1$ qui est pair. C'est donc après un tour de Théo, donc Théo gagne, contradiction.

— Anatole écrit un entier divisible par p au tour l. Comme Théo gagne au tour suivant si Anatole n'a pas gagné, cela veut dire qu'Anatole a gagné. Ainsi p divise $s_l(s_1 + \cdots + ls_l) = (l-1)l + l = l^2$, donc $l \geqslant p$. Or via l'argument précédent, Théo aura déjà gagné au tour $p-1$, vu que $s_{p-1}(s_1 + 2s_2 + (p-1)s_{p-1}) \equiv 0 \pmod{p}$, ce qui est absurde.

Ainsi Théo gagne à tous les coups, c'est donc lui qui a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 14

On commence par montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^\star$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est entière.

Pour cela, on prend 2022 entiers $\{a_1, \dots, a_{2022}\}$. Pour tout sous-ensemble B, on note $m(B)$ la moyenne arithmétique des éléments du sous-ensemble B. Alors $|B| \mid m(B)$ est entier pour

tout B, avec $|B| \leqslant 2022$, de sorte que l'ensemble $\{2022!a_1, 2022!a_2, \ldots, 2022!a_{2022}\}$ convient. On note $A' = \{b_1, \ldots, b_{2022}\}$ les entiers obtenus.

Maintenant, on veut multiplier chaque entier par une nouvelle constante de sorte que les $m(B)$ (où $m(B)$ désigne la moyenne arithmétique des éléments du sous-ensemble B de A') soient des puissances parfaites. Notons que seul un nombre fini de nombres premiers apparaissent dans $m(B)$: on les note $p_1, \ldots, p_k$.

Pour cela, pour tout B on écrit $m(B) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i(B)}$. On veut multiplier tous les entiers par un nombre $K = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$, de sorte que la moyenne devienne $Km(B) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i(B)+\beta_i}$.

On va utiliser les restes chinois pour cela, et le plus simple est que $Km(B)$ soit de la forme $a^{p(B)}$ avec $p(B)$ un nombre premier, différent pour chaque B. On se donne donc $2^{2022} - 1$ nombres premiers tous supérieux ou égaux aux $\alpha_i(B)$, et pour tout i dans $\{1, \ldots, k\}$, on choisit β_i vérifiant pour tout B :

$$\beta_i \equiv -\alpha_i(B) \mod p(B)$$

L'ensemble $\{Kb_1, \ldots, Kb_{2022}\}$ vérifie alors la propriété voulue.

7 Arithmétique : Pot-pourri (Antoine S et Hadriel)

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les entiers $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$2^m - 3^n = 1.$$

Exercice 2
Trouver tous les $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$1! + 2! + \cdots + n! = m^2.$$

Exercice 3 (Théorème de la racine rationnelle)
Soit $P = a_n X^n + ... + a_1 X^1 + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers. Soit p, q des entiers premiers entre eux tels que p/q soit une racine rationnelle de P. Montrer que $p \mid a_0$ et $q \mid a_n$.

Exercice 4
Déduire de l'exercice précédent que si $n \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 1$ et $\sqrt[k]{n}$ est rationnel, alors $\sqrt[k]{n}$ est un entier.

Exercice 5
Trouver tous les $x, y, z \in \mathbb{N}$ et p premier tels que

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = p$$

Exercice 6
Trouver tous les nombres premiers p, q tels que

$$pq \mid 5^p + 5^q$$

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, kN soit une puissance parfaite.

Exercice 8 (ISL 2007 N2)
Soient $b, n > 1$ des entiers. On suppose que pour tout $k > 1$, il existe un entier a_k tel que $k \mid b - a_k^n$. Montrer qu'il existe un entier B tel que $B = b^n$.

Exercice 9 (LTE pour $p = 2$)
Soient a, b des entiers impairs et $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b) + v_2(a + b) + v_2(n) - 1$$

Exercice 10
Trouver tous les $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Regardons modulo 3 : nous remarquons que $2^m \equiv 1 \pmod 3$, d'où m est pair. Ainsi, nous pouvons écrire $m = 2m'$ avec $m' \in \mathbb{Z}$. L'équation si réécrit alors $2^{2m'} - 1 = 3^n$, ce qui se factorise comme $(2^{m'} - 1)(2^{m'} + 1) = 3^n$, ce qui implique que $2^{m'} - 1$ et $2^{m'} + 1$ sont tous deux des puissances de 3. Or, ces deux nombres diffèrent de 2, et les seules puissances de 3 ayant cet écart sont 1 et 3. Ainsi, $2^{m'} - 1 = 1$ d'où $m' = 1$ et donc $m = 2$, ce qui implique à son tour que $n = 1$. L'unique solution de l'équation est donc $m = 2, n = 1$.

Solution de l'exercice 2
Si $n >= 4$, alors $1! + 2! + \cdots = n! \equiv 1! + 2! + 3! + 4! \equiv 1 + 2 + 1 + (-1) \equiv 3 \pmod 5$, or 3 n'est pas un carré modulo 5, ce qui est absurde. On doit donc avoir $n \leqslant 3$. $n = 1$ et $n = 3$ sont solutions avec $m = 1$ et $m = 9$ respectivement, tandis que $n = 2$ ne l'est pas.

Solution de l'exercice 3
On a $a_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + \cdots + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^1 + a_0 = 0$. En multipliant les deux côtés de l'équation par q^n, on obtient donc $a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q^1 + \cdots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n$. En regardant modulo p, on trouve $a_0 q^n \equiv 0 \pmod p$, ce qui implique que $p \mid a_0$ car q^n est premier avec p; de même, $a_n p^n \equiv 0 \pmod q$ implique $q \mid a_n$.

Solution de l'exercice 4
Soit $\sqrt[k]{n} = \frac{p}{q}$ avec p, q des entiers premiers entre eux. On applique le théorème précédent sur le polynôme $P = X^k - n$ qui s'annule en une racine rationnelle $\frac{p}{q}$, ce qui nous donne que q divise le coefficient dominant de P à savoir 1. Ainsi, $q = \pm 1$, d'où $\sqrt[k]{n} = \pm p \in \mathbb{Z}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5
Commençons par remarquer que l'on veut qu'une expression polynomiale un peu compliquée soit égale à un nombre premier. On se doute que cela ne sera probablement pas le cas très souvent. Pour montrer qu'un nombre n'est pas premier, il suffit de montrer qu'il s'écrit comme le produit de deux entiers strictement plus grands que 1. On va donc chercher à factoriser $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.
Puisque ce polynôme est symétrique homogène de degré 3, s'il a une factorisation alors la factorisation aura un terme symétrique homogène de degré 1 et un terme symétrique homogène de degré 2. Les seuls polynômes homogènes symétriques de degré 1 sont les $a(x+y+z)$ avec a réel, et les seuls polynômes homogènes symétriques de degré 2 sont les combinaisons linéaires de $(x + y + z)^2$ et $xy + yz + zx$. On aurait donc

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(a(x + y + z)^2 + b(xy + yz + zx))$$

Si on développe, on trouve qu'on doit avoir $a = 1$ et $b = -3$. On vérifie en développant que cette factorisation fonctionne. On a

$$(x + y + z)^2 - 3(xy + yz + zx) = \frac{1}{2}((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2)$$

On doit donc trouver tous les $x, y, z \in \mathbb{N}$ et p premier tels que

$$(x + y + z)((x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2) = 2p$$

. Si $x+y+z>2$, alors $x+y+z$ doit valoir p ou $2p$. Or si $x+y+z$ vaut $2p$, on doit avoir $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=1$. Ce n'est pas possible en regardant modulo 2. On a donc $x+y+z=p$ et $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=2$. Si on suppose sans perte de généralité $x\leqslant y\leqslant z$, on a soit $(x,y,z)=(x,x,x+1)$ soit $(x,y,z)=(x,x+1,x+1)$ donc $3x+1=p$ ou $3x+2=p$. Si on note $p=3q+r$ la division euclidienne de p par 3, on vérifie que $(q,q,q+1,p)$ est solution si $r=1$ et que $(q,q+1,q+1,p)$ est solution si $r=2$. Enfin si $x+y+z\leqslant 2$ on trouve que la seule solution est $(0,1,1,2)$. On a donc trouvé toutes les solutions telles que $x\leqslant y\leqslant z$, et il suffit de permuter x,y,z pour trouver toutes les solutions.

Solution de l'exercice 6
Supposons tout d'abord que $p,q\neq 5$.
On a $p\mid 5^p+5^q$, d'où $p\mid 5+5^q$ d'après le petit théorème de Fermat, soit encore $p\mid 1+5^{q-1}$. Ainsi, $5^{q-1}\equiv -1 \pmod 5$, et $5^{2(q-1)}\equiv(-1)^2\equiv 1 \pmod p$. L'ordre de 5 modulo p $\omega_p(5)$ divise donc $2(q-1)$, mais pas $q-1$ quand $p\neq 2$, car $-1\not\equiv 1 \pmod p$ dans ce cas. Cela implique que $v_2(\omega_p(5))=v_2(2(q-1))=1+v_2(q-1)$. Or $\omega_p(5)\mid p-1$, donc $v_2(\omega_p(5))\leqslant v_2(p-1))$. En appliquant le même raisonnement avec q au lieu de p, on obtient $v_2(\omega_q(5))=1+v_2(p-1))$ et $v_2(\omega_q(5)\leqslant\omega_q(q-1)$. En chaînant ces inégalités, on obtient

$$v_2(\omega_p(5))=1+v_2(q-1)>v_2(q-1)\geqslant v_2(\omega_p(5))$$

, une contradiction.

Reste donc à traiter les cas $p=2$ et $p=5$ (les cas $q=5$ et $q=2$ se traitant de façon identique).

— Si $p=5$, il faut et il suffit que $q\mid 5^5+5^q$. Le cas $q=5$ fonctionne. Si $q\neq 5$, alors cela équivaut à ce que $q\mid 5^5+5$, soit $q\mid 5^4+1=625+1=626$. Or, $626=2\times 313$, et 313 et premier ; $q=2$ et $q=313$ sont donc également des solutions.

— Si $p=2$, alors $p\mid 5^p+5^q$ car 5^p et 5^q sont tous deux impairs. Il faut et il suffit donc que $q\mid 5^2+5^q$; le cas $q=5$ ayant été traité ci-dessus, cela revient à $q\mid 5^2+5$, soit $q\mid 5+1=6$. $q=2$ et $q=3$ sont donc également solution.

En conclusion, les solutions de l'équation sont $\{p,q\}=\{5,313\}$, $\{p,q\}=\{5,2\}$, $\{p,q\}=\{2,3\}$, $p=q=2$.

Solution de l'exercice 7
Soient $2=p_1<p_2<\cdots<p_l$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Il s'agit de choisir les exposants α_i, $1\leqslant i\leqslant l$, pour que $N=\prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i}$ respecte la condition demandée. Pour ce faire, posons $k=\prod_{i=1}^l p_i^{\delta_{k,i}}$ la décomposition de k en produit de facteurs premiers pour tout k entre 1 et n. On a alors $kN=\prod_{i=1}^l p_i^{\alpha_i+\delta_{k,i}}$. Que ce soit une puissance parfaite équivaut à ce que $\operatorname{pgcd}(\{\alpha_i+\delta_{k,i}|1\leqslant i\leqslant n\})$ soit différent de 1. Soit p_i, pour $i>l$, le i-ème plus petit nombre premier. Nous allons choisir d décréter que $1\times N$ sera un carré parfait, $2\times N$ un cube parfait, $3\times N$ une puissance 5-ème parfaite, etc. Nous avons donc le système d'équations modulaires

$$\alpha_i\equiv -\delta_{k,i} \pmod{p_k}$$

où k prend toutes les valeurs entre 1 et n, et ce pour chaque valeur de i entre 1 et l. Le théorème des restes chinois nous livre un α_i respectant les n équations dans lesquelles il intervient modulo $\prod_{i=1}^n p_i$, et nous donne donc des valeurs pour nos exposants qui permettent à N d'avoir la propriété désirée.

Solution de l'exercice 8 (ISL 2007 N2)
Soit $p \in \mathbb{P}$ tel que $p \mid b$. On va montrer que $n \mid v_p(b)+1$: l'idée est de choisir $k = p^{v_p(b)+1}$. Il existe un entier a tel que

$$p^{v_p(b)+1} \mid b - a^n.$$

On a que $p^{v_p(b)} \mid a^n$, donc $v_p(a^n) \geqslant v_p(b)$. Mais si $v_p(a^n) > v_p(b)$, alors $b - a^n \equiv b \not\equiv 0 \pmod{p^{v_p(n)+1}}$, absurde. Donc $nv_p(a) = v_p(b)$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9 (LTE pour $p = 2$)
Soit $n = 2^\alpha n'$, avec $\alpha = v_2(n)$ et n' impair.

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (a^{n'})^{2^\alpha} - (b^{n'})^{2^\alpha} \\ &= (a^{n'} - b^{n'})(a^{n'} + b^{n'}) \cdots (a^{n'2^{\alpha-1}} + b^{n'2^{\alpha-1}}) \end{aligned}$$

d'où

$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a^{n'} - b^{n'}) + v_2(a^{n'} + b^{n'}) + \cdots + v_2(a^{n'2^{\alpha-1}} + b^{n'2^{\alpha-1}})$$

Or $v_2(a^{n'} - b^{n'}) = v_2(a-b) + v_2\left(\sum_{k=0}^{n'-1} a^k b^{n'-1-k}\right) = v_2(a-b)$ car $\sum_{k=0}^{n'-1} a^k b^{n-1-k}$ est la somme d'un nombre impair de termes impairs. De même, $v_2(a^{n'} + b^{n'}) = v_2(a+b) + v_2\left(\sum_{k=0}^{n'-1} a^k (-b)^{n'-1-k}\right) = v_2(a-b)$ car $\sum_{k=0}^{n'-1} a^k (-b)^{n'-1-k}$ est la somme d'un nombre impair de termes impairs.
Enfin, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_2(a^{2k} + b^{2k}) = 1$: en effet, $a^{2k} + b^{2k} \equiv 1 + 1 \equiv 2 \pmod 4$.

On a donc

$$\begin{aligned} v_2(a^n - b^n) &= v_2(a-b) + v_2(a+b) + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{\alpha - 1 \text{ fois}} \\ &= v_2(a-b) + v_2(a+b) + v_2(n) - 1 \end{aligned}$$

En particulier, si $a \equiv b \pmod 4$, alors $v_2(a^n - b^n) = v_2(a-b) + v_2(n)$.

Remarque 1.
On peut aisément calculer $v_2(a^n - b^n)$ lorsque a et b sont pairs grâce à ce résultat.

En effet, si $k = v_2(a) = v_2(b)$, alors en posant $a' = a/2^k$ et $b' = b/2^k$, on obtient $v_2(a^n - b^n) = v_2(2^{kn}(a'^n - b'^n)) = kn + v_2(a'-b') + v_2(a'+b') + v_2(n) - 1$ en appliquant le résultat que nous venons de démontrer.

Si $v_2(a) \neq v_2(b)$, alors en posant $k = \min(v_2(a), v_2(b))$, et en définissant a' et b' comme précédemment, alors $v_2(a^n - b^n) = v_2(2^{kn}(a'^n - b^n)) = kn$.

Solution de l'exercice 10
On commence par réarranger les termes de l'équation pour faire apparaitre des produits. L'équation de l'énoncé est équivalente à

$$2^x(1 + 2^{x+1}) = (y-1)(y+1)$$

On a $(y-1)(y+1)$ qui apparait à droite. Le pgcd des deux facteurs dépend de la parité de y. Lorsque $x \neq 0$, on doit avoir un y impair, donc $\gcd(y-1, y+1) = 2$. En posant $a = \frac{y-1}{2}$, on obtient en divisant par 4 :

$$2^{x-2}(1 + 2^{x+1}) = a(a+1)$$

on se retrouve avec deux facteurs premiers entre eux à droite. En se limitant aux $x \geqslant 2$, 2^{x-2} doit diviser a ou $a+1$.
Dans le premier cas, si $a = b2^{x-2}$, on a $b2^{x-2}+b^2 2^{2x-4} = 2^{x-2}(2^{x+1}+1)$ donc $b+b^2 2^{x-2} = 2^{x+1}+1$. Pour des raisons de taille, on doit avoir $b < 3$ et $b > 1$. Donc $b = 2$, ce qui pose un problème de parité. Ce cas ne donne donc pas de solutions.
Dans le second cas, si $a + 1 = b2^{x-2}$, on a $b^2 2^{2x-4} - b2^{x-2} = 2^{x-2}(2^{x+1} + 1)$ donc $b^2 2^{x-2} - b = 2^{x+1} + 1$. On a $b < 4$ et $b > 1$ pour des raisons de taille. On a aussi $b \neq 2$ en regardant la parité des deux cotés de l'équation. Ainsi on doit avoir $b = 3$. cela donne $9 \cdot 2^{x-2} = 2^{x+1} + 4$ donc $2^{x-2} = 4$. Ainsi la seule solution potentielle dans ce cas est $(x, y) = (4, 23)$. On peut vérifier que c'est bien une solution.
Il nous reste les cas $x = 0$ et $x = 1$. Dans le premier cas, on doit avoir $y = 2$, et on obtient la solution $(0, 2)$. Le deuxième cas ne donne pas de solutions.
Finalement, les solutions sont $(0, 2)$ et $(4, 23)$.

8 Algèbre : Équations fonctionnelles 2 (Melvil)

Inventaire des techniques à connaître en équations fonctionnelles

A l'abord d'une équation fonctionnelle il est normal d'être perdu devant toutes les possibilités envisageables. Afin de structurer vos recherches, voici une liste des méthodes disponibles. On peut distinguer 3 catégories du plus fréquent au plus rare

1. Ces outils doivent devenir des automatismes pour un élève qui a participé au groupe C.
   - **Substitutions particulières :** Poser $x = 0$ ou 1, $y = 0$ ou 1 voire les deux en même temps. C'est souvent très utile pour trouver des relations structurelles sur f, exemple $f(x^2) = f(x)^2$ ou bien trouver des valeurs particulières $f(0), f(1)$, etc ... Ces substitutions sont à envisager par défaut même si elles ne rentrent pas dans les motivations que l'on va voir ci-dessous. Il est très fréquent que la résolution d'une EF (même très difficile) commence par une substitution aussi naïve.
   - **Substitutions d'une variable en fonction de l'autre :** Exemple $x = \pm y$ ou $x = \pm y^2$. Cela vous permet de transformer une équation souvent à 2 variables en une équation à une seule variable ce qui donne comme dans l'exemple précédent une idée de la structure de la fonction.
   - **Annuler les termes :** il s'agit de rendre constant un terme contenu dans une parenthèse, par exemple dans l'EF $f(x - f(y)) + 4xf(y) = f(x + f(y))$, on a bien sûr très envie de poser $x = f(y)$. Une EF est d'autant plus difficile qu'il y a d'occurrences de $f(\text{""})$, en annuler quelques-unes est donc une bonne chose à faire.
   - **Egaliser les termes :** par exemple, si le membre de droite contient $f(x + y)$ et le membre de gauche de l'équation contient $f(f(x) - y)$, prendre x variable et poser $y = \frac{1}{2}(f(x) - x)$, de sorte que $x + y = f(x) - y$ et donc $f(f(x) - y) = f(x + y)$, ce qui permettra encore de simplifier l'équation. C'est vraiment la méthode la plus utile en EF.
   - **Injectivité :** En général l'injectivité pourra se montrer si l'une des variables x, y apparaît en dehors des $f()$, par exemple dans l'EF $f(x+f(y))-f(f(x)-f(y)) = 2y$. Ensuite pour utiliser l'injectivité, il faudra souvent se ramener à une équation du type $f(machin) = f(bidule)$.
2. Dans cette deuxième catégorie on retrouve des méthodes qui doivent être connues pour le niveau groupe C. Toutefois, celles-ci sont moins utiles et doivent être testées après celles de la catégorie 1.
   - **Surjectivité :** Comme l'injectivité, celle-ci se démontre le plus souvent lorsqu'une variable apparaît à l'extérieur des $f()$. Ainsi, si l'EF est du type $f(x+y-z)+f(y+z-x)+f(z+x-y) = f(x+y+z)$, il y a peu de chance que vous arriviez à démontrer l'injectivité/surjectivité avant de trouver une formule explicite pour f.
   - **Symétrie en x et y :** Si l'un des deux membres de l'EF est symétrique en x et y mais pas l'autre, alors on peut substituer $x \to y$ et $y \to x$, ce qui donne deux façons d'écrire le terme non symétrique. Exemple avec $f(f(x)f(y)) = f(x)y$, on obtient $f(x)y = f(y)x$.

— **Symétrie de signes :** Si l'un des deux termes présente une symétrie de signe mais pas l'autre, on peut en déduire une équation. C'est souvent à combiner avec f paire/impaire. Exemple d'utilisation avec $f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$.

— **Racines :** C'est un cas particulier de l'injectivité/surjectivité mais cette fois on s'intéresse à ce problème uniquement pour les antécédents de 0.

— **Points fixes :** On cherche les a tels que $f(a) = a$. Chercher les points fixes marche moins souvent qu'avec les racines mais cela peut notamment servir dans les EF à caractère multiplicatif. Le problème $\#5302$ de Mathraining est un bon exemple d'utilisation.

— **Trouver des solutions :** Contrairement à l'algèbre, il n'existe aucun résultat permettant d'utiliser une solution particulière pour simplifier l'équation fonctionnelle. En revanche, vous pouvez vous aider des solutions connues pour avoir des idées de substitutions/manipulations pertinentes. Par exemple, si les fonctions solutions sont $f(x) \longrightarrow \frac{c}{x}$, alors $xf(x)$ est intéressant à faire apparaître. Pour trouver des solutions, pensez aux fonctions usuelles, i.e. l'identité, la fonction inverse et les polynômes simples.

— **Jouer avec les compositions de f :** Supposons que dans un problème, une expression du type $f^{(n)}(x) = machin(x)$. ($f^{(n)}$ est la fonction f composée n fois). Alors on peut utiliser l'égalité $f(f^{(n)}(x)) = f^{(n)}(f(x))$ qui implique $f(machin(x)) = machin(f(x))$. C'est peu utile mais c'est à connaître.

— **Récurrence :** Si l'EF porte sur $\mathbb{N}$,$\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$, une démonstration par récurrence peut être judicieuse. Exemple avec $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{Q}$.

3. Catégorie des outils qu'il n'est pas nécessaire de connaître niveau groupe C.

— **Pseudo-injectivité :** Parfois on ne peut pas prouver l'injectivité de façon directe, pour autant on peut établir des relations sur deux éléments d'une même fibre (on appelle fibre de $a \in Im(f)$, tous les antécédents de a par f).
Ex avec $f(x + f(y)) = f(x + y) + f(y)$, ($A4$, 2007), si $f(a) = f(b)$, alors $f(x + a) = f(x + b)$ pour tout x, donc f est $(b - a)$-périodique, ce qui permet d'avancer dans le problème.

— **Inégalités :** Essayer de faire des inégalités pour prouver f croissante/décroissante, positive/négative etc... Typiquement en présence d'un x^2 en dehors des $f()$ ou bien si le problème fait directement intervenir des inégalités.

— **Continuité/dérivation :** Rarissime quand ce n'est pas directement une hypothèse de l'énoncé. A éviter...

— **Poser une fonction auxiliaire :** Lorsque le problème s'y prête, poser une fonction g construite à partir de f peut ramener à une équation fonctionnelle connue. Exemple $f(x + y) = f(x)f(y)$, donne $f \geq 0$, on peut donc poser $g : x \to \ln(f(x))$ (SPDG) ce qui nous ramène à une équation de Cauchy.

— **Structure de f dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:** Si f est bijective alors c'est une permutation sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On peut donc utiliser la théorie des groupes symétriques en s'intéressant par exemple à sa décomposition en cycles à supports disjoints, sa signature etc... Exemple avec $2025 \mid f(f(n)) - n$ pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence d'un entier n_0 tel que $2025 \mid f(n_0) - n_0$. C'est vrai car l'équation impose que f est une permutation de $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}$ et qu'elle ne peut avoir que des cycles de longueur 1 ou 2. Puisque 2025

est impair, il ne peut y avoir que des cycles de longueur 2 ce qui donne exactement le résultat attendu.

Multigraphes

Le problème des multigraphes est un problème d'inversion des quantificateurs. Il surgit lorsque l'on a établi que la fonction f pouvait prendre deux valeurs possibles en chaque point. Par exemple, si f satisfait l'équation

$$f(x)^2 = x^2 \tag{V.1}$$

pour tout x, alors on déduit que $f(x) = \pm x$, que l'on réécrit comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\quad f(x) = x \quad \text{ou } f(x) = -x \quad). \tag{A}$$

Le piège est d'en déduire

$$(f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}) \quad \text{ou} \quad (f(x) = -x \ \ \forall x \in \mathbb{R}). \tag{B}$$

On ne peut pas déduire (B) uniquement à partir de (A). Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ ou encore la fonction f qui vaut x si x est rationnel et $-x$ si x est irrationnel vérifient toutes les deux (A) mais ne vérifient pas (B). Bien souvent, les solutions de l'équation fonctionnelle que l'on cherche ne seront pas aussi compliquées et vérifieront bien (B), mais pour le montrer il faut encore travailler avec l'équation. Voyons comment gérer cette situation à l'aide d'un exemple.

Exemple 1. (Balkan MO 2007)
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x).$$

Solution : Soit f une solution éventuelle. On cherche à annuler les termes à l'intérieur de chacun des $f(\ldots)$. En posant $y = x^2$, on trouve

$$f(f(x) + x^2) = f(0) + 4x^2 f(x).$$

En posant $y = -f(x)$, on trouve cette fois-ci :

$$f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4f(x)^2.$$

En faisant la somme de ces équations, on trouve

$$0 = 4f(x)(x^2 - f(x)).$$

Ainsi, pour tout x, on a soit $f(x) = 0$ soit $f(x) = x^2$. Dans tous les cas, on a $f(0) = 0$. En remplaçant x par 0 dans l'équation, on récupère que $f(x) = f(-x)$. On désire à présent montrer que $f(x) = 0$ pour tout x ou que $f(x) = x^2$ pour tout x. Pour cela, supposons que f est une solution de l'équation qui n'est ni la fonction nulle, ni la fonction carrée. Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$. Comme f n'est pas la fonction carrée, il existe $b \neq 0$ tel que $f(b) = b^2$. On va alors travailler avec a et b pour obtenir une

contradiction. Notons qu'alors $f(-b) = f(b) = b^2$. En remplaçant x par a et y par b^2 dans l'équation, on trouve :

$$b^2 = f(f(a) + b) = f(a^2 - b) + 4bf(a) = f(a^2 - b).$$

On a alors $f(a^2 - b) = 0$ ou $f(a^2 - b) = (a^2 - b)^2$. Comme $b \neq 0$, on a

$$b^2 = (a^2 - b)^2.$$

Après simplification, on obtient $0 = a^2(a^2 - 2b)$. Comme $a \neq 0$, on a $0 = a^2 - 2b$. En reprenant le même raisonnement avec $x = a$ et $y = -b$, on déduit que $0 = a^2 + 2b$. On déduit que $b = 0$, ce qui est absurde. Ainsi, si $f(x) = 0$ pour un x non nul alors f est la fonction nulle, et si $f(x) = x^2$ pour un x non nul alors f est la fonction carrée. Les deux seules solutions sont donc bien la fonction nulle et la fonction carrée. Réciproquement ces deux fonctions sont bien solutions, puisque si f est la fonction nulle alors pour tous x, y,

$$f(f(x) + y) = 0 = 0 + 4y \times 0 = f(x^2 - y) + 4yf(x);$$

et si f est la fonction carrée, alors pour tous x, y,

$$f(f(x) + y) = (x^2 + y)^2 = x^4 + y^2 + 2x^2y = (x^4 + y^2 - 2x^2y) + 4yx^2 = f(x^2 - y) + 4yf(x).$$

Les deux solutions de l'équation sont donc la fonction nulle et la fonction carrée.

On pourra pratiquer la notion de multigraphe sur les exercices suivants.

Exercices

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(x)^2 + yf(xy) = x^2 + xyf(y)$$

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous entiers x, y,

$$f(3x - y)f(y) = 3f(x)$$

Exercice 4
(Pan African 2024) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) - yf(y) = f(x + y)(f(x) - y).$$

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f((x-y)^2) = x^2 - 2yf(x) + f(y)^2$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)^2 + f(y)) = y + xf(x).$$

Exercice 7
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2) + xf(y) = f(x)f(x + f(y))$$

pour tous réels x, y.

Exercice 8
(RMM SL 2019 A1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 + xy + f(y^2)) = xf(y) + f(x^2) + y^2$$

Exercice 9 (P5 USAJMO 2024)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y)$$

Exercice 10 (USAMO 2016 P4)
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = (f(x + y))^2.$$

Solutions

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(x)^2 + yf(xy) = x^2 + xyf(y)$$

Solution de l'exercice 1
On pose $y = 0$. On a alors $f(x)^2 = x^2$ donc $f(x) = \pm x$ pour tout x. Attention ! On ne peut pas conclure qu'on a $f(x) = x$ pour tout x ou $f(x) = -x$ pour tout x : on pourrait avoir certains réels tels que $f(x) = x$, et d'autres tels que $f(x) = -x$, ce serait ce qu'on appelle un multigraphe. Dans la plupart des problèmes d'olympiades, de telles fonctions ne sont pas solution, et il s'agit de montrer qu'elles ne le sont pas.

On pose donc $y = 1$ pour obtenir $f(x)^2 + f(x) = x^2 + xf(1)$ donc $f(x) = xf(1)$. Maintenant, comme $f(1) = \pm 1$ on sait que c'est le même signe pour tout x : ou bien $f(1) = 1$ et f est l'identité, ou bien $f(1) = -1$ et $f : x \mapsto -x$.

On vérifie que ces deux fonctions sont solutions.

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

Solution de l'exercice 2
Soit f une solution éventuelle. En posant $x = y = 0$ dans l'équation, on trouve $2f(0) = f(0)^2$, ce qui donne que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$. On distingue les deux cas. Si $f(0) = 2$: En posant $x = 0$, on trouve

$$2 + 2 = 2f(y) + 2y + 0.$$

Ainsi, $f(y) = 2 - y$. Réciproquement, cette fonction est bien solution, puisque

$$2 - x^2 + 2 - xy = (2 - x)(2 - y) + y(2 - x) + x(2 - x - y).$$

Si $f(0) = 0$: En posant $y = 0$ dans l'équation, on trouve $f(x^2) = xf(x)$. En exploitant cette équation pour x et pour $-x$, on trouve que $-xf(-x) = xf(x)$. Ainsi, si $x \neq 0$, $f(x) = -f(-x)$. Cette relation se prolonge en 0 puisque $f(0) = 0$. En remplaçant alors y par $-x$, on trouve

$$f(x^2) + f(-x^2) = f(x)f(-x) - xf(x) + xf(0).$$

Ainsi, $0 = -f(x)^2 - xf(x)$. On conclut que $f(x) = 0$ ou $f(x) = -x$ pour tout x. Soient a et b tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = -b$. Notons alors que $f(a^2) = af(a) = 0$ et $f(b^2) = bf(b) = -b^2$. En posant $x = a$ et $y = b$ on a

$$f(ab) = f(a^2) + f(ab) = f(a)f(b) + bf(a) + af(a + b) = af(a + b).$$

En posant $x = b$ et $y = a$ on a

$$-b^2 + f(ab) = f(b^2) + f(ab) = f(b)f(a) + af(b) + bf(a + b).$$

En réinjectant $f(ab) = af(a+b)$ dans cette égalité, on obtient

$$-b^2 + ab = (b-a)f(a+b).$$

Si $f(a+b) = 0$, alors $b = 0$ ou $a = b$. Les deux cas sont impossibles, donc $f(a+b) = -a-b$. Mais alors $-b^2+ab = -(b-a)(a+b) = -b^2+a^2$, ce qui implique que $a = 0$ ou que $a = b$, ce qui est impossible encore. En conclusion, les seules solutions possibles sont la fonction nulle et la fonction définie par $f(z) = -z$. Réciproquement, ces deux fonctions sont bien solutions de l'équation puisque, si $f \equiv 0$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) + f(xy) = 0 = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y),$$

et si $f(z) = -z$, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) + f(xy) = -x^2 - xy = (-x)(-y) + y(-x) + x(-x-y) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x+y).$$

Les solutions sont donc $f \equiv 0$ et $f(z) = -z$.

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous entiers x, y,

$$f(3x-y)f(y) = 3f(x)$$

Solution de l'exercice 3
On pose $x = y$: $f(2x)f(x) = 3f(x)$. Donc pour tout x, ou bien $f(x) = 0$ ou bien $f(2x) = 3$. S'il existe un entier a tel que $f(a) = 0$, on pose $y = a$ et $3f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$ donc f est la fonction nulle.

Sinon $f(2x) = 3$ pour tout x. On veut traiter les impairs : pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on pose $x = 2k+1$ et $y = 6k+2$. Donc $f(1)f(6k+2) = 3f(2k+1)$ or $f(6k+2) = 3$ donc $f(1) = f(2k+1)$ pour tout k.
Avec $x = 2, y = 5$ on a $f(1)f(5) = f(1)^2 = 3f(2) = 9$.

Donc $f(1) = 3$, ce qui donne la fonction constante égale à 3, ou bien $f(1) = -3$, donc $f : x \mapsto 3 \times (-1)^x$. On vérifie que c'est bien solution : si x, y sont de même parité, $3x-y$ est pair donc $f(3x-y) = 3$ et $f(x) = f(y)$ donc on a bien l'égalité.

Sinon $f(3x-y) = -3$ et $f(y) = -f(x)$ donc on a bien l'égalité.

Exercice 4 (Pan African 2024)
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) - yf(y) = f(x+y)(f(x) - y).$$

Solution de l'exercice 4
Soit f une solution éventuelle. En posant $x = 0$, on trouve $f(0) - yf(y) = f(y)(f(0)-1)$, qui donne après simplification

$$f(0)(f(y)-1) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, si f n'est pas la fonction constante égale à 1, $f(0) = 0$. Notons que la fonction constante égale à 1 est bien solution de l'équation puisque :

$$f(x^2) - yf(y) = 1 - y = f(x+y)(f(x) - y).$$

On suppose donc que $f(0) = 0$ dans la suite. On utilise ce résultat pour annuler chacun des termes de la forme $f(\ldots)$ dans l'équation. En posant $y = 0$, on a

$$f(x^2) = f(x)^2.$$

En posant $x = -y$ dans l'équation de départ, on trouve

$$f(y^2) - yf(y) = f(0)(f(-y) - y) = 0.$$

Ainsi, en combinant les deux équations, on obtient $f(y)^2 = f(y^2) = yf(y)$. On a alors $0 = f(y)(f(y) - y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On a donc pour tout y, soit $f(y) = 0$ soit $f(y) = y$. Montrons que $f(y) = 0$ pour tout y ou que $f(y) = y$ pour tout y. Notons que dans les deux cas, $f(0) = 0$. Supposons par l'absurde que f ne soit ni l'identité, ni la fonction constante, et qu'il existe $a, b \neq 0$ tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = b$. Notons qu'alors $f(a^2) = af(a) = 0$. En posant $y = b$ et $x = a$ dans l'équation, on a

$$-b^2 = f(a^2) - bf(b) = f(a + b)(f(a) - b) = -bf(a + b).$$

Or, $f(a + b) = 0$ ou $f(a + b) = a + b$. Comme b est non nul, $f(a + b) = a + b$. Mais alors $-b^2 = -ab - b^2$, ce qui donne $ab = 0$ qui est absurde. Ainsi, si $f(0) = 0$, la fonction f est soit la fonction nulle soit la fonction identité. Réciproquement, on vérifie que ces deux fonctions sont bien solutions puisque, si f est la fonction nulle,

$$f(x^2) - yf(y) = 0 = f(x + y)(f(x) - y);$$

et si f est la fonction identité,

$$f(x^2) - yf(y) = x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = f(x + y)(f(x) - y).$$

Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc $f \equiv 1, f \equiv 0$ et la fonction identité.

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f((x - y)^2) = x^2 - 2yf(x) + f(y)^2$$

Solution de l'exercice 5
Avec $x = y = 0$, on a : $f(0) = f(0)^2$ donc $f(0) \in \{0, 1\}$. On pose $y = x$: $f(0) = x^2 - 2xf(x) + f(x)^2$, d'où $f(0) = (x - f(x))^2$.

Premier cas : $f(0) = 0$. Alors on a directement $f(x) = x$.

Second cas : $f(0) = 1$, donc $(x - f(x))^2 = 1 \iff f(x) - x = \pm 1 \iff f(x) = x \pm 1$.

Avec $y = 0$ on a $f(x^2) = x^2 + 1$ et en combinant avec $x = 0$ on obtient $y^2 + 1 = f(y^2) = f(y)^2 - 2y$, donc $f(y)^2 = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2$. On a donc forcément $f(y) = y + 1$ pour tout y, sauf si $y = 0$ auquel cas on sait déjà $f(0) = 1$. La seule solution possible dans ce cas est donc $f : x \mapsto x + 1$.

On vérifie aisément que l'identité est solution. Pour la seconde, c'est moins évident donc il est bon d'écrire le calcul :

$$f((x - y)^2) = x^2 - 2xy + y^2 + 1 = x^2 - 2xy - 2y + y^2 + 2y + 1 = x^2 - 2yf(x) + f(y)^2.$$

Ce sont bien les deux solutions de l'équation fonctionnelle.

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)^2 + f(y)) = y + xf(x).$$

Solution de l'exercice 6
On pose $x = 0$. On a alors $f(f(0)^2 + f(y)) = y$. On en déduit que f est injective et surjective.

En posant x l'antécédent de 0 (qui existe par surjectivité), on a $f(f(y)) = y$. Donc, en remplaçant x par $f(z)$, $f(z^2 + f(y)) = zf(z) + y = f(f(z)^2 + f(y))$ donc par injectivité, $x^2 = f(x)^2$ donc $f(x) = \pm x$ pour tout x réel. Si on a $x, y \neq 0$ tels que $f(x) = +x$ et $f(y) = -y$, $f(x^2 - y) = x^2 + y$ donc $y = 0$ ou $x^2 = 0$, c'est impossible.

Les seules solutions possibles sont donc l'identité et $f : x \mapsto -x$, et on vérifie aisément que ce sont des solutions.

Exercice 7
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2) + xf(y) = f(x)f(x + f(y))$$

pour tous réels x, y.

Solution de l'exercice 7
En posant $x = 0$, on trouve que $f(0) = 0$ ou $f(f(y)) = 1$ pour tout y. cas 1 : $f(f(y)) = 1$ pour tout y. En particulier, $1 = f(f(f(1))) = f(1)$. Alors en remplaçant y par $f(y)$ et x par 1, on trouve que $f(1) + 1 = f(1)f(2)$, soit $f(2) = 2$. Mais alors $1 = f(f(2)) = f(2) = 2$ ce qui est absurde. cas 2 : $f(0) = 0$. En remplaçant y par 0, on trouve $f(x^2) = f(x)^2$. En remplaçant x par $-f(y)$, on trouve donc

$$f(f(y)^2) = f(y)^2 = f(y^2)$$

Notre objectif est désormais d'avoir l'injectivité de f. Pour cela, on remarque que si a est une racine de f, en posant $x = a$ on trouvait $af(y) = 0$. Donc si f n'est pas nulle (ce qui marcherait), la seule racine de f est 0. En posant $x = y \neq 0$, on obtient que $x + f(x)$ est un point fixe de f pour tout x. Soit maintenant u et v tels que $f(u) = f(v) = c$. Alors en remplaçant y par $u + c$ puis par $v + c$ et x par $-c$, on trouve

$$f(-c)^2 - c(u + c) = f(-c)f(u) = f(-c)f(v) = f(-c)^2 - c(v + c)$$

ce qui donne bien que $u = v$ et f est injective. De $f(f(y)^2) = f(y^2)$ on déduit que $f(y^2) = f(y)^2 = y^2$ pour tout y. Donc f est l'identité sur les réels positifs et pour tout y, $f(y) = -y$ ou $f(y) = y$. Soit b non nul tel que $f(b) = -b$. On prend $x = -b$ et y suffisamment grand pour que $y + b > 0$. On trouve

$$b^2 - by = -bf(b + y) = -b(b + y)$$

soit $b^2 = 0$, ce qui est la contradiction voulue. La seule fonction solution est l'identité.

Exercice 8
(RMM SL 2019 A1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 + xy + f(y^2)) = xf(y) + f(x^2) + y^2$$

Solution de l'exercice 8
En posant $y = 0$, on trouve $f(x^2 + f(0)) = xf(0) + f(x^2)$. En remplaçant x par $-x$ dans cette équation, on trouve $f(x^2 + f(0)) = -xf(0) + f(x^2)$, et en combinant on obtient donc $2xf(0) = 0$, soit $f(0) = 0$. En posant $x = 0$, on trouve $f(f(y^2)) = y^2 + f(0) = y^2$. En posant $y = -x$, on trouve cette fois-ci que $f(f(y^2)) = -yf(y) + y^2 + f(y^2)$. On en déduit que

$$f(y^2) = yf(y)$$

D'autre part, en posant $x = -f(y^2)/y$, on trouve

$$-\frac{f(y)f(y^2)}{y} + y^2 = 0$$

On déduit que si y est non nul, alors $y^3 = f(y)f(y^2) = yf(y)^2$, ou encore $f(y)^2 = y^2$. Puisque si $y = 0$, alors $f(0) = 0$, on a donc pour tout y réel que $f(y) = \pm y$. Dans la suite, on suppose qu'il existe a et b tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$. Notons qu'alors $f(a^2) = a^2$ et $f(b^2) = -b^2$, puisque $f(x^2) = xf(x)$. En remplaçant $x = a$ et $y = b$ dans l'équation, on trouve

$$\pm(a^2 + ab - b^2) = -ab + b^2 + a^2$$

Le cas où le signe du LHS est un $+$ donne que $b(a - b) = 0$. Si $b \neq 0$, alors $a = b$ ce qui donne $a = f(a) = f(b) = -b = -a$ donc $a = b = 0$. Dans tous les cas, a ou b est nul. Le cas où le signe du LHS est un $-$ donne que $a^2 = 0$ donc $a = 0$. On déduit que les seules solutions sont les fonctions $f \equiv x$ et $f \equiv -x$.

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous réels x, y,

$$f(x^2 - y) + 2yf(x) = f(f(x)) + f(y)$$

Solution de l'exercice 9
$x = y = 0$ donne $f(f(0)) = 0$
$y = 0$ donne $f(x^2) = f(f(x)) + f(0)$, donc $f \circ f$ est paire. Donc, on a

$$\begin{aligned} 2yf(x) &= f(x^2) - f(0) + f(y) - f(x^2 - y) \\ &= f((-x)^2) - f(0) + f(y) - f((-x)^2 - y) \\ &= 2yf(-x). \end{aligned}$$

donc quitte à prendre y non nul, on a $f(x) = f(-x)$ pour tout réel x : f est paire.
Comme $f(-y) = f(y)$, en prenant $x = 0$, on a $f(-y)+2yf(0) = f(f(0))+f(y) \implies 2yf(0) = 0$ pour tout y, d'où $f(0) = 0$.
Soient a, b deux réels tels que $f(a) = f(b)$: alors, pour tout réel y, $f(a^2 - y) = f(f(a)) + f(y) - 2yf(a) = f(f(b)) + f(y) - 2yf(b) = f(b^2 - y)$.

Ou bien on suppose qu'il existe de tels a, b avec $a^2 \neq b^2$ (spdg $a^2 < b^2$), alors f est $T = b^2 - a^2$-périodique.
On reprend alors l'équation initiale :

$$\begin{aligned} 2yf(x) &= f(x^2) + f(y) - f(x^2 - y) \\ &= f(x^2) + f((y+T)) - f((-x)^2 - (y+T)) \\ &= 2(y+T)f(x) \end{aligned}$$

D'où $2Tf(x) = 0$, c'est-à-dire $f = 0$ car $T > 0$.

Ou bien $f(a) = f(b) \implies a^2 = b^2$. Donc comme $f(f(x)) = f(x^2)$ pour tout x, on en déduit que $f(x) = \pm x^2$ en tout réel x.
$y = \frac{1}{2}x^2$ donne $x^2 f(x) = f(f(x)) = f(x^2)$, d'où $f(x^2)$ est du même signe que $f(x)$, ainsi, s'il existe x, y non nuls tels que $f(x) = +x^2$ et $f(y) = -y^2$. Alors

$$f(x^2 - y) = -2yx^2 + x^4 - y^2$$

Ou bien $2y^2 = 0$, absurde, ou bien $2(x^4 - 2yx^2) = 0 \implies x^2 = 2y$, ce qui est absurde car il y a une infinité de tels x, ou une infinité de tels y.

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = (f(x + y))^2.$$

Solution de l'exercice 10
La principale difficulté de ce problème se trouve dans la gestion du multigraphe qui est un peu particulier ici. Soit f une solution éventuelle. En remplaçant x et y par 0 dans l'équation, on a $2f(0)^2 = f(0)^2$, soit $f(0) = 0$. En remplaçant x par 0, on trouve

$$f(y)f(-y) = f(0)f(-3y) + f(y)f(-y) = f(y)^2.$$

Ainsi, pour tout y, on a $f(y)(f(-y) - f(y)) = 0$. On a donc pour tout y, $f(y) = 0$ ou $f(-y) = f(y)$. Notons qu'alors, si $f(y) = 0$, $f(-y) = 0$ ou $f(-y) = f(y) = 0$. Donc dans tous les cas, $f(y) = f(-y)$. Ainsi, $f(y) = f(-y)$ pour tout réel y. En posant $y = -x$, on trouve

$$(f(x) - x^2)f(4x) + (f(-x) - x^2)f(4x) = f(0)^2 = 0.$$

Ainsi on a $2f(4x)(f(x) - x^2) = 0$. Ceci amène

$$\big(f(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En posant $y = 3x$, on trouve $(f(x)+3x^2)f(-8x)+(f(3x)+3x^2)f(0) = f(4x)^2$, soit, en utilisant que $f(z) = f(-z)$ pour tout z,

$$(f(x) + 3x^2)f(8x) = f(4x)^2. \qquad (\star)$$

On déduit alors que si $f(8x) = 0$, alors $f(4x) = 0$. En utilisant cette remarque pour $x = z/4$, on trouve que pour tout réel z, $f(2z) = 0$ implique que $f(z) = 0$. En particulier, si $f(4x) = 0$ pour un certain x, alors $f(2x) = 0$ et alors $f(x) = 0$. On déduit la nouvelle dichotomie suivante :

$$\big(f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notons alors que dans ($\star$), $f(x)+3x^2$ est toujours non nul pour $x \neq 0$, de sorte que si $f(4x) \neq 0$, alors $f(8x) \neq 0$, autrement dit si $f(8x) = 0$, alors $f(4x) = 0$. En remettant à l'échelle, on déduit que si $f(z) = 0$, alors $f(2z) = 0$. On étudie maintenant la structure de l'ensemble $A := \{a \in \mathbb{R}, f(a) = 0\}$, qui est non vide puisqu'il contient 0.

Lemme 2. Si $a_1, a_2 \in A$, alors $-a_1, -a_2 \in A$ et $a_1 + a_2 \in A$.

Démonstration. Si $a_1 \in A$, alors $f(-a_1) = f(a_1) = 0$ donc $-a_1 \in A$. D'autre part, en choisissant x et y tels que

$$\begin{cases} x - 3y &= a_1 \\ y - 3x &= a_2 \end{cases},$$

(en prenant donc $-8x = a_1 + 3a_2$ et $-8y = 3a_1 + a_2$) on trouve $x + y = \dfrac{a_2 - a_1}{2}$. On a alors que $f(x + y)^2 = 0$, et donc que $f(2(x + y)) = 0$, c'est-à-dire que $f(a_2 - a_1) = 0$. C'est également vrai pour le couple $(-a_1, a_2)$, donc $f(a_1 + a_2) = 0$ et $a_1 + a_2 \in A$. □

Prenons à présent $b \neq 0$ tel que $f(b) = b^2$ et $a \in A$ tel que $a \neq 0$. Alors $a + b$ n'est pas dans A, sinon on aurait $b = (a+b) - a \in A$. De même, on a que $4b$ n'est pas dans A mais que $4a \in A$ et donc que $3a - b = 4a - (a + b)$ n'est pas un élément de A. De même, puisque $4b$ n'est pas dans A (cela impliquerait que $b \in A$) et que $3b - a = 3(a + b) - 4a$, $3b - a$ n'est pas dans A non plus. En remplaçant x par a et y par b, on trouve avec toutes ces observations que

$$(a+b)^4 = f(a+b)^2 = (f(a)+ab)f(a-3b)+(f(b)+ab)f(3a-b) = abf(a-3b)+(b^2+ab)(3a-b)^2,$$

qui donne après simplification $0 = a^2(9b^2 + a^2 - 6ab) = a^2(a - 3b)^2$. On trouve alors $a = 3b$, ce qui contredit que $3b - a$ n'est pas dans A. On a obtenu une contradiction, ce qui achève de prouver que

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f(z) = z^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, ces deux fonctions sont bien solutions puisque, si f est la fonction nulle alors on a bien pour tous x, y

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = 0 = (f(x + y))^2;$$

et si f est la fonction carrée, alors on a pour tous x, y

$$\begin{aligned} & (f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) \\ = \; & x(x + y)(3x - y)^2 + y(x + y)(3y - x)^2 \\ = \; & (x + y)[x(9x^2 + y^2 - 6xy) + y(9y^2 + x^2 - 6xy)] \\ = \; & (x + y)(x + y)^3 = (f(x + y))^2 \end{aligned}.$$

Les solutions de l'équation sont donc la fonction nulle et la fonction carrée.

2 Entraînement de mi-parcours

Exercices

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y)$$

Exercice 2
Trouver les triplets (a, b, c) d'entiers supérieurs ou égaux à 2 tels que :

$$\begin{aligned} a \mid & bc - 1 \\ b \mid & ac - 1 \\ c \mid & ab - 1 \end{aligned}$$

Exercice 3
Trouver les couples d'entiers strictement positifs (m, n) tels que

$$mn \mid (2^{2^n} + 1)(2^{2^m} + 1)$$

Exercice 4
Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tous réels x, y,

$$xP(x) + yP(y) \geqslant 2P(xy)$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Analyse :
Commençons par la substitution $x = y$ pour annuler le terme $x - y$:
on obtient $2f(f(x)) = 2x + f(0)$.
On en déduit l'expression de $f(f(x)) = x + \frac{f(0)}{2}$
En réinjectant cette expression dans l'équation de départ, on obtient la nouvelle équation :

$$x + y + f(0) = 2y + f(x - y)$$

donc avec $y = 0$, $f(x) = x + f(0)$. La fonction f est donc de la forme $x \mapsto x + c$ avec c une constante.

Synthèse :
Soit f de la forme $x \mapsto x + c$. L'équation devient $x + y + 4c = x + y + c$ donc $c = 0$ est la seule valeur possible et elle convient.
On en déduit que l'identité est la seule solution.

Solution de l'exercice 2
Par l'hypothèse de divisibilité, a est premier avec b et c, et divise $ab + bc + ca - 1$. Idem pour b et c. Ainsi comme ceux-ci sont premiers entre eux, abc divise $ab + bc + ca - 1$.

Par symétrie, supposons a le minimum de a, b, c. Ainsi $abc \geqslant 3bc > ab + bc + ca - 1 > 0$ ce qui est absurde. On a donc $a = 2$.

Ainsi $2bc$ divise $2(b + c) + bc - 1$. Par symétrie supposons $b \leqslant c$, on a alors $b + c \leqslant 2c \leqslant bc$. Ainsi $0 < 2(b + c) + bc - 1 \leqslant 2bc + bc - 1 < 4bc$, donc le quotient entre $2(b + c) + bc - 1$ et $2bc$ vaut forcément 1.

On a alors $2bc = 2(b + c) + bc - 1$, donc $bc - 2b - 2c + 1 = 0$. Ainsi $(b - 2)(c - 2) = bc - 2b - 2c + 4 = 3$. On a donc $(b - 2, c - 2) = (1, 3)$ à permutation près, donc $(a, b, c) = (2, 3, 5)$ à permutation près.

Réciproquement, dans ce cas, on a bien 2 divise $3 \times 5 - 1 = 14$, 3 divise $2 \times 5 - 1 = 9$ et 5 divise $2 \times 3 - 1 = 5$.

Solution de l'exercice 3
On peut supposer $m \geqslant n$ sans perte de généralité car la condition est symétriques (sans oublier de compter les deux sens pour les éventuelles solutions).

On considère ensuite p un diviseur premier de n, qui vérifie donc $p \mid (2^{2^m} + 1)(2^{2^n} + 1)$, c'est à dire $p \mid 2^{2^m} + 1$ ou $p \mid 2^{2^n} + 1$.
Dans le premier cas, $2^{2^m} \equiv -1 \pmod p$, donc $2^{2^{m+1}} \equiv 1 \pmod p$. Ainsi, l'ordre de 2 modulo p divise 2^{m+1} donc s'écrit sous la forme 2^k. Si $k \leqslant m$, $2^k \mid 2^m$ donc on aurait déjà $2^{2^m} \equiv 1 \pmod p$, ce qui n'est pas possible car on sait déjà que $2^{2^m} \equiv -1 \pmod p$ et $p \neq 2$. On en déduit que $k = m + 1$.
Un bon réflexe à avoir lorsque l'on considère des ordres modulo p est d'utiliser le petit théorème de Fermat pour obtenir des informations sur p ou sur les ordres. Ici, on sait que l'ordre de 2 modulo p divise $p - 1$, ie $2^{2^{m+1}} \mid p - 1$ et $2^{2^{m+1}} \leqslant p - 1$.
Dans le second cas, si $2^{2^n} \equiv -1 \pmod p$, on obtient de la même façon $2^{2^{n+1}} \leqslant p - 1$.

Dans tous les cas, comme $n \leqslant m$, on a $2^{2^{n+1}} \leqslant p - 1 \leqslant n - 1$.
On remarque alors qu'on a un problème de taille (qui se justifie par récurrence). n n'a donc

pas de diviseurs premiers.
On en déduit que $n = 1$
On cherche donc les couples $(1, m)$ tels que $m \mid 5(2^{2^m} + 1)$.
On a vu avec n qu'il était difficile pour un diviseur premier de n de diviser l'un des nombres à droite. On peut imaginer que c'est la même chose pour m. Essayons de suivre le même raisonnement :
Soit p un diviseur premier commun à m et $2^{2^m} + 1$. Par le même raisonnement, on a $2^{2^{m+1}} \mid p - 1$ ce qui n'est pas possible par le même argument de taille.
Donc m et $2^{2^m} + 1$ sont premiers entre eux, et la condition de divisibilité donne, par le lemme de Gauss, $m \mid 5$.
Les couples de solutions potentielles sont donc $(1, 1), (1, 5), (5, 1)$. On vérifie qu'elles conviennent.

Solution de l'exercice 4

Supposons P non constant. En évaluant en $(x, 0)$ l'inégalité, on obtient $xP(x) \geqslant 2P(0)$.
En regardant la limite en $+\infty$, on obtient que le coefficient dominant de P est forcément strictement positif (car P ne peut tendre vers $-\infty$).

En évaluant en (x, x), on obtient $xP(x) \geqslant P(x^2)$. Le polynôme $XP(X)$ est de degré $\deg(P) + 1$, $P(X^2)$ est de degré $2\deg(P)$. Si $2\deg(P) > \deg(P) + 1$, alors $P(X^2) - XP(X)$ est un polynôme de degré $2\deg(P)$ de coefficient dominant strictement positif, donc il est strictement positif pour x assez grand, contradiction.
En particulier $2\deg(P) \leqslant \deg(P) + 1$ donc P est un polynôme de degré au plus 1 et de coefficient dominant strictement positif.

Maintenant posons $P(X) = aX + b$ avec $a \geqslant 0$. En évaluant l'inégalité en (x, x) on obtient $ax^2 + bx \geqslant ax^2 + b$ donc $bx \geqslant b$. Pour $x = 2$, on obtient $b \geqslant 0$, pour $x = 0$ on obtient $b \leqslant 0$ donc $b = 0$. Ainsi $P(X) = aX$ avec $a \geqslant 0$.

Si $P(X) = aX$ avec $a \geqslant 0$, $xP(x) + yP(y) = a(x^2 + y^2) \geqslant 2axy = 2P(xy)$ par inégalité de la moyenne, donc les polynômes de la forme aX avec $a \geqslant 0$ conviennent.

3 Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie

1 Combinatoire : Double Comptage (Hugo)

Cours

Principe

Le double comptage est une technique très puissante en combinatoire consistant, comme son nom l'indique, à compter de deux façons différentes un même nombre. Ces deux méthodes peuvent alors donner des résultats qui semblent à première vue différents, mais qui sont donc égaux puisqu'ils dénombrent la même quantité.

Par exemple, pour dénombrer les sous ensembles de $[\![1, n]\!]$ de cardinal k, nous savons que le résultat est $\binom{n}{k}$. Or, choisir un tel sous-ensemble revient également à choisir les éléments qui n'en font pas partie et à sélectionner les autres. Ainsi, pour prendre les éléments exclus, on a $\binom{n}{n-k}$ choix. On en déduit donc la formule connue :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Le double comptage n'est pas un théorème avec un énoncé précis mais bien une méthode à adapter et à appliquer dans des contextes variés. L'enjeu de l'exercice est alors de trouver quoi compter et comment le compter.

Un exemple dans une grille

De nombreux problèmes de double comptage peuvent être modélisés par une grille. Il convient alors très souvent d'opérer un comptage selon les lignes d'une part, puis selon les colonnes d'autre part.

Imaginons par exemple la situation suivante : un groupe de N personnes est divisé en M clubs, chaque personne appartient à 3 clubs et chaque club contient 3 personnes. Nous pouvons représenter cela par une grille $N \times M$ où les lignes sont les personnes et les colonnes sont les clubs. On peut alors mettre une croix (ou un 1) à l'intersection de ligne i et de la colonne j dès que la personne i est membre du club j. Combien il y a-t-il alors de croix au total ?

En comptant selon les lignes (c'est-à-dire selon les personnes), on en trouve $3N$. Cependant, si l'on suit les colonnes (c'est-à-dire les clubs), nous comptons $3M$ croix. Ainsi $M = N$.

L'utilisation d'une grille n'était pas strictement nécessaire ici, nous aurions simplement pu dénombrer les couples (P, C) avec P une personne et C un club dont P est membre. L'intérêt de penser à une grille (ou, de façon équivalente, à un graphe biparti) est de se forcer à se demander qui sont les lignes et qui sont les colonnes et ainsi à penser plus facilement à échanger de point de vue. Les exercices peuvent parler de professeurs et d'élèves, de personnes et de clubs, de juges et de candidats : l'important est de trouver deux points de vue différents et de passer de l'un à l'autre.

Un exemple dans un graphe

Dans les exercices faisant intervenir des graphes, les deux points de vue naturels sont bien souvent l'aspect « sommets » et l'aspect « arêtes ». Pour illustrer ceci, démontrons le bien

connu lemme des poignées de mains :

Lemme 1 (des poignées de mains)**.**
Soit $G = (S, A)$ un graphe simple non orienté. Si $s \in S$ est un sommet, on note $d(s)$ son degré, alors :

$$\sum_{s \in V} d(s) = 2|A|$$

Démonstration. La quantité de gauche compte pour chaque sommet, le nombre d'arêtes auxquelles il est relié. Il s'agit là du point de vue « sommets ». Dénombrons maintenant cette même quantité avec l'aspect « arêtes ».

Un arrête $a \in A$ est comptée exactement deux fois : une fois pour chaque sommet qu'elle relie. Ainsi, la quantité considérée est bien égale à $2|A|$. □

Un exemple avec une disjonction de cas

Pour notre dernier exemple, comptons le nombre N de sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$. D'une part, ces sous-ensembles ont des cardinaux compris entre 0 et n, ainsi, nous savons que :

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

D'autre part, pour construire un sous-ensemble E, nous avons le choix de prendre $1 \in E$ ou bien $1 \notin E$, de même pour 2, puis pour 3, etc... Ainsi, il y a n choix successifs entre deux options, soit au total 2^n possibilités.

Ainsi, nous en déduisons la formule suivante, qui peut aussi se démontrer grâce au binôme de Newton.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Remarques et méthodes

Rappelons les points les plus importants et signalons-en un dernier :

— La difficulté et la force du double comptage consistent à trouver quoi compter. Il ne faut pas hésiter à dénombre des quantités farfelues si cela permet d'exploiter une hypothèse de l'énoncé.

— Il faut trouver deux points de vue duaux sur un même problème. Les paires courantes sont lignes/colonnes ; sommets/arrêtes ; ensemble/son complémentaire ; sous-ensembles/éléments. Ces noms purement mathématiques sont souvent camouflés avec des histoires d'élèves, de professeurs, d'amitiés ou de clubs : représenter la situation dans une grille peut rendre la dualité plus visible.

— Ne pas hésiter à faire des disjonctions de cas d'un côté du double comptage, on obtient un somme. De même, des choix successifs donnent un produit.

— Certains problèmes demandent de montrer une inégalité : il peut alors être intéressant d'encadrer une certaine quantité par double comptage. Parfois une des bornes sera une égalité, parfois non. Il faut alors faire preuve d'un peu de persévérance : le résultat obtenu naturellement par double comptage ne donne pas forcément l'inégalité de l'énoncé et il peut être nécessaire d'utiliser ses cours d'inégalités (IAG, Cauchy-Schwarz, convexité,...).

Exercices

Les exercices qui suivent sont classés par difficulté (estimée) croissante.

Exercice 1
Si l'amitié est toujours réciproque, montrer que le nombre de personnes ayant un nombre impair d'amis dans l'univers est pair.

Exercice 2
Existe-t-il un polyèdre ayant un nombre impair de faces avec toutes un nombre impair d'arêtes ?

Exercice 3
Dans une école, il y a n élèves et m professeurs. Déterminer une relation entre k, l, m, n dans chacun des cas :

1. Chaque élève a l professeurs et chaque professeur a k élèves
2. Chaque professeur a k élèves et deux élèves différents ont toujours l professeurs en commun

Exercice 4 (Formules comité-bureau et crosse de hockey)
Montrer de façon combinatoire les formules suivantes pour des entiers $0 \leqslant a \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{k}{a}\binom{n}{k} = \binom{n}{a}\binom{n-a}{k-a} \quad ; \quad \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Exercice 5
Compter de trois manières le nombre de partitions d'un ensemble fini en trois sous-ensembles ((A, B, C) et (B, A, C) sont considérées comme deux partions différentes, on autorise l'ensemble vide dans une partition).

Exercice 6
Combien de points fixes a en moyenne une permutation de $[\![1, n]\!]$?

Exercice 7
Soit E un ensemble de n points du plan tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que le nombre de triangles d'aire a dont les sommets appartiennent à E est d'au plus $\frac{2n(n-1)}{3}$.

Exercice 8
Compter de deux façon le nombre de triplets (x, y, z) d'éléments de $[\![1, n+1]\!]$ tels que $z > \max(x, y)$

Exercice 9 (IMC 2022)
Dans une compétition de mathématiques avec 200 participants, comportant 6 problèmes, on constate que chaque problème a été résolu par 120 personnes au moins. Montrer qu'il existe deux participants qui, à eux deux, ont résolu tous les problèmes.

Exercice 10 (Entraînement groupe C 2023, P4)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et A un ensemble de $n-$uplets à valeurs dans $\{0,1,2\}$. On suppose que pour tous $x, y, z \in A$ deux-à-deux distincts, il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tels que x_i, y_i, z_i soient deux-à-deux distincts. Montrer :

$$|A| \leqslant 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Exercice 11 (Test POFM février 2014 P6)
Soit $p, n > 1$. Dans un groupe de n personnes, deux personnes distinctes ont toujours au plus p connaissances en commun. On considère que si A connaît B alors B connaît A. Soit a le nombre de paires non ordonnées $\{A, B\}$ telles que A et B se connaissent. Montrer :

$$a \leqslant \sqrt{pn^3}$$

Exercice 12 (IMO 1998 P2)
Dans la phase de présélection d'une compétition, il y a $m \geqslant 2$ candidats et $n \geqslant 3$ juges avec n impair. Chaque juge évalue tous les candidats et décide pour chacun d'eux s'il doit être admis à la phase suivante ou bien recalé. On remarque que pour chaque paire de deux juges, ils sont d'accord sur au plus k candidats. Montrer :

$$\frac{k}{m} \geqslant \frac{n-1}{2n}$$

Exercice 13 (APMO 1989)
Soit G un graphe simple non orienté à n sommets et a arêtes qui comporte T triangles. Montrer que :

$$T \geqslant \frac{a(4a - n^2)}{3n}$$

Remarque : Si $T = 0$, on en déduit le théorème de Mantel, $a \leqslant \frac{n^2}{4}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
S'il y a m personnes ayant un nombre impair d'amis, en passant modulo 2 dans le lemme des poignées de mains, on a $m \equiv 0\ [2]$, c'est-à-dire que m est pair.

Solution de l'exercice 2
On fait la somme S du nombre d'arêtes de toutes les faces du polyèdre, par hypothèse S est impaire. Or toutes les arêtes ont été comptées deux fois. Ainsi, $S = 2A$ si le polyèdre comporte A arrêtes et S est pair, absurde.

Solution de l'exercice 3

1. On compte le nombre N de paires (P, E) où P est un professeur ayant l'élève E. D'une part, chacun des n élèves a l professeurs donc $N = nl$. D'autre part, chacun des m professeurs a k élèves donc $N = mk$. Ainsi :

   $$nl = mk$$

   De façon équivalente, nous aurions pu réaliser un tableau (ou encore un graphe biparti, ce qui est la même chose) où les lignes seraient les élèves, les colonnes seraient les professeurs et il y aurait une croix à l'intersection (P, E) si l'élève E étudie avec le professeur P. N représente alors le nombre de croix et nous l'avons compté selon les lignes puis selon les colonnes.

2. Afin d'exploiter la deuxième partie de l'énoncé, nous allons dénombrer les triplets (P, E, F) où E, F sont deux élèves différents ayant le professeur P en commun. Notons M le nombre de ces triplets.

   D'une part, nous pouvons de façon ordonnée choisir $n(n-1)$ paires (E, F) d'élèves différents. Chacune de ses paires a l professeurs en commun, ainsi $M = n(n-1)l$.

   D'autre part, pour chacun des m professeurs, on peut réaliser $k(k-1)$ paires ordonnées d'élèves ayant tous les deux ce professeurs. Ainsi, $M = mk(k-1)$.

   On en conclut donc :

   $$ln(n-1) = mk(k-1)$$

Solution de l'exercice 4

Pour la première formule, nous allons compter le nombre de façon de former un comité de k personnes dans un groupe de n ainsi qu'un bureau de a membres du comité. D'une part, on peut choisir le comité, soit $\binom{n}{k}$ choix, puis le bureau dans le comité, soit $\binom{k}{a}$ choix. On obtient donc $\binom{k}{a}\binom{n}{k}$.

D'autre part, nous pouvons choisir en premier le bureau parmi les n personnes, soit $\binom{n}{a}$ choix ; ensuite, il faut compléter le comité avec $k-a$ personnes parmi les $n-a$ restantes. On obtient $\binom{n}{a}\binom{n-a}{k-a}$.

Pour la seconde formule, nous allons évidemment, vu le membre de droite, compter les sous ensembles de cardinal $k+1$ de $[\![1, n+1]\!]$, il y en a $\binom{n+1}{k+1}$. Faisons une disjonction de cas selon le maximum m de cet ensemble. On a déjà $m \geqslant k+1$ et une fois que l'on fixe m, il reste k éléments à choisir dans $[\![1, m-1]\!]$ soit $\binom{m-1}{k}$ choix. Ainsi :

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k+1}^{n+1} \binom{m-1}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k}$$

Solution de l'exercice 5

Disons que cet ensemble est $[\![1, n]\!]$, notons N le nombre de $3-$partitions et trouvons trois expressions égales à N.

1. On peut commencer par faire une disjonction de cas selon le cardinal de A, à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et celui de B, à valeurs dans $[\![0, n - |A|]\!]$. Si $|A| = k$, on a $\binom{n}{k}$ choix pour A, ensuite si $|B| = l$, on a $\binom{n-k}{l}$ choix (car il reste $n - k$ éléments) pour B et C est alors uniquement déterminé. Ainsi :

$$N = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l}$$

2. On peut aussi remarquer que, une fois A choisi, il nous reste juste à partitionner $[\![1, n]\!] \setminus A = B \sqcup C$, or on sait qu'il y a $2^{n-|A|}$ façon de faire cela. Ainsi, avec la même disjonction que précédemment :

$$N = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k}$$

3. Enfin, nous pouvons adopter le point de vue « éléments ». Étant donné un $x \in [\![1, n]\!]$, nous avons 3 choix pour l'ensemble où placer x : cela peut être A, B ou C. Ainsi :

$$N = 3^n$$

Nous avons donc montré de façon combinatoire les identités suivantes, qui découlent aussi du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{l} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = 3^n$$

Solution de l'exercice 6

Nous savons qu'il y a $n!$ permutations de $[\![1, n]\!]$, soit m la moyenne de leur nombre de points fixes. Ainsi $mn!$ est égal au nombre total de points fixes de toutes les permutations de $[\![1, n]\!]$ par définition de la moyenne.

Comptons cette quantité différemment, passons du point de vue « permutations » au point de vue « éléments. » Soit $x \in [\![1, n]\!]$, combien il y a-t-il de permutations ayant x pour point fixe ? Il y en a $(n - 1)!$ car cela revient à choisir une permutation de $[\![1, n]\!] \setminus \{x\}$. Ainsi, le nombre total de points fixes est $(n - 1)! \times n = n!$.

On en conclut que $m = 1$.

Solution de l'exercice 7

Soit T ce nombre de triangles. Choisissons un segment dont les extrémités sont dans E, il y a $\binom{n}{2}$ façon de faire cela. Ce segment étant fixé, combien il y a-t-il de triangles d'aire a ayant ce segment pour côté ?

Si sa longueur est l, le troisième sommet doit se situer à distance $\frac{2a}{l}$ de la droite portant ce segment. Il n'y a donc que deux droites qui peuvent porter ce sommet (les parallèles situées à distance $\frac{2a}{l}$ de part et d'autre), et chacune d'elle ne comporte que deux points de E au plus par hypothèse. Il y a donc au plus 4 triangles d'aire a ayant le segment choisi comme côté.

Nous avons alors compté chaque triangle d'aire a trois fois dans le raisonnement précédent (une fois par côté), ainsi, nous avons montré :

$$3T \leqslant 4\binom{n}{2} \quad \textit{i. e.} \quad T \leqslant \frac{2n(n-1)}{3}$$

Pour être parfaitement rigoureux, nous avons compté le nombres de paires (t, c) où t est un triangle d'aire a dont les sommets sont dans E et ayant pour côté c.

Solution de l'exercice 8
Notons N ce nombre.

— Nous pouvons d'une part fixer z, il nous faut alors choisir x, y dans $[\![1, z-1]\!]$, soit $(z-1)^2$ choix. Ainsi :

$$N = \sum_{z=1}^{n+1}(z-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

— Nous pouvons aussi commencer par choisir l'ensemble $\{x, y, z\}$ et l'ordonner ensuite :

  — S'il n'y a qu'une seule valeur, alors on ne peut pas avoir $z > \max(x, y)$.
  — S'il y a deux valeurs distinctes, alors la plus grande doit être affectée à z et on doit avoir $x = y$ égaux à la plus petite. On obtient donc $\binom{n+1}{2}$ choix
  — S'il y a trois valeurs distinctes, z doit être égal au maximum et on peut avoir $x < y$ ou $x > y$, soit 2 choix. On trouve donc $2\binom{n+1}{3}$ triplets.

  Ainsi, on trouve :

$$N = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}$$

À quelques manipulations algébriques près, nous venons donc de démontrer la formule bien connue :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Solution de l'exercice 9
Dans un problème de dénombrement, il est plus facile de manipuler des « pour tout » suivis par un « il existe » que l'inverse car cela nous permet de construire beaucoup d'objets et de les compter. Nous allons donc ici procéder par l'absurde en supposant que pour toute paire de deux candidats, il existe un problème qu'aucun d'eux n'a résolu.

Dénombrons donc le nombre N de triplets (C_1, C_2, P) tels que ni le candidat C_1, ni le candidat C_2 n'ont résolu le problème P. Notre hypothèse absurde nous indique donc :

$$N \geqslant 200 \times 199$$

Nous avons utilisé le point de vue « candidats », passons au point de vue « problème ». Pour chacun des 6 problèmes, moins de 80 candidats ne l'ont pas résolu, on peut donc former au plus 80×79 triplets avec ce problème. Ainsi :

$$N \leqslant 6 \times 80 \times 79$$

En combinant ces deux inégalités, on a :

$$\underbrace{200}_{40\times5}\times199 \leqslant 6\times\underbrace{80}_{40\times2}\times79 \quad \text{donc} \quad \underbrace{5\times199}_{995} \leqslant 12\times79 < 12\times80 = 960$$

On aboutit donc à la contradiction recherchée.

Solution de l'exercice 10
On reproduit la solution donnée dans le polycopié du stage 2023 en correction de l'entraînement.

Commençons par remarquer la chose suivante : si x, y, z sont trois n-uplets distincts dont chaque coordonnée vaut 0 ou 1, alors x, y, z ne peuvent pas tous appartenir à A. Mais il en est aussi de même si par exemple, la première coordonnée de chaque triplet vaut 0 ou 1, et toutes les autres valent 1 ou 2. Pour essayer de généraliser ce raisonnement, on pose, pour tout n-uplet t à coordonnées dans $\{0,1,2\}$, l'ensemble B_t des n-uplets dont aucune des coordonnée ne coincide avec celle de t, c'est-à-dire l'ensemble des n-uplets y tels que pour tout indice i, $y_i \neq t_i$. Alors dans chaque B_t, il ne peut y avoir que 2 éléments de A au maximum. En effet, si x, y, z sont trois triplets distincts de B_t, pour tout indice i, $\{x_i, y_i, z_i\}$ ne peut pas contenir la valeur t_i, et donc cet ensemble ne peut pas être égal à $\{0,1,2\}$.

Maintenant, on procède à un double comptage. Comptons le nombre N de couples (t, x) avec t un n-uplet quelconque avec des coordonnées dans $\{0,1,2\}$, et x un élément de A qui est aussi un élément de B_t (c'est-à-dire que t et x n'ont aucune coordonnée en commun). D'une part, si on fixe d'abord x, le nombre de t possibles est 2^n, car chaque coordonnée pour t ne peut prendre que deux valeurs. Comme il y a $|A|$ valeurs de x, on en déduit $N = 2^n|A|$.

Mais d'un autre côté, si l'on fixe t, on a vu précédemment qu'il ne pouvait y avoir que deux valeurs de x au maximum qui appartiennent bien à A et à B_t. Comme il y a 3^n valeurs distinctes de t, on en déduit que $N \leq 2 \cdot 3^n$. Alors on a

$$2^n|A| \leq N \leq 2 \cdot 3^n$$

donc

$$|A| \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Solution n°2 de l'exercice 10
On présente une autre résolution qui part de l'inégalité à démontrer pour trouver la quantité à dénombrer. On veut montrer :

$$2^n|A| \leqslant 2 \times 3^n$$

Interprétons chacun de ces termes : 3^n est le nombre de $n-$uplets à valeurs dans $\{0,1,2\}$ (soit E leur ensemble), et 2^n le nombres de sous ensembles de $[\![1,n]\!]$. Ainsi, on voudrait associer à $F \subset [\![1,n]\!]$ et $x \in A$ un élément de E.

Pour ce faire, nous allons modifier les coordonnées de x qui ont leur indice dans F et laisser les autres identiques. Plus précisément, posons $f(0) = 1, f(1) = 2, f(2) = 0$ et :

$$g(x,F)_i = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } i \in F \\ x_i & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi, $g(x, F) \in E$. Il nous reste alors à montrer qu'un élément de E est atteint au plus 2 fois par la fonction g. Supposons par l'absurde disposer de trois couples deux-à-deux distincts $(x, F), (y, G), (z, H)$ tels que $g(x, F) = g(y, G) = g(z, H)$.

D'une part, si $x = y$, alors en identifiant les coordonnées qui ont été modifiées, on a nécessairement $F = G$, absurde. Ainsi $x \neq y$ et de même $y \neq z$ et $x \neq z$.

Nous pouvons alors utiliser l'hypothèse de l'énoncé : on dispose de $i \in [\![1, n]\!]$ tels que x_i, y_i, z_i soient deux-à-deux distincts. Alors, parmi F, G, H :

— Soit i appartient à au moins deux d'entre eux, disons F et G et donc $f(x_i) = f(y_i)$ et $x_i = y_i$, absurde

— Soit i n'appartient pas à au moins deux d'entre eux, disons F et G et donc $x_i = y_i$, absurde.

On aboutit donc bien à une contradiction. Ainsi, puisque chaque élément de E a au plus 2 antécédents :

$$2^n|A| \leqslant 2|E| \quad \textit{i. e.} \quad |A| \leqslant 2\left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Solution de l'exercice 11

Nous modélisons comme d'habitude le problème par un graphe G où les sommets (d'ensemble S) sont les personnes qui sont reliées entre elles si elles se connaissent. Pour $s \in S$, on notera $d(s)$ son degré. a est alors le nombre d'arêtes du graphe.

Afin d'exploiter l'hypothèse de l'énoncé, nous allons compter le nombre N de triplets (A, B, C) où A et B ont pour connaissance commune C. Dans le graphe, cela revient à compter le nombre de « V » comme dans la figure 1 :

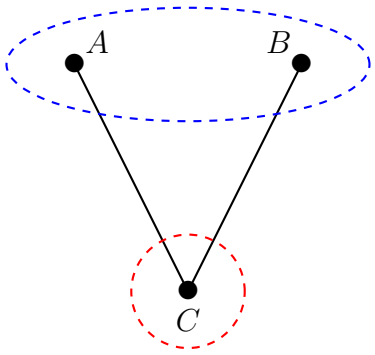


FIGURE 1 – Schéma pour l'exercice 11

Comptons d'abord ces « V » par leurs extrémités, la partie entourée en bleu dans la figure 1. Par l'hypothèse de l'énoncé, on a :

$$N \leqslant n(n-1)p$$

Prenons maintenant le point de vue de la pointe, c'est-à-dire la partie entourée en rouge dans la figure 1. Pour un sommet s, on peut former $d(s)(d(s)-1)$ « V » dont la pointe est s. Ainsi :

$$N = \sum_{s \in S} d(s)^2 - \sum_{s \in S} d(s)$$

Or, par le lemme des poignées de main, $\sum_{s\in S} d(s) = 2a$ et par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$n\sum_{s\in S} d(s)^2 \geqslant (2a)^2$$

Ainsi :

$$\frac{4a^2}{n} - 2a \leqslant N \leqslant pn(n-1) \leqslant pn^2 \quad \text{donc} \quad 4a^2 - 2an \leqslant pn^3$$

Supposons par l'absurde que $a > \sqrt{pn^3}$, alors $pn^3 \geqslant a^2 + 3a^2 - 2an > pn^3 + 3a^2 - 2an$ donc $3a - 2n < 0$ et $a < \frac{2}{3}n$ donc $\frac{2}{3} > \sqrt{pn}$, ce qui fournit la contradiction recherchée.

Solution de l'exercice 12

L'hypothèse de l'énoncé nous invite à dénombrer les triplets (J_1, J_2, C) où $J_1 \neq J_2$ sont deux juges qui sont d'accord sur le candidat C. Notons N le nombre de ces triplets, par hypothèse :

$$N \leqslant kn(n-1) \quad (*)$$

Nous avons ici adopté le point de vue « juges », passons donc au point de vue « candidats. » Soit un candidat C et supposons que k juges le déclarent admis, ainsi $n-k$ juges veulent le recaler. Nous pouvons donc former $k(k-1)$ paires d'accord sur l'admission et $(n-k)(n-k-1)$ paires d'accord sur la décision inverse.

Nous avons majoré N, il nous faut donc maintenant le minorer. Intuitivement, le minimum devrait être atteint pour une situation « symétrique », c'est à dire, si $n = 2l+1$, pour $k = l$ donc $n - k = l + 1$.

On conjecture donc :

$$f(k) := k(k-1) + (n-k)(n-k-1) \geqslant l(l-1) + (l+1)l = 2l^2 = \frac{(n-1)^2}{2}$$

De façon un peu brutale, développons : $f(k) = 2k^2 - 2nk + n^2 - n$, le minimum est donc atteint en $\frac{2n}{2\times 2} = l + \frac{1}{2}$ et la parabole est symétrique autour de cette valeur. Or, k doit être entier, donc le minimum est atteint en $k = l$ et $k = l+1$, ce qui démontre l'inégalité.

Ainsi, en sommant sur tous les candidats, on a :

$$N \geqslant m\frac{(n-1)^2}{2} \quad (**)$$

En combinant $(*)$ et $(**)$ nous obtenons :

$$kn(n-1) \geqslant m\frac{(n-1)^2}{2} \quad \textit{i. e.} \quad \frac{k}{m} \geqslant \frac{n-1}{2n}$$

Solution de l'exercice 13

Soit S l'ensemble des sommets de G. Pour un $s \in S$, nous noterons $V(s)$ son voisinage, c'est-à-dire l'ensemble de ses voisins, ainsi le degré est $d(s) = |V(s)|$.

Tentons de construire un triangle. Il nous faut pour cela un premier sommet x, puis un second $y \in V(x)$. Il reste à choisir le troisième sommet $z \in V(x) \cap V(y)$. Avec ce processus, nous construisons des triangles ordonnés, c'est-à-dire que nous comptons 6 fois chaque triangle (car il y a $6 = 3!$ façons d'ordonner 3 sommets). Ainsi, nous avons :

$$6T = \sum_{x\in S}\sum_{y\in V(x)} |V(x)\cap V(y)| = \sum_{x\in S}\sum_{y\in V(x)} d(x)+d(y)-|V(x)\cup V(y)|$$

Or, pour tous $x, y \in S$, on a $|V(x)\cup V(y)| \leqslant n$, donc :

$$6T \geqslant \sum_{x\in S}\sum_{y\in V(x)} d(x)+d(y)-n$$

Or, nous avons d'une part

$$\sum_{x\in S}\sum_{y\in V(x)} d(x)-n = \sum_{x\in S} d(x)^2 - nd(x)$$

D'autre part, dans la somme $\sum_{x\in S}\sum_{y\in V(x)} d(y)$, le terme $d(y)$ apparaît autant de fois que y a de voisins, donc cette somme est égale à $\sum_{s\in S} d(s)^2$.

Ainsi :

$$6T \geqslant 2\sum_{s\in S} d(s)^2 - n\sum_{s\in S} d(s)$$

Nous pouvons appliquer le lemme des poignées de main pour obtenir d'une part $\sum_{s\in S} d(s) = 2a$ et avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$n\sum_{s\in S} d(s)^2 \geqslant \left(\sum_{s\in S} d(s)\right)^2 = 4a^2$$

Finalement :

$$6T \geqslant \frac{8a^2}{n} - 2an \quad \textit{i. e.} \quad T \geqslant \frac{a(4a-n^2)}{3n}$$

2 Géométrie : Chasse aux rapports (Lucile)

Ce TD reprend intégralement le splendide TD donné par Martin en 2022, et dont voici le lien.

3 Géométrie : Axe radical (David et Serge)

Cours

Il est nécessaire de maîtriser le cours sur la puissance d'un point avant de faire ce cours. Pour rappel la puissance d'un point P par rapport à un cercle ω de rayon R est $PO^2 - R^2 = PA \cdot PB$ où O est le centre du cercle ω, et A et B des points sur ω tels que P, A et B sont alignés.

Définition 1.
Soit ω_1 et w_2 deux cercles. L'axe radical de ω_1 et ω_2 est l'ensemble des points qui ont la même puissance par rapport à chaque cercle.

Théorème 2.
Si ω_1 et ω_2 ne sont pas concentriques, alors on admet que l'axe radical est une droite.

Remarque 3.
Dans certains cas il est plus facile de montrer que l'axe radical est une droite. Par exemple, que dire lorsque ω_1 et ω_2 sont de même rayon ?

Corollaire 4.
Si ω_1 et ω_2 s'intersectent en P et Q, alors l'axe radical des deux cercles est la droite (PQ).

Proposition 5.
L'axe radical est perpendiculaire à la droite qui relie les centres de chaque cercle.

Théorème 6.
Soit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois cercles dont les centres ne sont pas alignés. Alors les axes radicaux de ces cercles sont concourants.

Démonstration. D'après la proposition 5, les axes radicaux de ω_1/ω_2 et de ω_2/ω_3 ne sont pas parallèle et donc s'intersectent une fois en un point que l'on note O. En notant $P(\omega)$ la puissance de O par rapport à ω, on a $P(\omega_1) = P(\omega_2)$ et $P(\omega_2) = P(\omega_3)$. Donc $P(\omega_1) = P(\omega_3)$. Donc O est sur l'axe radical de ω_1/ω_3 ce qui signifie bien que les axes radicaux sont concourants. □

Remarque 7.
Comparer cette preuve à la concourance des trois médiatrices d'un triangles en le centre du cercle circonscrit.

Remarque 8.
En général, le théorème 6 s'utilise lorsqu'il faut montrer la concourance de 3 droites. En effet, cela permet souvent de réduire un exercice au fait de montrer que certains points sont cocycliques, ce qui nous ramène aux chasses aux angles et à la géométrie élémentaire.

Exercices

Exercice 1
Soient ω_1 et ω_2 des cercles disjoints extérieurs l'un à l'autre. On trace les 4 tangentes communes à ces deux cercles. Montrer que les milieux des segments formés par les quatres tangentes sont alignés.

Exercice 2
Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note O un point sur ω. Le projeté orthogonal de O sur $[AB]$ est H. Le cercle de centre O et de rayon OH recoupe ω en X et Y . Montrer que X, Y et le milieu de $[OH]$ sont alignés.

Exercice 3
Soit ABC un triangle. On note D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement, puis on note X, Y, Z les intersections de $(EF), (FD), (DE)$ avec $(BC), (CA), (AB)$ respectivement. Montrer que X, Y, Z sont alignés.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note M et N les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. On note P l'orthocentre du triangle formé par les droites (AB),(CD),(AD) et Q l'orthocentre du triangle formé par les droites (AB),(CD),(BC). Montrer que (MN) est perpendiculaire à (PQ).

Exercice 5
Dans un triangle acutangle ABC où $AC > AB$, M est le milieu de $[BC]$, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. K est le milieu de $[ME]$, L est le milieu de $[MF]$ et T est un point de la droite (KL) tel que $(TA)//(BC)$. Montrer que $TA = TM$.

Exercice 6
Soit ABC un triangle et soit I le centre de son cercle inscrit. Le cercle circonscrit à ABC est recoupé par (AI) en D, par (BI) en E et par (CI) en F. La droite passant par I parallèle à (BC) (resp $(AC), (AB)$) intersecte (EF) (resp $(DF), (DE)$) en un point K (resp L, M). Montrer que K, L, M sont alignés.

Exercice 7
Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles qui s'intersectent en $U \neq V$. Soient A, X des points de $\mathcal{C}_1$ et B, Y des points de $\mathcal{C}_2$. On suppose que les angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AYB}$ sont droits. Montrer que $(AX), (BY), (UV)$ sont concourantes.

Exercice 8
Soient A, B, C, D, E, F six points. On suppose que A, B, C, D sont cocyliques, et que C, D, E, F sont cocycliques. On suppose de plus que les droites $(AB), (CD)$ et (EF) sont concourantes. Montrer que les points E, F, A, B sont cocycliques.

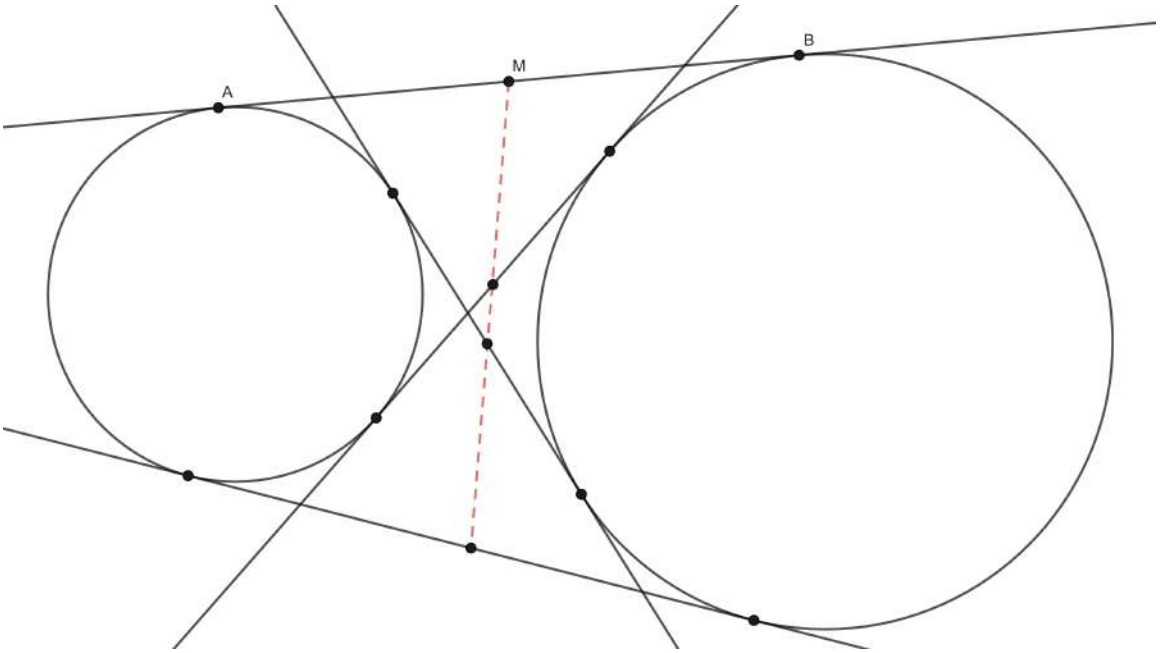
Exercice 9
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Le milieu de $[BC]$ est noté M. Soit Q un point sur le cercle circonscrit à ABC tel que $\widehat{AQH} = 90°$, et D le point sur (BC) tel que A, Q, D soient alignés. Montrer que la perpendiculaire à (AM) passant par H passe par D.

Exercice 10
Soient D, E, F les pieds des hauteurs dans un triangle non équilatéral ABC issues de A, B, C respectivement. Le centre du cercle circonscrit de ABC est noté O. Montrer que les cercles (AOD), (BOE) et (COF) s'intersectent en un point X autre que O.

Exercice 11
Soit ABC un triangle, on place les points A_1 et A_2 de telle sorte que $AA_1 = AA_2 = BC$, $A_1 \in (AB)$ et $A_2 \in (AC)$ du côté opposé de B et C par rapport à A, on définit B_1, B_2, C_1 et C_2 de manière similaire. Montrer que les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et C_2 sont sur un même cercle.

Solutions

Solution de l'exercice 1

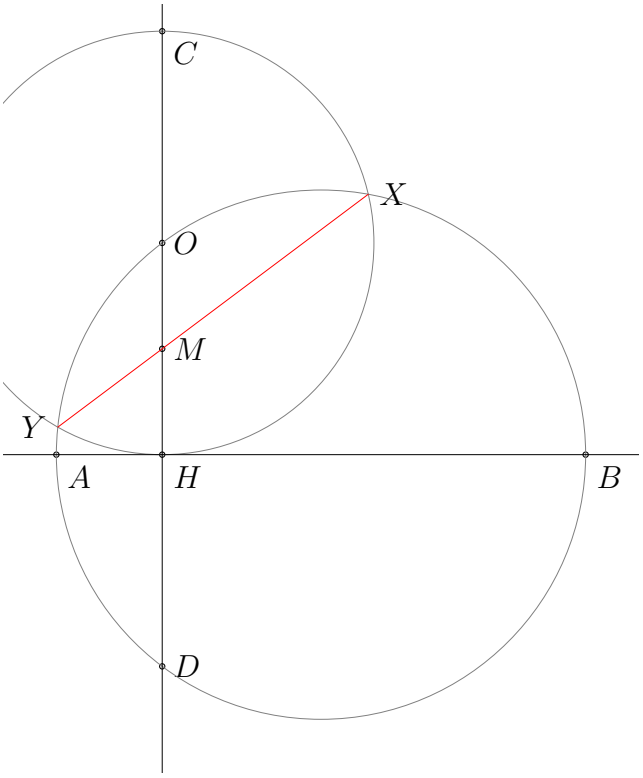


Soit $[AB]$ un des segments avec A sur ω_1 et B sur ω_2, puis M son milieu. Alors

$$\mathcal{P}_{\omega_1}(M) = MA^2 = MB^2 = \mathcal{P}_{\omega_2}(M)$$

, donc M se situe sur l'axe radical de ω_1 et ω_2.
Avec un raisonnement analogue pour les trois autres segments, ceci prouve que les milieux se situent tous sur l'axe radical et sont donc alignés.

Solution de l'exercice 2



Notons M le milieu de $[OH]$. (XY) est l'axe radical de ω et du cercle de centre O et de rayon OH, que l'on note Γ. Il s'agit donc de montrer que M a même puissance par rapport aux deux cercles.
On pose C, D les intersections respectives de OH avec ω et Γ. Remarquons qu'alors :

$$MO = MH \text{ car } M \text{ milieu de } [OH]$$

et

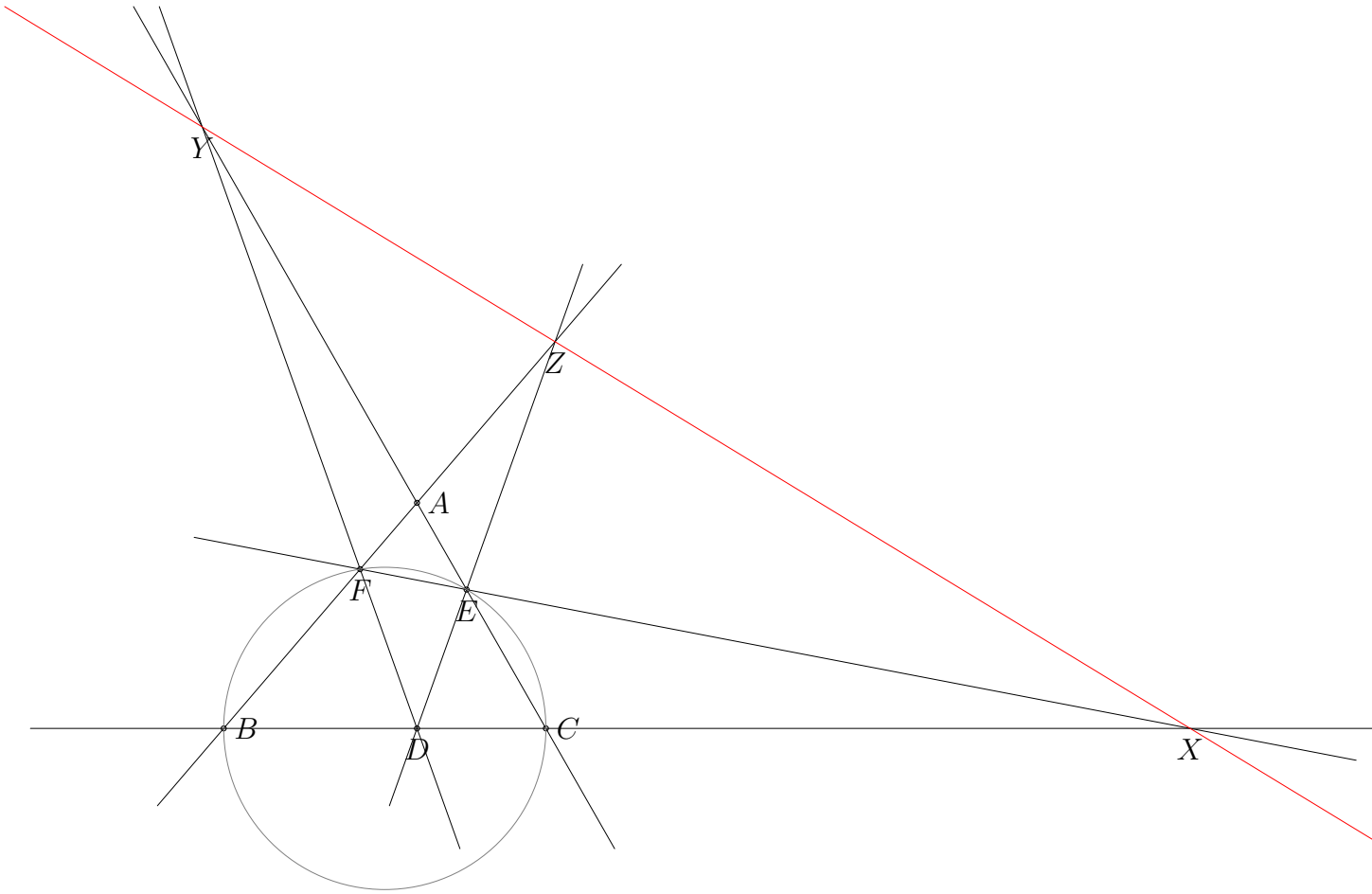
$$HC = HO = OD \text{ car } O \text{ et } C \text{ sont symétriques par raport à } [AB], \text{ et } H, D \text{ se situent sur } \Gamma.$$

Donc

$$\mathcal{P}_\omega(M) = MO \cdot MC = MH \cdot (MH + HC) = MH \cdot (MO + OD) = MH \cdot MD = \mathcal{P}_\Gamma(M)$$

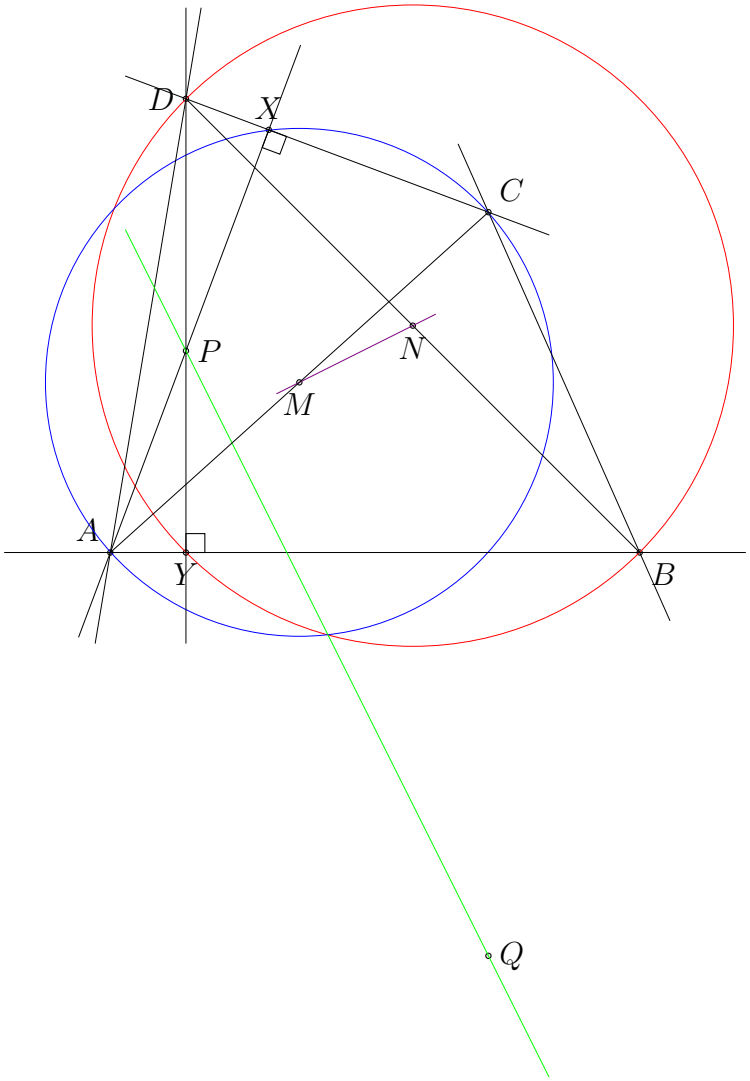
Ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3



On cherche à montrer un alignement de points, ce que l'on fait en montrant que X, Y, Z sont alignés sur un axe radical de deux cercles en particulier. On remarque que la définition de X, Y, Z ont une définition symétrique par rapport à A, B et C. Ainsi, on cherche également à trouver deux cercles dont la définition est également symétrique par rapport à A, B et C. Les cercles circonscrits à ABC et DEF semblent de bons candidats.
Soit l l'axe radical des cercles circonscrits à (ABC) et (DEF).
$BCEF$ est cyclique par les angles droits, donc par centre radical l doit passer par X. De même, Y, Z se situent sur l, ce qui démontre l'alignement.

Solution de l'exercice 4

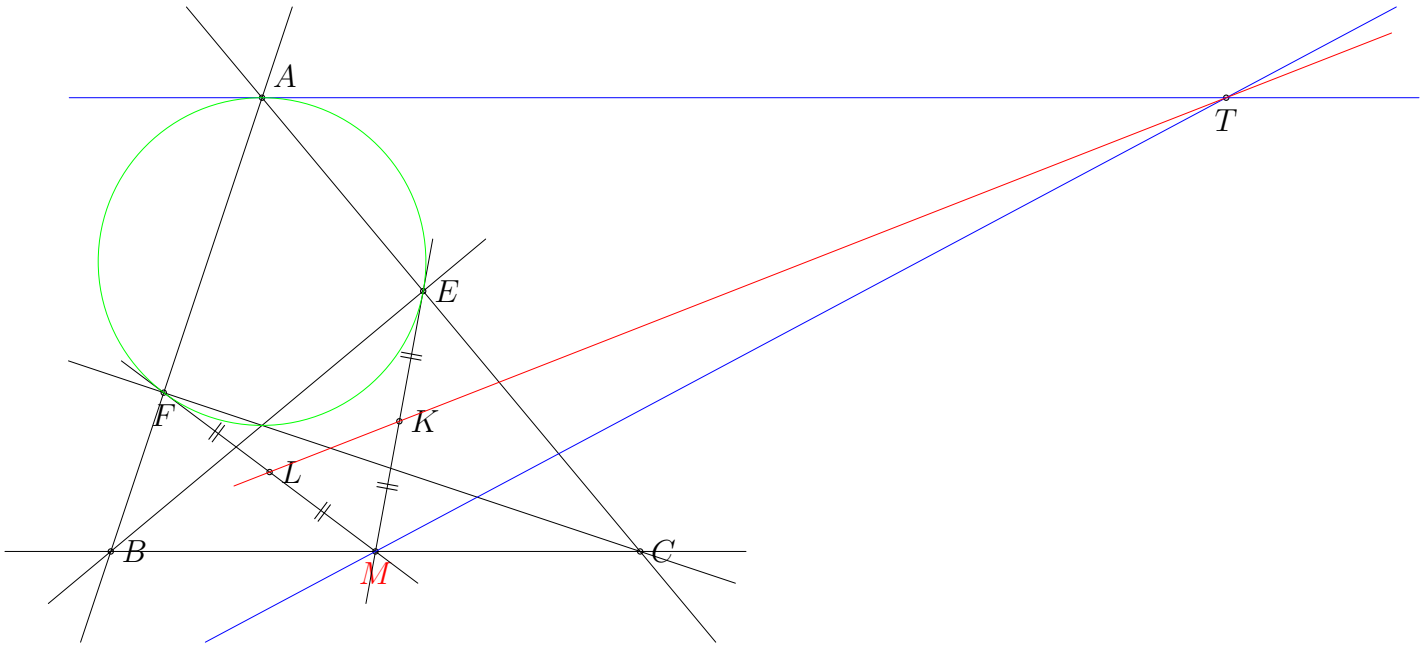


Il faut observer que M et N sont les centres des cercles de diamètre $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. Au vu de la proposition 5 du cours, nous allons chercher à montrer que P et Q sont sur l'axe radical de ces cercles. Montrons le pour P, le raisonnement étant similaire pour Q. Soit X, Y les projetés de A, D sur (CD) et (AB) respectivement. Alors P est l'intersection de AX avec DY. Par les angles droits, $ADXY$ est cyclique, donc par puissance d'un point,

$$PX \cdot PA = PY \cdot PD$$

Or, X est sur le cercle de diamètre $[AC]$ et Y sur le cercle de diam-tre $[BD]$, ce qui montre que P a même puissance par rapport à ces deux cercles.

Solution de l'exercice 5



On introduit ici une astuce : on sait que pour montrer l'alignement de plusieurs points, montrer qu'il se situe sur l'axe radical de deux cercles suffit. Ceci reste vrai lorsqu'un des deux cercles a un rayon nul !
Nous démontrons ici que (KL) est l'axe radical du cercle (AEF) et du cercle de centre M de rayon 0 (constitué uniquement du point M). En effet, une chasse aux angles donne

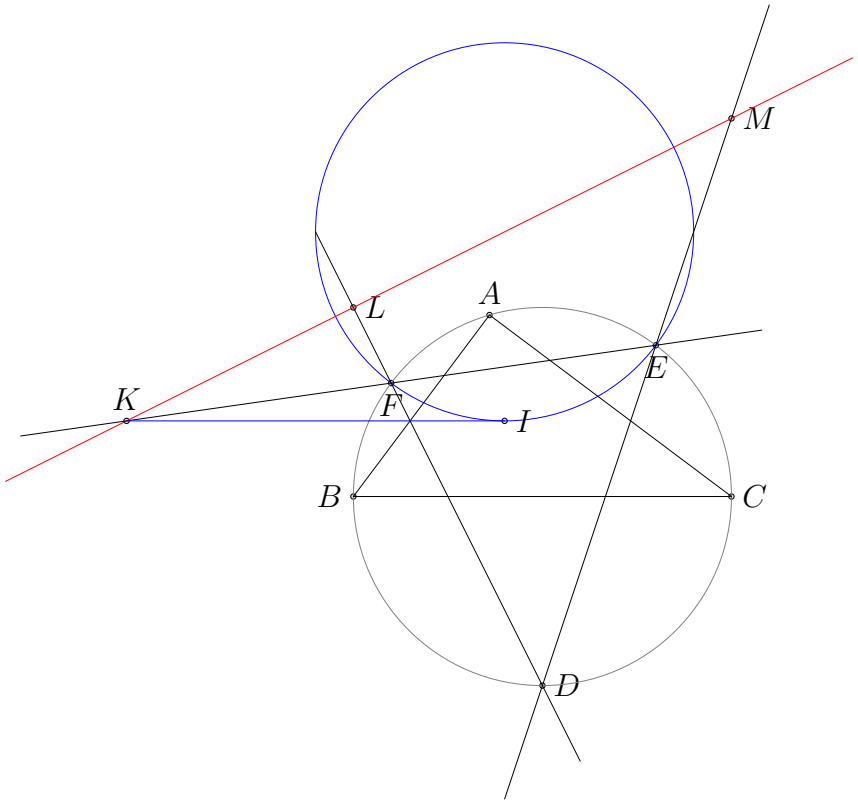
$$\begin{aligned}\widehat{MEF} &= 90^\circ - \frac{1}{2}\widehat{EMF} \text{ car } EMF \text{ est isocèle en } M,\ B, C, E, F \text{ se situant sur le cercle de diamètre } [BC]\\ &= 90^\circ - \widehat{EBF}\\ &= \widehat{EAF}\end{aligned}$$

donc (ME) est tangente à (AEF). De même, (MF) est tangente à (AEF). L'exercice 1 donne alors que (KL) est l'axe radical de (AEF) et (M).
On en déduit que T a même puissance par rapport à ces deux cercles. Or, par angle inscrit, $\widehat{TAC} = \widehat{ACB} = \widehat{AEF}$, donc (AT) est tangente à (AEF). Finalement,

$$TA^2 = \mathcal{P}_{(AEF)}(T) = \mathcal{P}_{(M)}(T) = TM^2$$

, c'est-à-dire $TA = TM$.

Solution de l'exercice 6



Montrons que K, L, M sont alignés sur l'axe radical des cercles (ABC) et du cercle de rayon nul I.
Par angle inscrit et parallélisme :

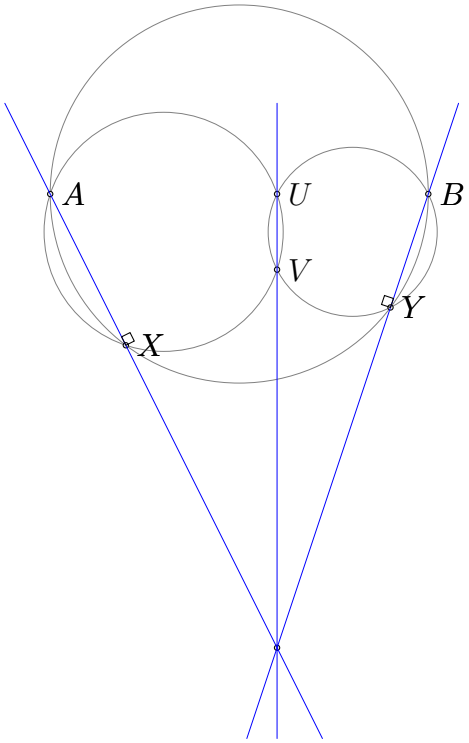
$$\widehat{KIF} = \widehat{BCF} = \widehat{BEF} = \widehat{IEF}$$

donc (KI) est tangente au cercle circonscrit à IEF. Ainsi par puissance d'un point,

$$\mathcal{P}_{(I)}(K) = KI^2 = KE \cdot KF = \mathcal{P}_{(ABC)}(K)$$

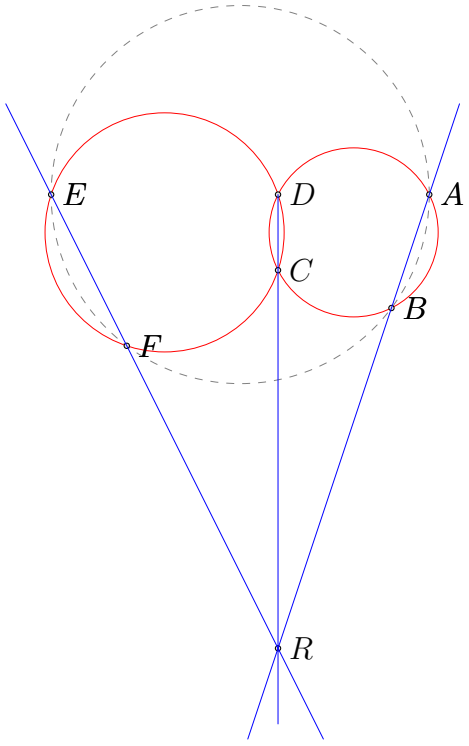
, ce qui montre que K se situe l'axe radical des cercles (ABC) et du cercle de rayon nul I.
On procède de même pour L et M, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7



Les angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AYB}$ étant droits, A, B, X, Y sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[AB]$. On conclut par centre radical sur ce cercle, $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

Solution de l'exercice 8

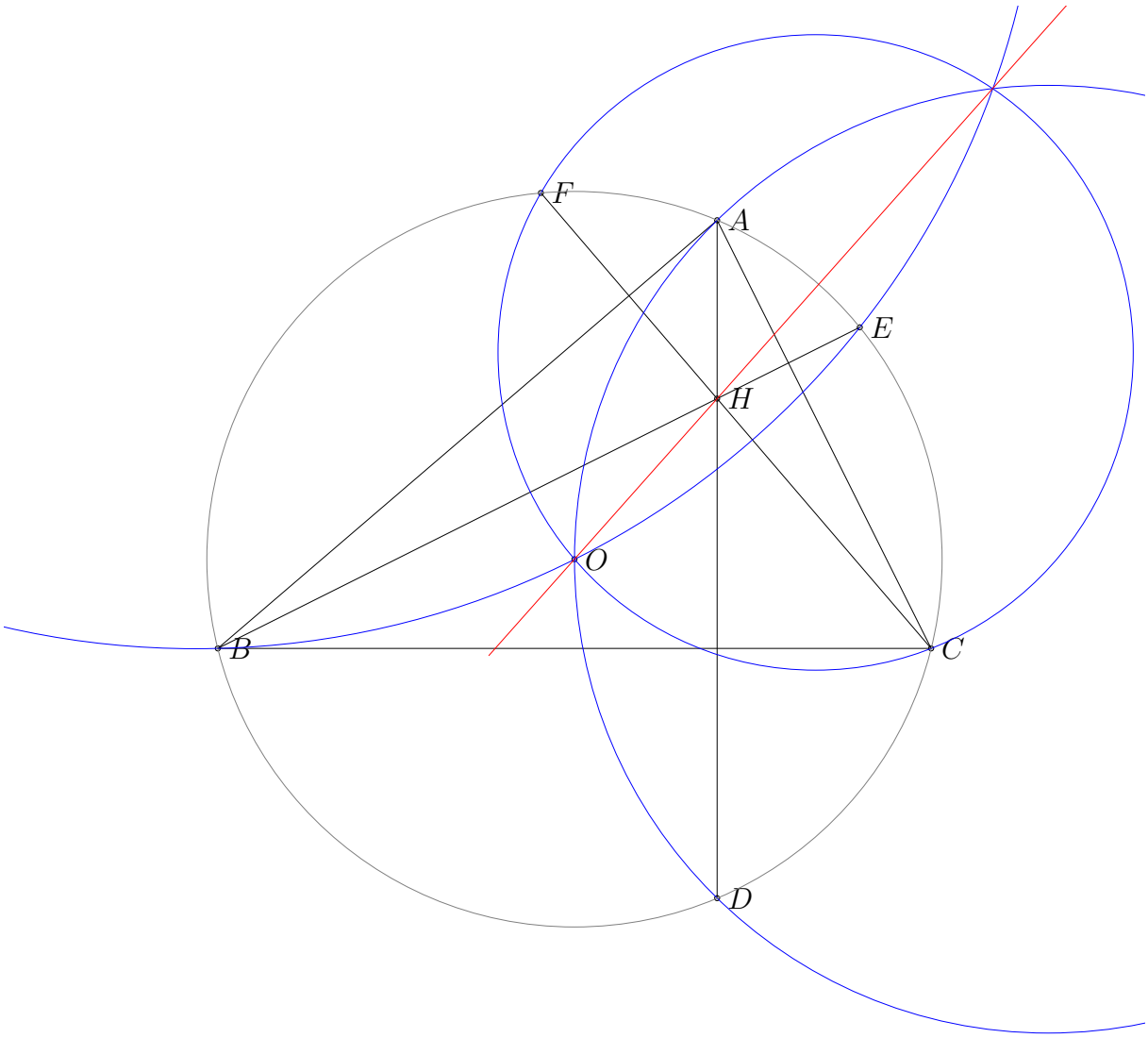


Soit R le point de concourance. Par puissance d'un point :

$$RA \cdot RB = RC \cdot RD = RE \cdot RF$$

, donc A, B, E, F sont bien cocycliques.

Solution de l'exercice 9

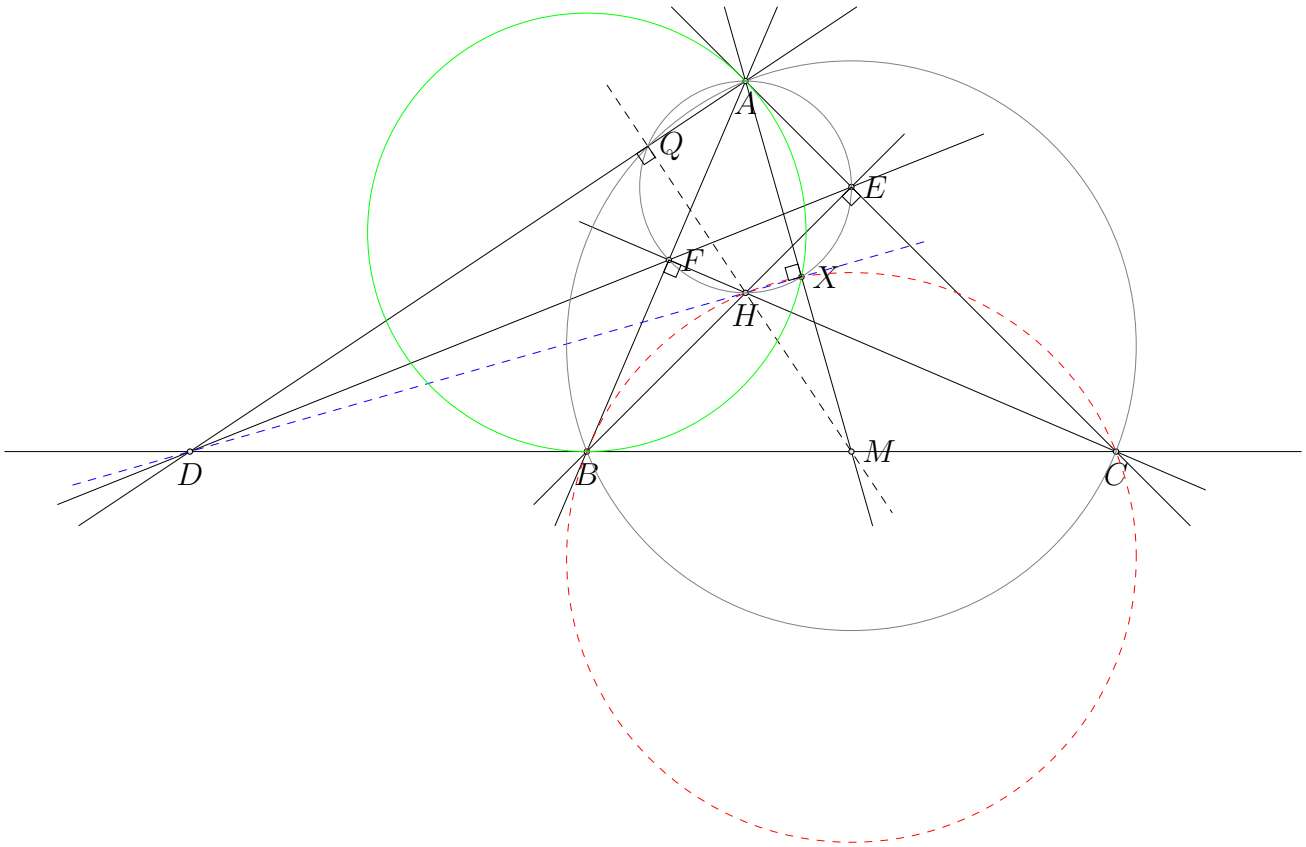


Soit H l'orthocentre de ABC. Par les angles droits, les quadrilatères $BCEF$ et $CAFD$ sont cycliques. On en déduit par puissance d'un point :

$$HA \cdot HD = HC \cdot HF = HB \cdot HE$$

, donc H a même puissance par rapport aux cercles (AOD), (BOE), (COF). O a même puissance (nulle) par rapport à ces cercles également, et puisque $H \neq O$, ceci montre que les axes radicaux de ces cercles passent par H et O, donc que ceux-ci sont en fait égaux à la droite OH. Finalement, la deuxième intersection de (AOD) avec (BOE), qui a puissance nulle par rapport aux trois cercles, doit se situer sur (COF), comme voulu.

Solution de l'exercice 10



Soit X le projeté orthogonal de H sur (AM). Il faut démontrer que $(AQ), (HX), (BC)$ sont concourantes. Or, $ABCQ$ et $AHQX$ (par les angles droits) sont cycliques. Par la réciproque du centre radical, cela signifierait que $HXBC$ est cyclique.
Redéfinissons X comme la seconde intersection des cercles circonscrits à AQH et BHC. Soient E, F les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. Alors A, X, H, E, F se situent sur le cercle de diamètre $[AH]$ et sont donc cocycliques. Une chasse aux angles donne par les angles inscrits et les alignements :

$$\widehat{BAX} = \widehat{FAX} = 180° - \widehat{FHX} = \widehat{XHC} = \widehat{XBC}$$

par réciproque de l'angle tangentiel, le cercle circonscrit à BAX est tangent à (BC). De même, le cercle circonscrit à CAX est tangent à (BC). Ainsi, si M' est l'intersection de (AX) avec (BC), alors par puissance d'un point, M' étant sur l'axe radical de (BAX) et (CAX) :

$$M'B^2 = M'C^2$$

donc M' doit être le milieu de $[BC]$. On en déduit que X est bien le projeté de H sur (AM), et on a bien $HXBC$ cyclique. On conclut par centre radical sur les cercles circonscrit à $AQBC$, $HXBC$ et $AQHX$.

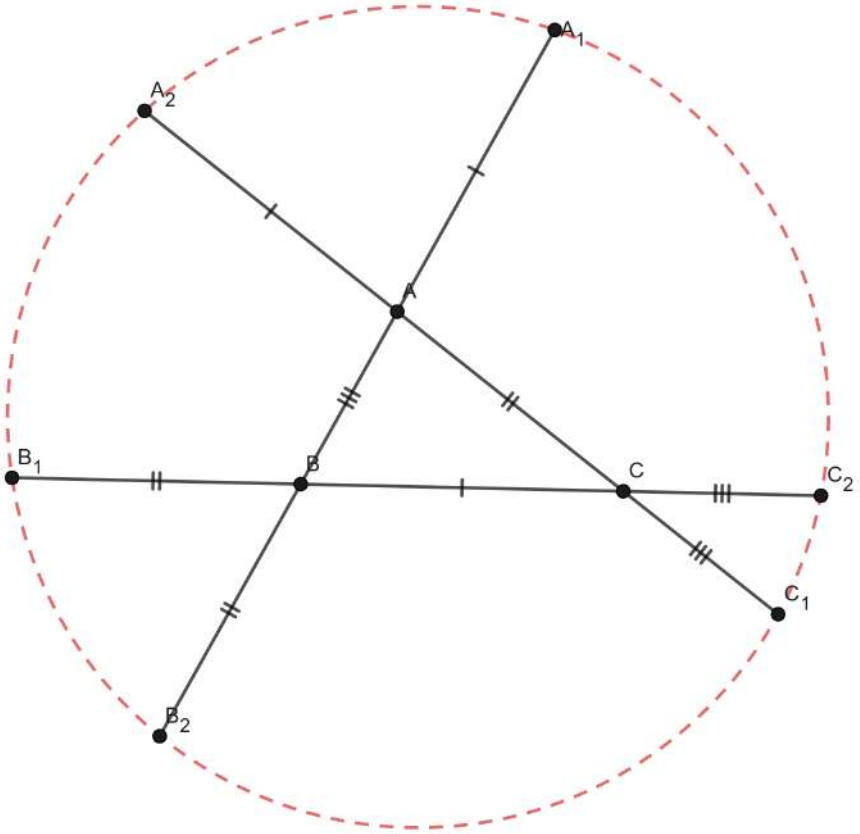
Solution n°2 de l'exercice 10
Avec une figure bien tracée, on peut également observer que Q, H, M semblent alignés, ce que l'on montre.

Par angle inscrit, on trouve :

$$\widehat{HBC} = 90° - \widehat{ACB} = 90° - \widehat{DQB} = \widehat{BQH}$$

Donc (BC) est tangente au cercle circonscrit à BHQ. De même, (BC) est tangente au cercle circonscrit à CHQ. Donc $[BC]$ est une tangente commune aux deux cercles, dont les points de tangence sont B et C : d'après l'exercice 1, M se situe alors sur l'axe radical des deux cercles, soit sur (HQ).
Pour conclure, on note que par les angles droits, avec H_A, H_B les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement, A, Q, H_A, M sont cocycliques sur un cercle de centre le milieu de $[AM]$, et B, C, H_B se situent sur un cercle de centre M. Alors par puissance d'un point, $DQ \cdot DA = DB \cdot DC$ et $HB \cdot HH_B = HA \cdot HH_A$, car ABH_AH_B est cyclique. Ceci prouve que (DH) est l'axe radical des cercles circonscrits à BCH_B et AQM, donc est perpendiculaire à la droite joignant les centres des deux cercle,s c'est-à-dire (AM), comme voulu.

Solution de l'exercice 11



La première chose à remarquer est que $AA_1 \cdot AB_2 = AA_2 \cdot AC_1$. Donc, par la réciproque du théorème de puissance d'un point, $A_1A_2B_2C_1$ sont cocycliques. Notons C_A ce cercle. On définit de manière analogue C_B et C_C. Mais alors, d'après ce qui précède, A a la même puissanve par rapport aux trois cercles. De même pour B et C. Or, si 2 cercles ne sont pas concentriques, leur axe radical est une droite. Mais A, B et C ne sont pas alignés. Donc ces cercles sont concentriques. Ils sont en fait même égaux car pour 2 cercles concentriques de rayon distinct, il n'existe aucun point dont la puissance est la même par rapport aux 2 cercles. Cela montre que $C_A = C_B = C_C$ et donc que les 6 points sont cocycliques.

4 Combinatoire : Récurrence (Félix)

La récurrence est un type de raisonnement qui est souvent utile quand on veut prouver un résultat pour tout entier $n \geqslant 0$. Ici, on dira souvent qu'un entier n est *joli* quand il vérifiera la propriété qu'on recherche, les mathématiciens plus sérieux disent plutôt que "n vérifie la propriété P", ou bien que "la propriété P_n est vraie".

La formulation de base de la récurrence, dite "récurrence forte" est la suivante :

> Soit une propriété qu'un entier peut vérifier. On dira qu'un entier $n \geqslant 0$ est *joli* si il vérifie cette propriété. La récurrence forte affirme que si 0 est joli et si pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que tous les entiers positifs (ou nuls) précédents soient jolis, n est joli, alors tout entier $n \geqslant 0$ est joli.

Souvent, on utilise une autre version, dite "récurrence faible", qui affirme la chose suivante :

> Si 0 est joli et si pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $n-1$ est joli, n est joli, alors tout entier $n \geqslant 0$ est joli.

On nomme la première condition ("0 est joli") l'initialisation, et la seconde condition ("pour tout entier $n \geqslant 1$ tel que $n-1$ est joli, n est joli") l'hérédité.

On peut prouver que le raisonnement par récurrence est valide en utilisant le principe suivant, dit principe de l'extremum :

TOUT ENSEMBLE NON VIDE D'ENTIERS NATURELS ADMET UN PLUS PETIT ÉLÉMENT.

Exercice : Le démontrer.

Solution :

On va montrer la récurrence faible, un raisonnement très similaire s'applique pour la formulation forte.

On suppose donc qu'il existe une propriété que 0 vérifie et telle que pour tout $n \geqslant 1$, si $n-1$ vérifie la propriété, alors n la vérifie aussi, et on veut prouver que tout entier $n \geqslant 0$ vérifie la propriété. Pour ce faire, on considère l'ensemble des entiers qui ne vérifient pas la propriété. S'il était non vide, il admettrait un plus petit élément n. n ne peut pas valoir 0 (car 0 vérifie la propriété), donc $n \geqslant 1$. Mais alors $n-1$ devrait vérifier la propriété (car il n'est pas dans l'ensemble), et donc d'après l'hérédité, n la vérifierait aussi, ce qui est contraire à ce qu'on avait supposé. L'ensemble des entiers ne vérifiant pas la propriété est donc nécessairement vide, et tout entier $n \geqslant 0$ vérifie la propriété.

Il est important de comprendre l'idée générale et pas simplement d'appliquer les règles décrites précedemment : en effet, pour de nombreux problèmes, des variantes des principes énoncés précedemment (commençant par $n = 1$ par exemple) sont soit nécessaires, soit plus pratiques à utiliser.

On peut par exemple utiliser le raisonnement par récurrence pour prouver que pour tout entier $n \geqslant 0$, $10^n - 1$ est un multiple de 9 :

On dit qu'un entier n est *joli* si $10^n - 1$ est un multiple de 9. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Tout d'abord, $10^0 - 1 = 1 - 1 = 0$, qui est un multiple de 9, donc 0 est joli.

Si n est joli, alors 9 divise $10^n - 1$, donc 9 divise $10(10^n - 1)$. Or, $10^{n+1} - 1 = 10(10^n) - 10 + 9 = 10(10^n - 1) + 9$, donc $10^{n+1} - 1$ vaut 9 de plus qu'un multiple de 9, et c'est aussi un multiple de 9. Par conséquent, $n + 1$ est joli

En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Piège n°1 : l'initialisation

Considérons la preuve suivante du fait que pour tout entier $n \geqslant 0$, $10^n + 1$ est un multiple de 9 :

On dit qu'un entier n est *joli* si $10^n + 1$ est un multiple de 9. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Si n est joli, alors 9 divise $10^n + 1$, donc 9 divise $10(10^n + 1)$. Or, $10^{n+1} + 1 = 10(10^n) + 10 - 9 = 10(10^n + 1) - 9$, donc $10^{n+1} + 1$ vaut 9 de moins qu'un multiple de 9, et c'est aussi un multiple de 9. Par conséquent, $n + 1$ est joli

En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

On constate que l'on vient de prouver un résultat faux ! En effet, pour $n = 1$, $10^n + 1 = 11$, ce qui n'est pas un multiple de 9 (en fait ce résultat n'est vrai pour aucun $n \geqslant 0$). L'erreur commise est de ne pas avoir prouvé l'initialisation de la récurrence. Une récurrence sans initialisation est un argument incomplet, et il est important de toujours penser à initialiser une récurrence, même si l'initialisation parait évidente.

Piège n°2 : les cas particuliers

Considérons la preuve suivante du fait que pour tout entier $n \geqslant 1$, n crayons sont forcément tous de la même couleur :

On dit qu'un entier n est *joli* si n crayons sont forcément tous de la même couleur. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Tout d'abord, un crayon est forcément de la même couleur que lui même. Par conséquent, 1 est joli.

Si n est joli, alors on considère $n + 1$ crayons, qu'on numérote de 1 à $n + 1$. Comme n est joli, les n premiers crayons (donc les crayons de 1 à n) sont de la même couleur. De même pour les n derniers (de 2 à $n + 1$). Par conséquent le crayon 1, est de la même couleur que les crayons 2 à n, qui sont eux-mêmes de la même couleur que le crayon $n + 1$. Les $n + 1$ crayons sont donc tous de la même couleur, et $n + 1$ est joli.

En conclusion, tout entier $n \geqslant 1$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

On a encore prouvé un résultat faux, et cette fois ci avec une initialisation correcte ! L'erreur est en réalité dans l'argument d'hérédité : il permet de passer de n à $n + 1$ pour $n \geqslant 2$, mais pour $n = 1$, il est faux, car "les crayons de 2 à n" n'existent pas. Il faut donc faire attention dans son argument d'hérédité aux cas particuliers, en particulier les premiers cas.

Récurrence multiple

Parfois, on veut prouver une propriété qui porte sur deux entiers a et b, au lieu de porter sur un seul entier n. Il y a alors plusieurs manières d'utiliser le principe de la récurrence :

— On peut fixer a (resp. b) et faire une récurrence sur b (resp. a) uniquement.

— On peut faire une récurrence sur a, et au sein de cette récurrence, faire une deuxième récurrence sur b.

— On peut faire une récurrence sur $a + b$.

Il vaut mieux essayer la première méthode, plus simple, avant de s'aventurer dans des raisonnements complexes et pas toujours nécessaires (même si parfois les méthodes plus complexes sont indispensables).

Exercices

Exercice 1

Soit $(F_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de Fibonacci, que l'on définit en posant $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Vincent souhaite gravir les n marches d'un escalier en franchissant, à chaque pas, une ou deux marches. Démontrer qu'il a F_{n+1} manières de procéder.

Exercice 2

Démontrer que l'entier F_n est pair si et seulement si 3 divise n.

Exercice 3

Soit a et b deux entiers naturels. Démontrer que

$$F_{a+b+1} = F_a F_b + F_{a+1} F_{b+1}.$$

Bonus : le montrer aussi par un argument de comptage

Exercice 4

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + 1/u_n$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

Exercice 5

Soit $(v_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie en posant $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = 1 + n/v_n$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $\sqrt{n} \leqslant v_n \leqslant 1 + \sqrt{n}$.

Exercice 6

Soit n un entier naturel. Démontrer que

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Bonus : le montrer aussi par un argument de comptage

Exercice 7
Soit n un entier naturel. Démontrer que

$$1 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2.$$

Bonus (difficile) : le montrer aussi par un argument de comptage

Exercice 8
Un graphe est dit connexe si il existe un chemin entre toute paire de sommets. Un sommet d'un graphe connexe est dit "important" si sa suppression rendrait le graphe non connexe. Montrer qu'un graphe à n sommets a au plus $n - 2$ sommets importants.

Exercice 9
Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On dispose de $\binom{a+b-2}{a-1}$ villes, qui sont deux à deux connectées par une voie ferrée ou par une voie fluviale.

Démontrer qu'il existe un groupe de a villes deux à deux connectées par voie ferrée, ou bien un groupe de b villes deux à deux connectées par voie fluviale.

Exercice 10
Soit un polygone convexe à $n \geqslant 4$ sommets. On le découpe en triangles tels que chaque triangle a pour sommets 3 des sommets du polygone, les triangles ne se chevauchent pas et ils recouvrent la totalité du polygone. On colorie en noir les triangles dont 2 des côtés sont des côtés du polygone, en rouge ceux dont un seul des côtés est un côté du polygone, et en blanc ceux dont aucun des côtés n'est un côté du polygone. Montrer qu'il y a deux triangles noirs de plus que de triangles blancs.

Exercice 11
Il y a 2026 candidats à une élection. Chaque électeur ordonne les candidats dans l'ordre de son choix, et on forme un graphe orienté à 2026 sommets en traçant une arête d'un candidat à un autre si et ssi la majorité (stricte) des électeurs préfère le premier au second. Est-il possible d'obtenir n'importe quel graphe orienté complet à 2026 sommets ? (Un graphe est dit complet si pour chaque paire de sommets, il existe une arête les reliant)

Exercice 12
Soit n un entier naturel. Démontrer que

$$\frac{4^n}{2n+1} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 4^n.$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

Nous dirons qu'un entier n est *joli* s'il satisfait la propriété désirée. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Tout d'abord, si $n = 1$, Morgane a $1 = F_2$ manière de procéder. Puis, si $n = 2$, elle peut passer par la première marche ou bien la sauter, donc elle a $2 = F_3$ manières de procéder. Ainsi, $n = 1$ et $n = 2$ sont jolis.

Enfin, pour tout entier $n \geqslant 3$ tel que $n-2$ et $n-1$ soient jolis, Morgane va soit passer la première marche, et alors elle a F_n manières de franchir les $n-1$ marches restantes, soit sauter cette première marche, et alors elle a F_{n-1} manières de franchir les $n-2$ marches restantes. En tout, elle a donc $F_{n-1} + F_n = F_{n+1}$ manières de procéder, de sorte que n est joli.

En conclusion, tout entier $n \geqslant 1$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution de l'exercice 2

Nous dirons qu'un entier n est *joli* si F_n est pair et 3 divise n, ou bien si F_n est impair et 3 ne divise pas n. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Tout d'abord, $n = 0$ et $n = 1$ sont manifestement jolis. Soit maintenant $n \geqslant 2$ un entier tel que $n-2$ et $n-1$ soient jolis.

Puis, si n est divisible par 3, aucun des entiers $n-1$ et $n-2$ n'est divisible par 3, donc F_{n-1} et F_{n-2} sont impairs, et leur somme $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ est paire.

Si, au contraire, n n'est pas divisible par 3, l'un des entiers $n-1$ et $n-2$ est divisible par 3, mais pas l'autre. L'un des entiers F_{n-1} et F_{n-2} est donc pair, et l'autre est impair, donc leur somme $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ est impaire.

Dans les deux cas, l'entier n est donc joli. En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution de l'exercice 3

Fixons la valeur de l'entier a. Nous dirons qu'un entier b est *joli* si $F_{a+b+1} = F_a F_b + F_{a+1} F_{b+1}$. Nous allons maintenant démontrer par récurrence sur b que tout entier b est joli.

Tout d'abord, si $b = 0$, on a bien

$$F_{a+b+1} = F_{a+1} = F_a \times 0 + F_{a+1} \times 1 = F_a F_b + F_{a+1} F_{b+1}.$$

De même, si $b = 1$, on a

$$F_{a+b+1} = F_{a+2} = F_a + F_{a+1} = F_a \times 1 + F_{a+1} \times 1 = F_a \times F_1 + F_{a+1} \times F_2.$$

Les entiers $b = 0$ et $b = 1$ sont donc jolis.

Soit maintenant $b \geqslant 2$ un entier tel que $b-2$ et $b-1$ soient jolis. On a

$$F_{a+b+1} = F_{a+b-1} + F_{a+b} = (F_a F_{b-1} + F_{a+1} F_b) + (F_a F_b + F_{a+1} F_{b+1}) = F_a F_{b+1} + F_{a+1} F_{b+2},$$

donc b est joli également.

En conclusion, tout entier $b \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution de l'exercice 4

Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $1 \leqslant u_n \leqslant 2$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Tout d'abord, $n = 0$ est manifestement joli. Soit maintenant $n \geqslant 1$ un entier tel que $n-1$ soit joli. On a

$$u_{n+1} = 1 + 1/u_n \leqslant 1 + 1/1 = 2 \text{ et } u_{n+1} = 1 + 1/u_n \geqslant 1 + 1/2 = 3/2 \geqslant 1,$$

donc n est joli.

En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution de l'exercice 5

Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $\sqrt{n} \leqslant v_n \leqslant 1+\sqrt{n}$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Tout d'abord, $n = 0$ est manifestement joli. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier tel que n soit joli. On a

$$v_{n+1} = 1 + n/v_n \leqslant 1 + n/\sqrt{n} = 1 + \sqrt{n} \leqslant 1 + \sqrt{n+1} \text{ et } v_{n+1} = 1 + n/v_n \geqslant 1 + n/(1+\sqrt{n}).$$

On remarque alors que

$$\begin{aligned} 1 + n/(1+\sqrt{n}) \geqslant \sqrt{n+1} &\Leftrightarrow n \geqslant (\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1) \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n+1}+1) \geqslant (\sqrt{n+1}-1)(\sqrt{n}+1) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{n+1}+1 \geqslant \sqrt{n}+1. \end{aligned}$$

Par conséquent, l'entier $n+1$ est joli. En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution de l'exercice 6

Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Tout d'abord, l'entier $n = 0$ est joli, car $1 + 2 + \ldots + n = 0 = n(n+1)/2$. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier joli. On a

$$1 + 2 + \ldots + (n+1) = (1 + 2 + \ldots + n) + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+2)(n+1)}{2},$$

donc l'entier $n+1$ est joli.

En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution de l'exercice 7

Nous dirons qu'un entier n est *joli* si $1+2^3+\ldots+n^3 = (1+2+\ldots+n)^2$. Nous allons démontrer par récurrence sur n que tout entier n est joli.

Tout d'abord, l'entier $n = 0$ est joli, car $1+2^3+\ldots+n^3 = 0 = (1+2+\ldots+n)^2$. Soit maintenant $n \geqslant 0$ un entier joli. On sait que $1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ et que $1 + 2 + \ldots + (n+1) =$

$(n+1)(n+2)/2$, donc on a

$$\begin{aligned}\left(1+2^3+\ldots+(n+1)^3\right)-(1+2+\ldots+(n+1))^2 & \\ &= (1+2^3+\ldots+n^3)+(n+1)^3-\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\\ &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3-\frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}\\ &= \frac{(n+1)^2}{4}\left(n^2+4(n+1)-(n+2)^2\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

donc l'entier $n+1$ est joli.

En conclusion, tout entier $n \geqslant 0$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

Solution de l'exercice 8

On procède par récurrence. Pour $n = 2$, la propriété est clairement vraie, étant donné que le graphe à un sommet est connexe.

Supposons la propriété vraie pour tout graphe à moins de n sommets. Soit alors un graphe à n sommets. On considère alors un sommet S du graphe qui est important (si il n'y en a pas, la propriété est trivialement vraie). On définit alors pour chaque composante connexe du graphe obtenu en retirant S le graphe "branche" formé par cette composante connexe et S. On a au moins 2 branches (car S étant important, il y a au moins 2 composantes connexes), chaque branche contient un sommet non-important autre que S (par hypothèse de récurrence), et chaque sommet non-important autre que S d'une branche est un sommet non-important du graphe entier (car tout le reste du graphe est relié à la branche via S). Il y a donc au moins 2 sommets non importants dans le graphe à n sommets. Par récurrence, tout graphe contient au moins 2 sommets non importants.

Solution de l'exercice 9

On dira qu'un entier n est *joli* si, pour tous les entiers naturels non nuls a et b de somme $a+b=n$, la propriété de l'énoncé est vérifiée.

Tout d'abord, si $n = 2$, on a $a = b = 1$, donc $n = 2$ est bien joli. Maintenant, soit $n \geqslant 3$ un entier tel que $n-1$ soit joli, et soit a et b deux entiers de somme n. Considérons l'énoncé pour de tels paramètres a et b.

Si $a = 1$ ou $b = 1$, la propriété de l'énoncé est déjà vérifiée. Sinon, on considère une ville v. Puisque

$$\binom{a+b-2}{a-1} = \binom{a+b-3}{a-2} + \binom{a+b-3}{a-1},$$

le principe des tiroirs indique que, parmi les $\binom{a+b-2}{a-1}-1$ liaisons entre v et les autres villes, il y a au moins $\binom{a+b-3}{a-2}-1$ liaisons ferroviaires, vers un ensemble de villes $\mathcal{A}$, ou au moins $\binom{a+b-3}{a-1}-1$ liaisons fluviales, vers un ensemble de villes $\mathcal{B}$.

Dans le premier cas, puisque $n-1$ est joli, on peut trouver b villes de $\mathcal{A}$ reliées par voie fluviale, ou bien $a-1$ villes de $\mathcal{A}$ reliées par voie ferrée, et auxquelles on peut adjoindre la ville v. Dans le deuxième cas, on peut trouver a villes de $\mathcal{B}$ reliées par voie ferrée, ou bien $b-1$ villes de $\mathcal{A}$ reliées par voie fluviale, et auxquelles on peut adjoindre la ville v.

Dans tous les cas, la propriété demandée dans l'énoncé est satisfaite. Par conséquent, l'entier n est joli. En conclusion, tout entier $n \geqslant 2$ est joli, ce qui est la propriété que nous souhaitions démontrer.

5 Combinatoire : Invariants (Eva et Gaëtan)

Exercices

Exercice 1
P'tit Rémi a un carré 100×100 d'ampoules. Pour une ligne ou une colonne donnée, il peut changer l'état de toutes les ampoules. Initialement, il n'y a qu'une ampoule qui est allumée. Peut-il se retrouver avec toutes les ampoules éteintes à la fin ?

Exercice 2
Les nombres entiers de 1 à 2024 sont écrits au tableau. À chaque étape, Eva choisit deux des nombres écrits au tableau, les efface et réécrit sur le tableau la valeur absolue de leur différence. Montrer que le dernier nombre que Eva écrit au tableau est pair.

Exercice 3
Natëag écrit les nombres de 1 à 42 dans l'ordre. À chaque étape, Naëtag peut permuter deux entiers adjacents. Montrer que Naëtag ne peut pas retrouver la configuration initiale après un nombre impair d'étapes.

Exercice 4
De sournois triplés (Êva, Éva et Èva) se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des triplés vont rester immobiles, et le troisième se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; il peut bien sûr rester immobile lui aussi si cela lui chante. Originellement, les sournois triplés se situent en trois points de coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Est-il possible que, au bout d'un certain temps, nos trois sournois se retrouvent en les points de coordonnées $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$?

Exercice 5
Eva écrit un certain nombre d'entiers strictement positifs au tableau. P'tit Rémi arrive avec sa troupe de lutins maléfiques et afin de semer le chaos il peut autant de fois qu'il le souhaite remplacer deux entiers écrits au tableau par leur pgcd et leur ppcm. Montrer que les ambitions de P'tit Rémi sont vouées à l'échec et que les nombres au tableau finiront par ne plus jamais changer.

Exercice 6
Sur une île ténébreuse vivent 34 lutins maléfiques. Au début, il y en a 7 bleus, 10 rouges et 17 jaunes. Quand deux lutins de couleurs différentes se rencontrent, ils décident de jouer un tour à leurs congénères, et adoptent simultanément la troisième couleur. Un jour, P'tit Rémi arrive sur l'île et observe que tous les lutins sont de la même couleur. Quelle est cette couleur ?

Exercice 7
Sur un tableau, Anatole écrit n fois le chiffre 1. Puis Erik choisit deux nombres a et b écrits au tableau, les efface et écrit $\frac{a+b}{4}$ à la place. Montrer que le nombre écrit au tableau au bout de $n-1$ étapes est supérieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

Exercice 8
Sur une ligne, on écrit 2018 entiers naturels. Ensuite, pour chaque ligne, on écrit en-dessous de chaque entier le nombre de fois qu'il apparaît dans la ligne, créant ainsi une nouvelle ligne

en-dessous de la première, sur laquelle on réapplique le processus. Montrer qu'au bout d'un certain temps toutes les lignes qu'on écrit deviennent identiques.

Exercice 9
a) n enfants sont assis en cercle et ont chacun un certain nombre de bonbons. Chaque minute, chaque élève donne la moitié de ses bonbons à son voisin de droite. Si il possède un nombre impair de bonbons, Gaëtan lui en prend un avant. Montrer que les élèves finiront par tous avoir le même nombre de bonbons.

b) Cette fois, Gaëtan donne un bonbon aux élèves qui en ont un nombre impair. Montrer la même conclusion que précédemment.

Exercice 10
P'tit Rémi est confronté à un sérieux problème : après plusieurs trahisons, le royaume des lutins est sujet à la discorde et la haine se propage. Heureusement, chaque lutin a au maximum trois ennemis. Rémi peut-il réussir à séparer son royaume en deux parties, de sorte à ce que chaque lutin ait au plus un ennemi dans son groupe ?

Exercice 11
On colorie n points du plan en rouge et n autres en bleu de telle sorte que ces $2n$ points ne soient pas 3 à 3 alignés. Est-il toujours possible de tracer n segments reliant un point rouge à un point bleu, chaque point étant utilisé une seule fois, de manière à ce que deux segments ainsi tracés ne s'intersectent jamais ?

Exercice 12
La banque de l'île de Koridaï produit des pièces en aluminium (A) et en bronze (B). Morshu arrange $2n$ pièces, n de chaque type, en ligne dans un ordre arbitraire. Puis il fixe k entier entre 1 et $2n$ et il applique le processus suivant : il identifie la plus longue séquence de pièces consécutives de même type qui contient la k-ième pièce en partant de la gauche, et déplace toutes les pièces de cette séquence à gauche de la ligne. Par exemple, avec $n = 4$, $k = 4$, on peut avoir la suite d'opérations

$$AABBBABA \longrightarrow BBBAAABA \longrightarrow AAABBBBA \longrightarrow BBBBAAAA \longrightarrow ...$$

Trouver toutes les paires (n, k) avec $1 \leq k \leq 2n$ telles que pour toute configuration initiale, les n pièces de gauche sont de même type après un nombre fini d'étapes.

Exercice 13
2009 cartes sont rangées côte à côte sur une table. Chaque carte a une face noire et une face blanche. Au début, chaque carte a sa face blanche visible. Hadriel et Gaëtan jouent au jeu suivant : chacun leur tour à commencer par Hadriel, ils choisissent un bloc de 50 cartes côte à côte dont la carte la plus à gauche est blanche et ils retournent chaque carte du bloc.
a) Le jeu se termine-t-il nécessairement ?
b) Existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

Solutions

Solution de l'exercice 1
On remarque que la parité du nombre d'ampoules allumées est un invariant. Il y en a un nombre impair au début, et un nombre pair à la fin. Ce n'est donc pas possible.

Solution de l'exercice 2
On observe que la parité de la somme des nombres écrits au tableau est un invariant. Elle est paire au début donc le dernier nombre est pair.

Solution de l'exercice 3
On se place à un instant quelconque. On note $x_1, ..., x_{42}$ les nombres dans l'ordre actuel. On appelle le nombre de croisements le nombre de couples $(i, j) \in [1, 42]^2$ tels que $i < j$ et $x_i > x_j$. On remarque que lorsqu'on permute deux nombres, le nombre de croisements augemente ou diminue de 1. Or à l'instant 0, le nombre de croisements vaut 0. Ainsi le nombre de croisements est pair aux instants pairs et impair aux instants impairs. En particulier, il ne peut pas valoir 0 lors des instants impairs, et donc Gaëtan ne peut pas retrouver la configuration initiale après un nombre impair d'étapes.

Solution de l'exercice 4
On vérifie que l'aire du triangle formé par les triplés est invariante par ces transformations (on utilise la formule base·hauteur). L'aire d'origine vaut $1/2$ et l'aire finale 1, c'est contradictoire.

Solution de l'exercice 5
On numérote nos nombres $a_1, ..., a_n$. Lorsque Rémi remplace (a_i, a_j) par $pgcd(a_i, a_j), ppcm(a_i, a_j)$, on remplace le plus petit par $pgcd(a_i, a_j)$ et le plus grand par $ppcm(a_i, a_j)$. Ainsi le plus petit devient strictement plus petit si il y a du changement (s'il ne divise pas le plus grand). Ainsi, au sens de l'ordre lexicographique, le n-uplet trié par ordre croissant décroit strictement à chaque réel coup de Rémi. Il y en a donc un nombre fini.

Solution de l'exercice 6
On note B, R, J le nombre de lutinsnde couleur bleu, rouge et jaune respectivement. À chaque étape un de ces trois nombres augmente de 2 et les deux autres diminuent de 1. Modulo 3 , ils augmentent donc tous de 1. Lorsqu'il n'y a plus qu'une couleur, les tous deux couleurs disparues donnent une valeur de 0 modulo 3. Elles avaient donc initialement la même valeur modulo 3 ce qui signifie que la couleur restante ne peut qu'être jaune compte tenu des valeurs de départ. Coup de chance pour P'tit Rémi, c'est sa couleur préférée.

Solution de l'exercice 7
On utilise l'IAH : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Dès lors, la somme des inverses des nombres écrits au tableau est décroissante lorsqu'on applique une transformation. Elle vaut n dans la position initiale, donc dans la position finale elle est inférieure à n : le dernier nombre écrit est dès lors supérieur à $\frac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 8
Considérons un nombre a en dehors de la première ligne. Il représente le nombre d'occurrences d'un des nombres de la ligne du dessus. Ce dernier est donc présent a fois dans la ligne du dessus, et a est présent au moins a fois dans sa ligne. Dès lors, si l'on regarde une colonne, tous les nombres à l'exception du premier sont triés par ordre croissant. Comme de plus la somme des nombres d'une ligne autre que la première fait 2018, toutes les lignes deviennent identiques au bout d'un certain temps (sinon, la somme de chaque ligne augmenterait de 1 autant de fois que voulu, tout en restant inférieure à 2018).

Solution de l'exercice 9
a) Le nombre de bonbons est positif, n'augmente jamais et décroit strictement lorsque Gaëtan vole un bonbon. Ainsi au bout d'un moment Gaëtan ne vole plus jamais de bonbon : on étudie la situation à partir de ce moment. Si on note $a_1, \dots, a_n$ le nombre de bonbons des enfants $1, \dots, n$ respectivement, après une minute celui-ci devient $(\frac{a_1+a_2}{2}, \dots, \frac{a_n+a_1}{2})$. Vu qu'on remplace par des moyennes arithmétiques, n'importe quelle "inégalité des moyennes" devrait donner un monovariant intéressant. Le plus naturel serait de s'intéresser au maximum, mais il faut prendre en compte le fait qu'on peut avoir plusieurs a_i égaux au maximum. Ici, on va plutôt utiliser l'IAG. On a $\prod \frac{a_i+a_{i+1}}{2} \geq \prod \sqrt{a_i a_{i+1}} = \prod a_i$ Le produit des a_i augmente donc chaque minute. Or ce produit reste entier et est borné car le nombre de bonbons est fixe : ainsi au bout d'un moment il n'augmente plus et alors on a cas d'égalité dans chaque IAG ce qui signifie que tous les a_i sont égaux.

b) On remarque que la quantité $\max a_i$ décroit au cours des transformations. Ainsi cette quantité est bornée par sa valeur initiale que l'on va appeler M. Cela signifie en particulier que le nombre de bonbons total est majoré par nM (chaque enfant a au plus M bonbons à chaque étape). Ainsi vient un moment à partir duquel Gaëtan ne donne plus de bonbons. La situation est alors analogue à celle étudiée en question a).

Solution de l'exercice 10
P'tit Rémi fait deux groupes arbitraires. Puis à chaque fois qu'un petit lutin capricieux se plaint d'avoir deux ennemis, il le change de groupe. Ce lutin capricieux perd donc à minima 1 ennemi, ses précédents ennemis en perdent un chacun et au maximum un lutin du deuxième groupe gagne un ennemi en la personne du lutin capricieux. Ainsi le nombre total d'inimitié décroit strictement jusqu'à une bonne configuration ! Rémi peut donc sauver son royaume !

Solution de l'exercice 11
Il y a un nombre fini de configurations où les points sont reliés par paires rouge-bleu. Parmi celles-ci, on en considère une qui minimise la somme des longueurs des segments tracés. Si on avait un croisement, on remarque grâce à l'inégalité triangulaire que remplacer les segments qui se croisent $[R_1B_1]$ et $[R_2B_2]$ par $[R_1B_2]$ et $[R_2B_1]$ fait décroître strictement la somme des longueurs, absurde. Notre configuration est donc sans croisement, comme voulue.

Solution de l'exercice 12 (IMO 2022, P1)
On remarque facilement sur des petits cas que le nombre de blocs (ie le nombre de paires AB ou BA consécutifs) va être un monovariant intéressant. Tout d'abord, il est évident qu'il s'agit bien d'un monovariant décroissant, vu qu'on ne coupe jamais au milieu d'un bloc.

Ensuite, il décroit strictement si le bloc retiré n'est pas à l'extrémité droite ou gauche de la séquence de pièces. En effet, dans ce cas retirer ce bloc et le placer tout à gauche fait fusionner le bloc qui le précèdait et celui qui le suivait, ce qui diminue de 1 le nombre de blocs.

Ainsi nous savons (par principe de descente infinie) qu'au bout d'un moment, le nombre de blocs reste constant et que donc la k-ième pièce fait toujours partie du bloc le plus à droite ou le plus à gauche.

Remarquons qu'il y a au plus n pièces dans un bloc (c'est le nombre de pièces d'un même métal), et donc si le bloc le plus à gauche contient k, alors ou bien $k < n$, ou bien $k = n$ et toutes les n premières pièces sont du même type (ce qui est le cas recherché). Il est facile de voir que $k < n$ ne marche jamais (nous le prouverons peu après), ce qui nous amène à supposer $k \geq n$. Supposons par l'absurde que (k, n) ne fonctionne pas. On a alors que la k-ième pièce n'est jamais dans le bloc le plus à gauche, et donc est toujours dans le bloc le plus

à droite au bout d'un moment.

On remarque que le fait que k appartienne au bloc le plus à droite équivaut à ce que ce bloc contienne au moins $2n-k+1$ pièces.

Puisque qu'on déplace à chaque fois le bloc le plus à droite dans la position la plus à gauche, cela fait que chaque bloc (à partir du moment où il n'y a plus de fusions) va se retrouver à un moment en tant que bloc le plus à droite.

Mais donc chaque bloc contient au moins $2n-k+1$ pièces. Si il n'y a pas 2 blocs (sinon (k,n) fonctionnerait) alors il y en a au moins 4 (3 est impossible car les blocs fusionneraient), et donc le nombre total de pièces vaut au moins $4(2n-k+1)$, c'est-à-dire que l'on a $2n \geq 4(2n-k+1)$ ie $k \geq 3n/2+1$.

On en déduit que tous les (k,n) pour $n \leq k \leq 3n/2$ fonctionnent.

Exhibons maintenant des constructions pour montrer que les cas exclus ne fonctionnent pas.

Supposons que $k < n$. Alors si les pièces sont arrangées de la façon suivante : $A...AB...BA$ avec $n-1$ A au début et un à la fin, les opérations ne changent pas l'ordre des pièces, et donc (n,k) ne convient pas.

Supposons que $k > 3n/2$ donc $k \geq n + \lfloor n/2 \rfloor + 1$.

Arrangeons alors les pièces de la façon suivante : $A...AB...BA...AB...B$ avec un bloc de $\lfloor n/2 \rfloor$ A au début, puis un bloc de $\lfloor n/2 \rfloor$ B, puis $\lceil n/2 \rceil$ A et $\lceil n/2 \rceil$ B.

On remarque qu'on a toujours $2n-k+1 \leq 2n-(n+\lfloor n/2 \rfloor+1)+1 = n-\lfloor n/2 \rfloor = \lceil n/2 \rceil \geq \lfloor n/2 \rfloor$, et donc le bloc de droite contiendra toujours la k-ième pièce et le processus n'atteindra jamais la séquence désirée. Ainsi (n,k) ne convient pas.

Les solutions sont donc exactement les (k,n) pour lesquels $n \leq k \leq 3n/2$.

Solution de l'exercice 13 (IMO 2009, C1)
Il est possible d'associer à toute configuration possible un nombre naturel différent, en voyant les couleurs rouge et blanche respectivement comme des 1 et des 0 d'une écriture en base 2. Puisqu'une opération diminue strictement la valeur du nombre écrit en base 2, le jeu se termine nécessairement en un nombre fini de tours.
De plus, si l'on numérote les carte de 1 à 2025 de gauche à droite, on remarque qu'à chaque tour, exactement une carte dont le numéro est divisible par 50 est retournée. Or, il y a 40 telles cartes, et si un joueur est à court de coups, chacune d'entre elles a dû être retournée un nombre impair de fois. Il est donc impossible que Bob soit à court de coups puisqu'il y a un nombre impair de tours qui se sont écoulés avant l'un de ses coups. Cela montre donc qu'Alice ne peut pas posséder de stratégie gagnante.

6 Géométrie : Similitudes (Anatole)

Ce cours s'attache principalement à l'étude des points de Miquel. Pour un cours plus complet sur les similitudes, on pourra se référer à ce polycopié.

Ce cours est également largement inspiré du cours correspondant dans ce polycopié.

Présentation des similitudes

Définition 1 (Similitude directe)**.**
Une similitude directe est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

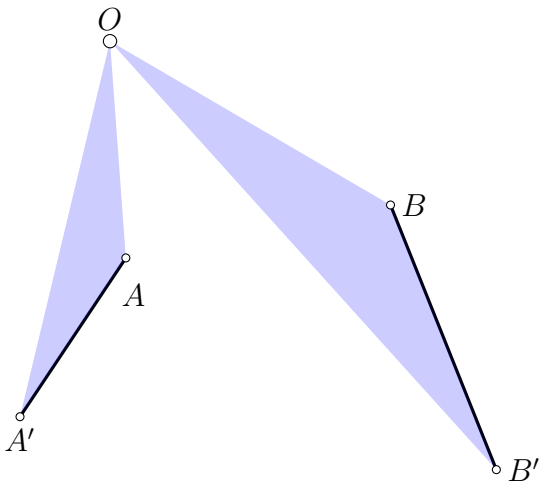
Dans toute la suite, on dira "similitude" pour "similitude directe". Les similitudes indirectes existent bel et bien, mais ne seront pas étudiées ici.

Au vu de cette définition, une similitude envoie tout triangle sur un triangle qui lui est semblable. Cette propriété est fondamentale. Quelques autres propriétés en vrac :

- Une similitude conserve les angles
- Une similitude conserve les rapports de longueurs
- Une similitude a un unique point fixe (son centre), sauf si c'est l'identité
- Les homothéties et les rotations sont naturellement des cas particuliers de similitudes

Théorème 2.
Les similitudes directes sont exactement les transformations du plan qui préservent les angles orientés.

Théorème 3.
Soit O, A, A', B, B' cinq points. O est le centre d'une similitude envoyant A sur A' et B sur B' si et seulement si OAA' est semblable à OBB'.
Si ces conditions sont vérifiées, alors les triangles OAB et $OA'B'$ sont également semblables et il existe aussi une similitude de centre O envoyant A sur B et A' sur B'.



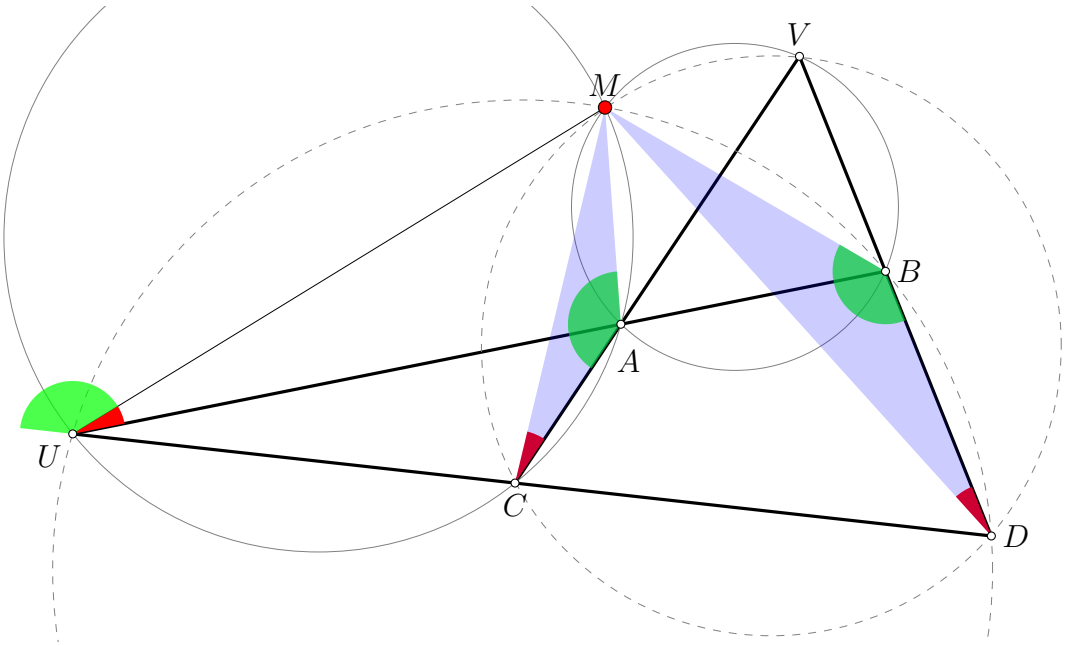
Démonstration. Supposons que O est le centre d'une telle homothétie. On a dit plus haut que les similitudes envoient tout triangle sur un triangle qui lui est semblable, donc OAA' est bien semblable à OBB'.

Réciproquement, supposons les deux triangles semblables. Considérons la similitude de centre O de rapport $\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}$ et d'angle $\widehat{BOA} = \widehat{B'OA'}$. On vérifie aisément qu'elle envoie A sur B et A' sur B' comme voulu.

Reste à montrer que OAB et $OA'B'$ sont semblables. Comme OAA' et OBB' sont semblables, on a déjà $\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$. De plus $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$ donc $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB} - \widehat{A'OA} = \widehat{A'OB} - \widehat{B'OB} = \widehat{A'OB'}$. On a alors une égalité de rapports de côtés et une égalité d'angles, ce qui prouve que les deux triangles sont semblables. □

Le point de Miquel

Théorème 4 (Théorème de Miquel)**.**
Soit A, B, C, D quatre points en configuration générale. Sit U l'intersection de AB et CD, V celle de AC et BD. Alors les cercles ABV, CDV, ACU, BDU ont un point commun M. Il s'agit du point de Miquel associé aux quatre droites AB, CD, AC, BD.



Démonstration. Définissons M comme étant l'intersection des cercles circonscrits à ABV et ACU. On veut montrer qu'il est sur les deux autres cercles.
Il s'agit d'une simple chasse aux angles.
En effet,

$$\begin{aligned}\widehat{CMV} &= \widehat{CMA} + \widehat{AMV} \\ &= \widehat{CUA} + \widehat{ABD} \\ &= 180 - \widehat{UDB}\end{aligned}$$

Donc, par la réciproque du théorème de l'angle inscrit, M est sur le cercle circonscrit à CVD.
On raisonne de même pour le quatrième cercle. □

Théorème 5.
Le point M est le centre d'une similitude qui envoie le segment AB sur le segment CD. Il est également le centre de la similitude qui envoie AC sur BD.

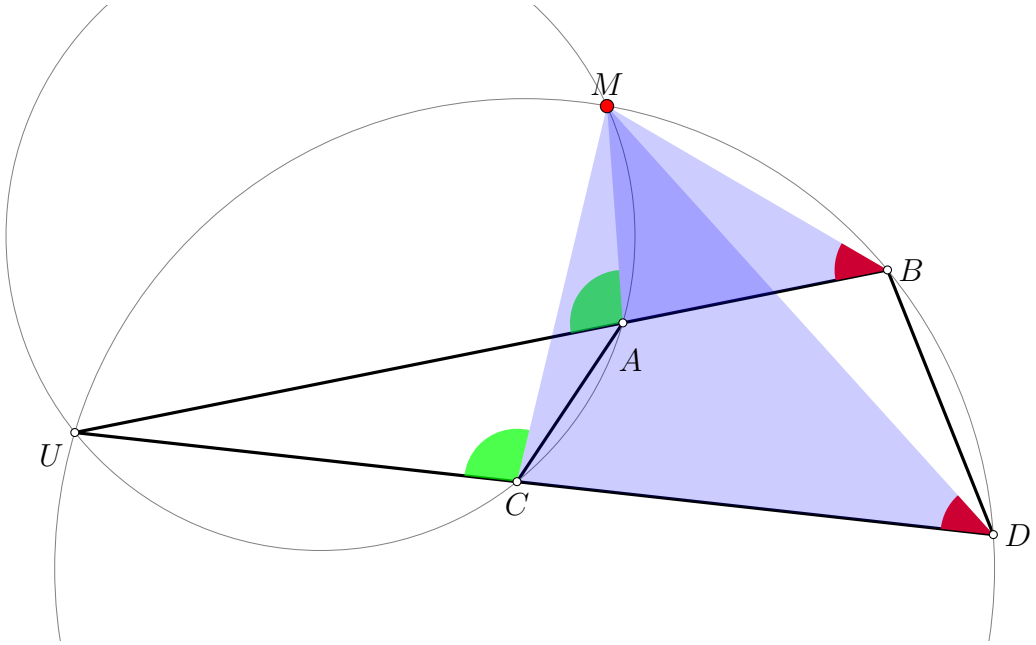
Démonstration. On va montrer que les triangles CMA et DMB sont semblables. On a en effet $\widehat{MAC} = 180 - \widehat{MUC} = \widehat{MBD}$ et $\widehat{MCA} = \widehat{MUA} = \widehat{MDB}$. Les deux triangles ont alors les mêmes angles, donc sont semblables.
Par le théorème 3, M est alors le centre de la smilitude envoyant A sur B et C sur D. On raisonne de même pour l'autre similitude. □

Attention, il ne faut pas confondre M avec le centre de la similitude qui envoie AD sur CB, c'est un tout autre point !

La configuration réciproque

Il est tout aussi intéressant de considérer la configuration réciproque, où l'on connaît deux triangles semblables et l'on cherche à montrer des cocyclicités.

Théorème 6 (Réciproque du théorème de Miquel)**.**
Soit A, B, C, D quatre points, U l'intersection de AB et CD et M le centre d'une similitude envoyant AC sur BD (autrement dit, MAB est semblable à MCD).
Alors les quadrilatères $MACU$ et $MBDU$ sont cocycliques.



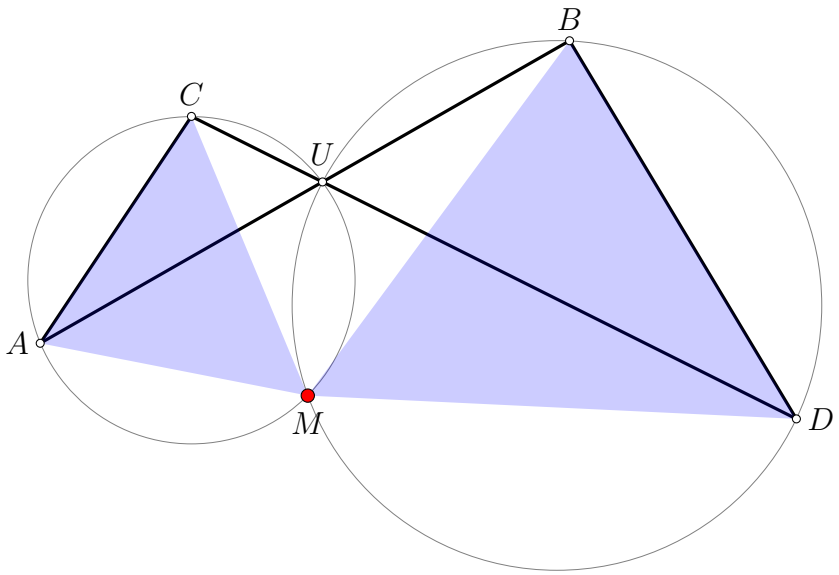
Démonstration. Comme MBA est semblable à MDC, on a $\widehat{MBU} = \widehat{MDU}$ et, par la réciproque du théorème de l'angle inscrit, M, B, D, U sont cocycliques.
De même $\widehat{MAU} = \widehat{MCU}$ donc M, A, C, U sont cocycliques. □

On a ainsi montré qu'il existe une unique similitude envoyant AB sur CD, et son centre est le point M défini plus haut.
On a montré au début que M est également le centre de la similitude envoyant AC sur BD. Cette similitude envoie alors le cercle circonscrit à MAC sur le cercle circonscrit à MBD. On peut alors énoncer le très important lemme suivant.

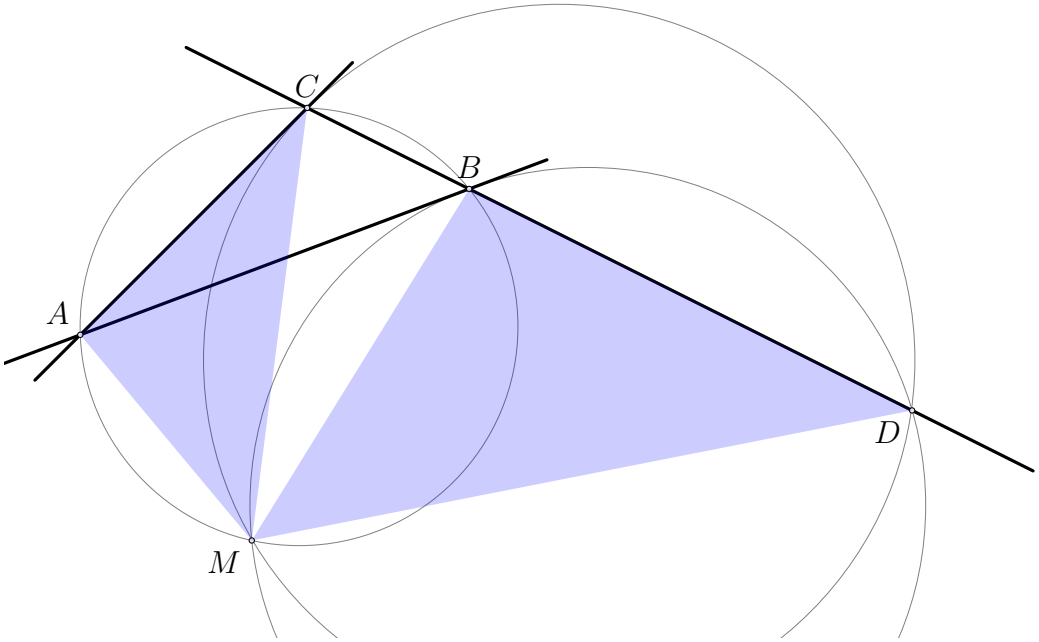
Lemme 7.
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles s'intersectant en M et U. Soit $\mathcal{S}$ la similitude de centre M envoyant ω_1 sur ω_2. Soit $A \in \omega_1$. Alors l'image de A par $\mathcal{S}$ est alignée avec A et U.

Démonstration. Notons A' l'intersection de AU avec ω_2. Soit $B \in \omega_1$ et de même B' l'intersection de B avec ω_2. Alors, d'après le théorème de Miquel, une similitude de centre M envoie A sur A' et B sur B'. Elle envoie alors ω_1 sur ω_2, donc il s'agit de $\mathcal{S}$. Ainsi, $\mathcal{S}$ envoie A sur A', ce qui conclut. □

La configuration ci-dessus est extrêmement fréquente, et peut être difficile à repérer dans une figure. Il faut avoir en tête que le quadrilatère $ABCD$ peut aussi être croisé, comme sur la figure suivante.



Une dernière configuration possible est le cas dégénéré où trois des quatre points sont alignés. Tout ce qui a été dit reste vrai, mais la configuration peut être plus délicate à repérer, comme sur la figure suivante.



Ce qu'il faut retenir :

— Lorsqu'on a deux cocyclicités, le théorème de Miquel peut en fournir deux autres.

— Lorsqu'on a deux cocyclicités, le théorème de Miquel peut fournir deux triangles semblables.

— Lorsqu'on a deux triangles semblables, le théorème de Miquel peut fournir quatre cocyclicités.

— Et dans tous les cas ci-dessus, le théorème de Miquel fournit une similitude envoyant un segment sur un autre !

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle et N le pôle Nord issu du sommet A. Soit Ω un cercle passant par N et A, coupant $[AB]$ et $[AC]$ en X et Y respectivement. Montrer que $XB = YC$.

Exercice 2 (Lemme des escargots)
Turbo, Burto et Torbu les escargots avançent à vitesse constante (pas forcément la même pour les trois escargots) sur trois droites en position générale. On suppose que le triangle qu'ils forment au temps 0 est semblable au triangle qu'ils forment au temps 1. Montrer que le triangle qu'ils forment à tout temps t est semblable à ces deux triangles.

Exercice 3
Soit ABC un triangle isocèle en A, H le milieu de BC. Soit M le milieu de AH et P le projeté orthogonal de H sur MB. Montrer que $\widehat{APC} = 90°$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C

respectivement. On note E' (resp. F') le symétrique de E (resp. F) par rapport à C (resp. B). Soit K l'intersection du cercle circonscrit à $AE'F'$ avec AD autre que A. Montrer que $HK = 4 \cdot HD$.

Exercice 5
Soit ABC un triangle et N le pôle Nord issu de A. Soit M le milieu de AB. Soit P l'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ avec la médiatrice de $[AC]$. Montrer que A, N, M, P sont cocycliques.

Exercice 6
Soit ABC un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit. Soit D le pied de la bissectrice issue de A. Soit O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles circonscrits à ABD et ACD. Montrer que $OO_1 = OO_2$.

Exercice 7 (BMO 2006, P2)
Soit ABC un triangle. Soit d une droite qui intersecte les segments $[AB]$ et $[AC]$ en des points D et F respectivement et qui intersecte la droite (BC) en un point E tel que C soit situé entre les points B et E. Les droites parallèles à la droite d passant par les points A, B et C recoupent chacune le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en les points A_1, B_1, C_1. Montrer que les droites (A_1E), (B_1F) et (C_1D) sont concourantes.

Exercice 8 (Sharky-Devil Point)
Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit D, E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangle ABC avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. La droite perpendiculaire au segment $[EF]$ passant par le point D recoupe le segment $[AB]$ en un point G. Le cercle circonscrit au triangle AEF recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point X. Montrer que les points X, G, D et B sont cocycliques.

Exercice 9 (Japan MO 2020 P2)
Soit ABC un triangle tel que $BC < AB$ et $BC < AC$. Soient E et F des points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BE = BC = CF$. Les droites (BF) et (CE) se coupent en un point P. Les cercles circonscrits aux triangles ABF et ACE se recoupent en un point Q. Montrer que la droite (PQ) est perpendiculaire au segment $[BC]$.

Indications

— Exo 1 : Une similitude qui envoie un segment sur un segment de même longueur est une rotation.

— Exo 2 : Considérer la similitude qui envoie ABC sur $A'B'C'$ et montrer qu'une similitude de même centre envoie ABC sur $A''B''C''$.

— Exo 3 : Trouver une similitude intéressante de centre P.

— Exo 4 : On connaît bien le symétrique de H par rapport à D, et on veut montrer que c'est le milieu de HK...

— Exo 5 : Introduire la deuxième intersection du cercle circonscrit à ANM avec AC.

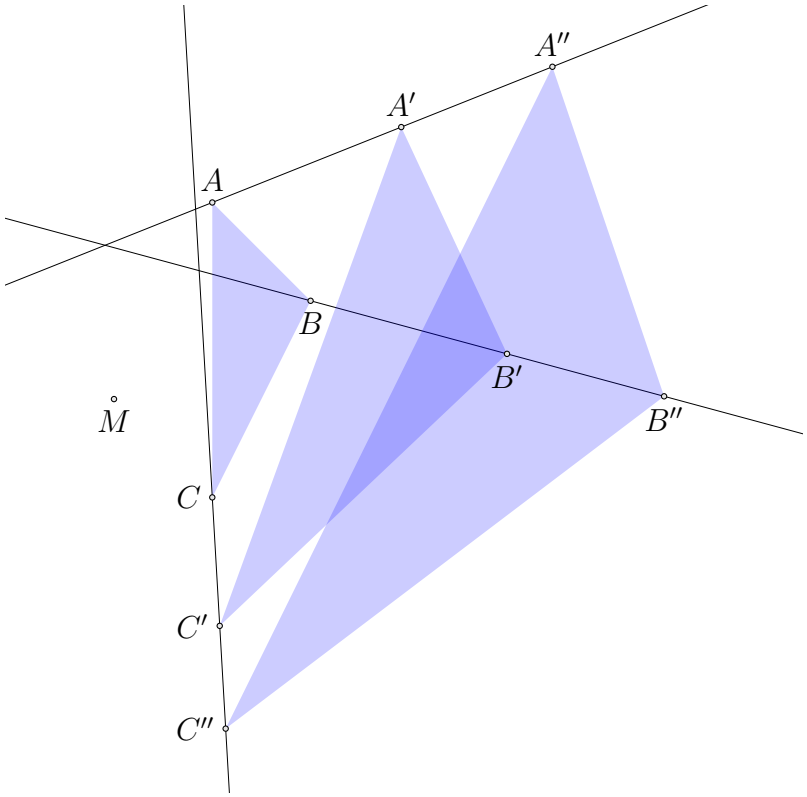
— Exo 6 : Trouver une jolie similitude de centre A...

— Exo 7 : Le point en question est le point de Miquel des paires de points (D, F) et (B, C).

Solutions

Solution de l'exercice 1
Voir l'exercice 87 de ce poly, corrigé dans ce poly.

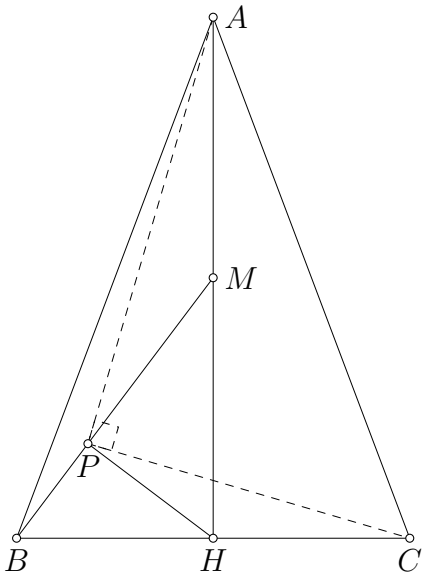
Solution de l'exercice 2



Soit ABC le triangle formé par les escargots au temps 0, $A'B'C'$ le triangle formé au temps 1, $A''B''C''$ le triangle formé au temps t.
Soit M le centre de la similitude S_1 envoyant A sur A' et B sur C'. Alors S_1 envoie aussi C sur C' car ABC est semblable à $A'B'C'$.
On sait alors qu'une autre similitude S_2 de centre M envoie A sur B et A' sur B'. Mais comme les triangles (dégénérés) $AA'A''$ et $BB'B''$ sont semblables, elle envoie A'' sur B''. Ainsi, M est aussi le centre d'une similitude S_3 envoyant A sur A'' et B sur B''.

On montre de même que M est le centre d'une similitude S_4 envoyant A sur A'' et C sur C''. Or, la similitude de centre M envoyant A sur A'' est unique, donc $S_3 = S_4$. Bref, on a montré qu'une similitude envoie A sur A'', B sur B'' et C sur C'' donc $ABC \sim A''B''C''$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3



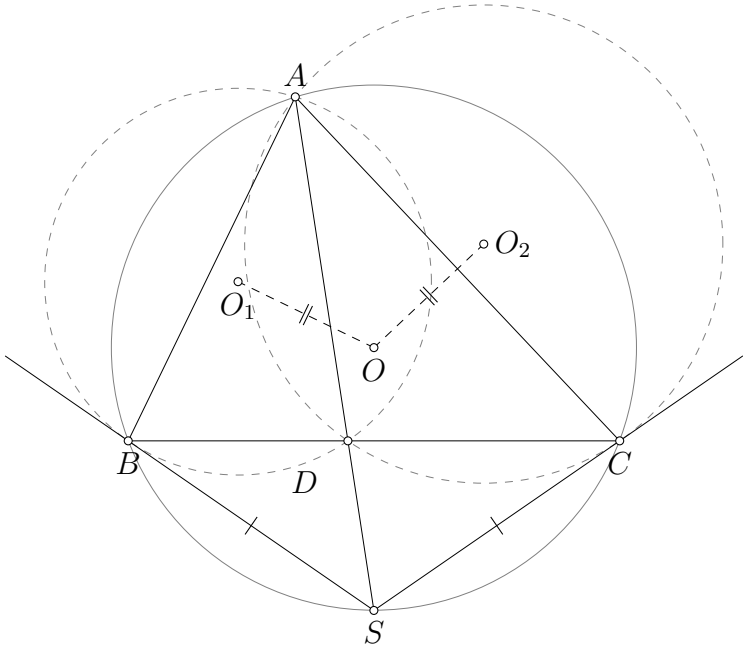
On sait déjà que $\widehat{HPM} = 90°$, on peut donc raisonnablement supposer qu'on va devoir montrer que les triangles HPM et CPA sont semblables.
On sait en fait déjà que les triangles HPM et BPH sont semblables : en effet, il s'agit d'un triangle rectangle avec le pied de la hauteur issue du troisième sommet. Ce premier résultat est de nature à nous conforter dans notre conjecture initiale.
Ces triangles semblables nous offrent déjà une similitude de centre P : celle qui envoie B sur H et H sur M. Or, les triangles (dégénérés) BHC et HMA sont directement semblables. Mais C est justement envoyé sur un point C' tel que HMC' est semblable à BHC (car c'est son image par la similitude) : on a donc $C' = A$ et la similitude envoie C sur A.

Ainsi, elle envoie H sur M et C sur A, donc PHM est semblable à PCA. On en déduit que $\widehat{APC} = \widehat{MPH} = 90°$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4
Voir l'exercice 90 de ce poly, corrigé dans ce poly.

Solution de l'exercice 5
Voir l'exercice 89 de ce poly, corrigé dans ce poly.

Solution de l'exercice 6



On introduit S, le pôle Sud issu de A dans ABC.
Soit $\omega, \omega_1, \omega_2$ les cercles circonscrits à ABC, ABD et ACD respectivement. Une similitude $\mathcal{S}_1$ de centre A envoie ω_1 sur ω et donc O_1 sur O. On remarque que BS est tangent à ω_1 : en effet, $\widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \widehat{BAD}$. Ainsi, on se trouve dans le cas dégénéré du lemme 7 et $\mathcal{S}_1$ envoie B sur S. Ainsi, $\mathcal{S}_1$ envoie O_1 sur O et B sur S, donc il existe une similitude $\mathcal{S}$ de centre A qui envoie O_1 sur B et O sur S.

De même, il existe $\mathcal{S}_2$ de centre A envoyant O_2 sur O et C sur S, donc il existe $\mathcal{S}'$ envoyant O_2 sur C et O sur S.

On a ainsi mis en évidence deux similitudes de centre A envoyant O sur S : $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$. Il s'agit alors de la même similitude, qui envoie donc O_1OO_2 sur BSC. Ainsi, ces deux triangles sont semblables et, comme $SB = SC$, on en déduit $OO_1 = OO_2$.

Solution de l'exercice 7
Voir l'exercice 92 de ce poly, corrigé dans ce poly.

Solution de l'exercice 8
Voir l'exercice 91 de ce poly, corrigé dans ce poly.

Solution de l'exercice 9
Voir l'exercice 98 de ce poly, corrigé dans ce poly.

7 Géométrie : Pot-pourri (Tiphaine et Arthur)

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle aux angles aigus et soit O le centre de son cercle circonscrit. La perpendiculaire à la droite (BC) en C coupe la tangente en A au cercle circonscrit au triangle ABC au point K. La parallèle à la droite (AB) passant par K coupe la droite (BC) au point D. Montrer que les points A, O et D sont alignés.

Exercice 2 (Tour final Suisse 2019)
Soit k un cercle et A un point sur ce cercle. Soient B et C deux autres points sur le cercle k. Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec le cercle k. Soit Y le symétrique du point A par rapport au point X. Soit D le point d'intersection de la droite (YC) avec le cercle k. Montrer que le point D obtenu ne dépend pas du choix des points B et C sur le cercle k.

Exercice 3 (BXMO 2022)
Soit ABC un triangle aux angles aigus. Soit B_1 le point de la demi-droite $[AC)$ tel que $AB_1 = BB_1$. Soit C_1 le point de la demi-droite $[AB)$ tel que $AC_1 = CC_1$. Soient B_2 et C_2 les points de la droite (BC) tels que $AB_2 = CB_2$ et $BC_2 = AC_2$. Montrer que B_1, C_1, B_2 et C_2 sont cocycliques.

Exercice 4
Soit Γ un cercle et P un point situé à l'extérieur de ce cercle. Les tangentes à Γ issues de P touchent le cercle aux points A et B. Soit M le milieu du segment $[BP]$ et C le point d'intersection de la droite (AM) avec le cercle Γ. Soit D le second point d'intersection de la droite (PC) avec le cercle Γ. Montrer que les droites (AD) et (BP) sont parallèles.

Exercice 5 (IMO SL 2010 G1)
Soit ABC un triangle et D, E et F les pieds des hauteurs issus des sommets A, B et C. Soit P l'un des deux points d'intersection de la droite (EF) avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Les droites (BP) et (DF) se coupent en Q. Montrer que $AP = AQ$.

Exercice 6
Soit ABC un triangle et M le milieu de $[AB]$. On suppose $BM = BC$. Soit D le point sur $[AC]$ tel que $DC = 2AD$. Montrer que $\widehat{DMC}$ est un angle droit.

Exercice 7 (IMO SL 2019 G1)
Soit ABC un triangle. Un cercle Ω passant par A recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ aux points D et E et coupe $[BC]$ en F et G, de sorte que B, F, G et C sont alignés dans cet ordre. La tangente au cercle circonscrit au triangle BDF en F et la tangente au cercle circonscrit au triangle CEG en G se coupent en T. Montrer que les droites (AT) et (BC) sont parallèles.

Exercice 8 (IMO SL 2025 G1, P2 Test novembre 2025)
Soit ABC un triangle dans lequel l'angle $\widehat{BAC}$ est obtus. Soient D et E deux points appartenant respectivement aux segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que le quadrilatère $BDEC$ est cyclique. Le cercle circonscrit au triangle ADE coupe le segment $[BC]$ en deux points X et Y, de sorte

que B, X, Y et C soient alignés dans cet ordre. On note Ω_B et Ω_C les cercles circonscrits aux triangles BDX et CEY respectivement. On note P le point d'intersection de la tangente à Ω_B en D et de la tangente à Ω_C en E. On note Q le point d'intersection de la tangente à Ω_B en B et de la tangente à Ω_C en C. Montrer que les points A, P et Q sont alignés.

Exercice 9 (EGMO 2022 P1)
Soit ABC un triangle dans lequel $BC < AB$. Soit P un point distinct de B sur le segment $[AB]$ et Q un point distinct de C sur le segment $[AC]$ tels que $BQ = BC = CP$. Soit T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ, H l'orthocentre du triangle ABC et S le point d'intersection des droites (BQ) et (CP). Montrer que les points T, H et S sont alignés.

Exercice 10
Soient D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement dans un triangle non équilatéral ABC. Le centre du cercle circonscrit à ABC est noté O. Montrer que les cercles (AOD), (BOE) et (COF) s'intersectent en un point X autre que O.

Exercice 11 (Test novembre 2024)
Soit ABC un triangle dont les angles sont tous aigus. On note B' et C' les pieds respectifs des hauteurs issues des sommets B et C. Soient K et L les symétriques respectifs du point B' par rapport aux droites (AB) et (BC). Soient M et N les symétriques respectifs du point C' par rapport aux droites (AC) et (BC). Démontrer que $KL = MN$.

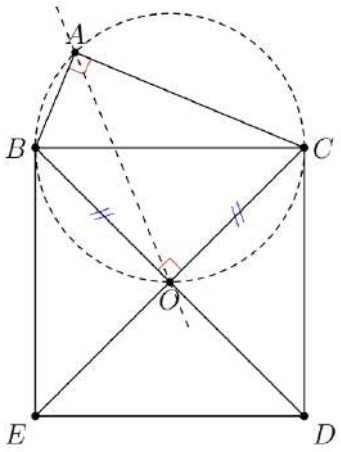
Solutions

Solution de l'exercice 1
On va montrer que $\widehat{KAO} = \widehat{KAD}$. Etant donné que (KA) est la tangente en A au cercle circonscrit à ABC, montrons que $\widehat{KAD} = 90$. On a par hypothèse $(KA) \perp (AD)$, donc il suffit de montrer que $\widehat{KAD} = \widehat{KDC}$, c'est à dire par angles opposés que $KADC$ cyclique.

Comme (AD) et (KD) parallèles, $\widehat{KDC} = \widehat{ABC}$ par angles correspondants. Et par angle tangentiel, $\widehat{ABC} = \widehat{KAC}$. L'égalité $\widehat{KDC} = \widehat{KAC}$ permet de conclure par angle inscrit.

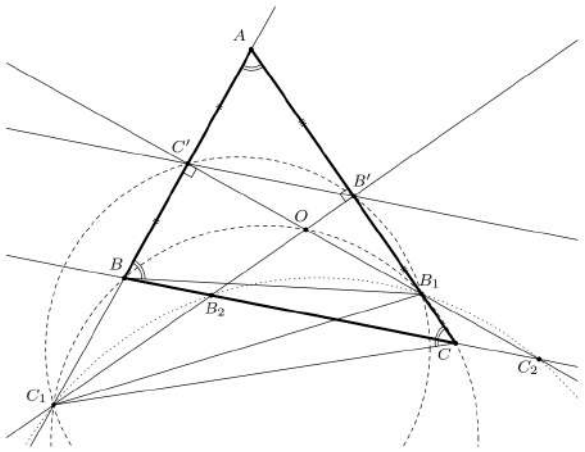
Solution de l'exercice 2
Le point X est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Il s'agit donc du pôle Sud du point B dans le triangle ABC. Il appartient donc à la médiatrice du segment $[AC]$.

On a donc $AX = XC$. On en déduit que $AX = XC = XY$. Le point X est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ACY et le segment $[AY]$ en est un diamètre. Donc $\widehat{YCA} = 90°$ et $\widehat{ACD} = 90°$. Le point D est donc le point diamétralement opposé au point A dans le cercle circonscrit à ABC, sa position ne dépend donc pas des points B et C.



Solution de l'exercice 3
Par construction, $\widehat{B_1BA} = \widehat{BAB_1} = \widehat{C_1CA}$, donc par angles inscrits, BC_1B_1C cyclique. Et de même, $\widehat{BAC_2} = \widehat{ABC_2}$.

Puisque B_1C_2 médiatrice de (AB), on a $\widehat{BC_2B_1} = 90 - \widehat{CBC_1}$. Mais par angle inscrit dans BC_1B_1C, on a aussi $90 - \widehat{C_1BC} = 90 - \widehat{C_1BA} = 180 - \widehat{B_2C_1B_A}$, ce qui conclut par angles opposés.



Solution de l'exercice 4
On utilise la puissance d'un point pour M : on a $MA \times MC = MB^2$. Or $MB = MP$, donc $MP^2 = MA \times MC$. Donc (MP) est tangente au cercle circonscrit à CAP.

On en déduit que $\widehat{CPM} = \widehat{PAC}$, et comme (PA) est tangente à Γ, que $\widehat{PAC} = \widehat{ADC}$. Ainsi $\widehat{BPD} = \widehat{CPM} = \widehat{ADC} = \widehat{ADP}$, donc (AD) et (BP) sont parallèles.

Solution de l'exercice 5

Notons γ l'angle $\widehat{ACB}$. On veut montrer $\widehat{APQ} = \widehat{AQP}$.

Comme $ABCP$ cyclique, $\widehat{APQ} = \widehat{ACB} = \gamma$.

De plus, comme $BFEC$ et $ACDF$ cycliques, on a par angles opposés $\gamma = \widehat{AFP} = \widehat{BFQ}$ donc $\widehat{AFQ} = 180 - \gamma = 180 - \widehat{APQ}$, donc par angles opposés, $APQF$ cyclique. Enfin, par angle inscrit dans ce quadrilatère, on déduit que $\widehat{AQP} = \widehat{AFP} = \widehat{APQ}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6
On introduit N le milieu de CD. L'énoncé équivaut alors à montrer que $NC = NM$. Montrons donc que NMB et NCB sont isométriques. Comme ils ont déjà 2 côtés de même longueur, il suffit de montrer que les angles ainsi formés, à savoir $\widehat{NBM}$ et $\widehat{NBC}$ sont égaux, c'est à dire que NB bissectrice de ABC. Mais l'égalité de rapport $\dfrac{BC}{BA} = \dfrac{CN}{AN} = \dfrac{1}{2}$ nous permet de l'affirmer par le théorème de la bissectrice, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7
Notons γ l'angle $\widehat{ACB}$. Montrons que T appartient au cercle circonscrit à ADE. Comme $ADGE$ est cyclique, on a $\widehat{DGE} = 180° - \widehat{BAC}$, ce qui implique $\widehat{DGE} = \widehat{ABC} + \gamma$. Or en décomposant l'angle, $\widehat{DGE} = \widehat{DGT} + \widehat{TGE}$ et, par angle tangentiel, $\widehat{TGE} = \gamma$, d'où $\widehat{DGT} = \widehat{ABC}$. Par ailleurs, dans DBF, l'angle tangentiel donne $\widehat{ABC} = \widehat{DFT} = \widehat{DGT}$, ce qui montre que A, T, E, G, F, D sont cocycliques. Dès lors, par angle inscrit, on obtient $\gamma = \widehat{TGE} = \widehat{TAE}$, donc par angles alternes-internes, $(AT) \parallel (BC)$.

Solution de l'exercice 8

La présence des nombreuses tangentes nous invite à montrer que les points A, P et Q sont tous les trois sur l'axe radical des cercles Ω_B et Ω_C. C'est ce que nous allons montrer

successivement. On note pour cela $\mathcal{C}_{ADE}$ et $\mathcal{C}_{BCDE}$ les cercles circonscrits au triangle ADE et au quadrilatère $BCDE$.

A est sur l'axe radical de Ω_B et Ω_C : En effet, puisque les points D, B, C et E sont cocycliques, on a par puissance d'un point,

$$\mathcal{P}_{\Omega_B}(A) = AD \cdot AB = AE \cdot AC = \mathcal{P}_{\Omega_C}(A).$$

$AX = AY$: En effet, d'après le théorème de l'angle inscrit dans les cercles $\mathcal{C}_{ADE}$ et $\mathcal{C}_{BCDE}$,

$$\widehat{AXD} = \widehat{AED} = 180° - \widehat{CED} = \widehat{ABX}.$$

On déduit que la droite (AX) est tangente au cercle Ω_B en X. De même, (AY) est tangente au cercle Ω_C en Y. Puisque A est sur l'axe radical des deux cercles, on a alors

$$AX^2 = \mathcal{P}_{\Omega_B}(A) = \mathcal{P}_{\Omega_C}(A) = AY^2.$$

Q est sur l'axe radical de Ω_B et Ω_C : D'après le théorème de l'angle tangent dans Ω_C et le théorème de l'angle inscrit dans le cercle $\mathcal{C}_{ADE}$,

$$\widehat{QCB} = \widehat{CEY} = 180° - \widehat{YEA} = \widehat{YXA}.$$

Mais on a de même $\widehat{QBC} = \widehat{AYX}$, et puisque $\widehat{AXY} = \widehat{AYX}$, on trouve que le triangle BQC est isocèle, de sorte que

$$\mathcal{P}_{\Omega_B}(Q) = QB^2 = QC^2 = \mathcal{P}_{\Omega_C}(Q).$$

P est sur l'axe radical de Ω_B et Ω_C : Il s'agit là de montrer que $EP = DP$. C'est à nouveau une chasse aux angles. D'après le théorème de l'angle tangent dans Ω_B et le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{BCDE}$,

$$\widehat{EDP} = \widehat{ADP} - \widehat{EDA} = \widehat{DXB} - \widehat{EDA} = \widehat{YAD} - \widehat{ACB}.$$

D'autre part,

$$\widehat{PED} = \widehat{YED} - \widehat{YEP} = \widehat{YAD} - \widehat{ACB}.$$

On déduit bien que le triangle DEP est isocèle et que

$$\mathcal{P}_{\Omega_B}(P) = PD^2 = PE^2 = \mathcal{P}_{\Omega_C}(P).$$

Ceci conclut que les trois points sont alignés sur l'axe radical de Ω_B et Ω_C.

Solution de l'exercice 9
On note $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ACB}$. Si on montre que (SH) bissectrice de $\widehat{BSC}$ et (TS) de $\widehat{PSQ}$, on aura résolu l'exercice par angles opposés par le sommet.

— Montrons d'abord que $\widehat{HSC} = \widehat{BSH}$. On remarque que $QSHC$ est cyclique. En effet, comme (BH) médiatrice de $[BC]$, $\widehat{HCA} = 90 - \alpha = \widehat{HQC}$ et comme $BC = BQ$, $\widehat{SQC} = \gamma$. Alors, $\widehat{SQH} = \gamma - (90 - \alpha) = 90 - \beta = \widehat{HCS}$. Donc $QSHC$ cyclique par angles inscrits. Alors, par angles inscrits dans ce quadrilatère, $90 - \alpha = \widehat{HQC} = \widehat{HSC}$ et par angles opposés, $\widehat{HCQ} = 180 - \widehat{HSQ} = \widehat{BSH} = 90 - \alpha$. Donc on a bien $\widehat{HSC} = \widehat{BSH} = 90 - \alpha$.

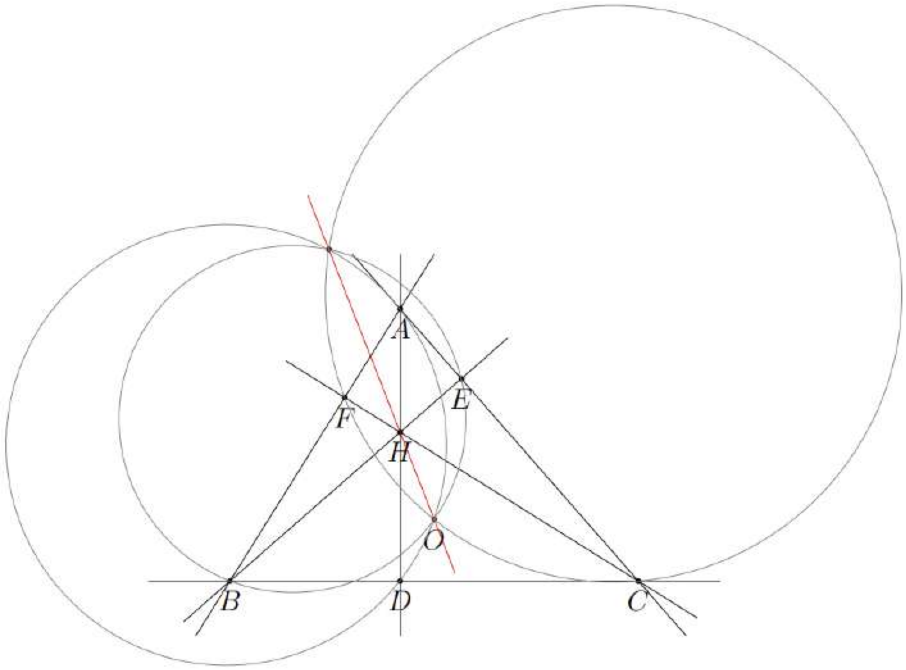
— Montrons maintenant que $\widehat{PST} = \widehat{TSQ}$. On commence par prouver la cocyclicité de P, S, Q, T. Par angle au centre dans le cercle circonscrit à APQ, $\widehat{PTQ} = 2\alpha$, et par angles opposés par le sommet, $\widehat{PSQ} = \widehat{BSC} = 2(90 - \alpha) = 180 - 2\alpha$, donc par angles opposés, $PSQT$ cyclique.

Or P et Q appartiennent au cercle de centre T, donc $\widehat{TPQ} = \widehat{PQT} = (180 - 2\alpha) \times \frac{1}{2} = 90 - \alpha$, et il en résulte par angles inscrits que $\widehat{PST} = \widehat{TSQ} = 90 - \alpha$.

Ainsi, par angles opposés par le sommet, comme on a l'égalité $\widehat{TSQ} = \widehat{BSH}$, on peut conclure que T, S et H sont alignés.

Solution de l'exercice 10

On introduit H, l'orthocentre du triangle ABC. On montre qu'il appartient à l'axe radical des trois cercles en calculant sa puissance par rapport à chacun d'eux, puis en utilisant notamment le fait que le quadrilatère $EADB$ est cocyclique. Les trois cercles sont donc coaxiaux (leurs axes radicaux sont confondus) et ils s'intersectent en un second point distinct de O.



Solution de l'exercice 11

Lien du corrigé

8 Combinatoire : Pot-pourri (Antoine D)

Les exercices sont pris d'un peu partout : du cours de Gaëtan et Eva (en groupe C), ainsi que de celui d'Emilhan (en groupe D) de cette année, mais également du cours d'Emilhan de l'an dernier en groupe B et de celui de Raphael en 2024 en groupe C. J'en ai enfin rajouté quelques autres qui ne sont pas originaires d'un TD précis.

Exercices

Exercice 1
Dans chaque case d'un échiquier 8×8, on a écrit un entier parmi $0, 1$ ou -1. Est-il possible que toutes les sommes des nombres écrits sur les lignes, les colonnes et sur les deux grandes diagonales de l'échiquier soient différentes ?

Exercice 2
Lors d'une fête, 2026 personnes s'assoient autour d'une table ronde en se répartissant de façon régulière. Après s'être assises, elles constatent qu'un carton indiquant un nom est posé à chacune des places et que personne n'est assis à la place où figure son nom. Montrer qu'on peut tourner la table de telle sorte que deux personnes (au moins) se retrouvent assises en face de leur nom.

Exercice 3
On considère 1000 points distincts dans le plan, tels que tout ensemble de 4 points en contient 2 qui sont à distance inférieure ou égale à 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 contenant 334 points.

Exercice 4
On considère un $2n$-gone, pas forcément régulier. Montrer qu'il y a une diagonale qui n'est parallèle à aucun des côtés.

Exercice 5
Les nombres a, b, c, d qui ne sont pas tous égaux sont écrits, de gauche à droite, sur un tableau. Chaque minute, Emilhan efface ces nombres, et les remplace par $a - b, b - c, c - d, d - a$ de gauche à droite. Montrer qu'au moins un des nombres devient arbitrairement grand.

Exercice 6
Soit n et k deux entiers strictement positifs. On considère une grille de taille $n \times n$. On souhaite la recouvrir entièrement de dominos de taille $k \times 1$ ou $1 \times k$ sans qu'ils se chevauchent. Déterminer quand cela est possible.

Exercice 7
Deux nombres distincts sont écrits sur chaque sommet d'un 2026-gone. Montrer que l'on peut retirer un nombre par sommet de sorte que les nombres écrits sur des sommets consécutifs soient toujours distincts.

Exercice 8
On considère une grille $2^n \times 2^n$ à laquelle il manque une case. Est-il possible de paver cette grille avec des triominos en L ?

Exercice 9
Antoine et Anatole jouent au jeu suivant : le nombre 2 est écrit au tableau, et à tour de rôles chacun efface le nombre n écrit au tableau et le remplace par $n + p$, où p est un diviseur premier de n. Le joueur qui écrit un nombre plus grand que 2026^{2026} en premier a perdu. Si Antoine commence à jouer, lequel des deux a une stratégie gagnante ?

Exercice 10
a) n enfants sont assis en cercle et ont chacun un certain nombre de bonbons. Chaque minute, chaque élève donne la moitié de ses bonbons à son voisin de droite. Si il possède un nombre impair de bonbons, Gaëtan le méchant lui en prend un avant. Montrer que les élèves finiront par tous avoir le même nombre de bonbons.

b) Cette fois les bonbons sont empoisonnés, et Gaëtan le méchant donne un bonbon aux élèves qui en ont un nombre impair. Montrer la même conclusion que précédemment.

Exercice 11
Gaëtan essaie de diviser les n animatheurs du stage de Valbonne et a réussi à monter certains d'entre eux les uns contre les autres. Rémi essaie de rétablir la situation, il remarque cependant qu'aucun animatheur a plus que trois ennemis. Montrer qu'il peut répartir les animatheurs en deux demi-périodes, de sorte qu'un animatheur soit dans la même demi-période qu'au plus un de ses ennemis.

Exercice 12 (EGMO 2026, P1)
Un tableau 2026×2026 est dit *bordeaux* si au moins une de ses cases est rouge. Un rectangle est dit *cool* si il contient un nombre impair de cases rouges. Déterminer l'entier M maximal, tel que dans chaque tableau bordeaux, il existe un rectangle cool avec au moins M cases.

Exercice 13 (EMO 2026, P1)
Pour quelles valeurs de n peut-on diviser l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ en deux ensembles A et B de cardinal n tels que la somme des éléments de A divise la somme des éléments de B ?

Solutions

Solution de l'exercice 1
On a 8 sommes qui viennent des lignes, 8 des colonnes et 2 des diagonales, donc 18 en tout. Cependant, les seules sommes possibles sont les nombres entiers entre -8 et 8, il y en a 17. Le principe des tiroirs nous donne donc l'existence de deux sommes qui ont la même valeur.

Solution de l'exercice 2
Appelons une "rotation" le fait de tourner la table d'un cran vers la droite ; notons qu'après 2026 rotations on est revenus au début. Par ailleurs, pour chaque personne assise à la table, il existe un (unique) nombre de rotations plus petit que 2025 tel que cette personne soit assise en face de son nom. À présent, on a 2025 rotations possibles (de 1 à 2025, puisque l'énoncé exclu 0 rotations), et 2026 personnes, donc on doit avoir un nombre de rotations après lesquelles au moins deux personnes sont assises en face de leur nom, et on a fini.

Solution de l'exercice 3
Soit d le nombre maximal de points deux à deux à distance strictement supérieure à 1. On sait que $d \leq 3$ par la condition de l'exercice.

Pour chaque point A, on considère A avec l'ensemble des d points. Si $d = 3$, on sait par la condition de l'énoncé que A est à distance moins de 1 d'un des d points. Si $d < 3$, de même, autrement on aurait pu choisir ce point et avoir $d = 3$. Si on pose les d points comme étant les tiroirs et l'ensemble des 1000 points comme les chaussettes, en appliquant le principe des tiroirs, on a bien 334 points à distance moins de 1 d'un des d points. Donc si on trace le cercle de centre ce point et rayon 1, on résout l'exercice.

Solution de l'exercice 4
Notons $A_1, A_2, \cdots, A_{2n}$ les sommets du polygone, choisissons le côté A_1A_2 et comptons le nombre de diagonales possibles parallèles à ce côté. Pour chaque sommet il n'y a qu'une seule droite parallèle à (A_1A_2) passant par ce sommet. Comme chacune de ces diagonales relies 2 sommets on obtient alors au plus

$$\frac{2n-2}{2} = n - 1$$

diagonales possibles. Cependant une telle configuration nécessiterait de tracer $(A_{2n}A_3)$,$(A_{2n-1}A_4)$,...,$(A_{n+3}A_n)$,$(A_{n+2}A_{n+1})$. Mais $A_{n+2}A_{n+1}$ est un côté du polygone, il ne peut donc s'agir d'une diagonale. Le maximum de diagonales parallèles à (A_1A_2) est donc au plus $(n-2)$. On fait le même raisonnement pour (A_kA_{k+1}) et au total comme il y a $2n$ côtés on a

$$\#\{\text{diagonales parallèle à un côté}\} \leqslant 2n \times (n-2)$$

Or

$$\#\{\text{diagonales}\} = \binom{2n}{2} - 2n = \frac{2n \times (2n-1)}{2} - 2n = 2n \times (n - \frac{3}{2}).$$

Comme $2n \times (n - \frac{3}{2}) > 2n \times (n-2)$, on peut trouver une diagonale qui n'est parallèle à aucun côté.

Solution de l'exercice 5
Pour (a_n, b_n, c_n, d_n) on pose

$$S_n = a_n + b_n + c_n + d_n$$

$$A_n = a_n - b_n + c_n - d_n.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} + d_{n+1} \\ &= (a_n - b_n) + (b_n - c_n) + (c_n - d_n) + (d_n - a_n) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $S_n = 0$ pour tout $n > 1$ et

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= a_{n+1} - b_{n+1} + c_{n+1} - d_{n+1} \\ &= (a_n - b_n) - (b_n - c_n) + (c_n - d_n) - (d_n - a_n) \\ &= 2a_n - 2b_n + 2c_n - 2d_n \\ &= 2A_n \end{aligned}$$

Donc si $A_1 \neq 0$ alors $A_n = 2^n A_1$ qui diverge donc au moins un des quatres nombre deviens abitrairement grand.

On considère maintenant le cas où $A_1 = 0$. Alors $A_n = S_n = 0$ pour tout $n > 1$. Dans ce cas

$$\begin{aligned} S_n + A_n &= 2a_n + 2c_n = 0 \\ S_n - A_n &= 2b_n + 2d_n = 0 \end{aligned}$$

soit $a_n = -c_n$ et $b_n = -d_n$. L'itération $(a_n, b_n, -a_n, -b_n) \to (a_{n+1}, b_{n+1}, -a_{n+1}, -b_{n+1})$ donne

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - b_n \\ b_{n+1} &= b_n + a_n \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= a_n - b_n - b_n - a_n = -2b_n \\ b_{n+2} &= b_n + a_n + a_n - b_n = 2a_n \end{aligned}$$

et finalement

$$\begin{aligned} a_{n+4} &= -4a_n \\ b_{n+4} &= -4b_n \end{aligned}$$

soit $a_{4(n+1)} = (-4)^n a_4$ et $b_{4(n+1)} = (-4)^n b_4$ qui divergent.

Une autre manière de conclure était de regarder la somme des carrés des nombres, en exploitant le fait que si a, b, c, d sont de somme nulle,

Solution de l'exercice 6

Tout d'abord, on remarque que c'est vrai si k divise n. En effet, dans ce cas, on peut paver la grille avec des dominos tous horizontaux, en remplissant séparément chaque ligne.

Montrons maintenant que cette condition est nécessaire. On colorie la grille diagonalement, avec k couleurs.

On remarque alors que chaque domino couvre exactement une case de chaque couleur. Par conséquent, pour pouvoir recouvrir toute la grille, il est nécessaire qu'il y ait autant de

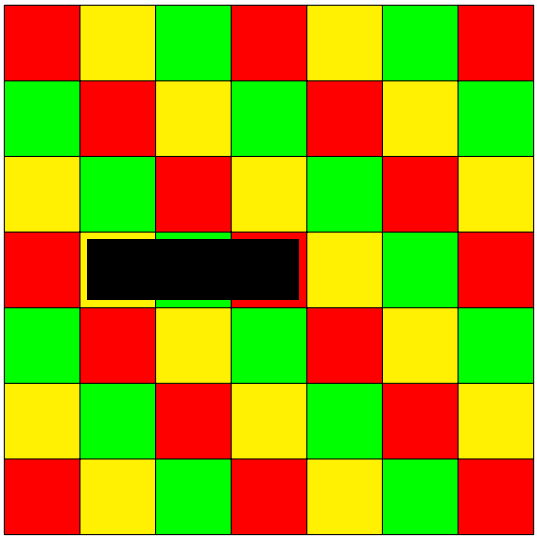


FIGURE 2 – Le coloriage avec $k = 3, n = 7$

cases de chaque couleur. Il s'agit maintenant de montrer que cela n'est le cas que lorsque k divise n. Pour cela, écrivons $n = q \cdot k + r$ avec $0 \leqslant r < k - 1$ la division euclidienne de n par k. On commence par remarquer qu'on peut paver le complémentaire du carré $r \times r$ en bas à gauche. Pour cela, on pave le rectangle $qk \times n$ situé au-dessus, en ne mettant que des dominos verticaux. Ensuite, on remplit le rectangle $r \times qk$ situé en bas à droite, cette fois-ci avec des dominos horizontaux. Mais, puisque chaque domino recouvre autant de cases de chaque couleur, il y a autant de cases de chaque couleur dans le carré $n \times n$ si et seulement si il y en a autant dans le carré $r \times r$! Et, dans celui-ci, si $r > 0$, il y a une couleur qui apparaît r fois (celle qui est sur la diagonale) et une qui apparaît $r - 1$ fois (celle qui est sur la surdiagonale, qui ne réapparaît pas ailleurs car $r < k$). On a donc bien le résultat désiré.

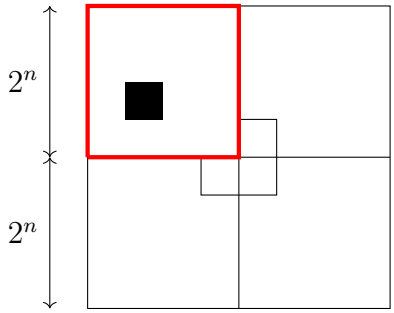
Solution de l'exercice 7
Numérotons les sommets de 1 à n et notons $\{a_i, b_i\}$ les nombres écrits sur le sommet de numéro i.
Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas possible de choisir les nombres à retirer de sorte à atteindre notre objectif. On remarque que si l'on choisit le nombre a_1 sur le sommet 1, puisque chaque sommet possède deux nombres distincts, on peut supposer sans perte de généralité que $a_2 \neq a_1$, puis que $a_3 \neq a_2$, …, $a_n \neq a_{n-1}$. On doit donc nécessairement avoir $a_n = a_1$, car sinon on aurait une absurdité. De même, on trouve que $b_n = b_1$. Ainsi, par récurrence immédiate, tous les sommets ont les mêmes nombres $\{a_1, b_1\}$, et il suffit donc de retirer a_1 sur les sommets de numéro pair et de retirer b_1 sur les sommets de numéro impair pour conclure.

Solution de l'exercice 8
On raisonne par récurrence pour montrer que l'on peut effectivement paver le quadrillage quelque soit la case retirée.

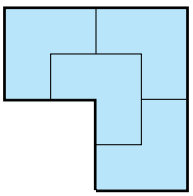
Si $n = 1$, on a un carré de côté 4×4. Quand on enlève une case, on peut bien placer un L-triominos sur les trois cases restantes.

On suppose que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$. On considère un carré $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ et on le divise en 4 grands carrés donc de taille $2^n \times 2^n$. Un de ces grands carrés possède la case retirée, par hypothèse de récurrence celui-ci peut être pavé par des L-triominos. On place ensuite

un triomino au centre de la grille sur les trois grands carrés restants comme dans la figure suivante. Par hypothèse de récurrence, chacun de ces trois carrés restants privés de la case prise par le triomino déjà placé peut être pavé par des L-triominos. Ainsi, le quadrillage total peut effectivement être pavé par des L-triominos.



Une autre manière de finir l'exercice consistait à remarquer qu'on peut obtenir un triomino de taille double de la façon suivante :



Ainsi, si on voit une grille de taille $2^n \times 2^n$ comme une grille $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ de carrés de taille 2×2, on sait par hypothèse de récurrence qu'on peut paver la grille $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ où il manque le carré 2×2 qui contient notre carré manquant par des triominos doublés. On sépare ensuite les triominos comme sur la figure, et on pave le reste du carré 2×2 qu'on avait exclu.

(Fun fact : les deux solutions fournissent en fait la même construction.)

Solution de l'exercice 9

Antoine gagne par vol de stratégie. Les premiers coups sont forcés : Antoine écrit 4 et Anatole écrit 6. Ensuite, Antoine peut choisir entre 8 et 9. Dans le premier cas, Anatole doit écrire 10 et Antoine peut écrire 12. Dans le second, Anatole doit écrire 12. A partir de la position 12, comme le jeu se termine forcément, soit le joueur dont c'est le tour, soit l'autre joueur, a une stratégie gagnante. Or, Antoine peut choisir quel joueur écrit 12, et donc atteindre 12 de manière à ce que ce soit son tour ou à l'autre joueur de jouer. Si Anatole possède une stratégie gagnante lorsque c'est à lui de joueur quand 12 est écrit, il suffit donc à Antoine de faire en sorte que c'est elle qui jouera après que 12 soit écrit et de voler la stratégie d'Anatole.

Solution de l'exercice 10

a) Le nombre de bonbons est positif, n'augmente jamais et décroît strictement lorsque Gaëtan vole un bonbon. Ainsi au bout d'un moment Gaëtan ne vole plus jamais de bonbon : on étudie la situation à partir de ce moment. Si on note $a_1, \dots, a_n$ le nombre de bonbons des enfants $1, \dots, n$ respectivement, après une minute celui-ci devient $(\frac{a_1+a_2}{2}, \dots, \frac{a_n+a_1}{2})$. Vu qu'on remplace par des moyennes arithmétiques, n'importe quelle "inégalité des moyennes" devrait donner un monovariant intéressant. Le plus naturel serait de s'intéresser au maximum, mais il faut prendre en compte le fait qu'on peut avoir plusieurs a_i égaux au maximum. Ici, on va plutôt utiliser l'IAG. On a $\prod \frac{a_i+a_{i+1}}{2} \geq \prod \sqrt{a_i a_{i+1}} = \prod a_i$ Le produit des a_i augmente donc

chaque minute. Or ce produit reste entier et est borné car le nombre de bonbons est fixe : ainsi au bout d'un moment il n'augmente plus et alors on a cas d'égalité dans chaque IAG ce qui signifie que tous les a_i sont égaux.

b) On remarque qu'aucun nombre de bonbons ne peut dépasser le plus petit nombre pair qui est plus grand que tous les a_i (autrement dit, $\max a_i$ ou $\max a_i+1$ selon la parité de $\max a_i$). Ainsi cette quantité est bornée par sa valeur initiale que l'on va appeler M. Cela signifie en particulier que le nombre de bonbons total est majoré par nM (chaque enfant a au plus M bonbons à chaque étape). Ainsi vient un moment à partir duquel Gaëtan ne donne plus de bonbons. La situation est alors analogue à celle étudiée en question a).

Solution de l'exercice 11

Rémi fait deux groupes arbitraires. Puis à chaque fois qu'un animatheur se plaint d'avoir deux ennemis, il le change de moitié de stage. Cet animatheur perd donc à minima 1 ennemi, ses précédents ennemis en perdent un chacun et au maximum un lutin du deuxième groupe gagne un ennemi en la personne du lutin capricieux. Ainsi le nombre total d'inimitiés décroît strictement jusqu'à une bonne configuration, et Rémi peut donc sauver son stage !

Solution de l'exercice 12

Montrons que la réponse est $M = 1013^2$.

La construction est unique : elle consiste en le coloriage des quatre cases centrales du tableau en rouge. Dans ce cas, chaque coin de taille 1013^2 est cool. Et si une zone contient plus de 1013^2 cases, elle contiendra au moins 2 cases rouges, et ne pourra donc pas être cool car un rectangle contenant trois cases centrales contient la quatrième. Cela montre que la réponse recherchée est $\leqslant 1013^2$.

Pour l'autre inégalité, considérons un système de coordonnées $1 \leqslant i, j \leqslant 2026$ de notre tableau. Si aucune case n'est coloriée en rouge, on dispose d'une région cool de taille $2026^2 > 1013^2$. Supposons désormais qu'au moins une case est coloriée en rouge. Considérons une case de coordonnées (x, y) qui est coloriée en rouge. Par symétrie, on peut supposer SPDG que $x, y \geqslant 1014$. On considère alors les quatre rectangles $C_1 = \{1 \leqslant i \leqslant x \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant y\}$, $C_2 = \{1 \leqslant i \leqslant x-1 \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant y\}$, $C_3 = \{1 \leqslant i \leqslant x \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant y-1\}$ et $C_4 = \{1 \leqslant i \leqslant x-1 \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant y-1\}$. Si l'on suppose que les régions cool sont toutes de taille $< 1013^2$, les quatre rectangles mentionnés doivent chacun contenir un nombre pair de cases rouges. Or, lorsque l'on considère l'union (avec répétition) des cases de ces quatre rectangles, toutes les cases du tableau sont comptées un nombre pair de fois, sauf la case (x, y) qui n'est comptée qu'une fois. Puisque celle-ci est coloriée en rouge, cela contredit notre hypothèse. On a donc bien montré que la réponse recherchée est $\geqslant 1013^2$.

Solution de l'exercice 13

Notons S la somme des éléments de A et T la somme des éléments de B. Si $S \mid T$, on a aussi $S \mid S + T$, or $S + T$ est la somme de tous les nombres entre 1 et $2n$, qui vaut $n(2n + 1)$. Par ailleurs, S est plus grande que la somme des n plus petits éléments de $\{1, \ldots, 2n\}$, à savoir $\frac{n(n+1)}{2}$. Notons alors que

$$4\frac{n(n+1)}{2} = 2n^2 + 2n > 2n^2 + n = n(2n + 1),$$

donc si k est tel que $kS = S + T$, on doit avoir $k < 4$. On ne peut pas avoir $k = 1$ non plus car alors $T = 0$, donc $k = 2$ ou 3.

Si n est impair, $n(2n+1)$ est également impair, donc on ne pourra pas avoir $k=2$ dans ce cas. Pour $k=3$, $n(2n+1)$ n'est pas divisible par 3 exactement quand $n \equiv 2 \pmod 3$. Ainsi, si $n \equiv 5 \pmod 6$, on est sûrs qu'on n'a pas de solutions. Il s'agit maintenant de construire des solutions dans les autres cas.

• Si n est pair, on peut remarquer que dans un groupe de 4 nombres consécutifs, les deux extrêmes et les deux nombres du milieu somment à la même chose. Ainsi, on peut poser

$$A = \{m \equiv 1, 0 \pmod 4, m \leq 2n\}$$

et B le reste, et remarquer que dans un groupe $4k+1, 4k+2, 4k+3, 4k+4$ les nombres $4k+1$ et $4k+4$ sont dans A et $4k+2, 4k+3$ sont dans B, et que les deux somment à $8k+5$. Comme on peut diviser $\{1, \ldots, 2n\}$ en de tels groupes, on a fini.

• Si $n \equiv 1 \pmod 3$, on doit avoir $T = 2S$. Pour $n=1$ il suffit de prendre $A = \{1\}$ et $B = \{2\}$. On essaie à présent de faire la même chose que précédemment, de décomposer l'intervalle en blocs avec chacun la bonne proportion d'éléments de A et de B. Ici il faudrait utiliser la congruence modulo 3 de n, donc de découper en blocs de 6. Il suffit en fait de faire la même chose qu'avant : parmi 6 nombres consécutifs, les deux nombres extrémaux, les deux nombres du milieu et les deux nombres restants somment tous à la même chose. Il suffit donc de découper les bouts $\{6k+3, \ldots, 6k+8\}$ en deux sous-ensembles, l'un de somme double de l'autre : on peut donc prendre pour A l'ensemble composé de 1 et de tous les nombres congrus à 4 et 7 modulo 6. Puisque les intervalles de la forme $\{6k+3, \ldots, 6k+8\}$ partitionnent $\{3, 2n\}$, on a fini.

• Enfin, si $3 \mid n$, la même idée s'applique, en prenant les intervalles de la forme $\{6k+1, \ldots, 6k+6\}$. Ainsi, on peut prendre pour A les nombres congrus à 1 ou 0 modulo 6.

4 Entraînement de fin de parcours

Exercices

Exercice 1
Antoine écrit des réels non nuls $x_1, \ldots, x_n$ sur un tableau. Toutes les minutes, il choisit deux réels a et b écrits sur le tableau, les efface et les remplace par les deux réels $a - \frac{b}{2}$ et $b + \frac{a}{2}$. Montrer que quelque soit ses choix, il n'obtiendra jamais la même configuration que celle de départ.

Exercice 2
Soit ABC un triangle tel que $2AB > AC$, M le milieu de $[AC]$. Soit P un point sur $[AB]$ tel que $BP = AM$. Soit X un point sur le cercle circonscrit au triangle ABC tel que le cercle circonscrit au triangle XPA soit tangent à la droite (AC) en A. Soit N le milieu du segment $[XC]$. Montrer que $NM = XP$.

Exercice 3
Soit ABC, un triangle et ω son cercle circonscrit. Soit S, le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Soit X un point de la droite (AB) et Y un point de la droite (AC) tels que les droites (XY) et (BC) sont parallèles. Soit P et Q, les seconds points d'intersection respectifs des droites (SX) et (SY) avec le cercle ω et soit R le point d'intersection des droites (PQ) et (XY). Montrer que la droite (AR) est tangente au cercle ω.

Exercice 4
Dans le stage de Valbonne, il y a n élèves et k cours. Chaque élève peut s'inscrire à autant de cours qu'il le souhaite et chaque cours a au moins 2 inscrits. On remarque que si 2 cours ont au moins 2 élèves inscrits en commun, alors ils n'ont pas le même nombre d'inscrits. Montrer que $k \leqslant (n-1)^2$.

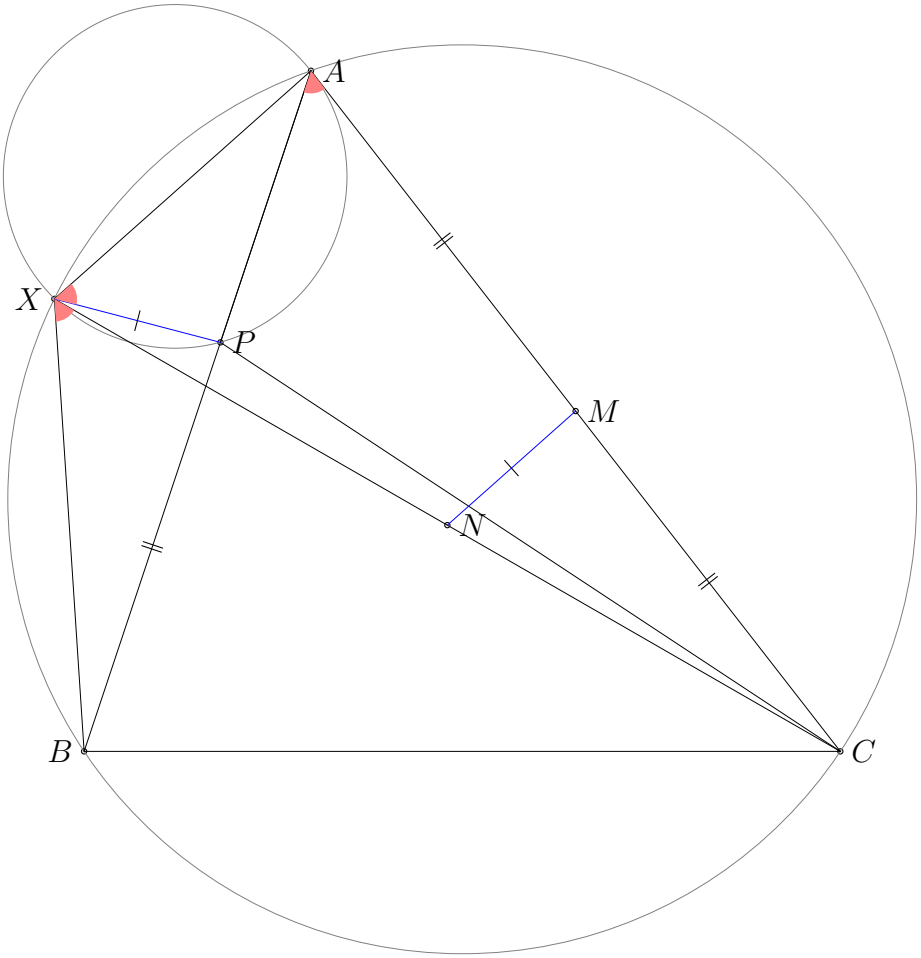
Solutions

Solution de l'exercice 1
Le monovariant auquel penser est la somme des carrés des nombres écrits au tableau. En effet, pour tout a, b réels, on a :

$$(a - \frac{b}{2})^2 + (b + \frac{a}{2})^2 = a^2 + b^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} \geqslant a^2 + b^2$$

avec égalité si et seulement si $a = b = 0$. De plus, à la première minute, tous les nombres sont non-nuls, donc ce monovariant croît strictement à la première minute. On en déduit qu'Antoine ne peut pas retourner à sa configuration initiale.

Solution de l'exercice 2



On remarque que par angle inscrit et angle tangentiel :

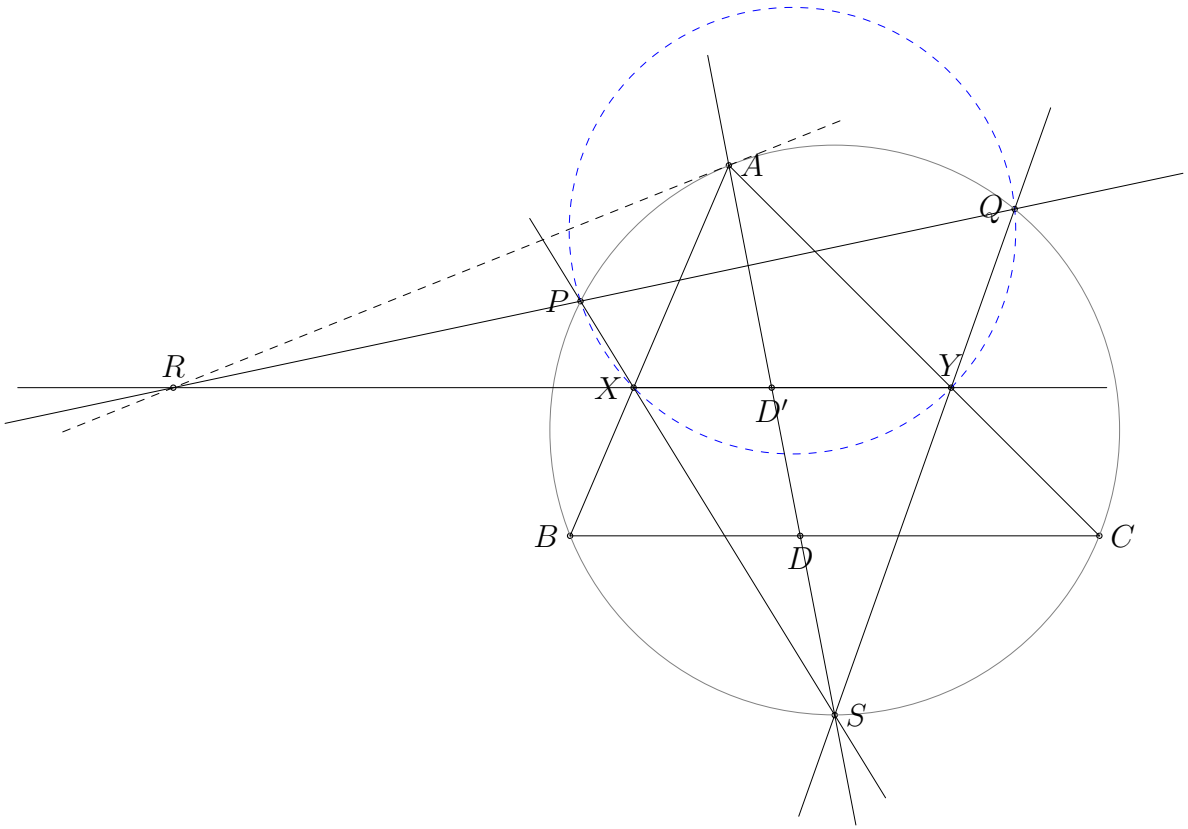
$$\widehat{BXP} = \widehat{BXC} = \widehat{BAC} = \widehat{PXA}$$

et

$$\widehat{XAP} = \widehat{XAB} = \widehat{XCB}$$

, donc $XAP \sim XCB$. Or, ceci implique que $XPB \sim XAC$. De plus, $BP = AM = \frac{1}{2}AC$, donc le rapport de similitude de ces deux triangles est $\frac{1}{2}$. On en déduit que $XP = \frac{1}{2}XA = MN$ par droite des milieux.

Solution de l'exercice 3



Montrons que X, Y, P, Q sont cocycliques. En effet, si Z est un point sur la tangente en S du côté de B alors (SZ) est parallèle à (BC) et donc à (XY) et :

$$\widehat{PQY} = \widehat{PSZ} = \widehat{YXS} = 180° - \widehat{PXY}$$

par angle tangentiel et parallélisme. Donc $PQXY$ est cyclique.

On remarque également que le cercle circonscrit à AXY est tangent à ω : en effet, l'homothétie de centre A qui envoie Xsur Bet Y sur C envoie le cercle circonscrit à AXY sur ω, donc ces cercles sont tangents en A.
Pour conclure, on applique le théorème du centre radical à ω et les cercles circonscrits à AXY et $PQXY$: les droites (XY), (PQ) et la tangente en A à ω sont alors concourantes, en R, ce qui conclut.

Solution n°2 de l'exercice 3
On peut montrer différemment que $PQYX$ est cyclique par chasse aux angles, si on n'a pas pensé à introduire la tangente en S. Soit D le pied de la bissectrice issue de A dans ABC, et D' celui dans AXY

$$\widehat{XPQ} = \widehat{XPA} - \widehat{APQ} = \widehat{ABS} - \widehat{ASP} = \beta + \frac{\alpha}{2} - \widehat{ASP}$$

Or $\widehat{ADC} = \widehat{AD'Y} = \beta + \frac{\alpha}{2}$, donc

$$\widehat{XPQ} = \widehat{AD'Y} - \widehat{ASP} = 180 - \widehat{SD'Y} - \widehat{D'SY} = \widehat{XYS} = 180 - \widehat{XYQ}$$

Donc les points X, Y, P, Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4

Reformulons un peu l'énoncé : nous savons que deux clubs de même cardinal n'ont aucune paire d'élèves en commun.

Fixons donc un nombre de membres $l \in [\![2, n]\!]$ et notons k_l le nombre de clubs à l membres. Dans chacun de ces k_l clubs, nous pouvons former $\binom{l}{2}$ paires d'élèves. Or nous savons qu'une paire d'élèves ne peut appartenir qu'à un seul club de cardinal l. Ainsi :

$$k_l \binom{l}{2} \leqslant \binom{n}{2} \quad \textit{i. e.} \quad k_l \leqslant \frac{n(n-1)}{l(l-1)}$$

Nous avons alors :

$$k = \sum_{l=2}^{n} k_l \leqslant n(n-1) \sum_{l=2}^{n} \frac{1}{l(l-1)}$$

Il reste alors à faire quelques manipulations algébriques :

$$\sum_{l=2}^{n} \frac{1}{l(l-1)} = \sum_{l=2}^{n} \left(\frac{1}{(l-1)} - \frac{1}{l} \right) = \frac{1}{2-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

Et nous en concluons comme désiré :

$$k \leqslant (n-1)^2$$

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1 Première partie : Combinatoire et Géométrie 444
1 Géométrie : Similitudes (Kevin) 444
2 Combinatoire : Algorithmes (Oscar) 457
3 Combinatoire : Géométrie combinatoire (Antoine S) 463
4 Géométrie : Configurations (Antoine D) 470
5 Géométrie : Chasse aux longueurs (Akin) 482
6 Combinatoire : TD de niveau C1/C2 (Anatole et Noam) 490
7 Combinatoire : TD Pot-pourri (Emilhan) 502
8 Géométrie : TD de niveau G1/G2 (Aurélien) 510
2 Entraînement de mi-parcours 511
3 Deuxième partie : Algèbre et Arithmétique 517
1 Algèbre : Nombres complexes (Emilhan) 517
2 Arithmétique : Factorielles (Maxime et Rémi) 528
3 Arithmétique : Polynômes à coefficients entiers (Solal et Théo) 537
4 Algèbre : Équations fonctionnelles (Erik) 563
5 Algèbre : TD de niveau A1/A2 (Hadrien) 572
6 Arithmétique : Divisibilité (Hugo et Serge) 578
7 Arithmétique : TD de niveau N1/N2 (Félix) 588
8 Algèbre : Systèmes d'équations (Matteo) 592
4 Entraînement de fin de parcours 608

1 Première partie : Combinatoire et Géométrie

1 Géométrie : Similitudes (Kevin)

Définition et premières propriétés

Les similitudes directes permettent de passer d'une figure à une autre figure directement semblable. Dans les exercices, elles apparaissent surtout lorsque deux couples de points déterminent à la fois un même rapport de longueurs et un même angle orienté.

Définition 1.
Soient O un point du plan, $k > 0$ un réel et α un angle orienté, défini modulo 2π. La *similitude directe de centre O, de rapport k et d'angle α* est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport k avec la rotation de centre O et d'angle α.

La rotation et l'homothétie ayant le même centre commutent : l'ordre de leur composition n'a donc pas d'importance. Le centre O est un point fixe de la similitude.

Rappel 2 (Cas particuliers)**.**
Soit s une similitude directe de centre O, de rapport k et d'angle α.

- Si $k = 1$, alors s est une rotation.
- Si $\alpha = 0$, alors s est une homothétie de rapport positif. Une homothétie de rapport négatif peut aussi s'écrire comme une similitude de rapport positif et d'angle π.
- Si $k = 1$ et $\alpha = 0$, alors s est l'identité.

Une translation non nulle est également une similitude directe de rapport 1 et d'angle 0, mais elle ne possède pas de centre. Il faudra donc toujours isoler ce cas lorsqu'on recherche le centre d'une similitude.

Proposition 3 (Ce qui est conservé)**.**
Soit s une similitude directe de rapport k. Pour tous points A et B, on a

$$s(A)s(B) = k\,AB.$$

De plus, pour quatre points A, B, C, D tels que les droites considérées soient bien définies,

$$\measuredangle\big(s(A)s(B), s(C)s(D)\big) = \measuredangle(AB, CD).$$

En particulier, une similitude directe conserve :

- les rapports de longueurs et les milieux ;
- les angles orientés, le parallélisme et l'orthogonalité ;
- l'alignement, les droites et les segments ;
- les cercles, la cocyclicité et la tangence.

Démonstration. Une rotation conserve les longueurs et les angles orientés. Une homothétie de rapport positif multiplie toutes les longueurs par le même réel k et conserve les angles orientés. Les propriétés annoncées en découlent par composition. □

Corollaire 4.
Une similitude de rapport k envoie un triangle sur un triangle directement semblable. Elle envoie également un cercle de centre I et de rayon R sur un cercle de centre $s(I)$ et de rayon kR.

Reconnaître une similitude et trouver son centre

Proposition 5 (Détermination à centre fixé)**.**
Soient O, X, Y trois points tels que $X \neq O$ et $Y \neq O$. Il existe une unique similitude directe de centre O envoyant X sur Y. Son rapport et son angle sont respectivement

$$\frac{OY}{OX} \qquad \text{et} \qquad \measuredangle\left(\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY}\right).$$

Théorème 6 (Deux points, leurs images et construction du centre)**.**
Soient A, B, A', B' quatre points tels que $A \neq B$ et $A' \neq B'$. Il existe une unique similitude directe s telle que

$$s(A) = A' \qquad \text{et} \qquad s(B) = B'.$$

Son rapport et son angle sont

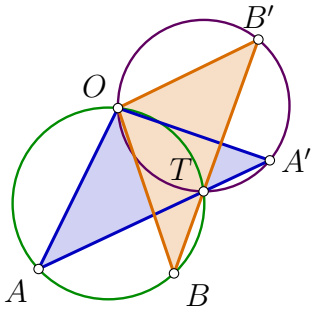
$$k = \frac{A'B'}{AB} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \measuredangle\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right).$$

Cette similitude est une translation si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$. Dans tous les autres cas, elle possède un unique centre.

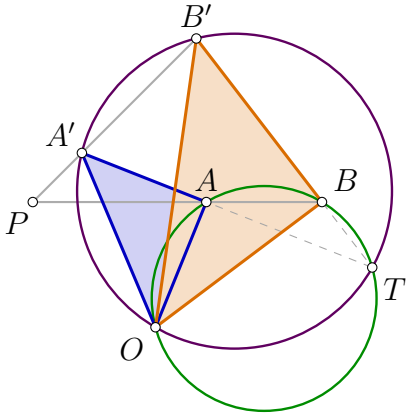
En position générale, on pose

$$T = (AA') \cap (BB').$$

On suppose que T est un point fini, distinct des quatre points considérés. On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles circonscrits aux triangles TAB et $TA'B'$. Leur second point d'intersection O est le centre de la similitude qui envoie A sur A' et B sur B'.



Première configuration
$\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$



Seconde configuration
$\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$

Démonstration. Les points O, T, A, B sont cocycliques, de même que les points O, T, A', B'. Comme T, A, A' sont alignés et que T, B, B' sont alignés, le théorème de l'angle inscrit donne, en angles orientés,

$$\measuredangle(OA, AA') = \measuredangle(OB, BB')$$

et

$$\measuredangle(OA', A'A) = \measuredangle(OB', B'B).$$

Les triangles OAA' et OBB' sont donc directement semblables. On en déduit

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} \qquad \text{et} \qquad \measuredangle\big(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}\big) = \measuredangle\big(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}\big).$$

La similitude de centre O qui envoie A sur A' envoie donc aussi B sur B'. Cela prouve l'existence et la construction annoncées. Le rapport et l'angle sont imposés par les segments orientés AB et $A'B'$, ce qui donne l'unicité. □

Rappel 7 (Cas limites de la construction)**.**
La construction précédente se lit de la manière suivante dans les configurations dégénérées.

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, la similitude est une translation. Il n'existe alors aucun centre fini, sauf dans le cas de l'identité.
- Si $(AB) \parallel (A'B')$ sans que les deux vecteurs soient égaux, la similitude est une homothétie, éventuellement de rapport négatif. Son centre est $(AA') \cap (BB')$; les deux cercles de la construction peuvent être vus comme tangents en ce point.
- Si T coïncide avec l'un des quatre points, l'un des cercles devient un cercle tangent. Par exemple, si $T = A$, le cercle circonscrit à TAB est remplacé par le cercle passant par A et B, tangent en A à la droite (AA').
- Si $(AA') \parallel (BB')$, le point T est considéré comme un point à l'infini. On utilise alors, lorsque c'est possible, la correspondance croisée de la proposition suivante.

Proposition 8 (Similitudes croisées)**.**
Soit O le centre de la similitude qui envoie A sur A' et B sur B'. Alors O est aussi le centre de la similitude qui envoie A sur B et A' sur B'.

Démonstration. Si k est le rapport de la première similitude, alors

$$OA' = k\,OA \qquad \text{et} \qquad OB' = k\,OB.$$

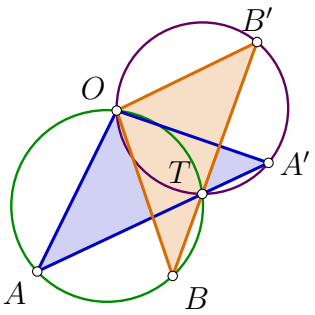
Par conséquent,

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'}.$$

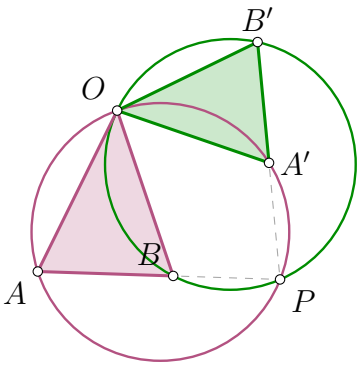
De plus, la première similitude conserve les angles orientés, donc

$$\measuredangle\big(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\big) = \measuredangle\big(\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}\big).$$

Les triangles OAB et $OA'B'$ sont donc directement semblables, ce qui permet de conclure. □



$\triangle OAA' \sim \triangle OBB'$



$\triangle OAB \sim \triangle OA'B'$

Quadrilatère complet et point de Miquel

Définition 9.
On considère quatre droites dont trois quelconques ne sont pas concourantes et dont deux quelconques ne sont pas parallèles. Elles forment un *quadrilatère complet* et déterminent six points d'intersection.

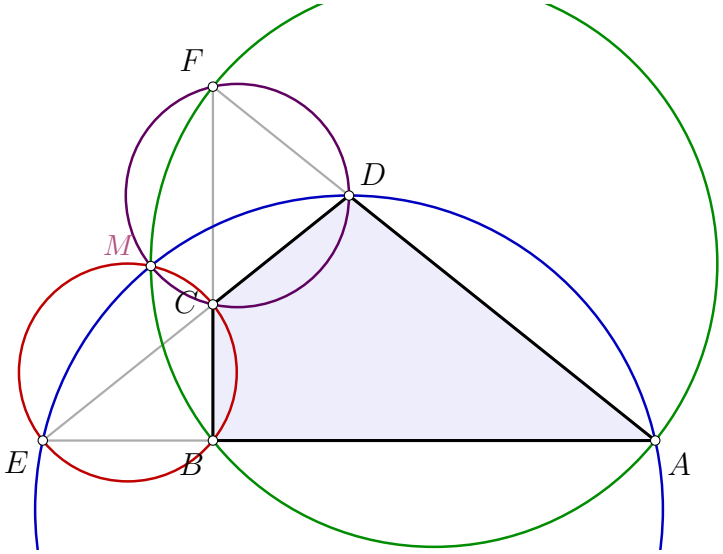
On les note ici A, B, C, D, E, F, avec

$$E = (AB) \cap (CD) \qquad \text{et} \qquad F = (AD) \cap (BC).$$

Théorème 10 (Point de Miquel)**.**
Les quatre cercles circonscrits aux triangles

$$EAD, \qquad EBC, \qquad FAB \qquad \text{et} \qquad FCD$$

passent par un même point M, appelé *point de Miquel* du quadrilatère complet.



Démonstration. On définit M comme le centre de la similitude qui envoie A sur D et B sur C. Comme $F = (AD) \cap (BC)$, la construction du centre montre que M appartient aux cercles circonscrits aux triangles FAB et FDC.

D'après la proposition des similitudes croisées, M est aussi le centre de la similitude qui envoie A sur B et D sur C. Comme $E = (AB) \cap (DC)$, la même construction montre que M appartient aux cercles circonscrits aux triangles EAD et EBC. Les quatre cercles passent donc par M. □

Rappel 11.
Le point de Miquel est ainsi simultanément le centre des deux similitudes croisées

$$(A, B) \longmapsto (D, C) \qquad \text{et} \qquad (A, D) \longmapsto (B, C).$$

En pratique, la seconde intersection de deux des quatre cercles permet souvent de reconnaître le centre d'une similitude qui n'est pas visible au premier abord.

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle et soit N le pôle Nord du sommet A. Un cercle passant par A et N coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en X et Y respectivement. Montrer que

$$XB = YC.$$

Exercice 2
Soit ABC un triangle acutangle et soit O le centre de son cercle circonscrit. On note M le milieu du segment $[BC]$. Soient P et Q les projetés orthogonaux de M sur $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, et soit N le milieu de $[PQ]$. Montrer que

$$(AO) \parallel (MN).$$

Exercice 3
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O. On note P le point d'intersection des droites (AB) et (CD), et Q le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PAD et PBC. Montrer que

$$\angle OQP = 90°.$$

Exercice 4
Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre et D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Soient F' le symétrique de F par rapport à B et E' le symétrique de E par rapport à C. Le cercle circonscrit à $AF'E'$ recoupe la droite (AD) en $X \neq A$. Montrer que

$$HX = 4HD.$$

Exercice 5
Soit ABC un triangle tel que $AB > BC$, et soit D un point variable du segment $[BC]$. Le point E appartient à l'arc BC ne contenant pas A du cercle circonscrit à ABC et vérifie

$$\angle BAE = \angle DAC.$$

On note I et J les centres des cercles inscrits aux triangles ABD et ACE respectivement. Montrer que, lorsque D varie, la droite (IJ) passe par un point fixe.

Exercice 6
Soit ABC un triangle. Une droite d coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en D et F, et la droite (BC) en E, avec C situé entre B et E. Les parallèles à d passant par A, B, C recoupent le cercle circonscrit à ABC en A_1, B_1, C_1 respectivement. Montrer que les droites

$$(A_1E), \qquad (B_1F), \qquad (C_1D)$$

sont concourantes.

Exercice 7
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique tel que

$$AC < BD < AD \qquad \text{et} \qquad \angle DBA < 90^\circ.$$

Le point E appartient à la droite passant par D et parallèle à (AB), de sorte que E et C soient situés de part et d'autre de la droite (AD), et vérifie $DE = AC$.

Le point F appartient à la droite passant par A et parallèle à (CD), de sorte que F et C soient situés de part et d'autre de la droite (AD), et vérifie $AF = BD$.

Montrer que les médiatrices des segments $[BC]$ et $[EF]$ se coupent sur le cercle circonscrit à $ABCD$.

Exercice 8
Soit ABC un triangle acutangle scalène, I le centre de son cercle inscrit et Γ son cercle circonscrit. La droite (AI) recoupe Γ en $M \neq A$. On note N le milieu de $[BC]$ et $T \neq M$ le point de Γ tel que

$$(IN) \perp (MT).$$

La perpendiculaire à (AI) passant par I coupe les droites (TB) et (TC) en P et Q respectivement. Montrer que

$$PB = CQ.$$

Exercice 9
Soit T un point intérieur à un triangle ABC. On note A_1, B_1, C_1 les symétriques de T par rapport aux droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement, et Ω le cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$.

Les droites $(A_1T), (B_1T), (C_1T)$ recoupent Ω en A_2, B_2, C_2 respectivement. Montrer que les droites

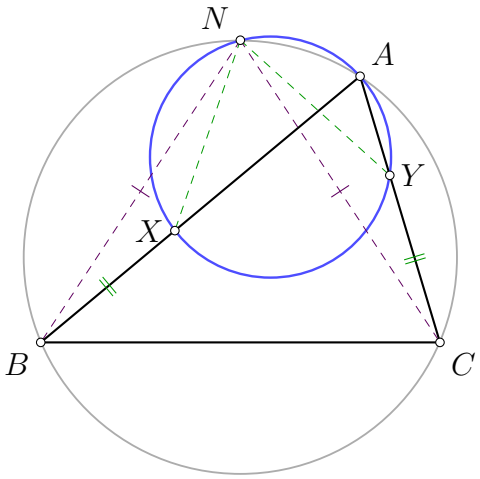
$$(AA_2), \qquad (BB_2), \qquad (CC_2)$$

sont concourantes en un point de Ω.

Solutions

Solution de l'exercice 1

On considère la similitude qui envoie B sur C et X sur Y. par définition, son centre est N. Or comme $NB = NC$, on a que la similitude est une rotation. Finalement, on obtient que $XB = YC$ par rotation.

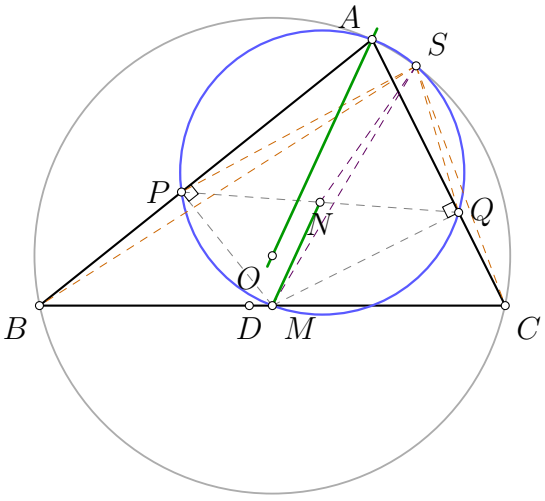


Solution de l'exercice 2

On a $\widehat{MPA} = \widehat{MQA} = 90$, donc M, Q, P et A sont cocycliques. On considère S la seconde intersection des cercles circonscrits à APQ et ABC. Par définition c'est le centre de la similitude qui envoie P sur B et Q sur C. Or N est le milieu de $[PQ]$ et M le milieu de $[AB]$. Ainsi cette même similitude envoie N sur M.
On sait donc qu'il existe une similitude de centre S qui envoie P sur N et B sur M. Ainsi $SPB \sim SNM$, donc $\widehat{SMN} = \widehat{SBP}$. Finalement par chasse aux angles :

$$\widehat{NMC} = 180 - \widehat{SMN} - \widehat{SMP} - \widehat{PMB} = 180 - \widehat{SBA} - \widehat{SAB} - (90 - \widehat{ABC}) = 90 + \widehat{ABC} - \widehat{ACB} = \widehat{ADC}$$

Où D est l'intersection de (AO) et (BC).



Solution n°2 de l'exercice 2

Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC.

Comme P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur (AB) et (AC), on a

$$\widehat{APM} = \widehat{AQM} = 90°.$$

Les points A, P, Q, M appartiennent donc au cercle de diamètre $[AM]$. Or S appartient au cercle circonscrit à APQ, donc

$$\widehat{ASM} = 90°.$$

D'autre part, $[AA']$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABC et S appartient à ce cercle. Ainsi

$$\widehat{ASA'} = 90°.$$

Les droites (SM) et (SA') sont donc toutes deux perpendiculaires à (SA). Par conséquent,

$$S,\ M,\ A' \quad \text{sont alignés.} \tag{1}$$

La similitude de centre S envoyant P sur B et Q sur C envoie le milieu N de $[PQ]$ sur le milieu M de $[BC]$. Par la propriété des similitudes croisées, S est alors aussi le centre de la similitude envoyant P sur N et B sur M. Les triangles SPB et SNM sont donc directement semblables, d'où

$$\widehat{SMN} = \widehat{SBP} = \widehat{SBA}.$$

Comme A, S, B, A' sont cocycliques,

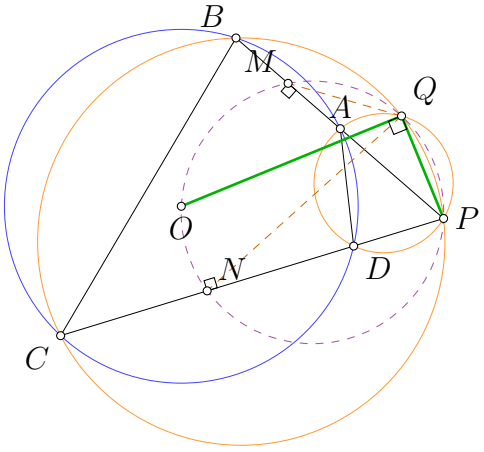
$$\widehat{SBA} = \widehat{SA'A}.$$

Enfin, d'après (1), les droites $(A'S)$ et (MS) sont confondues, tandis que $(A'A) = (AO)$. On obtient donc immédiatement

$$\boxed{(MN) \parallel (AO)}.$$

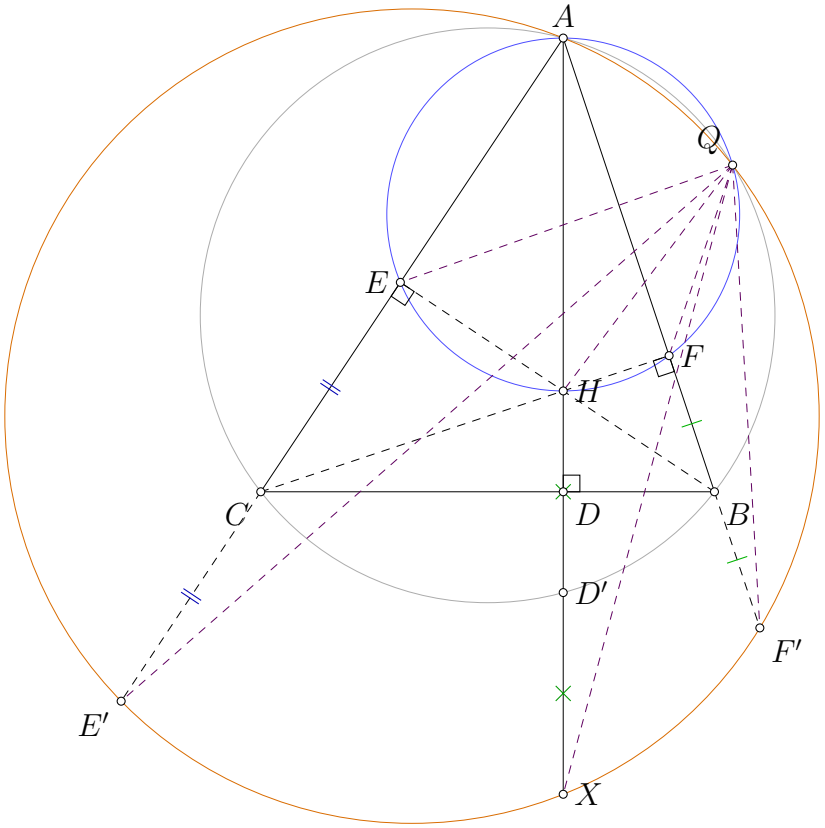
Solution de l'exercice 3

On pose M et N les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. On sait que Q est le centre de similitude qui envoie A sur D et B sur C, elle envoie donc aussi M sur N. Donc Q, M, N et P sont cocycliques. Or comme O est le centre du cercle circonscrit à $ABCD$, on a donc que $\widehat{OMP} = \widehat{ONP} = 90$, donc que $[OP]$ est un diamètre du cercle circonscrit à PMN ce qui permet d'obtenir $\widehat{OQP} = 90$.



Solution de l'exercice 4

On considère Q la seconde intersection des cercles circonscrits à AEF et $AE'F'$. On pose D' le symétrique de H par rapport à D, on sait que D' est sur le cercle circonscrit à ABC. On considère la similitude de centre Q qui envoie E sur F et E' sur F'. Or B et C sont les milieux respectifs de $[EE']$ et $[FF']$. Donc elle envoie aussi B sur C, ainsi B, C, Q et A sont cocycliques.
Ainsi, on considère la similitude de centre Q qui envoie E sur H et E' sur X, elle envoie donc le milieu $[EE']$ sur le milieu de $[HX]$, donc B sur le milieu de $[HX]$, que l'on va appeler H'. Or H' serait la seconde intersection du cercle circonscrit à ABC avec (AH) qui n'est autre que D'. Finalement, on a que D' est le milieu de $[HX]$.
Donc $HX = 2 \cdot HD' = 4 \cdot HD$, ce qui conclut.

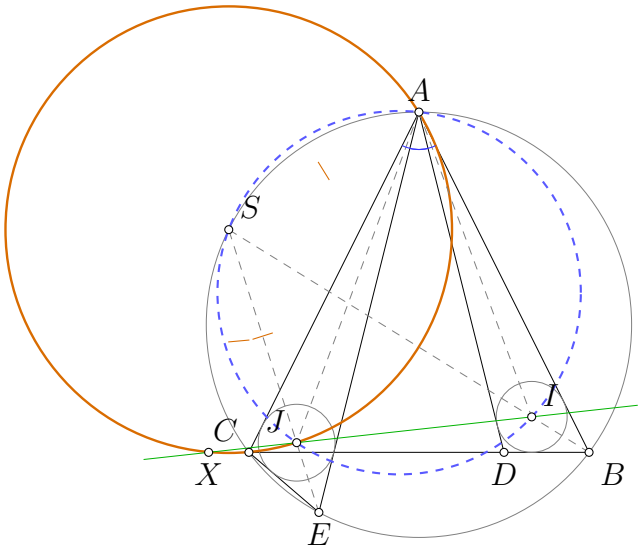


Solution de l'exercice 5

On pose S le milieu de l'arc AC ne contenant pas B sur le cercle circonscrit à ABC. Par la définition du pôle sud S est sur (BI) et (EJ).
Comme $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$ et $\widehat{AEC} = \widehat{ABD}$, on a que $ACE \sim ADB$.
On obtient que A est le centre de la similitude qui envoie B sur E et D sur C, elle envoie donc I sur J. Ainsi, A est sur le cercle circonscrit à SIJ.
D'autre part, J étant le centre du cercle inscrit à ACE, il est sur le cercle antarctique de centre S passant par A.
On pose X l'intersection de (IJ) avec (BC). On vérifie que :

$$\widehat{ACX} = 180 - \widehat{ACB} = 180 - \widehat{ASB} = 180 - \widehat{AJI} = \widehat{XAJ}$$

Finalement (IJ) passe par la seconde intersection du cercle antarctique issue du sommet B dans ABC avec la droite (BC), qui ne dépend pas de D.



Solution de l'exercice 6

On considère X comme l'intersection de (C_1C) avec (AB). On a d'une part que :

$$\widehat{AC_1X} = \widehat{AC_1C} = \widehat{AB_1C}$$

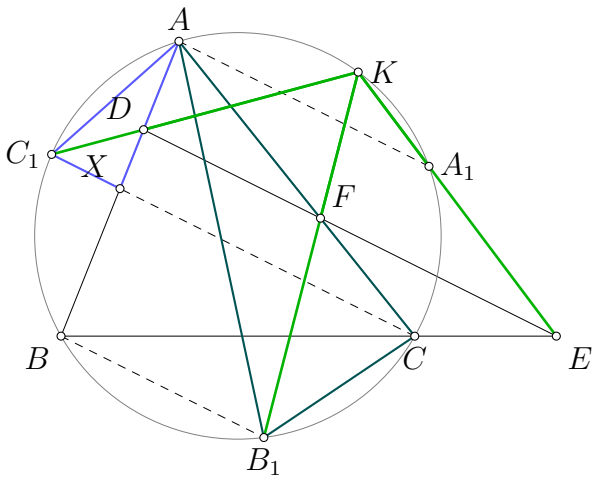
Et

$$\widehat{C_1AX} = \widehat{C_1BB_1} = \widehat{CBB_1} = \widehat{B_1AC}$$

car $(C_1C)//(BB_1)$. Ainsi $AC_1X \sim AB_1C$. Il existe donc une similitude de centre A qui envoie C_1 sur B_1 et D sur C. Or d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{AD}{DX} = \frac{AF}{FC}$$

Or, le rapport de section est injectif et conservé par les similitudes, donc D est envoyé sur F. Finalement, cela permet de conclur que (C_1D) et (B_1F) se conclure sur le cercle circonscrit à ABC. On fait de la même manière pour montrer que (A_1E) et (C_1D) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC. Finalement (C_1D), (B_1F) et (A_1E) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.coupent



Solution de l'exercice 7

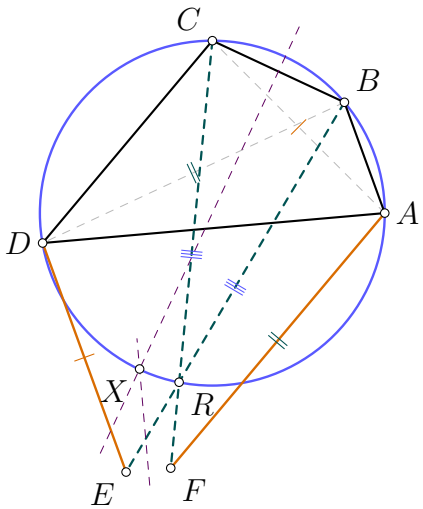
Tout d'abord, on a que :

$$\widehat{EAC} = 180 - \widehat{ACD} = 180 - \widehat{ABD} = \widehat{EDB}$$

Or $AF = BD$ et $DE = AC$, ce qui permet de conclure que $AFC \simeq DBE$. En particulier, on a que $BE = CF$. On pose R l'intersection de (BE) et (FC) et X l'intersection des médiatrices de $[FE]$ et $[BC]$. On a donc que $BX = XC$ et $XF = XE$. Finalement $BXE \simeq CXF$.
Ainsi, X est le centre de la similitude qui envoir C sur B et F sur E. Donc B, C, R et X sont cocycliques.
Finalement

$$\widehat{ACR} = \widehat{ACF} = \widehat{DEB} = \widehat{ABE} = \widehat{ABR}$$

Ce qui conclut que R est sur le centre du cercle circonscrit à ABC et donc que X est aussi sur ce cercle.

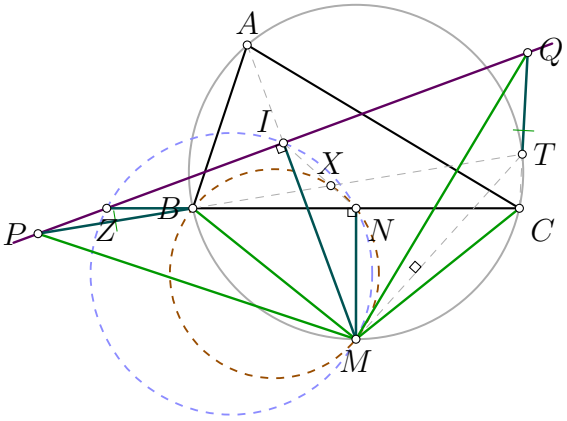


Solution de l'exercice 8

On considère X l'intersection de (BT) avec (IN). On pose Z l'intersection de (PQ) avec (BC). Tout d'abord, on a que $\widehat{ZIM} = 90 = \widehat{BNM}$. Donc Z, I, N et M sont cocycliques.
D'autre part :

$$\widehat{TXN} = 90 - \widehat{BTM} = 90 - \widehat{BAM} = 90 - \widehat{MAC} = 90 - \widehat{NBM} = \widehat{BMN}$$

Ainsi, B, M, N et X sont cocycliques. Finalement M est le point de Miquel du quadrilatère complet formé des six points $IZPBXN$.
En particulier M et le centre de la simlitude qui envoie P sur I et B sur N. Donc $PBM \sim INM$.
De la même manière, on peut prouver que $QCM \sim INM$. Finalement par transitivité des triangles semblables. $PBM \sim QCM$. or $BM = MC$ car M est le pôle sud issu de A dans ABC. Donc $PBM \simeq QCM$, ce qui nous donne bien que $PB = QC$.



Solution de l'exercice 9

Tout d'abord, on a que A est le centre du cercle circonscrit à C_1B_1T, de même B est le centre du cercle circonscrit à C_1A_1T et C est le centre du cercle circonscrit à B_1A_1T. Donc en particulier, par angle au centre :

$$\widehat{TC_1A_1} = \frac{1}{2}\widehat{TBA_1} = \widehat{CBA_1}$$

Ainsi, on obtient grâce à ce lemme :

$$\widehat{A_1BC} = \widehat{A_1C_1T} = \widehat{A_1C_1C_2} = \widehat{A_1B_2C_2}$$

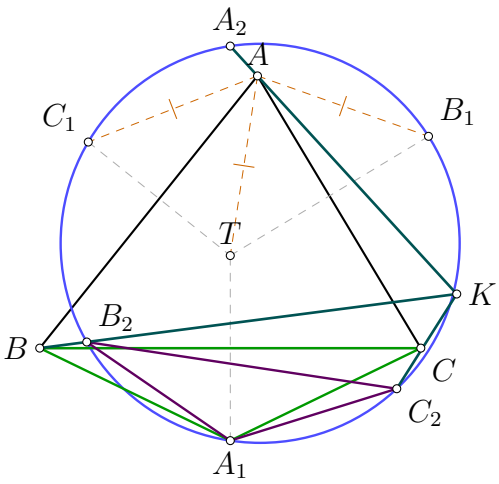
Et

$$\widehat{A_1CB} = \widehat{A_1B_1T} = \widehat{A_1B_1B_2} = \widehat{A_1C_2B_2}$$

Ainsi

$$A_1BC \sim A_1B_2C_2$$

. On considère donc la similitude de centre A_1 qui envoie B_2 sur B et C_2 sur C. On a donc que (BB_2) et (CC_2) se coupent sur le cercle circonscrit à $A_1B_2C_2$. On montre de la même manière que (AA_2) intersecte (BB_2) sur le cercle circonscrit à $B_1A_2C_2$.
Finalement, on obtient bien que $(BB_2), (AA_2)$ et (CC_2) sont concourants sur Ω


A_2
A
C_1
B_1
T
K
B_2
B
C
C_2
A_1

2 Combinatoire : Algorithmes (Oscar)

Exercices

Exercice 1
On considère un graphe dont tous les sommets sont de degré $\leqslant d$. Montrez qu'on peut colorier les sommets du graphe en utilisant $d+1$ couleurs de sorte à ce que deux sommets adjacents ne soient jamais de la même couleur.

Exercice 2 (Putnam 1979)
On considère n points bleus et n points rouges dans le plan, de sorte que deux points ne soient jamais au même endroit, et que trois points ne soient jamais alignés.
Montrez qu'on peut tracer n segments, chacun reliant un point rouge et un point bleu, de sorte à ce que deux segments ne s'intersectent jamais (même en l'un des $2n$ points).

Exercice 3
On considère un arbre à n sommets. Un sommet est un centroïde si, lorsqu'on le supprime, chaque composante a au plus $\frac{n}{2}$ sommets.
Montrez que l'arbre admet au moins un centroïde.

Exercice 4
Soit G un graphe à $n \geqslant 3$ sommets tel que tous les sommets sont de degré $\geqslant \frac{n}{2}$.
Montrez qu'il existe un cycle hamiltonien, c'est-à-dire un cycle passant exactement une fois par chacun des sommets.

Exercice 5
On considère un graphe connexe G qui contient potentiellement des boucles ou des multi-arêtes. On suppose que tout sommet a un degré pair (une boucle compte pour 2 dans le degré). Montrer qu'il existe un cycle eulérien, c'est-à-dire un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête.

Exercice 6 (P3 IMO 2020)
On considère $4n$ pièces colorées de poids $1, 2, \ldots, 4n$. Il y a n couleurs, et pour chaque couleur, il y a 4 pièces de cette couleur.
Montrer qu'on peut partitionner ces pièces en deux ensembles, dont la somme des poids est la même, tels que chacun des ensembles contient 2 pièces de chaque couleur.

Exercice 7 (P5 IMO 2014)
Anibank propose des pièces dont la valeur est l'inverse d'un entier strictement positif. On considère une collection finie de ces pièces (il peut y avoir des pièces de même valeur) et $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la somme des valeurs des pièces est $\leqslant k - \frac{1}{2}$.
Montrer qu'il est possible de séparer ces pièces en au plus k groupes, de sorte à ce que dans chaque groupe, la somme des valeurs des pièces n'excède pas 1.

Exercice 8 (All-Russian MO 2005)
a) 100 personnes originaires de 50 pays, deux par pays, sont assises en cercle. Montrer qu'il est possible de les partitionner en deux groupes sans que deux membres d'un même pays ou trois personnes consécutives ne soient dans le même groupe.

b) 100 personnes originaires de 25 pays, quatre par pays, sont assises en cercle. Montrer qu'il est possible de les partitionner en quatre groupes sans que deux membres d'un même pays ou deux voisins ne soient dans le même groupe.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On parcourt les sommets du graphe dans un ordre arbitraire, et on va les colorier dans cet ordre.
Lorsqu'on s'intéresse à un sommet s, on regarde les couleurs utilisées pour colorier l'un des voisins déjà colorié de s : comme s a au plus d voisins, au plus d couleurs sont inutilisables. Donc, on peut trouver une couleur pour colorier s de sorte à ce que s ne soit de la même couleur qu'aucun de ses voisins déjà coloriés.
Ce procédé termine. De plus, si s et t sont voisins avec t colorié après, on est sûr que s et t ne sont pas de la même couleur. Ainsi, le coloriage produit est bien conforme.

Solution de l'exercice 2
Au début, on couple arbitrairement les $2n$ points de sorte à former des paires bicolores, et on relie alors les sommets d'une même paire. Tant qu'il y a un croisement, disons entre les segments $[AB]$ et $[CD]$ avec A, C rouges et B, D bleus, on efface ces deux segments et on trace les segments $[AD]$ et $[BC]$.

— **Terminaison** : A une étape donnée, notons E l'intersection des segments $[AB]$ et $[CD]$. On a alors par inégalité triangulaire et comme trois points ne sont jamais alignés :

$$AB + CD = (AE + BE) + (CE + ED) = (AE + ED) + (BE + EC) > AD + BC$$

Ainsi, la somme des longueurs des segments tracés décroît strictement à chaque itération, et donc on ne peut pas revenir sur une même configuration. Comme il n'y a qu'un nombre fini de couplages, l'algorithme termine.

— **Correction** : Lorsque que l'algorithme s'arrête, il n'y a plus de croisement. De plus, les n segments tracés respectent bien les conditions de couleurs.

On peut donc bien tracer n tels segments.

Solution de l'exercice 3
On part d'un sommet arbitraire. Tant qu'on n'est pas sur un centroïde, on se déplace vers le sommet adjacent qui appartient à la composante de taille $> \frac{n}{2}$, qui est unique car deux sommets distincts ne peuvent appartenir à la même composante.

— **Terminaison** : Supposons par l'absurde que l'on revienne sur un sommet s. Comme on travaille sur un arbre et qu'on se déplace à chaque étape en suivant une arête, cela signifie qu'il existe un sommet t adjacent à s tel qu'on s'est déplacé de s vers t et de t vers s.
Soit C la composante de s lorsque l'on retire l'arête entre s et t, et C' celle de t : C et C' partitionnent les sommets de l'arbre. Comme on s'est déplacé de s vers t, on a $|C'| > \frac{n}{2}$. De même, comme on s'est déplacé de t vers s, on a $|C| > \frac{n}{2}$. Donc, on a $n = |C| + |C'| > \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$: c'est absurde.
Dès lors, on ne revient jamais sur un sommet, et comme il n'y a qu'un nombre fini de sommets, l'algorithme termine.

— **Correction** : Lorsque que l'algorithme s'arrête, on est forcément sur un centroïde.

Il existe donc toujours au moins un centroïde.

Solution de l'exercice 4
On place dans un ordre arbitraire les sommets de G autour d'un cercle. En réorganisant progressivement ces sommets, on veut aboutir à un cycle hamiltonien.
A un moment donné, supposons qu'on n'ait pas un cycle hamiltonien. Alors, en numérotant $s_1, \dots, s_n$ les sommets autour du cercle, on peut supposer que s_1 et s_2 ne sont pas reliés. On pose $s_{n+1} = s_1$. Ainsi, on cherche $3 \leqslant i \leqslant n$ tel que d'une part s_1 et s_i sont reliés, et d'autre part s_2 et s_{i+1} sont reliés. Si un tel i existe, alors en retournant l'ordre des sommets $s_2, s_3, \dots, s_i$, on augmente strictement le nombre d'arêtes effectivement présentes dans notre cycle.
Il nous reste donc à montrer qu'un tel i existe. Sur le premier point, comme s_1 et s_2 ne sont pas reliés, au moins $\frac{n}{2}$ conviennent. Sur le second, au moins $\frac{n}{2} - 1$ conviennent. Dès lors, l'existence d'un tel i est assuré par le principe des tiroirs car $\frac{n}{2} + \frac{n}{2} - 1 > n - 2$.
Le nombre d'arêtes effectivement présentes étant nécessairement un entier entre 0 et n, on est sûr que cet algorithme termine et donc qu'il existe un cycle hamiltonien.

Solution de l'exercice 5
On travaille par récurrence forte sur le nombre d'arêtes de G :

— Initialisation : si G n'a aucune arête, alors la propriété est directement vérifié avec un cycle vide.

— Hérédité : supposons la propriété vraie pour les graphes avec strictement moins d'arêtes que G.
On part d'un sommet arbitraire de G et on y pose un jeton. Tant que c'est possible, on prend une arête pas encore empruntée qui part du sommet sur lequel le jeton se trouve, et on déplace le jeton sur l'autre extrémité de l'arête (le jeton ne bouge pas si l'on vient d'emprunter une boucle).
Ce procédé termine car G n'a qu'un nombre fini d'arêtes et qu'à chaque étape, on emprunte une nouvelle arête. De plus, on vérifie qu'une propriété se conserve à la fin de chaque étape : si le jeton se trouve sur le sommet de départ, alors tous les sommets ont un degré pair parmi les arêtes restantes ; si le jeton se trouve sur un autre sommet, seuls le sommet de départ et le sommet sur lequel se trouve le jeton ont un degré impair parmi les arêtes restantes. Ainsi, lorsque le procédé termine, le jeton se trouve nécessairement sur le sommet de départ, et donc on a formé un cycle avec les arêtes parcourues, qu'on va appeler "cycle central".
On considère alors les composantes connexes du graphe où on ne laisse que les arêtes non parcourues. Ces composantes comportent toutes strictement moins d'arêtes que G et vérifient que tous les sommets ont un degré pair. Ainsi, par hypothèse de récurrence, on peut former un cycle eulérien dans chacune des composantes. Comme G est connexe, dans chaque composante, il y a au moins un sommet du cycle central et donc on peut raccrocher le cycle eulérien de la composante au cycle central. On obtient alors bien un cycle eulérien de G.

Finalement, G admet bien un cycle eulérien.

Solution de l'exercice 6
On couple les pièces par paires selon leur valeur : $\{1, 4n\}, \{2, 4n-1\}, \dots, \{2n, 2n+1\}$. On cherche à mettre les deux pièces d'une même paire dans le même ensemble. Ainsi, en mettant n paires dans chacun des ensembles, on s'assure que les deux ensembles auront bien la même somme : il reste à vérifier la propriété sur les couleurs.
On considère un graphe G à n sommets, chaque sommet correspondant à une couleur. Si

dans une paire, on a une pièce de couleur c et une autre de couleur c' (c et c' peuvent être égales), alors on place une arête entre le sommet associé à c et celui associé à c'. Dès lors, tous les sommets ont un degré 4.
D'après l'exercice précédent, dans chaque composante connexe de G, on peut trouver un cycle eulérien. Dans une composante à k sommets, il y a $2k$ arêtes dans le cycle : on colorie une arête sur deux en bleu et l'autre en rouge. Dès lors, parmi les arêtes bleues, tous les sommets ont un degré 2. De même, parmi les arêtes rouges, tous les sommets ont un degré 2. Finalement, on met dans le premier ensemble les paires associées aux arêtes bleues, et dans le second les paires associées aux arêtes rouges. Ainsi, les deux ensembles vérifient bien toutes les propriétés attendues.

Solution de l'exercice 7
Tant qu'on peut, on compresse les pièces de la manière suivante :

— Si deux pièces de valeur $\frac{1}{2m}$ apparaissent, on les remplace par une pièce de valeur $\frac{1}{m}$.

— Si une pièce de valeur $\frac{1}{k}$ apparaît k fois, on les retire et on diminue k de 1.

Ensuite, on met dans le groupe G_0 les pièces de valeur $\frac{1}{2}$, et dans le groupe G_i, on met les pièces de valeur $\frac{1}{2i+1}$ et $\frac{1}{2i+2}$. Grâce aux propriétés de l'algorithme de compression, chaque groupe est de valeur totale au plus 1, mais il reste les pièces de valeur inférieure ou égale à $\frac{1}{2k+1}$ à placer. Dès qu'il y a de la place suffisante dans un groupe, on place une petite pièce dedans.

Si à un moment on se retrouve bloqué, c'est que chaque groupe a une valeur totale d'au moins $1 - \frac{1}{2k+1}$, mais alors la valeur totale des pièces est au moins :

$$k\left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) > k - \frac{1}{2}$$

ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 8

a) L'idée pour cette question est de renforcer la contrainte pour donner un exercice plus simple à prouver. En fait, on n'aime pas à avoir à considérer des triplets d'éléments, on préfère les ranger par deux afin de se ramener à une structure de graphe, plus gentille. Ce qu'on peut faire ici, en notant par exemple $1, 2, ..., 100$ les participants dans l'ordre sur le cercle, c'est les partitionner par paires de voisins $(1, 2), (3, 4), ..., (99, 100)$. En s'assurant que deux membres d'une paire ne sont jamais dans le même groupe, on s'assurera qu'il n'y a pas 3 gens consécutifs dans le même groupe non plus.

Pour ce faire, on construit un graphe dans lequel chaque participant est représenté par un sommet. On relie deux participants d'une arête bleue si ils sont compatriotes et rouges si ils sont dans la même paire.

Construire nos groupes de 50 revient alors à montrer que ce graphe est biparti. Alternativement, qu'il ne possède pas de cycle de longueur impaire. En fait, chaque sommet est relié à exactement une arête rouge et une bleue ; or un cycle de longueur impair forcerait qu'un sommet soit relié à deux arêtes rouges ou deux arêtes bleues, c'est absurde. Notre graphe est donc bien biparti, et ça conclut.

b) Cette seconde question est plus technique, mais utilise les mêmes idées que la première. On notera que pendant la compétition les élèves n'avaient pas accès à la première question donnée ici, rendant le problème extrêmement difficile et peu réussi.

En divisant chaque équipe en 2 groupes de 2 élèves et en faisant comme si ces deux groupes venaient d'un pays différent, on se ramène au cadre de la première question dont on peut appliquer le résultat : on applique donc sur ces nouvelles équipes la répartition en deux groupes que nous donne la question a).

Focalisons nous maintenant sur le premier de ces groupes uniquement. On construit comme dans la première question un graphe, dont les sommets sont cette fois les membres du premier groupe, où on relie deux participants d'une arête bleue si ils sont compatriotes et rouges si ils sont voisins sur le cercle.

Il y a exactement 2 participants d'un pays donné dans le premier groupe et donc chaque sommet est relié à une arête bleue. De plus, d'après le résultat de la question a), il n'y a pas 3 membres du premier groupe consécutifs sur le cercle : cela signifie que chaque sommet est relié à au plus une arête rouge.

Ces hypothèses sont à nouveau suffisantes pour montrer que notre graphe est biparti, car l'existence d'un cycle de longueur impaire impliquerait deux arêtes rouges ou deux arêtes bleues reliées au même sommet, absurde.

Cela nous permet de diviser le premier groupe en deux sous-groupes de 25 personnes étant tels qu'il n'y a pas deux voisins ni deux membres d'un même pays dans le même groupe. On peut de même diviser le deuxième groupe en deux tels sous-groupes, et nos quatre sous-groupes ainsi formés répondent à l'exercice posé.

3 Combinatoire : Géométrie combinatoire (Antoine S)

Exercices

Plusieurs exercices ci-dessous sont tirés d'un TD de Thomas Budzinski.

Exercice 1
On colorie le plan à l'aide d'un nombre fini $n \in \mathbb{N}^*$ de couleurs. Montrer que l'on peut trouver un rectangle monochrome, c'est-à-dire dont tous les sommets sont de la même couleur.

Exercice 2 (Bonus – à faire plus tard)
Montrer que l'on peut également trouver un triangle équilatéral monochrome.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. On se donne $4n$ points dans le plan, trois quelconques jamais alignés. Démontrer que l'on peut construire n quadrilatères (non nécessairement convexes) deux à deux disjoints, où chaque point est sommet d'exactement un quadrilatère.

Exercice 4
On considère 2026 droites en position générale dans le plan (c'est-à-dire qu'elles sont deux à deux non parallèles et trois à trois non concourantes). On appelle E l'ensemble de leurs points d'intersection. On veut attribuer une couleur à chacun des points de E de telle sorte à ce que deux quelconques de ces points qui appartiennent à une même droite et dont le segment qui les relie ne contient aucun autre point de E soient de couleurs différentes.

Quel est le nombre minimal de couleurs nécessaire pour réaliser une telle coloration ?

Exercice 5
Soient $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 2$. Déterminer le plus petit entier ℓ tel que pour tout polygone convexe $\mathcal{P}$ à n sommets et S un ensemble de k points situés à l'intérieur de $\mathcal{P}$, il existe un ℓ-gone dont les sommets sont des sommets de $\mathcal{P}$ et qui contient tous les points de S.

Exercice 6
Soit $\mathcal{P}$ un polygone convexe à n côtés. Montrer qu'il existe un ensemble S de $n-2$ points tels que tout triangle dont les sommets sont des sommets de $\mathcal{P}$ contienne exactement un point de S.

Exercice 7
On trace n droites en position générale dans le plan. Combien de régions (finies ou non) délimitent-elles ?

Exercice 8
Soit S un ensemble de 2026 points dans le plan. Soit M l'ensemble des milieux de segments dont les extrémités sont des éléments distincts de S. Déterminer la valeur minimale que peut prendre Card M.

Exercice 9 (Théorème de Helly)
On considère quatre parties convexes du plan telles que l'intersection de trois quelconques d'entre elles est non vide.

1. Montrer que l'intersection des quatre convexes est non vide.

2. Le théorème reste-t-il vrai en remplaçant 4 par $n \geqslant 4$?

Exercice 10 (IMO 2015 P1)
On dit qu'un ensemble fini S de points dans le plan est *équilibré* lorsque pour tout $A, B \in S$, il existe $C \in S$ tel que $|AC| = |BC|$. On dit que S est *excentrique* lorsque quels que soient $A, B, C \in S$ distincts, il n'existe pas de point $P \in S$ tel que $|PA| = |PB| = |PC|$.

1. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, il existe un ensemble équilibré de cardinal n.
2. Pour quels $n \geqslant 3$ existe-t-il un ensemble équilibré excentrique de cardinal n ?

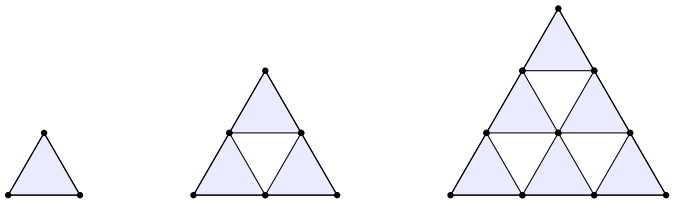
Solutions

Solution de l'exercice 1
Considérons une grille de $n+1$ colonnes parallèles et de $n^{n+1}+1$ lignes qui leur sont perpendiculaires. Il y a n^{n+1} façons de colorier les $n+1$ points de chaque ligne, donc d'après le principe des tiroirs, il y a deux lignes coloriées de façon identique, disons la ligne i et la ligne j.

Or, toujours d'après le principe des tiroirs, nous savons qu'en coloriant les $n+1$ points d'une ligne avec n couleurs, une couleur est utilisée deux fois. Ainsi, deux points P et Q sur la ligne i sont coloriés de la même couleur, et leurs homologues de la ligne j faisant partie de la même colonne que l'un d'entre eux sont coloriés identiquement, ce qui nous donne bien un rectangle monochrome.

Solution de l'exercice 2 (exo bonus)
Cette solution utilise le théorème de Van der Waerden. Celui-ci énonce que quels que soient les entiers r et k, il existe un entier $N = W(r,k)$ tel que si l'on colorie les entiers de 1 à N avec r couleurs, alors il existe une progression arithmétique monochrome de longueur k (on remarquera la similarité avec le théorème de Ramsey).

On appelle *pyramide de taille* k tout ensemble de $k(k+1)/2$ points pouvant être obtenu de la manière suivante : on part de k points $P_1, P_2, \ldots, P_k$ régulièrement espacés sur une droite, puis pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant k$, on rajoute l'unique point $P_{i,j}$ tel que le triangle $P_iP_jP_{i,j}$ soit équilatéral dans le sens trigonométrique. Voici quelques exemples :

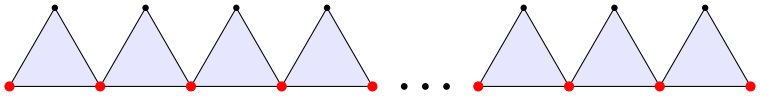


Nous allons montrer par récurrence sur n qu'il existe un entier N_n tel que toute pyramide de taille N_n coloriée avec n couleurs contient un triangle équilatéral monochrome.

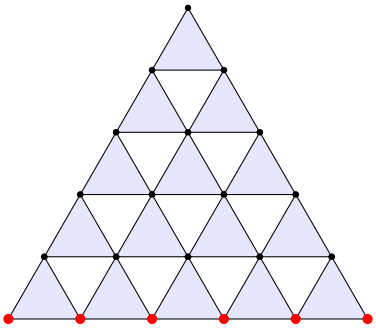
Le cas $n=1$ est immédiat.

Supposons donc que toute pyramide de taille N coloriée à l'aide de $n-1$ couleurs contient un triangle équilatéral monochrome.

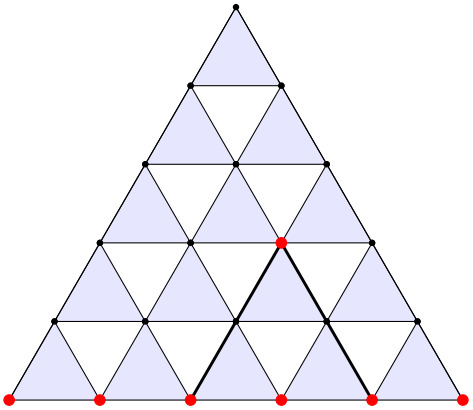
Prenons $W(N+1,n)$ points régulièrement espacés sur une droite, par exemple ceux de coordonnées $(0,k)$, pour $k \in [\![1, W(N+1,n)]\!]$. Nous savons grâce au théorème de Van der Waerden qu'il existe $N+1$ points parmi ceux-ci tous coloriés d'une même couleur c et dont les abscisses sont en progression arithmétique. Nous pouvons alors construire une rangée de N triangles équilatéraux au-dessus de cette droite en utilisant deux sommets consécutifs de notre progression arithmétique monochrome, comme ceci :



Et nous pouvons réitérer ce processus jusqu'à construire une pyramide de taille N au-dessus de la rangée de points de la couleur c :



Si un sommet de cette pyramide est de la couleur c, alors on obtient un triangle équilatéral monochrome :



Sinon, nous avons une pyramide de taille N coloriée avec $n-1$ couleurs, ce qui nous permet de conclure grâce à notre hypothèse de récurrence.

Solution de l'exercice 3

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_{4n}$ les abscisses des points $P_1, P_2, \ldots, P_{4n}$. Sans perte de généralité, supposons que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{4n}$. On peut ainsi former les n quadrilatères $P_{4k+1}P_{4k+2}P_{4k+3}P_{4k+4}$, $k \in [\![1, n]\!]$, qui respectent bien la condition de l'énoncé.

Solution de l'exercice 4

On montre que la réponse est 3.

Tout d'abord, trois droites s'intersectent en un triangle d'aire minimale, et dont les sommets doivent donc être coloriés de couleurs deux à deux différentes, ce qui montre que 3 couleurs sont nécessaires.

Réciproquement, ordonnons nos points de l'ordonnée la plus grande vers celle la plus petite, de sorte à ce que les points aient des ordonnées deux à deux distinctes. Pour ce faire, il faut que l'axe des ordonnées ne soit perpendiculaire à aucune des $\binom{\text{Card}(E)}{2}$ droites passant par deux points de E ; mais cela n'interdit qu'un nombre fini de directions de droite à choisir comme axe vertical, et il nous reste un nombre infini de directions non problématiques.

Nous pouvons alors colorier les points en suivant cet ordre (en commençant tout en haut). Chaque point étant à l'intersection de deux droites, il y a au plus deux points (un sur chacune de ces deux droites) qui se situe plus haut que le point que nous voulons colorier. Ainsi, il y a au plus deux couleurs dont l'utilisation nous est prohibée : il reste donc une troisième couleur que nous pouvons utiliser pour colorier cette intersection.

Cet algorithme permet de colorier les intersections une à une à l'aide de trois couleurs seulement, montrant bien que 3 couleurs sont suffisantes.

Solution de l'exercice 5
La réponse est $\min(2k, n)$.

Soient $P_1P_2\dots P_n$ les sommets de $\mathcal{P}$ dans cet ordre. On considérera dans la suite les indices comme étant pris modulo n.

Lorsque $k < n/2$, on peut placer nos points très proches des k côtés $[P_1P_2]$, $[P_3P_4]$, …, $[P_{2k-1}P_{2k}]$, où "très proche" signifie que le i-ème point appartient à l'intersection de l'intérieur strict des triangles $P_{2i-2}P_{2i-1}P_{2i}$ et $P_{2i-1}P_{2i}P_{2i+1}$. De cette façon, tout polygone dont les sommets sont des sommets de $\mathcal{P}$ qui contient ce point doit avoir parmi ses sommets les points P_{2i-1} et P_{2i} ; il doit donc avoir pour sommets les $2k$ points de $\{P_{2i-1} \mid 1 \leqslant i \leqslant k\} \cup \{P_{2i} \mid 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Lorsque $k \geqslant n/2$, on place de même un point très proche d'un côté sur deux, ce qui nous contraint à prendre tous les sommets de $\mathcal{P}$ pour pouvoir tracer un polygone contenant tous les points de S.

Réciproquement, il est clair que n sommets suffisent pour contenir l'ensemble des points de S dans leur enveloppe convexe. Si $k < n/2$, nous voulons montrer que $2k$ points suffisent ; pour ce faire, on raisonne par récurrence sur k.

Initialisation : Pour traiter le cas $k = 2$, on fait une récurrence sur n au sein de notre récurrence sur k : pour $n \leqslant 4$, il est évident qu'en sélectionnant tous les sommets de $\mathcal{P}$ on obtient un polygone qui contient les deux points car ce polygone est $\mathcal{P}$ lui-même ; pour $n \geqslant 5$, on peut considérer les n triangles de la forme $P_{i-1}P_iP_{i+1}$, $i \in [\![1, n]\!]$; chaque point à l'intérieur de $\mathcal{P}$ appartient à au plus deux de ces triangles, donc comme $k < n/2$ il y a un indice i tel que le triangle $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ ne contienne pas de point de S. Il suffit maintenant d'appliquer l'hypothèse de récurrence au polygone dont l'ensemble des sommets est $\{P_j \mid 1 \leqslant j \leqslant n \text{ et } j \neq i\}$.

Hérédité : Donnons-nous un ensemble de $k+1$ points $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_{k+1}\}$ au sein de $\mathcal{P}$. On sait que l'on peut trouver des indices $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_{2k} \leqslant n$ tels que $P_{i_1}P_{i_2}\dots P_{i_{2k}}$ contienne les points de $\mathcal{Q} \setminus \{Q_{k+1}\}$. S'il contient Q_{k+1} également, alors nous avons gagné ; sinon, considérons l'ensemble des quadrilatères $\bigcup_{j=1}^{k+1} \bigcup_{i_j \leqslant l < i_{j+1}} \{P_{i_j}, P_{i_{j+1}}, P_l, P_{l+1}\}$: celui-ci couvre $\mathcal{P}$ à l'exception de l'intérieur de $P_{i_1}P_{i_2}\dots P_{i_{2k}}$, et l'un de ces quadrilatères contient donc Q_{k+1} ; mais chacun d'eux a au plus deux sommets qui ne font pas déjà partie de $\{P_{i_j} \mid 1 \leqslant j \leqslant 2k\}$, et il suffit de rajouter ces deux sommets aux $2k$ que nous avons déjà afin de recouvrir $\mathcal{Q}$.

Solution de l'exercice 6
Soit $P_1P_2\dots P_n$ ce polygone. Prenons un point P sur le segment ouvert $]P_1, P_n[$ et joignons-le aux $n-2$ sommets $P_2, \dots, P_{n-1}$; sur chaque segment $[PP_i]$, $1 < i < n$, prenons un point Q_i suffisamment proche de P_i pour que Q_i et P_i soient du même côté de la droite $(P_{i-1}P_{i+1})$ (les indices sont considérés modulo n). Ainsi, pour tous $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$, le triangle $P_iP_jP_k$ ne contiendra que Q_j. $S = \{Q_i \mid 1 < i < n\}$ convient donc.

Solution de l'exercice 7
Soit $f(n)$ la réponse. Nous allons montrer que $f(n) = \binom{n}{2} + n + 1$.

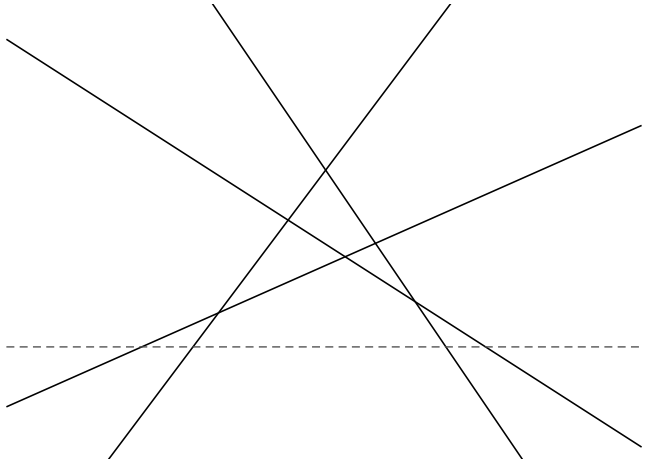
On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 0$, il y a une unique région infinie, à savoir le plan.

Donnons-nous n droites dans le plan, et choisissons-en une, appelons-la $\mathcal{D}$. Elle a un unique point d'intersection avec chacune des $n-1$ autres droites, et ces n points d'intersections découpent $\mathcal{D}$ en $n-2$ segments et 2 demi-droites, chacune découpant une région en deux ; ainsi $f(n) = f(n-1) + n$, d'où $f(n) = \big(f(0) + 1 + 2 + \dots + (n-1)\big) + n = 1 + n(n+1)/2$.

Solution n°2 de l'exercice 7

Une autre approche consiste à, après avoir fixé un axe des abscisses parallèle à aucune des n droites, remarquer que chacun des $\binom{n}{2}$ points d'intersection est le point le plus bas d'une des quatre régions autour de ce point, et que chaque région bornée en bas a un unique point le plus bas. De plus, il y a exactement $n+1$ régions non bornées en bas, comme on peut le voir en traçant une droite en-dessous des $\binom{n}{2}$ points d'intersection :



Ainsi, la réponse est $\binom{n}{2} + (n+1) = n(n+1)/2$.

Solution de l'exercice 8

Ordonnons, pour changer, les points par abscisses croissantes : soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_{2026}$ les abscisses des points $P_1, P_2, \ldots, P_{2026}$ respectivement. Les milieux des segments $[P_1P_k]$, pour $k \in [\![2, 2026]\!]$, ayant pour abscisse les nombres deux à deux distincts $(x_1 + x_k)/2$, sont eux-mêmes deux à deux distincts. De même, les milieux des segments $[P_kP_{2026}]$, $k \in [\![1, 2025]\!]$, sont deux à deux distincts ; si de plus on peut trouver $i \leqslant j \in [\![2, 2025]\!]$ tels que le milieu de $[P_1P_i]$ coïncide avec celui de $[P_jP_{2026}]$, alors $P_1P_iP_jP_{2026}$ est un parallélogramme, et donc soit $x_i \leqslant x_1$ soit $x_j \geqslant x_{2026}$, impliquant que $i = 1$ et $j = 2026$. Nous avons donc $2026 + 2026 - 1 = 4051$ milieux d'abscisses distinctes (moins un car le milieu de $[P_1P_{2026}]$ est compté deux fois). Cela montre que $\text{Card}(M) \geqslant 2 \times 2026 - 1$.

Réciproquement, si nous prenons n points espacés régulièrement sur une droite, disons $P_k = (k, 0)$ en coordonnées cartésiennes, alors le milieu du segment $[P_iP_j]$, avec $1 \leqslant i < j \leqslant 2026$, est le même que celui du segment $[P_{i-\min(i-1,2026-j)}P_{j+\min(i-1,2026-j)}]$; chaque point de S est donc le milieu d'un segment ayant pour extrémité P_1 ou P_{2026} (ou les deux), or il y a $2 \times 2025 - 1$ tels segments, ce qui montre que $\text{Card}(M) \leqslant 2 \times 2025 - 1$.

Solution de l'exercice 9

1. Soient A, B, C, D les parties convexes. L'hypothèse nous indique que nous pouvons prendre quatre points $X_{A,B,C} \in A \cap B \cap C$, $X_{A,B,D} \in A \cap B \cap D$, $X_{A,C,D} \in A \cap C \cap D$, et $X_{B,C,D} \in B \cap C \cap D$. A passe donc par $X_{A,B,C}$, $X_{A,B,D}$ et $X_{A,C,D}$; étant convexe, elle contient donc l'intérieur (au sens large) du triangle $X_{A,B,C}X_{A,B,D}X_{A,C,D}$, et de même pour les trois autres convexes.
   Nous faisons à présent une disjonction de cas sur l'enveloppe convexe de $X_{A,B,C}X_{A,B,D}X_{A,C,D}X_{B,C,D}$:
   — si celle-ci est un quadrilatère, alors le point d'intersection des diagonales de ce quadrilatère appartient aux quatre convexes, montrant que leur intersection est non vide.

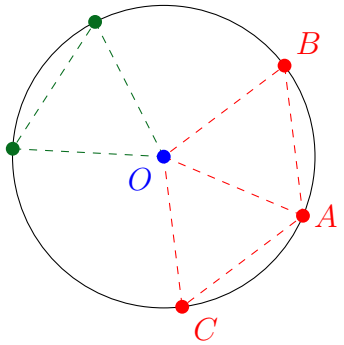
— sinon, il s'agit d'un triangle (éventuellement aplati) ; le quatrième point à l'intérieur de ce triangle se situe alors à l'intérieur des quatre convexes.

2. La réponse est oui, ce que l'on montre par récurrence. L'initialisation consiste en la partie a) ci-dessus ; supposons donc que pour un certain $n \geqslant 4$, si l'on se donne n parties convexes du plan et que l'intersection de trois quelconques d'entre elles est non vide, alors l'intersection des n convexes est non vide. Soient maintenant $A_1, A_2, \ldots, A_{n+1}$ des convexes respectant cette condition, et montrons que $\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i \neq \emptyset$. Par hypothèse de récurrence, on sait que l'intersection de n des convexes est toujours non vide ; on peut donc trouver pour chaque $i \in [\![1, n+1]\!]$ un point X_i qui appartient à A_j pour chaque $j \neq i$. Comme précédemment, nous raisonnons par disjonction de cas sur l'enveloppe convexe des $\{X_i \mid 1 \leqslant i \leqslant n+1\}$:
   — Si cette enveloppe convexe est un $n+1$-gone, alors on peut choisir 4 points X_i, X_j, X_k, X_l sur l'enveloppe convexe dans cet ordre, et considérer $Q := X_iX_k \cap X_jX_l$; pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, A_i contient au moins 3 des 4 points X_i, X_j, X_k, X_l et contient le triangle formé par 3 de ces points, or Q appartient à n'importe quel triangle dont les sommets font partie de ceux-ci, montrant bien que $Q \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.
   — Sinon, un X_k se situe à l'intérieur de l'enveloppe convexe. Par définition, X_k appartient à tous les A_i pour $i \neq k$; mais A_k passe par chaque sommet de l'enveloppe convexe et contient donc X_k également, ce qui montre que $X_k \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i$.

Solution de l'exercice 10

On remarque que pour n impair, un n-gone régulier est à la fois équilibré et excentrique.

Si n est pair, alors on dispose de la construction suivante : soit O un point du plan. On place un point A à distance 1 de O, et deux points B et C tels que OAB et OAC soient équilatéraux. On peut ensuite ajouter $(n-3)/2$ triangles équilatéraux dont l'un des sommets est O et les deux autres appartiennent au cercle de centre O et rayon 1. Pour montrer que cette configuration convient, il suffit de remarquer que si l'on prend deux points sur ce cercle, alors O se trouve sur leur médiatrice, et que si l'on prend O et un P point sur le cercle appartenant à S, alors par construction nous avons également un point $Q \in S$ tel que OPQ est équilatéral.



Supposons à présent par l'absurde qu'il existe un ensemble équilibré excentrique de cardinal n avec n pair. Chaque $s \in S$ est sur la médiatrice d'au plus $\lfloor (n-1)/2 \rfloor$ paires de points (car les paires de points pour lesquels s fait partie de la médiatrice doivent être deux à deux disjointes, sans quoi s serait le centre du cercle circonscrit du triangle formé par les points de ces paires). Or, il y a $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$ paires de points, ce qui est strictement plus grand que le nombre de médiatrices sur lesquelles on peut trouver un point, qui vaut au plus $n\lfloor (n-1)/2 \rfloor = n(n-2)/2$, fournissant la contradiction recherchée.

4 Géométrie : Configurations (Antoine D)

L'intérêt de savoir reconnaître et utiliser des configurations classiques est non seulement de gagner du temps à ne pas tout redémontrer (d'autant que des fois c'est pas vraiment facile à redémontrer !), mais également savoir quels points sont intéressants d'introduire dans la figure.

Bien qu'utiles dans une bonne majorité des exercices de géométrie, ces configurations brillent particulièrement dans les compétitions qui s'autorisent plus de prérequis, comme la BMO et le RMM (voir par exemple le P2 BMO 2023, dont l'équipe française se rappelle encore...).

Considérez chacun de ces exercices comme du cours, ce sont des configurations à connaître et à savoir reconnaître et utiliser dans des figures plus compliquées, avec plus de points, à appliquer à un sommet autre que A dans ABC ou même dans un triangle autre que ABC.

Pour toute la feuille, on a fixé un triangle ABC, de centre de cercle inscrit I, de centre de cercle circonscrit O, d'orthocentre H, de centre de cercle A-exinscrit I_A, et de centre de gravité G. M désigne le milieu de $[BC]$, A' l'antipode de A dans (ABC).

Rappels

Si quand je passe dans les rangs vous n'êtes plus à cette section, j'attends de vous que vous soyez capables de me sortir à l'oral la preuve de chacun de ces exercices sans sourciller.

Exercice 1 (Pôle Sud, cercle antarctique)
Montrer que la bissectrice issue de A et la médiatrice de $[BC]$ se recoupent sur le cercle circonscrit de ABC.

On dénote S cette intersection commune. Montrer que les points B, C, I, I_A sont sur un même cercle de centre S.

Exercice 2 (Pôle Nord, cercle arctique)
Montrer que la bissectrice extérieure issue de A et la médiatrice de $[BC]$ se recoupent sur le cercle circonscrit de ABC.

On dénote N cette intersection commune. Montrer que les points B, C, I_B, I_C sont sur un même cercle de centre N.

Exercice 3
Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés de ABC sont sur le cercle circonscrit de ABC.

Exercice 4
Montrer que G est aux deux tiers des médianes, i.e. $AG = 2GM$.

De moins en moins des rappels

Exercice 5 (Cercle et droite d'Euler)

a) Montrer que l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$ envoie A sur M.

b) Montrer que M est le milieu de $[HA']$.

c) En déduire que les pieds des hauteurs et les milieux des côtés sont sur un même cercle (qu'on appelle le *cercle d'Euler*).

d) Montrer que le milieu de $[AH]$ est également sur ce cercle.

e) Soit X le centre de ce cercle. Montrer que H, G, O, X sont alignés (on appelle cette droite la *droite d'Euler*), et que $HG = 2GO$, $EG = 2GO$ et $HO = 2HE$.

Exercice 6
Soit ω le cercle inscrit de ABC, et Ω son cercle A-exinscrit. On note D, E les points de tangence de ω avec $[BC]$ et $[AB]$ respectivement. On note également J le point de tangence de Ω avec $[BC]$.

a) Montrer que $BD = BE$.

b) Montrer que $BD = CJ$.

Exercice 7 (Symédianes)
On définit la *symédiane* issue de A dans ABC comme la droite symétrique de (AM) par rapport à (AI).

a) Soient X et Y des points sur (AB) et (AC) respectivement, tels que B, C, X, Y sont cocycliques. Montrer que la symédiane de A coupe $[XY]$ en son milieu.

b) Soient E, F les pieds des hauteurs de B et C. Montrer que (AM) est une symédiane dans AEF.

c) Soit T l'intersection des tangentes en B et C de (ABC). Montrer que (AT) est la symédiane issue de A.

d) Soit K la deuxième intersection de la symédiane avec (ABC). Montrer que A est sur la K-symédiane de KBC.

e) (cf demain) Soit $D = (AT) \cap (BC)$. On a $\frac{BD}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

f) (avancé) Montrer que A et K sont conjugués harmoniques par rapport à B et C, et que l'intersection de la tangente à ABC en A avec (BC) et D sont conjugués par rapport à B et C.

Exercice 8 (Iran Lemma)
Soient D, E, F les points de tangence du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient M et N les milieux de $[BC]$ et $[AC]$. Montrer que les droites $(EF), (MN)$ et (BI) sont concourantes.

Indice : Tracer des cercles intelligents et remarquer quelque chose. Le prouver. Ensuite, il y a un triangle isocèle qui se cache...

Exercice 9 (Orthocentre deluxe)
Soit ABC un triangle, avec pieds de hauteurs D, E, F, orthocentre H, centre du cercle circonscrit O, M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AH]$. Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC), et A' l'antipode de A dans (ABC). Enfin, on pose P l'intersection de (AM) et (BCH), et Q l'intersection de (HM) avec (ABC).

a) Montrer que $BA'CH$, $MONH$ et $MOAN$ sont des parallélogrammes.

b) Montrer que A, H, E, F, Q sont cocycliques, et que Q est le centre de la similitude envoyant B, F sur C, E.

c) Montrer que A, H, E, F, P sont cocycliques, et que P est le centre de la similitude envoyant B, E sur C, F.

d) Montrer que (EF), (BC), (AQ) et (HP) sont concourantes, en un point qu'on notera X.

e) Montrer que les quadrilatères $DMQA$, $BQEM$, $CMFQ$, $XBFQ$, $XQEC$, $BMPF$, $CEPM$, $DMPH$, $XFPC$ et $XBPE$ sont cycliques.

f) Montrer que $NOMH'$ est un trapèze isocèle et que Q, N, O, M, H' sont cocycliques.

Le point P est souvent appelé le Humpty point, Q le Queue point, et X l'ex point. Noter également les nombreux résultats analogues qu'on obtient grâce à l'exercice 13.

Il ne faut pas non plus oublier les résultats autour du cercle d'Euler : des homothéties de centre G ou H et de nombreux milieux peuvent être intéressantes.

Pour ceux à qui ça parle, X et D sont conjugués par rapport à B et C, et Q et H' sont également conjugués par rapport à B et C. P est sur le A-cercle d'Apollonius de ABC et vérifie $\widehat{PAB} = \widehat{PBC}$ et $\widehat{PAC} = \widehat{PCB}$.

Passer d'un triangle à un autre

Des fois il faudra appliquer certaines configurations à des triangles autres que ABC dans la figure. Des fois les triangles seront avec des points rencontrés seulement dans cette figure, et des fois ce sera avec des triangles "classiques" associés à ABC. Voici quelques remarques pour voir quand cette deuxième option est intéressante.

Exercice 10
Montrer que A est l'orthocentre du triangle BCH, et que les triangles orthiques de ABC et BCH sont identiques. Montrer également que (ABC) et (BCH) sont symétriques par rapport à (BC) (ou M).

Exercice 11
Soient S_A, S_B, S_C les pôles Sud du triangle ABC. Montrer que le centre du cercle inscrit de ABC est l'orthocentre de $S_AS_BS_C$. Que sont A, B, C pour le triangle $S_AS_BS_C$?

Exercice 12
Soient D, E, F les pieds des hauteurs dans ABC. Montrer que H est le centre du cercle inscrit de DEF. (DEF est le *triangle orthique* de ABC.) Que sont A, B, C pour le triangle DEF ?

Exercice 13
Soient I_A, I_B, I_C les centres des cercles exinscrits de ABC. Montrer que ABC est le triangle orthique de $I_AI_BI_C$, et I est son orthocentre. Retourner voir les résultats sur le Pôle Sud avec cet exercice en tête. Quel est le cercle d'Euler de $I_AI_BI_C$? Et le milieu de $[I_AI_B]$? Y a-t-il un rapport entre $I_AI_BI_C$ et $S_AS_BS_C$?

Exercice 14
Soient d_A, d_B, d_C les tangentes à (ABC) en A, B, C respectivement, et posons $A'B'C'$ le triangle

ainsi obtenu (c'est le *triangle tangentiel* de ABC). Remarquer que (ABC) est le cercle inscrit de $A'B'C'$.

Montrer que le triangle orthique et le triangle tangentiel ont les côtés deux à deux parallèles.

Exercices

Exercice 15 (JBMO 2014, G4)
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$, H son orthocentre. Soit N le milieu de $[AH]$ et O le centre de (BCH). Montrer que $ANMO$ est un parallélogramme.

Exercice 16 (MT concours 12, P3)
Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$, et soient H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement dans ce triangle. On note Q l'intersection de la droite (BC) avec la droite (H_BH_C). Soit Γ le cercle circonscrit au triangle AH_BH_C et soit Γ' le cercle circonscrit au triangle QH_AH_C. Montrer que les cercles Γ et Γ' sont tangents.

Exercice 17 (MT concours 18, P4)
Soit ABC un triangle, d'orthocentre H. La tangente en H à (BHC) recoupe (ABC) en U et V. Montrer que $AU = AV$.

Exercice 18 (USATST 2011, P1)
Soit ABC un triangle, D, E, F les pieds des hauteurs et H l'orthocentre. On note P et Q les projetés de A et H sur (EF) respectivement. Soit également $R = (DP) \cap (HQ)$. Calculer HQ/HR.

Exercice 19 (ELMO 2018, P4)
Soit ABC un triangle avec orthocentre H et centre du cercle circonscrit O. On note P le milieu de $[AH]$, et T le point de (BC) tel que $\widehat{TAO} = 90°$. Soit X le projeté de O sur (PT). Montrer que le milieu de $[XP]$ est sur le cercle d'Euler de ABC.

Exercice 20 (EGMO 2023, P6)
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Ω, S_B et S_C les milieux des arcs AC et AB respectivement. Soit N_A le milieu de l'arc BAC (l'arc BC qui contient A), et I le centre du cercle inscrit de ABC. Soit ω_B le cercle tangent à (AB) et tangent intérieurement à Ω en S_B, et on définit ω_C de même. Montrer que (IN_A) et la droite passant par les intersections de ω_B et ω_C se recoupent sur Ω.

Solutions

Les solutions des exercices 1,2,3,6,8 sont trouvables dans le cours de configurations du groupe B de l'an dernier : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2025/09/Poly-2025-compresse.pdf. La solution de l'exercice 5 peut-être trouvée par exemple ici : https://www.mathraining.be/chapters/64.

Solution de l'exercice 4
Soit N le milieu de $[AB]$. On remarque que les triangles ACG et NMG sont semblables puisque (NM) et (AC) sont parallèles. De plus, $AC = 2MN$, donc $AG = 2GM$.

Solution de l'exercice 7

a) Soit s la symétrie par rapport à la bissectrice (intérieure) de $\widehat{BAC}$. Comme $\widehat{As(X)s(Y)} = \widehat{AXY} = \widehat{ACB}$, $s((XY))//BC$. Ainsi la médiane de A dans ABC coupe $s((XY))$ en son milieu. En réappliquant s on obtient le résultat.

b) C'est une simple application du point précédent au triangle AEF.

c) Pourquoi l'ingénieux concepteur de cet exercice aurait-il mis cette question b) sans intérêt ici ? Il doit y avoir une raison. Quelles sont les tangentes à (AEF) en E et F ? Le centre N de ce cercle est le milieu de $[AH]$, et on sait que $[MN]$ est un diamètre du cercle d'Euler. Ainsi, $\widehat{MEN}$ est un angle droit, et (EM) est la tangente à (AEF) en E ; de même pour F. Ainsi l'intersection des tangentes à (AEF) en E et F est M, qui est bien sur la symédiane de AEF.

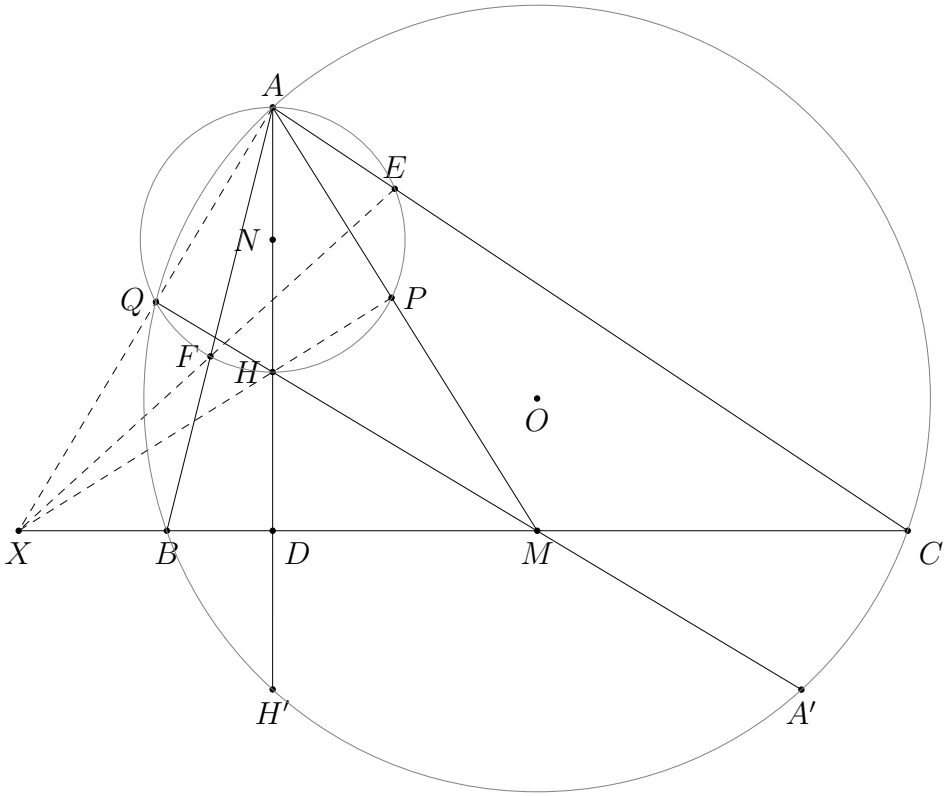
Qu'en est-il alors de ABC ? Il suffit de construire un triangle dans lequel B et C sont les pieds des hauteurs, et d'appliquer le raisonnement précédent dans ce triangle. On y arrive en posant X l'intersection entre (AB) et la perpendiculaire à (AC) en C, et Y l'intersection entre (AC) et la perpendiculaire à (AB) en B.

d) Si T est l'intersection des tangentes à (KBC) en B et C, (KT) est la K-symédiane par le point précédent. Le point précédent nous donne aussi que A, K, T sont alignés, et on a fini.

e) voir le cours d'Akin (celui d'après dans le poly).

f) Ça dépasse le cadre de ce cours, voir par exemple le poly "Muricaaa" pour une preuve, ainsi que *beaucoup* d'autres propriétés.

Solution de l'exercice 9



...et de nombreux cercles

a) Le premier parallélogramme est un résultat annexe au cercle d'Euler, il vient du fait que $(A'C)$ et (BH) sont tous les deux perpendiculaires à (AC). À présent, remarquons qu'une homothétie de facteur 2 et de centre A' envoie O sur A et M sur H. Ainsi, $(OM)//(AH)$, et $AH = 2OM$. Les deux autres parallélogrammes en découlent.

b) Vu que M, H, A' sont alignés, $\widehat{HQA} = 90°$, et Q est sur le cercle de diamètre $[AH]$. Q est donc le deuxième point d'intersection des cercles (ABC) et (AEF), c'est donc le centre de la similitude incriminée (voir cours de Kevin).

c) On pourrait tout remontrer à la main, ou se rendre compte que les définitions de P et Q sont très similaires ; en fait P est le H-Queue point de HBC ! Les résultats en découlent. On réutilisera ce fait sans le redémontrer par la suite.

d) X est le centre radical des cercles $(AHEF), (ABC)$ et $(BCEF)$, d'où $(EF), (BC)$ et (AQ) sont concourantes. De même pour (HP).

e) $DMQA$ est cyclique par angle droits. Ensuite, par puissance d'un point,

$$HM \times HQ = HD \times HA = HE \times HB = HF \times HC.$$

Ensuite, Q est le point de Miquel du quadrilatère complet $BCEFAX$, et les cocyclicités avec Q restantes en découlent. Les cocyclicités avec P se démontrent de la même manière.

f) (NH') est parallèle à (OM) puisque les deux sont perpendiculaires à (BC). Aussi, $H'M = HM = ON$ par la a), et on est bons (ce n'est pas un parallélogramme parce que

$H' \neq H$). Ainsi N, O, M, H' sont cocycliques. Par ailleurs, M est le centre de $(BCEF)$, N est le centre de (AEF) et O est le centre de (ABC). Comme $BCEF$ est cyclique et que Q est le point de Miquel de $BCEFAX$, les points N, M, O, Q sont cocycliques (et d'autres centres de cercles bizarres aussi).

Solution de l'exercice 10
Pour les triangles orthiques, il s'agit d'une simple vérification (notons en revanche que E devient le pied de la hauteur issue de C !). Ensuite, ces deux transformations préservent $\{B, C\}$, et envoient H sur un point de (ABC), d'où le résultat.

Solution de l'exercice 11
On veut montrer que $(IA) \perp (S_BS_C)$. Ceci vient du fait que (S_BS_C) est la médiatrice de (IA) par cercles antarctiques. A, B, C sont donc les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés pour $S_AS_BS_C$.

Solution de l'exercice 12
Par chasse aux angles,

$$\widehat{HDE} = 90° - \widehat{BAC} = \widehat{HDF}.$$

A, B, C sont alors les centres des cercles exinscrits dans DEF, grâce à l'angle droit $\widehat{HDB} = 90°$.

Solution de l'exercice 13
(I_BI_C) est la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$. La droite perpendiculaire à (I_BI_C) en A est donc la bissectrice intérieure, qui passe bien par I et I_A. Le pôle Sud de A dans ABC est donc le milieu de $[I_AI]$, et le cercle antarctique est le cercle de diamètre $[II_A]$, qui correspondrait à un cercle de diamètre $[AH]$. De même, le cercle arctique correspond au cercle de diamètre $[BC]$.

Le cercle d'Euler étant le cercle circonscrit au triangle orthique, c'est (ABC). Le milieu de $[I_AI_B]$ est également sur le cercle d'Euler : c'est le pôle Nord de C dans ABC. Enfin, $S_AS_BS_C$ est obtenu à partir de $I_AI_BI_C$ à l'aide d'une homothétie de centre I et de rapport $1/2$.

Solution de l'exercice 14
Chassons les angles : soit X un point sur la tangente en A. Alors

$$\widehat{XAC} = \widehat{ABC} = \widehat{AEF}.$$

Solution de l'exercice 15
On sait par l'exercice 9 que si O' désigne le centre de (ABC), alors $ANMO'$ est un parallélogramme, ou encore $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MO'}$. Par ailleurs, on sait que la symétrie d'axe (BC) échange (ABC) et (BCH). Comme elle fixe M, on a $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MO'} = \overrightarrow{OM}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 16
Soit N le centre de Γ, i.e. le milieu de $[AH]$. Par des résultats sur le cercle d'Euler, si M désigne le milieu de $[BC]$, on a $\widehat{MH_CN} = 90$, donc (MH_C) est la tangente à Γ en H_C. Il faut donc faire une petite chasse aux angles pour trouver l'autre tangence : d'un côté,

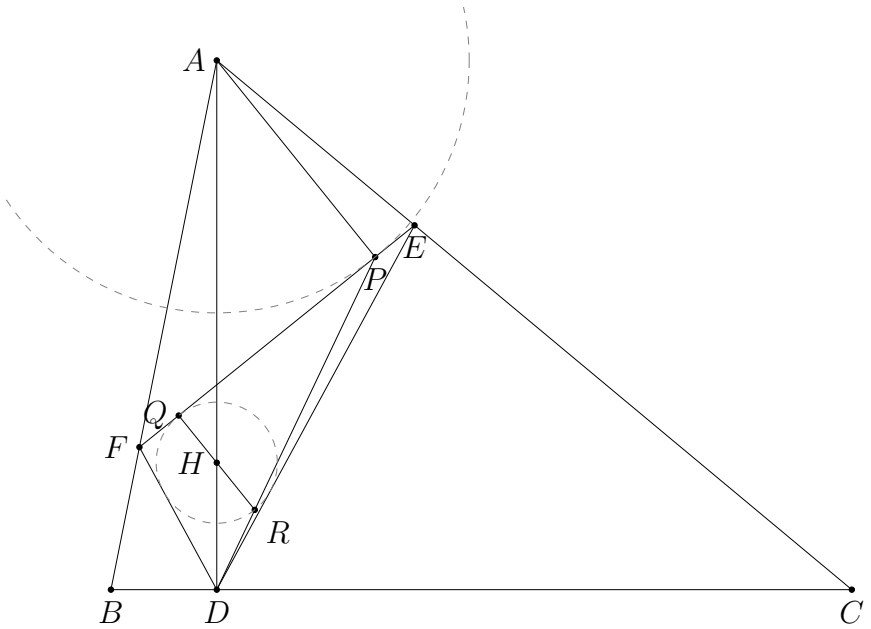
$$\widehat{MH_CQ} = \widehat{H_BH_AQ} = \widehat{CAB} = \widehat{BH_AH_C}$$

(où la première égalité vient du fait que H_A, H_B, H_C, M sont cocycliques), ce qui conclut.

Solution de l'exercice 17
Soit X le centre de (BCH). De même que pour l'exercice 15, on montre que $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OX}$. (UV) étant perpendiculaire à (XH), elle est également perpendiculaire à (AO).

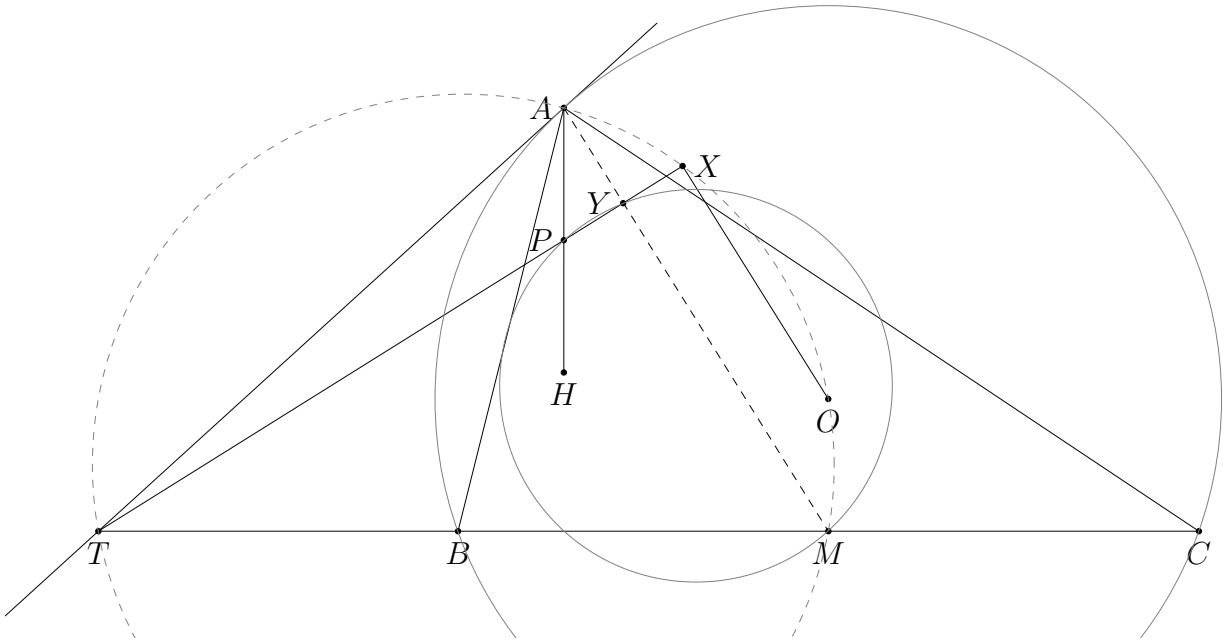
On veut montrer que A est sur la médiatrice de $[UV]$, puisque O est également sur cette médiatrice, il faut donc montrer que (AO) est la médiatrice de $[UV]$. Cette droite est quant à elle la droite passant par O et qui est perpendiculaire à (UV) ; on vient de montrer qu'il s'agissait de (AO), et c'est fini.

Solution de l'exercice 18



Un exemple fantastique où on gagne à se placer dans un triangle autre que ABC ! Dans le triangle DEF, on sait que H est le centre du cercle inscrit, qu'on nomme ω. Ainsi Q est le point de tangence de ω avec $[EF]$. De même, P est le point de tangence du cercle D-exinscrit avec (EF). Le reste du problème est alors une application d'un autre lemme plutôt connu, qu'on redémontre : soit h l'homothétie de centre D qui envoie A sur H, et donc le cercle D-exinscrit sur ω. Soit R' le point diamétralement opposé à Q dans le cercle inscrit à DEF. h envoie P sur un point de ω, et la tangente à ω en $h(P)$ est parallèle à (EF). Il s'agit donc de R' ou Q, et ce ne peut être Q puisque D, Q, P ne sont pas alignés. Ainsi D, R', P sont alignés, et $R' = R$. On en déduit que $HQ = HR$.

Solution de l'exercice 19

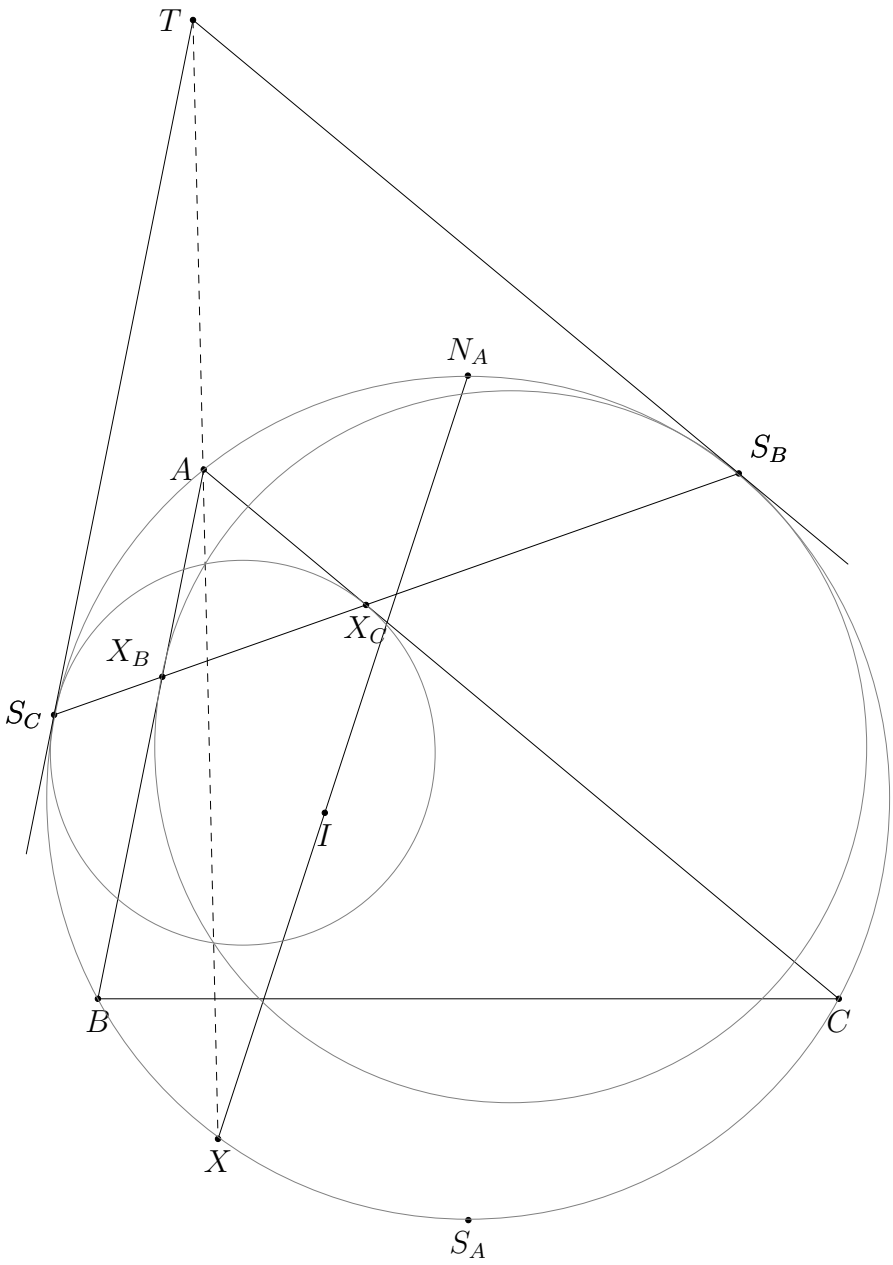


On peut remarquer que la médiane (AM) joue un rôle caché : non seulement le milieu Y de $[PX]$ est dessus, mais il semblerait que $(AM) \perp (TP)$. Il existe plusieurs moyen de montrer ce fait, le plus simple étant de remarquer que cela impliquerait que P est l'orthocentre de ATM, puisque $(AP) \perp (BC)$. Il faudrait donc montrer que $(PM) \perp (AT)$. Cela vient du fait que l'homothétie de centre H et de rapport 2 envoie P sur A et M sur A', et qu'on a bien $(AA') \perp (TA)$.

Ainsi P est l'orthocentre de TAM. Par ailleurs, T, A, X, O, M sont cocycliques, puisqu'ils sont tous sur le cercle de diamètre $[TO]$. Mais alors X est à la fois sur la hauteur issue de T et sur le cercle circonscrit à TAM : c'est le symétrique de P par rapport à (AM). Ainsi le milieu Y de $[PX]$ est le pied de la hauteur issue de T dans TAM, en particulier $\widehat{PYM} = 90°$. Y est donc sur le cercle de diamètre $[PM]$, à savoir le cercle d'Euler de ABC.

Remarque 1.
On pouvait également montrer que (TP) est la médiatrice de $[AQ]$, où Q est le A-Humpty point dans ABC, en se servant du fait que T est le centre du A-cercle d'Appollonius de ABC.

Solution de l'exercice 20



De nombreuses solutions existent, mais je trouve celle-ci particulièrement appréciable et dans l'esprit de ce TD. Si on se place dans le triangle $S_AS_BS_C$, I devient l'orthocentre, et N_A l'antipode de S_A... ce qui fait de l'intersection potentielle le S_A-queue point de $S_AS_BS_C$! Montrons donc que le S_A-queue point X est sur l'axe radical de ω_B et ω_C.

On montre pour ce faire que d'autres points sont également sur cet axe radical (ce qu'on peut remarquer en faisant une figure propre !). Tout d'abord, l'intersection T des tangentes à Ω en S_B et S_C est sur l'axe radical. De plus, A est sur cet axe radical. En effet, soient Y_B et Y_C les points de tangence de ω_B avec (AB) et de ω_C avec (AC). Soit également h l'homothétie de centre S_B qui envoie ω_B sur Ω. Elle envoie Y_B sur un point de Ω tel que la tangente à Ω en ce point est parallèle à (AB). Ce point est nul autre que S_C : en effet, (OS_C) est la médiatrice

de $[AB]$, donc $(OS_C) \perp (AB)$ (on pouvait aussi faire une chasse aux angles rapide). Ainsi, S_B, Y_B et S_C sont alignés. De même, S_B, Y_C, S_C sont alignés. Comme (S_BS_C) est la médiatrice de $[AI]$, la symétrie d'axe (AI) fixe $(S_BS_C) = (Y_BY_C)$ et échange (AB) et (AC) ; elle échange donc Y_B et Y_C. On en déduit enfin que $AY_B = AY_C$, et donc que A est sur l'axe radical de ω_B et ω_C.

Ainsi on veut montrer que T, A, X sont alignés, ou encore que A est sur la X-symédiane de XS_BS_C. On pourrait directement dire que X et A sont conjugués par rapport à S_B et S_C par propriété du queue point (voir exercice 9), mais voici une preuve n'utilisant pas ce fait. On veut montrer que $\widehat{S_CXA} = \widehat{N_AXS_B}$, puisque (IN_A) coupe $[S_BS_C]$ en son milieu (cf configuration orthocentre/antipode). D'un coté, $\widehat{S_CXA} = \widehat{S_CS_AA} = \widehat{S_CS_AI}$, et de l'autre côté, $\widehat{N_AXS_B} = \widehat{N_AS_AS_B} = \widehat{OS_AS_B}$, et on a fini puisque I et O sont conjugués isogonaux dans $S_AS_BS_C$. (J'ai trouvé la dernière chasse aux angles sensiblement plus facile sur une figure auxiliaire où $S_AS_BS_C$ était devenu ABC.)

5 Géométrie : Chasse aux longueurs (Akin)

Durant cette séance, nous avons revu les grands résultats relatifs aux longueurs en géométrie, en mettant un accent particulier sur la stratégie :

> Reformuler l'énoncé encore et encore jusqu'à se ramener à une situation où l'on peut tout calculer.

Pour les résultats fondamentaux à propos des longueurs, on se réfère à l'excellent cours de Martin Rakovsky intitulé "Progresser en Géométrie" disponible sur le site de la POFM. D'autres résultats vus lors de ce cours se retrouvent dans le cours donné par Raphaël Ducatez lors du stage de Valbonne 2025.

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle et D le point de contact de la symédiane issue de A avec BC. Montrer que $\frac{BD}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2}$.

Exercice 2 (Relations de Newton)
Soit ABC un triangle et P un point à l'intérieur. On note D, E et F les intersections des droites (AP), (BP) et (CP) avec les côtés opposés. Soit X l'intersection des droites (EF) et (BC) et M le milieu de BC. Montrer que $XD \times XM = XB \times XC$ et $MB^2 = MD \times MX$

Exercice 3
Soit ABC un triangle et P un point en son intérieur. Les droites (AP), (BP) et (CP) recoupent les côtés opposés aux points D, E et F respectivement. Soit Q un point à l'intérieur du triangle DEF. Les droites (DQ), (EQ) et (FQ) recoupent les côtés opposés du triangle DEF aux points X, Y et Z, respectivement. Montrer que les droites (AX), (BY) et (CZ) sont concourantes.

Exercice 4
Dans le triangle ABC, la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ recoupe BC en D. Soit I_b et I_c les centres des cercles inscrits aux triangles ABD et ACD, respectivement. La droite (I_bI_c) recoupe AC et AB en X et Y, respectivement. Montrer que (AD), (BX) et (CY) sont concourantes.

Exercice 5 (OFM 2022 P3)
Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On note T le point d'intersection de la tangente en A au cercle Γ avec (BC). Soit E le point de tangence du cercle inscrit à ATB avec AB. Soit F le point de tangence du cercle T-exinscrit au triangle ATC avec AC. Montrer que les droites (BC) et (EF) sont parallèles.

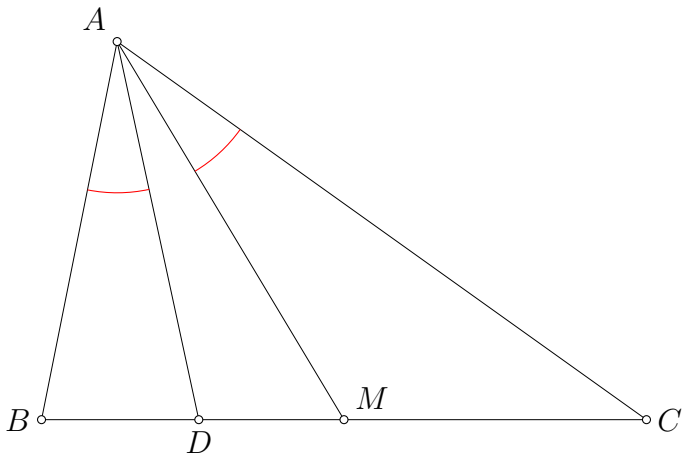
Exercice 6 (IMO SL G2 2019)
Soit ABC un triangle et D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C. Soit ω_b (resp. ω_c) le cercle inscrit au triangle BDF (resp. CDE) et notons M et N les points de tangence de ces deux cercles avec DF et DE, respectivement. La droite MN recoupe ω_B et ω_C de nouveau en $P \neq M$ et $Q \neq N$, respectivement. Montrer que $MP = NQ$.

Exercice 7 (BMO 2025 P2)
Soit ABC un triangle, H son orthocentre et D un point sur le segment BC. Les points E et F sont sur AB et AC respectivement tels que $ABDF$ et $ACDE$ soient inscriptibles. Les segments BF et CE s'intersectent au point P. Le point L est sur la droite (AH) et est tel que (LC) soit tangente au cercle circonscrit du triangle PBC. Les droites (BH) et (CP) se coupent en X. Montrer que D, X et L sont alignés.

Exercice 8 (OFM 2021 P3)
Soit $ABCD$ un carré de cercle inscrit Γ. Soit M le milieu du segment CD. Soit $P \neq B$ un point sur AB. Soit $E \neq M$ le point sur Γ tel que (DP) et (EM) sont parallèles. Les droites (CP) et (AD) se coupent en F. Montrer que la droite (EF) est tangente à Γ.

Solutions

Solution de l'exercice 1



D'après le lemme magique avec le point D sur BC, on a d'une part

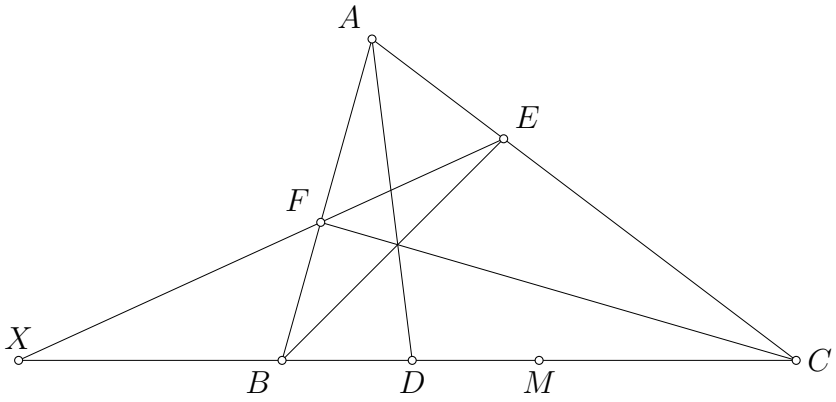
$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{DAC}} \quad (\clubsuit).$$

D'après le lemme magique avec le point M sur BC, on a d'autre part

$$1 = \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} \times \frac{\sin \widehat{BAM}}{\sin \widehat{MAC}} = \frac{AB}{AC} \times \frac{\sin \widehat{DAC}}{\sin \widehat{BAD}}.$$

On en déduit que $\frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{DAC}} = \frac{AB}{AC}$, et on en déduit le résultat annoncé en réinjectant cette égalité dans $(\clubsuit)$.

Solution de l'exercice 2



D'après le théorème de Céva, on a

$$\frac{FA}{FB} \times \frac{DB}{DC} \times \frac{EC}{EA} = 1.$$

Ensuite, d'après Ménélaus, on a

$$\frac{FA}{FB} \times \frac{XB}{XC} \times \frac{EC}{EA} = 1.$$

Ainsi, on a $\frac{DB}{DC} = \frac{XB}{XC}$. En notant $x = BD$, $a = \frac{BC}{2}$ et $y = XB$ pour alléger les notations, on a donc

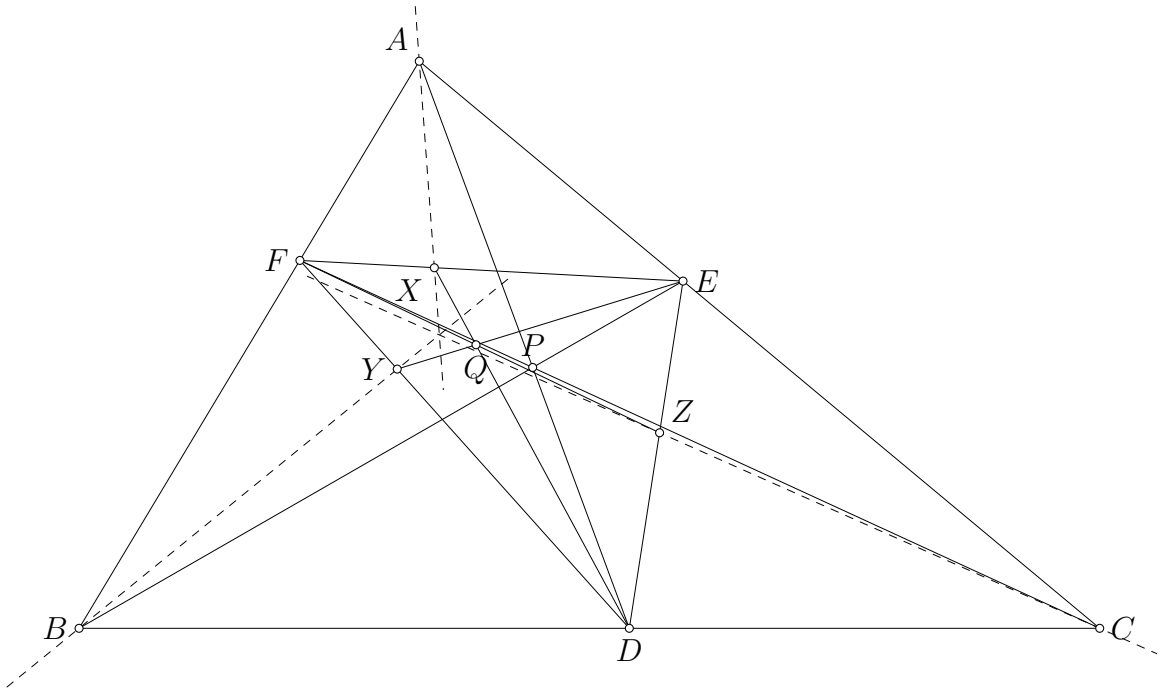
$$\frac{DB}{DC} = \frac{x}{2a - x} = \frac{XB}{XC} = \frac{y}{y + 2a},$$

ce qui équivaut à $xy + ax = ay$. L'égalité $XD \times XM = XB \times XC$ est elle équivalente à

$$(y + x)(y + a) = y(y + 2a),$$

ou encore $xy+ax+ay = 2ay$, càd $xy+ax = ay$. D'après ce qu'on a vu ci-dessus, cette égalité est vérifiée, donc $XD \times XM = XB \times XC$ également. On montre de même que $MB^2 = MD \times MX$ est aussi équivalent à $xy + ax = ay$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 3



Nous allons appliquer le théorème de Céva trigonométrique. D'après le lemme magique dans le triangle AEF, on a

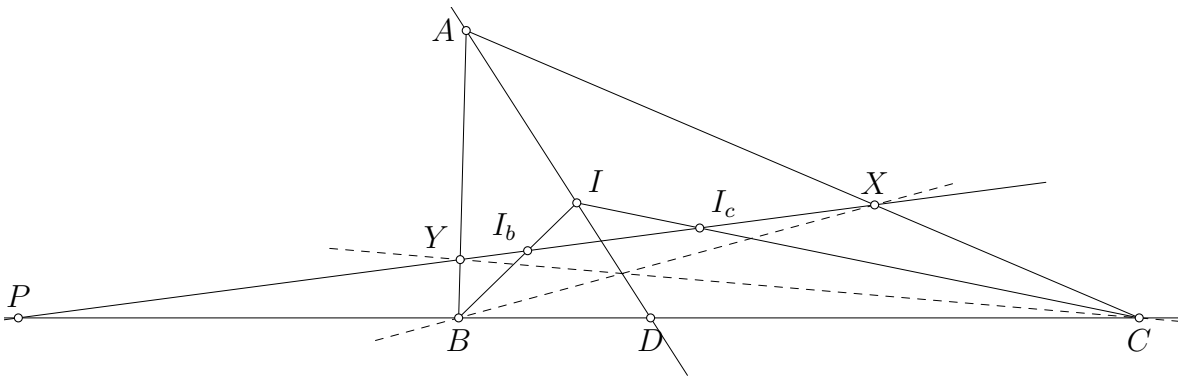
$$\frac{FX}{XE} = \frac{\sin \widehat{BAX}}{\sin \widehat{CAX}} \times \frac{AF}{AE}, \text{ ou encore } \frac{\sin \widehat{BAX}}{\sin \widehat{CAX}} = \frac{FX}{XE} \times \frac{AE}{AF}.$$

En raisonnant de même dans les triangles BDF et CDE, puis en effectuant le produit, on obtient

$$\prod_{cyc} \frac{\sin \widehat{BAX}}{\sin \widehat{CAX}} = \prod_{cyc} \frac{FX}{XE} \times \prod_{cyc} \frac{AE}{AF}.$$

D'après Céva dans les triangles DEF et ABC, chacun des deux produits du membre de droite vaut 1. Ainsi, $\prod_{cyc} \frac{\sin \widehat{BAX}}{\sin \widehat{CAX}} = 1$. La réciproque du théorème de Céva trigonométrique nous permet de conclure que (AX), (BY) et (CZ) sont bel et bien concourantes.

Solution de l'exercice 4



Soit $P = (I_bI_c) \cap (BC)$. D'après Ménélaus dans le triangle BIC avec les points alignés P, I_b et I_c, on a

$$1 = \frac{PB}{PC} \times \frac{I_cC}{I_cI} \times \frac{I_bI}{I_bB}. \quad (\clubsuit)$$

D'après le théorème de la bissectrice dans les triangles CAI, BAI et ABC, on a $\frac{I_cC}{I_cI} = \frac{AC}{AI}$, $\frac{I_bI}{I_bB} = \frac{AI}{AB}$ et $\frac{AC}{AB} = \frac{DC}{DB}$. Ainsi, $(\clubsuit)$ se réécrit $\frac{PB}{PC} = \frac{DB}{DC}$. D'après Ménélaus dans le triangle ABC avec les points alignés P, X et Y, on a

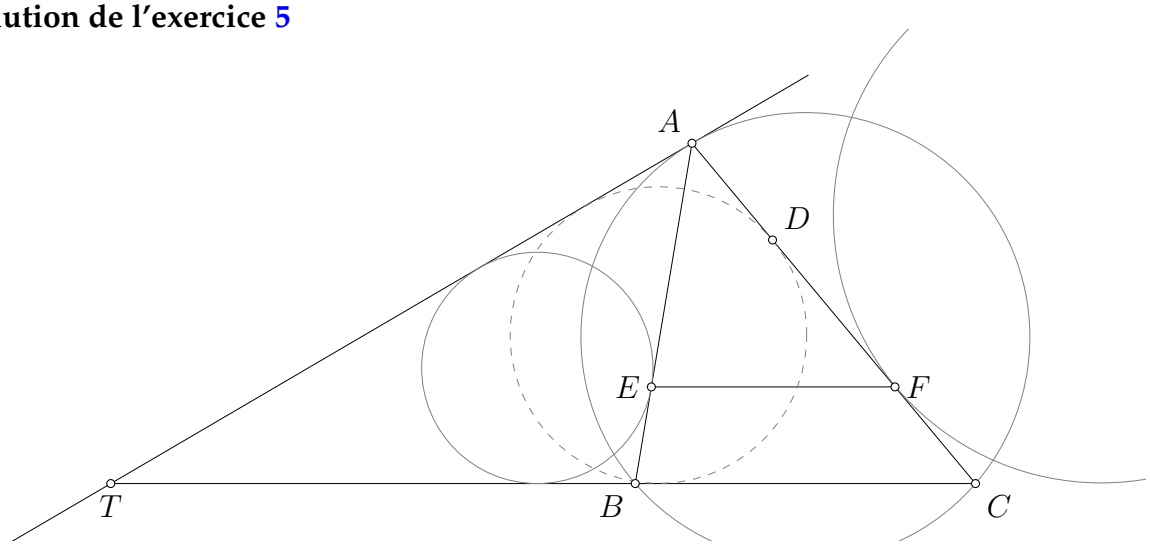
$$1 = \frac{PB}{PC} \times \frac{XC}{XA} \times \frac{YA}{YB},$$

d'où l'on tire, d'après la remarque précédente,

$$1 = \frac{DB}{DC} \times \frac{XC}{XA} \times \frac{YA}{YB}.$$

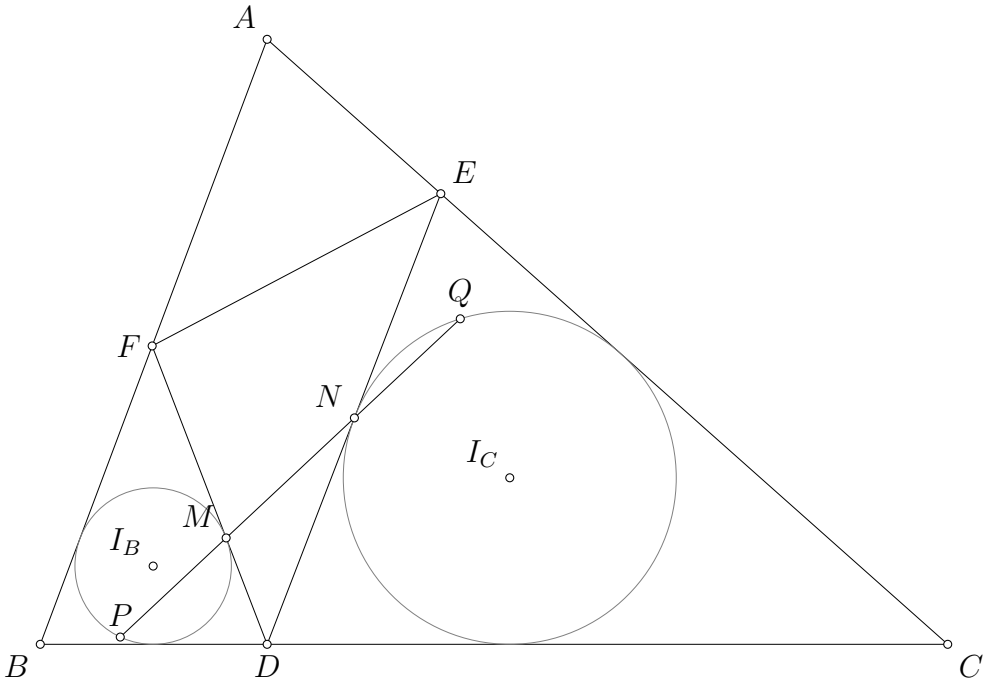
Cela conclut d'après la réciproque du théorème de Céva.

Solution de l'exercice 5



Bien sûr, nous pouvons nous emporter dans des calculs... Pour une fois, tâchons d'être plus fins. Notons D le point de contact du cercle inscrit Γ_3 au triangle ACT avec le segment AC. On se rappelle que les points D et F vérifient $AD = CF$. De plus, au vu de l'égalité d'angles $\widehat{TAB} = \widehat{TCA}$, nous savons que les triangles TAB et TCA sont semblables. La similitude (indirecte) de centre T qui envoie TAB sur TCA envoie Γ_1 sur Γ_3 et envoie AB sur CA, donc envoie E sur D. On en déduit l'égalité $\frac{AE}{AB} = \frac{CD}{CA}$. Puis, grâce aux propriétés de D et F, on a $\frac{CD}{DA} = \frac{AF}{AC}$. Cela nous permet de conclure par Thalès !

Solution de l'exercice 6



Notons I_B et I_C les centres de ω_B et ω_C, respectivement. D'après la loi des sinus, et par angle tangentiel, on a $\frac{MP}{\sin \widehat{DMN}} = 2 \times I_B M$. De même, $\frac{NQ}{\sin \widehat{DNM}} = 2 \times I_C N$. Ensuite, on applique la loi des sinus dans le triangle DMN pour obtenir

$$\frac{\sin \widehat{DNM}}{\sin \widehat{DMN}} = \frac{DM}{DN}.$$

Enfin, puisque les quadrilatères $AFDC$ et $AEDB$ sont inscriptibles, on a $\widehat{I_B DM} = \frac{1}{2}\widehat{BDF} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{I_C DN}$. Puisque les triangles $I_B DM$ et $I_C DN$ sont en plus rectangles, on en déduit qu'ils sont semblables. Ainsi, on a

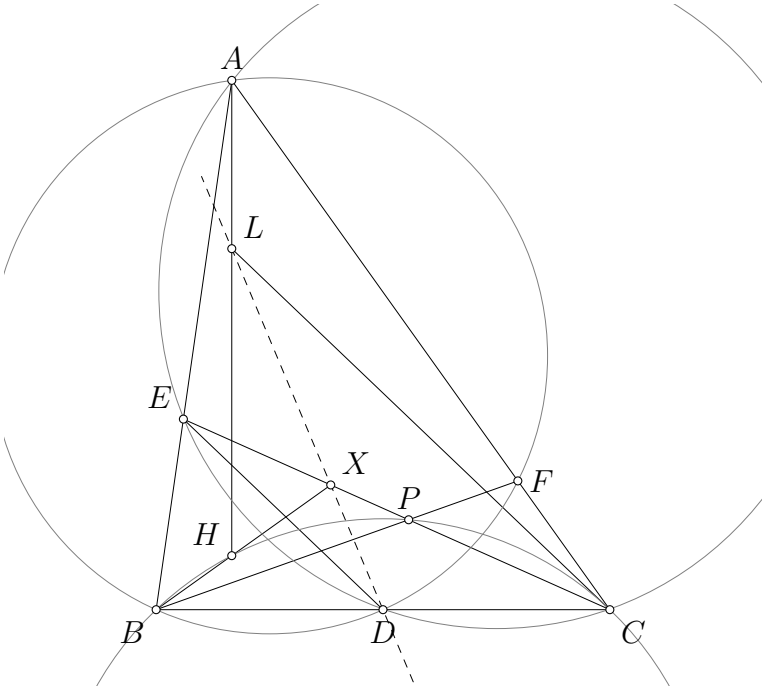
$$\frac{I_B M}{I_C N} = \frac{DM}{DN}.$$

En mettant bout à bout toutes nos égalités, il vient finalement :

$$\frac{MP}{NQ} = \frac{2 \times I_B M \times \sin \widehat{DMN}}{2 \times I_C N \times \sin \widehat{DNM}} = \frac{DM}{DN}\frac{DN}{DM} = 1,$$

comme attendu.

Solution de l'exercice 7



On commence par effectuer une chasse aux angles. Par angle tangentiel, on a

$$\widehat{LCB} = 180° - \widehat{BPC} = \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{FBD} + \widehat{ECD}.$$

Puis, par angles inscrits,

$$\widehat{FBD} + \widehat{ECD} = \widehat{FAD} + \widehat{EAD} = \widehat{BAC} = 180° - \widehat{EDC} = \widehat{EDB}.$$

On en déduit que $\widehat{LCB} = \widehat{EDB}$, puis que les droites (ED) et (LC) sont parallèles par angles correspondants. Ainsi, pour montrer l'alignement de D, X et L, il suffit de montrer l'égalité $\frac{ED}{LC} = \frac{EX}{XC}$ puis d'appliquer la réciproque de Thalès pour conclure. Pour cela, on effectue enfin des calculs de longueurs. Notons α, β et γ les trois angles du triangle. Dans notre chasse aux angles, nous avons en particulier montré que $\widehat{LCB} = \alpha$. Ainsi, on a $\widehat{HLC} = 90° - \widehat{LCB} = 90° - \alpha$.

La loi des sinus dans le triangle ALC peut ensuite s'écrire

$$\frac{LC}{AC} = \frac{\sin \widehat{LAC}}{\sin \widehat{ALC}} = \frac{\sin(90 - \gamma)}{\sin \widehat{HLC}} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \quad (\clubsuit_1).$$

De plus, $AEDC$ étant inscriptible, nous savons que les triangles BED et BCA sont semblables. Ainsi,

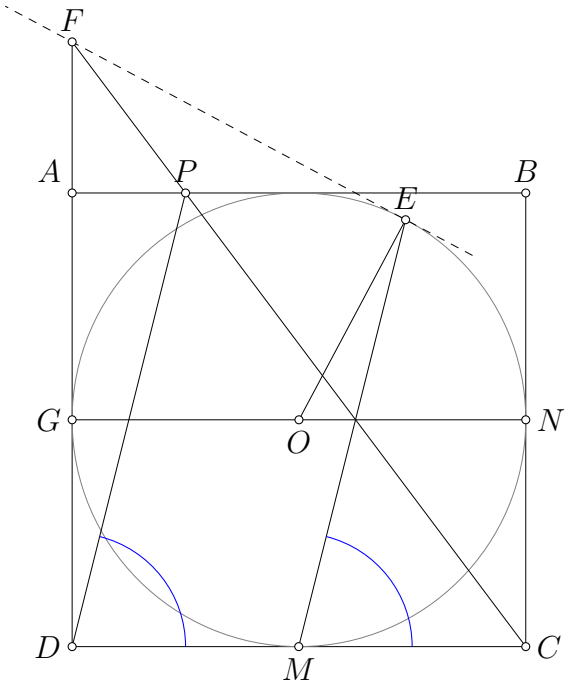
$$\frac{ED}{AC} = \frac{BE}{BC} \quad (\clubsuit_2).$$

Enfin, d'après le lemme magique dans le triangle BEC, on a

$$\frac{EX}{XC} = \frac{\sin \widehat{ABH}}{\sin \widehat{CBH}} \times \frac{BE}{BC} = \frac{\cos \alpha}{\cos \gamma} \times \frac{BE}{BC} \quad (\clubsuit_3).$$

En divisant la relation $(\clubsuit_2)$ par $(\clubsuit_1)$ et comparant le résultat à $(\clubsuit_3)$, on aboutit finalement à l'égalité $\frac{ED}{LC} = \frac{EX}{XC}$ annoncée, ce qui conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 8



Notons G et N les milieux des segments AD et BC, ainsi que O le centre du carré. Puisque la droite (FG) est tangente à Γ en G, il suffit de montrer que l'on a $FG = FE$ pour pouvoir conclure. Cependant, on a $\widehat{FGE} = \widehat{GNE} = \widehat{ONE}$ par angle tangentiel et $ON = OE$ par définition. Ainsi, nous allons démontrer que les triangles FGE et ONE sont semblables. Au vu de l'égalité d'angle précédente, il suffit de montrer que $\frac{FG}{GE} = \frac{ON}{NE}$, ou encore $\frac{ON}{FG} = \frac{NE}{GE}$.
Notons à présent $\alpha = \widehat{PDC}$ et c le côté du triangle. D'après les relations de trigonométrie dans le triangle rectangle GEN, puis par angles inscrits dans Γ, on a

$$\frac{NE}{GE} = \tan\widehat{EGN} = \tan\widehat{EMN} = \tan\left(\widehat{EMC} - \widehat{NMC}\right) = \tan(\alpha - 45) = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1}.$$

Dans un deuxième temps, en appliquant notamment Thalès, on a

$$1 - \frac{c}{FD} = 1 - \frac{AD}{FD} = \frac{FA}{FD} = \frac{AP}{DC} = \frac{AD \times \tan\widehat{ADP}}{c} = \tan(90 - \alpha) = \frac{1}{\tan\alpha},$$

d'où l'on tire $FD = \frac{c\tan\alpha}{\tan\alpha - 1}$ puis $FG = FD - \frac{c}{2} = \frac{c(\tan\alpha+1)}{2(\tan\alpha-1)}$. Finalement, en se rappelant que $ON = \frac{c}{2}$, on trouve

$$\frac{ON}{FG} = \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha + 1} = \frac{NE}{GE},$$

comme annoncé. Les triangles FGE et ONE sont donc semblables, et puisque ONE est isocèle, on en déduit que FGE est isocèle à son tour. Cela conclut.

6 Combinatoire : TD de niveau C1/C2 (Anatole et Noam)

Exercices

Exercice 1 (IMO 2021, C2)
Soit $n \geq 3$ un entier. Il y a $m \geq n+1$ perles sur un collier. Serge veut les colorier en n couleurs afin que, parmi $n+1$ perles consécutives, il y en ait toujours au moins une de chaque couleur. Quelle est la plus grande valeur de m pour laquelle c'est impossible ?

Exercice 2 (IMO 2009 C1)
2009 cartes sont rangées côte à côte sur une table. Chaque carte a une face noire et une face blanche. Au début, chaque carte a sa face blanche visible. Anatole et Noam jouent au jeu suivant : chacun à leur tour, en commençant par Anatole, ils choisissent un bloc de 50 cartes côte à côte dont la carte la plus à gauche est blanche et ils retournent chaque carte du bloc. Un joueur qui ne peut plus faire de mouvement perd.

(a) Le jeu se termine-t-il nécessairement ?

(b) Existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

Exercice 3
Bernard Arnault veut faire le tour de l'Antarctique en yacht pendant la canicule car il a très chaud. Il dispose de plusieurs ports tout au long du trajet, chacun contenant une certaine quantité de diesel. Au total, l'ensemble des ports contient juste assez de diesel pour faire le tour de l'Antarctique en entier. Montrer que si Bernard choisit bien son port de départ, il peut réaliser son projet sans jamais être à court de carburant.

Exercice 4 (IMO 2017, C1)
L'intérieur d'un rectangle R dont tous les côtés sont de longueur impaire est partitionné en rectangles à côtés entiers. Montrer qu'il y a au moins un des rectangle dont les distances aux quatre côtés de R sont toutes de même parité.

Exercice 5 (IMO 2022 C1)
Une suite *olympique* est une suite $s_1, s_2, ..., s_{2023}$ dont chacun des 2023 termes est égal à 1 ou à -1. Une suite *peu croissante* est une suite d'entiers $t_1, t_2, \ldots, t_n$ telle que $1 \leqslant t_1 < t_2 < \cdots < t_n \leqslant 2023$, et dont chacune des $n-1$ différences $t_{i+1} - t_i$ vaut 1 ou 2. Trouver le plus grand entier C tel que, pour toute suite olympique $s_1, s_2, \ldots, s_{2023}$, il existe un entier $n \geqslant 1$ et une suite peu croissante $t_1, t_2, \ldots, t_n$ de longueur n tels que

$$|s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n}| \geqslant C$$

Exercice 6 (IMO 2020 C1)
Trouver le nombre de permutations $a_1, .., a_n$ des entiers $1, .., n$ telles que

$$1a_1 \leqslant 2a_2 \leqslant ... \leqslant na_n$$

Exercice 7 (IMO 2023, C1)
Soit $m, n \geq 2$. On considère une grille $m \times n$ dont chaque case contient une pièce sur le côté face. À chaque seconde, Rémi peut malicieusement réaliser la suite d'opérations suivante :

— Choisir un carré 2×2 dans la grille

— Retourner les pièces des coins haut-gauche et bas-droit du carré

— Retourner exactement une des deux autres pièces du carré

Pour quelle paires (m, n) Rémi peut-il arriver à la configuration où chaque pièce est sur le côté pile ?

Exercice 8 (IMO 2017 C2)
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On appelle un *caméléon* tout mot de $3n$ lettres avec exactement n fois chacune des lettres a, b et c. On appelle *échange* l'opération consistant à échanger deux lettres adjacentes d'un caméléon pour en former un nouveau. Montrer que pour tout caméléon X, il existe un caméléon Y tel que l'on ne peut pas passer de X à Y avec strictement moins de $\frac{3n^2}{2}$ échanges.

Exercice 9 (IMO 2018 C3)
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Antoine effectue une suite de coups sur un plateau constitué de $n + 1$ cases alignées, numérotées de 0 à n de gauche à droite. Initialement, n pierres sont placées dans la case 0, et les autres cases sont vides.

À chaque coup, Antoine choisit une case non vide contenant, disons, k pierres. Il prend l'une de ces pierres et la déplace vers la droite d'au plus k cases (la pierre doit rester sur le plateau). L'objectif d'Antoine est de déplacer les n pierres dans la case n.

Prouver qu'Antoine ne peut pas atteindre son objectif en moins de $\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$ coups. ($\lceil x \rceil$ désigne le plus petit entier supérieur ou égal à x.)

Exercice 10 (IMO 2020, P4)
Soit $n \geq 1$ un entier. Il y a n^2 stations de ski sur le flanc d'une montagne. Deux compagnies, A et B, gèrent chacune k téléphériques, chacun reliant directement une station à une autre plus élevée. Deux téléphériques de la même compagnie n'ont jamais le même point de départ ni le même point d'arrivée.
Deux stations sont *reliées* par une compagnie s'il existe une suite de téléphériques de cette compagnie qui amène de la première station à la deuxième.
Trouver la plus petite valeur de k telle qu'on peut garantir qu'il existe forcément deux stations reliées par chacune des deux compagnies.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Considérons une couleur c fixée et essayons de calculer le nombre minimum de fois que cette couleur peut apparaître dans le collier. Notons donc k_c le nombre de perles coloriées de la couleur c.

Cette couleur apparaît au moins une fois sur chaque chaîne de $n+1$ perles consécutives, on peut donc légitimement supposer que $k_c \geq \frac{m}{n+1}$. C'est ce qu'on va s'efforcer de montrer. Il y a m chaînes de $n+1$ perles consécutives, notons a_i le nombre de perles coloriées de la couleur c dans la i-ème chaîne.

Réciproquement, chaque perle appartient à $n+1$ telles chaînes, donc chaque perle coloriée de la couleur c est comptée $n+1$ fois dans la somme $a_1 + \cdots + a_m$. Ainsi,

$$m \leq a_1 + \cdots + a_m = (n+1)k_c$$

On en déduit $k_c \geq \lceil \frac{m}{n+1} \rceil$.
Chaque couleur apparaît au moins $\lceil \frac{m}{n+1} \rceil$ fois, donc

$$n \cdot \lceil \frac{m}{n+1} \rceil \leq m$$

Or, cette inégalité est fausse pour $m = n^2 - n - 1$: dans ce cas,

$$n \cdot \lceil \frac{m}{n+1} \rceil = n \cdot (n-1) > n^2 - n - 1 = m$$

Ainsi, le souhait de Serge n'est pas réalisable pour $m = n^2 - n - 1$.

Montrons qu'il l'est toujours si $m \geq n^2 - n$.
On va montrer que dans ce cas, on peut écrire sous la forme $an + b(n+1)$, avec $a, b \geq 0$. En effet, soit $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que $m \equiv k[n]$. Alors $m = \frac{m-k(n+1)}{n} \cdot n + k \cdot (n+1)$, donc $a = \frac{m-k(n+1)}{n}$ et $b = k$ conviennent. On vérifie aisément qu'il s'agit de deux entiers positifs.
Ainsi, on peut découper le collier en a groupes de n perles consécutives et b groupes de $n+1$ perles consécutives. Dans chaque groupe de n perles, on colorie la i-ème perle de la couleur i. Dans chaque groupe de $n+1$ perles, on colorie la i-ème perle de la couleur i si $i \leq n$, et la $n+1$-ème perle d'une couleur quelconque. On remarque alors aisément que pour tout $i \leq n$, chaque chaîne de $n+1$ perles consécutives contient au moins une perle de la couleur i.

Le plus grand entier pour lequel le souhait de Serge n'est pas réalisable est donc $n^2 - n - 1$.

Solution de l'exercice 2

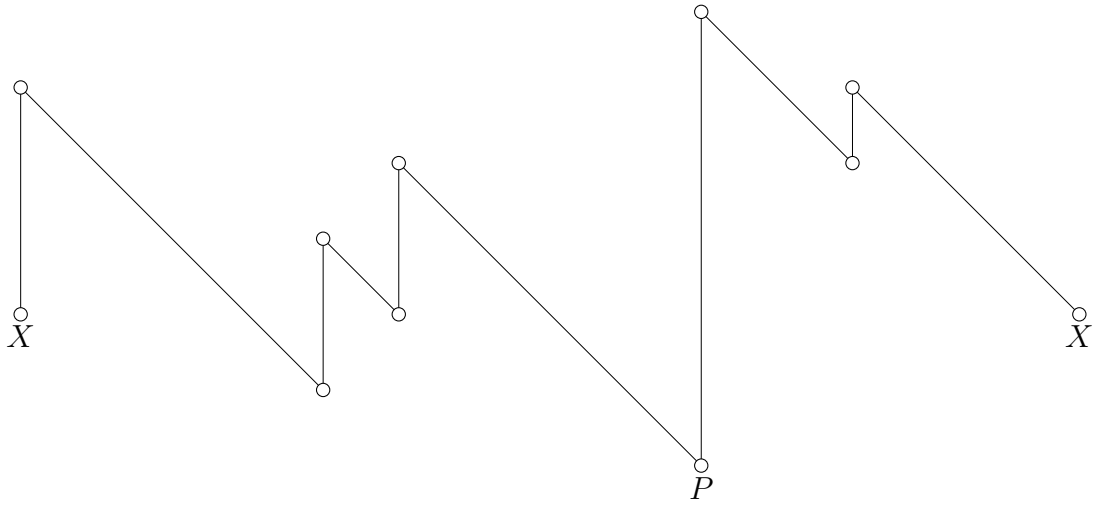
Il est possible d'associer à toute configuration possible un nombre naturel différent, en voyant les couleurs rouge et blanche respectivement comme des 1 et des 0 d'une écriture en base 2. Puisqu'une opération diminue strictement la valeur du nombre écrit en base 2, le jeu se termine nécessairement en un nombre fini de tours.

De plus, si l'on numérote les carte de 1 à 2009 de gauche à droite, on remarque qu'à chaque tour, exactement une carte dont le numéro est divisible par 50 est retournée. Or, il y a 40 telles cartes, et si un joueur est à court de coups, chacune d'entre elles a dû être retournée un nombre impair de fois. Il est donc impossible que Noam soit à court de coups puisqu'il y a un nombre impair de tours qui se sont écoulés avant l'un de ses coups. Cela montre donc qu'Anatole ne peut pas posséder de stratégie gagnante.

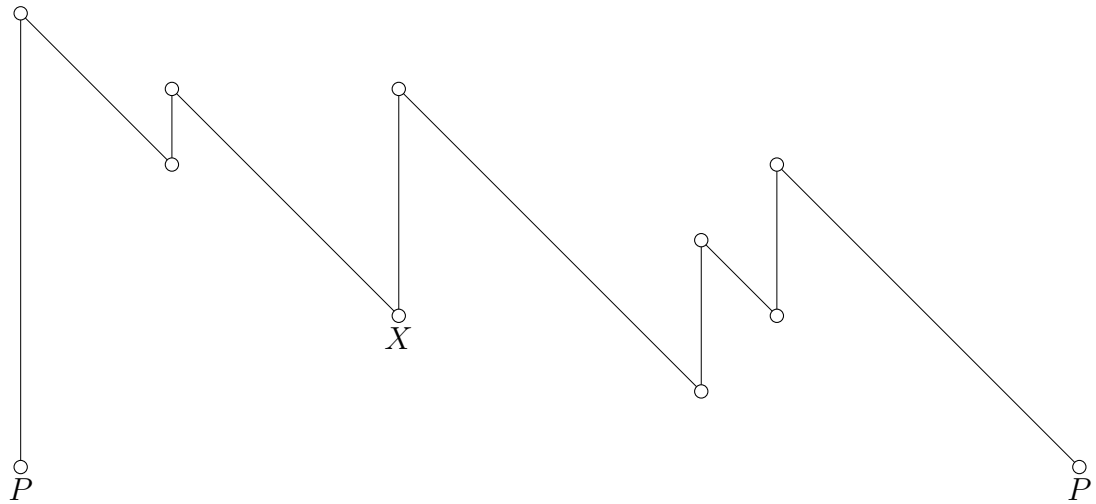
Solution de l'exercice 3

Imaginons un yacht avec suffisamment de carburant pour faire le tour de l'Antarctique en entier. Faisons partir ce yacht de n'importe quel port, appelons ce port X, et suivons l'évolution de son carburant. Comme il y a exactement assez de carburant dans l'ensemble des ports pour faire le tour en entier, le yacht aura exactement autant de carburant au début et à la fin de son tour.

Intéressons-nous au moment du trajet où le yacht a le moins de carburant. C'est au moment où il arrive à un port que l'on va appeler P. Montrons que si Bernard part du port P avec un yacht sans carburant, il pourra faire son tour entier sans être à court de carburant.



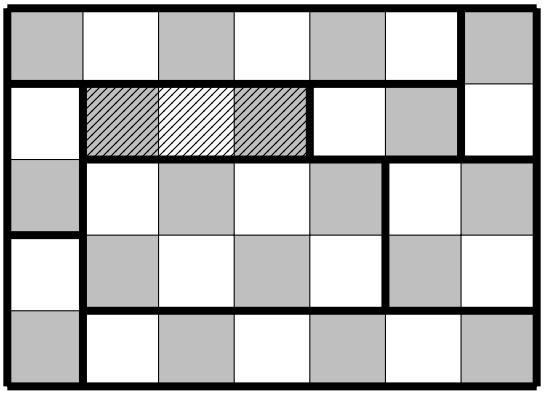
Si Bernard part du point P, son carburant suivra la même courbe que le yacht imaginaire, mais décalée puisque le port de départ n'est pas le même. Ainsi, le port P sera aussi le point où le yacht aura le carburant minimal ! On en déduit que le yacht aura toujours une quantité de carburant positive pendant le tour, et donc Bernard ne sera jamais à court de carburant.



Solution de l'exercice 4

On va considérer un quadrillage du plan en échiquier (on prend les 4 sommets de R comme étant des points à coordonnées entières) tel que les 4 carrés unité aux coins de R soient coloriés en noir. Prenons le coin bas-droit de R comme étant le point $(0, 0)$. Alors les carrés noirs sont exactement ceux dont le coin bas-droit a ses deux coordonnées de même parité.

De plus, R contient exactement un carré noir de plus que de carrés blancs. Or, chaque carré unité dans R appartient à exactement un sous-rectangle, donc l'un des sous-rectangles contient plus de cases noires que de cases blanches. Considérons ce rectangle, appelons-le R'. On déduit aisément que les quatre cases à ses coins sont noires. Ainsi, son coin bas-droit a ses deux coordonnées de même parité, donc les distances de R' aux côtés bas et droit de R ont la même parité. Les côtés de R' sont de longueurs impaire, on en déduit que ses distances aux deux autres côtés de R ont aussi la même parité, ce qui conclut.



Solution de l'exercice 5

Une étude des petits cas nous pousse à nous intéresser à la suite (s_i) dont les termes valent $+1, +1, -1, -1, +1, +1, -1, -1, \ldots$, et qui semble être un « pire » cas. On la subdivise en 1011 *blocs* de longueur 2, notés $B_1, B_2, \ldots, B_{1011}$, et un bloc B_{1012} de longueur 1 : la suite vaut $(-1)^{i+1}$ sur chaque bloc B_i.

On considère maintenant une somme de la forme $s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n}$. Ses termes s_{t_i} ont été choisis parmi des blocs consécutifs $B_u, B_{u+1}, \ldots, B_{u+v-1}$. Au plus $(v+1)/2$ de ces 1 blocs contiennent des termes $+1$; les autres contiennent des termes -1. Parmi les nombres $s_{t_1}, s_{t_2}, \ldots, s_{t_n}$, il y en a donc au plus $v+1$ qui valent $+1$ et au moins $(v-1)/2$ qui valent -1. Puisque $v \leqslant 1012$, on en déduit que $s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n} \leqslant (v+1) - (v-1)/2 = (v+3)/2 < 508$. On montre de même que $s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots + s_{t_n} > -508$, de sorte que $C \leqslant 507$.

Réciproquement, soit (s_i) une suite olympique quelconque. Quitte à remplacer chaque terme par son opposé, on suppose que (s_i) compte au moins 1012 termes égaux à $+1$. Comme précédemment, on subdivise cette suite en blocs maximaux sur lesquels (s_i) est constante ; ces blocs sont notés $B_1, B_2, \ldots, B_k$, et leurs longueurs sont notés $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Quitte à supposer que B_1 est vide, on suppose que $s_j = (-1)^i$ lorsque j appartient à un bloc B_i. Ainsi, $b_2 + b_4 + b_6 + \cdots \geqslant 1012$ et $1011 \geqslant b_1 + b_3 + b_5 + \cdots$

On choisit ensuite (t_i) comme la suite peu croissante qui prend toutes les valeurs j appartenant à un bloc $B_2, B_4, B_6, \ldots$ ou bien situées en position paire d'un bloc $B_1, B_3, B_5, \ldots$ De la sorte, parmi les nombres $s_{t_1}, s_{t_2}, \ldots$, il y en a $b_2 + b_4 + b_6 + \cdots$ qui valent $+1$; chacun des $\lfloor b_1/2 \rfloor + \lfloor b_3/2 \rfloor + \lfloor b_5/2 \rfloor + \cdots$ autres termes vaut -1. On en conclut que

$$\begin{aligned} s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots &= (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots) - (\lfloor b_1/2 \rfloor + \lfloor b_3/2 \rfloor + \lfloor b_5/2 \rfloor + \cdots) \\ &\geqslant (b_2 + b_4 + b_6 + \cdots) - (b_1 + b_3 + b_5 + \cdots)/2 \\ &\geqslant 1012 - 1011/2 > 506, \end{aligned}$$

de sorte que $s_{t_1} + s_{t_2} + \cdots \geqslant 507$.

En conclusion, l'entier C recherché vaut $C = 507$.

Solution de l'exercice 6
Commençons par considérer lequel des a_i vaut 1. Si $i > 1$, on a alors

$$2(i-1) \leq (i-1)a_{i-1} \leq ia_i = i$$

et donc nécessairement $i = 2$ et $a_1 = 2$. Ainsi, on a soit $a_1 = 1$, soit $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$. Supposons avoir ainsi placé les k premiers nombres $1, 2, \ldots, k$ dans les k premiers nombres $a_1, \ldots, a_k$. Alors on regarde où se trouve $k+1$: soit $a_{k+1} = k+1$, soit $a_i = k+1$ avec $i > k+1$ et alors

$$(i-1)(k+2) \leq (i-1)a_{i-1} \leq ia_i = i(k+1).$$

Ceci n'est que possible si $i = k+2$ et $a_{i-1} = k+2$. On a donc placé les nombres $1, 2, \ldots, k+2$ dans $a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}$. On construit donc la permutation de cette manière, quelque soit l'option prise à chaque étape, la permutation satisfera les inégalité des l'énoncé.

D'après cette construction, il y a deux possibilités pour la position de n : soit $a_n = n$, soit $a_{n-1} = n$ et $a_n = n-1$. Dans chacun des cas, les a_i restants forment une permutation des nombres restants vérifiant l'hypothèse de l'énoncé. Réciproquement, si $a_1, \ldots, a_{n-1}$ satisfait l'hypothèse de l'énoncé, alors $a_1, \ldots, a_{n-1}, n$ aussi, et si $a_1, \ldots, a_{n-2}$ satisfait l'hypothèse de l'énoncé, alors $a_1, \ldots, a_{n-2}, n, n-1$ aussi. Ainsi, le nombre de telles permutations A_n au rang n satisfait l'hypothèse de récurrence $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Comme $A_1 = 1$ et $A_2 = 2$, on trouve que A_n est la suite de Fibonacci.

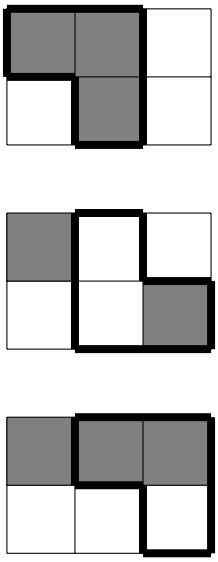
Solution de l'exercice 7
Le problème donne envie de chercher un coloriage, mais celui-ci ne saute pas aux yeux. L'astuce est de se dire qu'à chaque étape on retourne trois pièces : il est donc plutôt naturel de chercher un coloriage avec trois couleurs. On s'intéresse alors au coloriage naturel de la grille en trois couleurs.

Attention ici, il y a deux coloriages possibles : celui où les diagonales d'une même couleur sont dans la direction haut-gauche et celui où elles vont dans la direction haut-droit. Il suffit de tester les deux pour se rendre compte que seul le deuxième intéressant : avec ce coloriage, à chaque opération Rémi retourne une pièce de chaque couleur.

Supposons mn non multiple de 3. Alors les trois couleurs n'apparaissent pas autant de fois chacune. Soit $c_1 \leq c_2 \leq c_3$ les nombres de cases de chacune des trois couleurs. Montrons que $c_3 - c_1 = 1$. On remarque que chaque sous-grille $a \times b$ avec a ou b mlultiple de 3 contient autant de cases de chaque couleur. On peut alors réduire m et n modulo 3 pour se ramener à une grille 2×2 ou 1×2. Il suffit alors de vérifier la propriété voulue dans les deux cas, ce qui se fait aisément. Ainsi, $c_3 = c_1 + 1$.

Considérons la différence D entre le nombre de pièces de la couleur 3 côté face et le nombre de pièces de la couleur 1 côté face. Initialement, $D = 1$ par la remarque précédente. Or, à chaque opération, on retourne une pièce de chaque couleur donc la parité de D ne change pas. Or, si les pièces sont toutes côté pile, $D = 0$, ce qui est alors impossible. Rémi ne peut donc pas accomplir sa mission.

Reste à montrer que Rémi peut gagner si mn est multiple de 3. Pour cela, montrons que Rémi peut retourner trois pièces formant une grille 1×3 (si tant est que $m, n \geq 2$). Une image vaut mille mots :



Il suffit maintenant de découper la grille en sous-grille 3×1 pour conclure !

Rémi peut donc accomplir son objectif si et seulement si $3|mn$.

Solution de l'exercice 8
Pour répondre à l'énoncé, on cherche à construire des caméléons très éloignés. Une bonne idée peut être de commencer par un cas simple :
On remarque en effet que les deux caméléons $A = aa...abb...bc...c$ et $B = cc...cb...ba...a$ nécessitent au moins $3n^2$ échanges pour passer de l'un à l'autre.
En effet, pour passer du premier au second, toute lettre a devra être échangée avec toute lettre c. De plus, toute lettre b sera échangée avec toute lettre c et toute lettre a avec toute lettre b.
Comme il y a n fois chaque lettre, on a donc au minimum $3n^2$ échanges pour passer d'un mot à l'autre.

Maintenant, soit X un caméléon quelconque. Raisonnons par l'absurde pour montrer que l'on peut trouver le caméléon Y demandé par l'énoncé.
Si par l'absurde ce n'est pas possible, on peut passer de X à n'importe quel autre caméléon en strictement moins de $\frac{3n^2}{2}$ opérations.

En particulier, il existe une suite de moins de $\frac{3n^2}{2}$ opérations pour passer de X à A et une autre pour passer de X à B. En concaténant ces deux suites d'échanges, on peut passer de A à B en strictement moins de $3n^2$ échanges, c'est absurde.

Il existe donc un caméléon Y tel que demandé par l'énoncé (et on peut même le choisir parmi A ou B).

Solution de l'exercice 9
Pour trouver des idées, il faut essayer d'interpréter la somme proposée. $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ correspond au nombre minimal de sauts de taille au plus k à faire pour atteindre la case n.

On peut alors choisir de différencier les différentes pierres (identiques au départ) en les numérotant arbitrairement de 1 à n, et en choisissant à chaque fois la pierre du numéro le plus élevé de la case quand Antoine en prend une.
Ainsi, la pierre numéro k a au plus k pierre avec elle dans sa case lorsqu'elle est choisie, et avancera par sauts d'au plus k cases. Elle nécessitera donc au moins $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ opérations pour arriver à la case n.
Avec ce raisonnement pour toutes les pierres (avec k entre 1 et n), on en déduit qu'il faut au minimum $\lceil \frac{n}{1} \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil + \lceil \frac{n}{3} \rceil + \cdots + \lceil \frac{n}{n} \rceil$ opérations.

Solution de l'exercice 10
Montrons que la réponse est $k = n^2 - n + 1$.

Fournissons déjà une construction pour $k = n^2 - n$ (qui marchera aussi pour $k < n^2 - n$ en retirant des téléphériques). Numérotons les stations de 1 à n^2 par ordre croissant d'altitude. La compagnie A va relier toutes les paires de stations de la forme $(a, a+n)$ avec $a \leq n^2 - n$. La compagnie B va relier toutes les paires de stations de la forme $(b, b+1)$ avec b non multiple de n.
Deux stations x et y sont reliées par A si et seulement si $x \equiv y[n]$. Elles sont reliées par B si et seulement si $\lceil \frac{x}{n} \rceil = \lceil \frac{y}{n} \rceil$. On vérifie aisément que ces deux conditions ne peuvent être vérifiées simultanément.

Montrons maintenant que pour $k = n^2 - n + 1$, il existe forcément une paire de stations reliées à la fois par la compagnie A et la compagnie B.
Considérons le graphe non orienté dont les sommets sont les stations et deux sommets sont reliés s'il y a un téléphérique de la compagnie A entre les deux stations correspondantes. La condition des stations de départ et d'arrivée différentes impose que chaque sommet et de degré au plus 2. De plus on remarque aisément qu'il ne peut pas y avoir de cycles (sinon la station la plus élevée du cycle serait l'arrivée de deux téléphériques).
Ainsi, on peut décomposer le graphe en une union de chemins. Soit c_i la longueur du i-ème chemin et x leur nombre.

$$c_1 + \cdots + c_x = k = n^2 - n + 1$$

et, en double comptant le nombre de stations,

$$(c_1 + 1) + (c_2 + 1) + \cdots + (c_x + 1) = n^2$$

Ainsi, $x = n - 1$. Par la première égalité, il existe alors i tel que $c_i \geq n + 1$.
Le même graphe formé avec la compagnie B contient aussi $n - 1$ chemins. Ainsi, par le principe de tiroirs, il existe deux stations de c_1 dans la même chemins du graphe de B. Ces deux stations sont reliées à la fois par A et par B, ce qui conclut.

Remarque : La conditions des stations de départ et d'arrivée différentes est en fait inutile. En la retirant, il aurait fallu remplacer "chemin" par "arbre" dans la preuve, mais l'argument est exactement le même.

7 Combinatoire : TD Pot-pourri (Emilhan)

Exercices

Exercice 1
Deux nombres distincts sont écrits sur chaque sommet d'un $2026-$gone. Montrer que l'on peut retirer un nombre par sommet de sorte que deux nombres écrits sur des sommets consécutifs soient toujours distincts.

Exercice 2
Soit n et k deux entiers strictement positifs. On considère une grille de taille $n \times n$. On souhaite la recouvrir entièrement de dominos de taille $k \times 1$ ou $1 \times k$ sans qu'ils se chevauchent. Déterminer quand cela est possible.

Exercice 3 (TST1 Belgium 2018, P2)
Soit $n \geqslant 1$. On écrit n nombres réels au tableau. Une opération consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, et à les remplacer tous les deux par $\frac{a+b}{2}$. Déterminer tous les nombres naturels $n \geqslant 1$ tels que quels que soient les nombres écrits initialement au tableau, il existe une suite d'opérations permettant de rendre tous les nombres égaux.

Exercice 4 (USAMO 2018, P4)
Soit p un nombre premier et $a_1, \ldots, a_p$ des nombres entiers. Montrer qu'il existe $k \geqslant 0$ tel que les nombres

$$a_1 + 1 \cdot k, \quad a_2 + 2 \cdot k, \quad \ldots \quad , a_p + p \cdot k$$

prennent au moins $\frac{p}{2}$ valeurs différentes modulo p.

Exercice 5 (EGMO 2026, P1)
Un tableau 2026×2026 est dit *bordeaux* si au moins une de ses 2026^2 cases est coloriée en rouge. Une région rectangulaire formée de cases entières est dite *impairement rouge* si elle contient un nombre impair de cases rouges. Déterminer le plus grand entier strictement positif M tel que, dans chacun des tableaux bordeaux 2026×2026 possibles, il existe une région rectangulaire impairement rouge d'au moins M cases.
Note : Une région rectangulaire a des côtés parallèles aux côtés du tableau et contient toutes ses cases intérieures.

Exercice 6 (Cyprus TST 2022)
Soit $M = \{1, 2, \ldots, 2026\}$. Déterminer l'entier minimal k tel que si l'on considère k sous-ensembles distincts de M à 3 éléments, il en existe deux possédant exactement un élément en commun.

Exercice 7 (RMM 2008, P4)
On considère un carré de côté n contenant $(n+1)^2$ points. Montrer qu'il est possible de choisir trois de ces points formant un triangle d'aire au plus $\frac{1}{2}$.

Exercice 8 (EGMO 2025, P5)
Soit $n > 1$ un entier. Dans une *configuration* d'une grille de taille $n \times n$, chacune des n^2 cases contient une flèche, pointant vers le haut, vers la droite, vers le bas ou vers la gauche. Pour une certaine configuration de départ, Turbo l'escargot commence sur l'une des cases et se

déplace de case en case. Lors d'un déplacement, Turbo se déplace d'une case dans la direction indiquée par la flèche dessinée sur sa case actuelle (Turbo peut sortir de la grille). Après chaque déplacement, les flèches tournent toutes de $90°$ dans le sens trigonométrique. On appelle une case *bonne* si, en commençant sur cette case, Turbo passe par toutes les cases exactement une fois, sans sortir de la grille, et revient sur sa case initiale. Déterminer, en fonction de n, le nombre maximal de bonnes cases parmi toutes les configurations initiales possibles.

Exercice 9 (USA TST 2009)
Soit $N > M > 1$ des naturels. On considère N personnes participant à un tournoi et s'affrontant tous deux à deux exactement une fois. On suppose que pour tous joueurs $P_0, \ldots, P_M$ tels que P_i a battu P_{i+1} quel que soit $0 \leq i \leq M-1$, P_0 a aussi battu P_M. Montrer qu'il est possible de numéroter les joueurs de 1 à N de sorte que si $a \geq b + M - 1$, le joueur b a battu le joueur a.

Exercice 10 (ISL 2021, C7)
On considère une grille de taille $3m \times 3m$, avec $m \geq 1$. Une grenouille est située sur la case inférieure gauche S et veut se rendre à la case supérieure droite F. Elle peut se déplacer vers toute case se situant à droite ou en haut de celle où elle se trouve. Certaines cases sont *collantes*, au sens où la grenouille ne peut plus bouger si elle atteint une telle case. Un ensemble X de cases collantes est appelé bloquant s'il empêche la grenouille d'atteindre F à partir de S, et minimal s'il ne contient aucun autre ensemble bloquant.
a. Montrer qu'il existe un ensemble bloquant minimal contenant au moins $3m^2 - 3m$ cases.
b. Montrer que tout ensemble bloquant minimal contient au plus $3m^2$ cases.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Numérotons les sommets de 1 à n et notons $\{a_i, b_i\}$ les nombres écrits sur le sommet de numéro i.

Supposons par l'absurde qu'il ne soit pas possible de choisir les nombres à retirer de sorte à atteindre notre objectif. On remarque que si l'on choisit le nombre a_1 sur le sommet 1, puisque chaque sommet possède deux nombres distincts, on peut supposer sans perte de généralité que $a_2 \neq a_1$, puis que $a_3 \neq a_2$, …, $a_n \neq a_{n-1}$. On doit donc nécessairement avoir $a_n = a_1$, car sinon on aurait une absurdité. De même, on trouve que $b_n = b_1$. Ainsi, par récurrence immédiate, tous les sommets ont les mêmes nombres $\{a_1, b_1\}$, et il suffit donc de retirer a_1 sur les sommets de numéro pair et de retirer b_1 sur les sommets de numéro impair pour conclure.

Solution de l'exercice 2

Tout d'abord, on remarque que c'est vrai si k divise n. En effet, dans ce cas, on peut paver la grille avec des dominos tous horizontaux, en remplissant séparément chaque ligne.

Montrons maintenant que cette condition est nécessaire. On colorie la grille diagonalement, avec k couleurs.

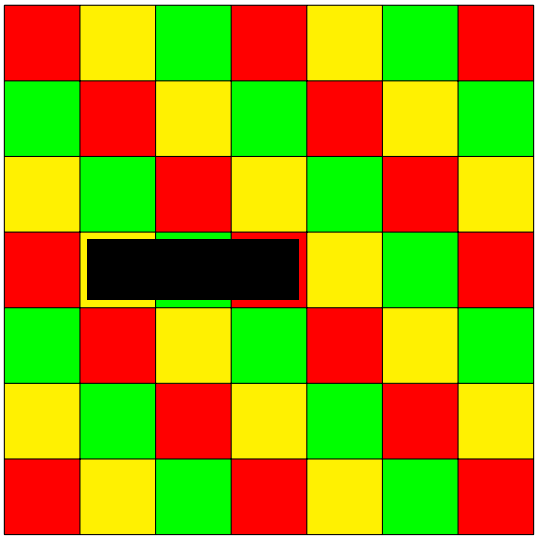


FIGURE 1 – Le coloriage avec $k = 3, n = 7$

On remarque alors que chaque domino couvre exactement une case de chaque couleur. Par conséquent, pour pouvoir recouvrir toute la grille, il est nécessaire qu'il y ait autant de cases de chaque couleur. Il s'agit maintenant de montrer que cela n'est le cas que lorsque k divise n. Pour cela, écrivons $n = q \cdot k + r$ avec $0 \leqslant r < k - 1$ la division euclidienne de n par k. On commence par remarquer qu'on peut paver le complémentaire du carré $r \times r$ en bas à gauche. Pour cela, on pave le rectangle $qk \times n$ situé au-dessus, en ne mettant que des dominos verticaux. Ensuite, on remplit le rectangle $r \times qk$ situé en bas à droite, cette fois-ci avec des dominos horizontaux. Mais, puisque chaque domino recouvre autant de cases de chaque couleur, il y a autant de cases de chaque couleur dans le carré $n \times n$ si et seulement si il y en a autant dans le carré $r \times r$! Et, dans celui-ci, si $r > 0$, il y a une couleur qui apparaît r fois (celle qui est sur la diagonale) et une qui apparaît $r - 1$ fois (celle qui est sur la surdiagonale, qui ne réapparaît pas ailleurs car $r < k$). On a donc bien le résultat désiré.

Solution de l'exercice 3
Montrons qu'il s'agit exactement des puissances de 2.

Par récurrence, toutes les puissances de 2 nous permettent d'atteindre notre objectif. Il n'y a rien à faire pour $n = 1$, et $n = 2$ vérifie clairement la propriété. Supposons avoir montré la propriété pour 2^k, avec $k \geq 0$. On considère $n = 2^{k+1}$, et on sépare les nombres écrits au tableau en deux groupes de 2^k nombres. On les rend tous égaux sur chaque groupe par hypothèse de récurrence, puis en faisant successivement la moyenne d'un nombre du premier groupe avec un nombre du deuxième groupe, tous les nombres écrits deviennent égaux.

Réciproquement, soit $n \geqslant 1$ un entier solution. Écrivons au tableau n nombres dyadiques (c'est-à-dire s'écrivant sous la forme $\frac{x}{2^k}$, avec $x \in \mathbb{Z}$ et $k \geqslant 0$) dont la somme vaut 1 (ce qui est clairement possible en prenant des dénominateurs assez grands). Puisqu'il est possible de les rendre tous égaux et que notre opération préserve le caractère dyadique et la somme des nombres écrits, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{Z}$ et $k \geqslant 0$ tels que $n \cdot \frac{x}{2^k} = 1$. En particulier, n divise 2^k, donc n est une puissance de 2.

Solution de l'exercice 4
Soit $1 \leqslant i, j \leq p$ deux indices distincts. Puisque $j - i$ est inversible modulo p, il existe un unique k entre 0 et $p-1$ tel que $a_i + i \cdot k \equiv a_j + j \cdot k \pmod{p}$. Notons qu'il y a $\frac{p(p-1)}{2}$ couples d'indices en tout. Ainsi, il existe un nombre k entre 0 et $p-1$ tel qu'il existe au plus $\frac{p-1}{2}$ paires d'indices $\{i, j\}$ entre 1 et p telles que $a_i + i \cdot k \equiv a_j + j \cdot k \pmod{p}$.

Or, un graphe possédant s sommets et v arêtes contient au moins $s - v$ composantes connexes (puisque chaque arête diminue le nombre de composantes connexes d'au plus 1). Cela montre que les nombres $a_i + i \cdot k$ prennent au moins $\frac{p+1}{2}$ valeurs distinctes modulo p.

Solution de l'exercice 5
Montrons que la réponse est $M = 1013^2$.

La construction est unique : elle consiste en le coloriage des quatre cases centrales du tableau en rouge. Dans ce cas, chaque coin de taille 1013^2 est impairement rouge. Et si une zone contient plus de 1013^2 cases, elle contiendra au moins 2 cases rouges, et ne pourra donc pas être impairement rouge car un rectangle contenant trois cases centrales contient la quatrième. Cela montre que la réponse recherchée est $\leqslant 1013^2$.

Pour l'autre inégalité, considérons un système de coordonnées $1 \leqslant i, j \leqslant 2026$ de notre tableau. Si aucune case n'est coloriée en rouge, on dispose d'une région impairement rouge de taille $2026^2 > 1013^2$. Supposons désormais qu'au moins une case est coloriée en rouge. Considérons une case de coordonnées (x, y) qui est coloriée en rouge. Par symétrie, on peut supposer SPDG que $x, y \geqslant 1014$. On considère alors les quatres rectangles $C_1 = \{1 \leqslant i \leqslant x \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant y\}$, $C_2 = \{1 \leqslant i \leqslant x-1 \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant y\}$, $C_3 = \{1 \leqslant i \leqslant x \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant y-1\}$ et $C_4 = \{1 \leqslant i \leqslant x-1 \ ; \ 1 \leqslant j \leqslant y-1\}$. Si l'on suppose que les régions impairement rouges sont toutes de taille $< 1013^2$, les quatre rectangles mentionnés doivent chacun contenir un nombre pair de cases rouges. Or, lorsque l'on considère l'union (avec répétition) des cases de ces quatre rectangles, toutes les cases du tableau sont comptées un nombre pair de fois, sauf la case (x, y) qui n'est comptée qu'une fois. Puisque celle-ci est coloriée en rouge, cela contredit notre hypothèse. On a donc bien montré que la réponse recherchée est $\geqslant 1013^2$.

Solution de l'exercice 6
Soit S un ensemble de sous-ensembles distincts de M à 3 éléments tels que deux éléments de

S n'ont jamais exactement 2 éléments en commun. On cherche à maximiser le cardinal d'un tel ensemble S.

Introduisons le graphe G dont l'ensemble des sommets est S et traçons une arête entre les éléments de S dont l'intersection est non triviale. Puisque les éléments de S sont tous distincts, deux sous-ensembles qui sont reliés dans G possèdent exactement deux éléments en commun. La remarque clef est la suivante : si s_1 est relié à s_2 et s_2 est relié à s_3, alors s_1 et s_2 ont deux éléments en commun, donc s_1 a au moins un élément en commun avec s_3. Ainsi, par hypothèse sur S, s_1 et s_3 sont reliés également. En d'autres termes, les composantes connexes de G sont des graphes complets. Utilisons ce lemme pour majorer la taille des composantes connexes de G en fonction du nombre d'éléments de M présents dans l'union des éléments de la composante.

Soit $s_1 = \{a, b, c\}$ et $s_2 = \{a, b, d\}$ deux éléments de S qui sont reliés dans G. Soit s_3 un troisième élément de S qui est dans la composante connexe de s_1 et s_2.
Premier cas : Si s_3 ne contient pas à la fois a et b, alors SPDG s_3 est de la forme $\{b, c, d\}$. On remarque alors que le seul autre sous-ensemble de M qui peut être dans la même composante connexe est $\{a, c, d\}$. Dans ce cas, il y a donc au plus 4 éléments de S dans cette composante connexe qui regroupe nécessairement 4 éléments de M.
Deuxième cas : Si s_3 contient à la fois a et b, on a $s_3 = \{a, b, e\}$. Par notre discussion précédente, n'importe quel autre élément de S dans la même composante connexe doit également contenir à la fois a et b. Dans ce cas, on obtient une composante connexe de k éléments de S qui regroupe $k + 2$ éléments de M, pour un certain $k \geqslant 2$.

Rappelons enfin que les ensembles d'éléments de M présents dans les différentes composantes connexes sont disjoints et qu'une composante connexe à un seul élément regroupe 3 éléments de M. En conclusion, on a vu qu'une composante connexe peut soit :

— contenir au plus 4 éléments de S et regrouper quatre éléments de M,

— contenir k éléments de S et regrouper $k + 2$ éléments de M pour un certain $k \geqslant 1$.

Puisque $4 \nmid 2026$, une façon de maximiser le cardinal de S est donc de faire $2020/4 = 505$ groupes de 4 éléments de M afin de créer 505 composantes connexes de quatre éléments de S, ainsi qu'une composante de 4 éléments de S utilisant 6 éléments de S.

Ces bornes sont atteintes par nos constructions précédentes, donc la réponse attendue est $2020 + 4 + 1 = 2025$.

Solution de l'exercice 7
Si trois points sont alignés, on a un triangle dégénéré d'aire 0, donc on peut supposer que ce cas n'apparaît pas.
L'idée de l'exercice est d'exhiber beaucoup de triangles disjoints pour en trouver un d'aire assez petite. Pour ce faire, il est naturel de trianguler l'enveloppe convexe des $(n+1)^2$ points. Puisque l'aire totale de l'enveloppe convexe de nos points vaut au plus n^2, il suffirait de trouver $2n^2$ triangles disjoints pour conclure.

Remarquons qu'un polygone convexe à $k+2$ sommets aura k triangles dans sa triangulation. De plus, un point intérieur à un triangle existant créé deux nouveaux triangles dans la triangulation. Ainsi, si k points se situent sur le borde de l'enveloppe convexe de nos $(n + 1)^2$ points, une triangulation adaptée à tous les points de l'enveloppe convexe contiendra

$$k - 2 + 2 \cdot (n^2 + 2n + 1 - k) = 2n^2 + 4n - k$$

triangles. En particulier, si $k \leqslant 4n$, la remarque précédente permet de conclure.

Supposons donc désormais que $k > 4n$. Il nous faut comprendre comment exhiber un petit triangle dans le cas où beaucoup de points se situent sur le bord de l'enveloppe convexe. L'approche naïve de triangulation du polynôme convexe constitué par ces points du bord ne suffit pas car on n'obtiendra que $k-2$ triangles disjoints.
Une idée plus fine consiste à s'inspirer du cas d'un polynôme régulier à beaucoup de sommets. Les triangles les plus petits seront ceux constitués par trois sommets constitutifs ! Dans notre cas, remarquons que le périmètre du bord de l'enveloppe convexe est majoré (ce fait se démontre aisément par récurrence) par le périmètre du carré, qui vaut $4n$. En particulier, si nous disposons de plus de $4n$ points sur le bord de l'enveloppe, il existe deux côtés consécutifs du polynôme convexe dont la somme des longueurs est majorée par 2. En notant a et b ces longueurs, on peut majorer par IAG l'aire du triangle formé par les trois points consécutifs correspondants :

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{a \cdot b}{2} \leqslant \frac{(a+b)^2}{8} \leqslant \frac{1}{2},$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8
Si n est impair, aucune case ne peut être bonne. En effet, si l'on colorie notre grille en damier noir-blanc, chaque déplacement de Turbo se fait entre deux cases de couleurs différentes. En particulier, après avoir visité un nombre impair de cases, la couleur de la nouvelle case sera différente de celle de la première case, donc on ne peut pas revenir à la case initiale après avoir visité toutes les cases exactement une fois.

Supposons donc que n est pair, et montrons que la borne attendue est $\frac{n^2}{4}$. On commence par remarquer que le nombre total de cases de la grille, qui vaut n^2, est divisible par 4. En particulier, si une case est bonne, la configuration de flèches est identique à la configuration initiale lorsque l'on revient à la case de départ après avoir parcouru toutes les cases une fois. Il est donc possible de prolonger cycliquement la trajectoire commençant sur la case bonne.

Commençons par la partie construction : partons d'une grille $n \times n$ vierge, avec $n \geqslant 2$ un nombre pair, et considérons un chemin qui commence sur un coin c, parcourt toutes les cases de la grille exactement une fois puis revient à la case c (un tel chemin existe en zigzaguant, par parité de n). Il existe clairement une configuration de flèches qui induira ce chemin si l'on commence sur la case c : il suffit de tourner les flèches assez de fois dans le sens opposé selon le reste modulo 4 du moment lors duquel on arrive sur la case en question en suivant le chemin. De plus, si une certaine case est atteinte après un nombre de déplacements multiple de 4, la configuration de flèches est la même que celle de départ, donc le prolongement cyclique du chemin est inchangé si l'on commence sur cette case-là à la place de c. Cela montre qu'au moins $\frac{n^2}{4}$ cases sont bonnes dans ce cas.

Passons à la borne supérieure. Fixons une configuration initiale de flèches pour laquelle une certaine case c est bonne. Nous avons déjà vu que les $\frac{n^2}{4}$ cases atteintes depuis c après un nombre de déplacements multiple de 4 sont bonnes. Montrons que ce sont les seules, ce qui conclura.
Supposons par l'absurde qu'une autre case c' soit bonne. On considère, pour une trajectoire cyclique d'une case bonne, le moment où l'on atteint le coin supérieur droit d. Appelons cet instant τ pour c et τ' pour c'. Par hypothèse, $\tau \not\equiv \tau' \pmod 4$, sinon les trajectoires cycliques

de c et c' seraient les mêmes et c' serait à une distance $\equiv 0 \pmod 4$ de c sur sa trajectoire cyclique. Supposons sans perte de généralité (puisque la flèche ne peut pas sortir de la grille) qu'à l'instant τ la flèche sur la case d pointe vers le bas. Cela implique qu'à l'instant $\tau - 1$, la flèche sur la case à gauche de d pointe vers la droite, puisque c'est la seule case d'où la trajectoire de c pouvait venir.
Puisque $\tau' \not\equiv \tau \pmod 4$, la flèche sur la case d pointe donc vers la gauche à l'instant τ'. En particulier, $\tau' \equiv \tau + 1 \pmod 4$. Donc lors de l'instant $\tau' + 1 \equiv \tau + 2 \pmod 4$, la flèche sur la case à gauche de d pointe vers le haut, donc la trajectoire cyclique de c' sort de la grille, ce qui est absurde et conclut.

Solution de l'exercice 9
On modélise le tournoi par un graphe complet orienté (où P a battu Q se modélise par une arête $P \to Q$).
L'idée principale de l'exercice est de séparer l'ensemble des sommets en parties entre lesquelles toutes les flèches pointent dans la même direction.
Soit $C = P_1 \to P_2 \to \ldots \to P_k \to P_1$ un cycle simple maximal, au sens où les P_i sont distincts deux-à-deux et si $P \notin C$, on ne peut avoir $P_i \to P \to P_{i+1}$ pour aucun i. On en déduit que pour n'importe quel $P \notin C$, soit $P_i \to P$ pour tout i (on dit alors que P est *faible*), soit $P \to P_i$ pour tout i (on dit alors que P est *fort*). En effet, si ce n'était pas le cas, on disposerait d'un indice i pour lequel $P_i \to P$, et quitte à augmenter i assez de fois, on se ramènerait au cas où $P \to P_{i+1}$. Par maximalité à nouveau, puisque les sommets forts battent tous les sommets du cycle, qui battent eux-même tous les sommets faibles, on en déduit que les sommets forts battent également les sommets faibles. Ainsi, on a montré que s'il n'existe pas de cycle passant par tous les sommets, il est possible de les répartir en deux parties non vides A et B de telle sorte que tous les sommets de A aient battu tous les sommets de B.

Pour conclure par récurrence sur la taille de notre graphe, quitte à numéroter les sommets du graphe dans le bon ordre pour que le sommet au plus grand numéro batte le sommet au plus petit numéro, il suffit donc de montrer que le cycle C est de longueur $k \leqslant M$. On sait par hypothèse que $k \neq M + 1$, et il nous suffit d'en déduire qu'il ne peut pas y avoir de cycle de longueur $M + 2$ pour conclure par récurrence immédiate.

Supposons donc par l'absurde que le cycle C soit de longueur $k = M + 2$. On applique notre lemme précédent à $C \setminus \{P_k\}$: puisqu'il n'y a aucun cycle de longueur $M + 1$, il est possible de séparer les sommets $P_1, \ldots, P_{M+1}$ en deux parties non vides A et B de telle sorte que tous les sommets de A battent tous les sommets de B. De plus, puisque P_i bat P_{i+1} pour tout $1 \leqslant i \leqslant M$, la partie A est formée des sommets $P_1, \ldots, P_j$ pour un certain $1 \leqslant j \leqslant M$ tel que P_{j+1} est le sommet faible d'indice minimal.
Si B possède au moins deux sommets, notés dans l'ordre du cycle C : $b_1, b_2, \ldots$ et si l'on note a le dernier sommet (dans l'ordre du cycle C) de A, alors le cycle construit à partir de C en remplaçant $a \to b_1 \to b_2$ par $a \to b_2$ est de longueur $M + 1$, ce qui est absurde. De même, si A possède au moins deux sommets notés $a_1, a_2, \ldots$ (dans l'ordre opposé au sens du cycle de C) et si b est le premier sommet de B (dans l'ordre du cycle de C), alors le cycle construit à partir de C en remplaçant $a_2 \to a_1 \to b$ par $a_2 \to b$ est de longueur $M + 1$, ce qui est absurde et conclut la preuve.

Solution de l'exercice 10

— On colorie en rouge les cases accessibles depuis le coin inférieur gauche, en vert les

cases collantes et en bleu les cases depuis lesquelles on peut atteindre le coin supérieur droit.
On peut donner un coloriage bloquant minimal avec $3m^2 - 2m$ cases collantes, coloriées en vert :

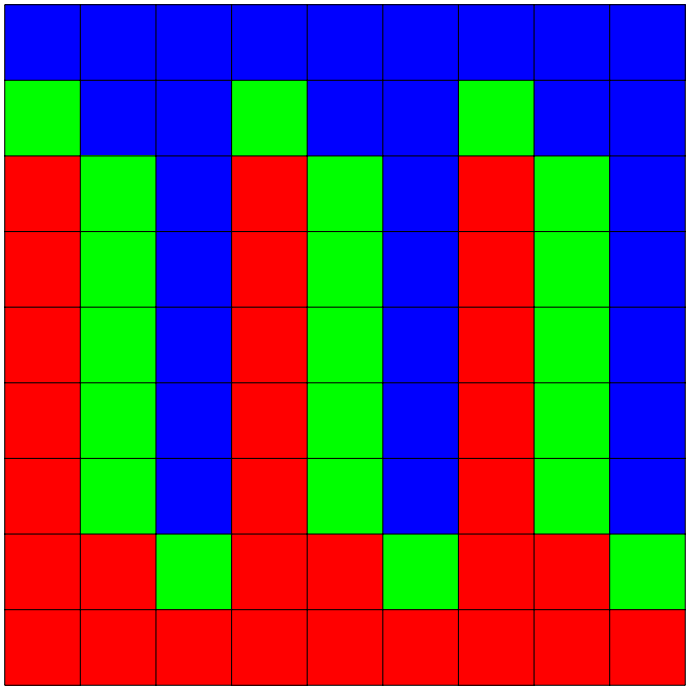


FIGURE 2 – Le coloriage avec $m = 3$

— Fixons un coloriage bloquant minimal, et notons r, v et b les nombres de cases coloriées en rouge, vert et bleu respectivement. Par construction, on a $r + v + b = 9m^2$.
L'idée principale de l'exercice est la remarque suivante : quelle que soit la case rouge ou verte considérée (à l'exception de la case de départ S), on peut lui associer une case rouge qui lui est adjacente et située à gauche ou en bas. C'est vrai pour une case rouge, sinon elle ne serait pas accessible depuis S. Et c'est vrai pour une case verte car sinon cela contredirait la minimalité de l'ensemble des cases collantes. De plus, une case rouge est associée à au plus deux cases rouges ou vertes (puisqu'une case qui compte la case précédente est située à droite ou en haut). Ainsi, on a l'inégalité :

$$r + v - 1 \leqslant 2r,$$

ou encore

$$v \leqslant r + 1.$$

Un raisonnement analogue montre que

$$v \leqslant b + 1.$$

Ainsi,

$$9m^2 = r + v + b \leqslant 3v + 2,$$

ou encore $v \geqslant 3m^2$, ce qui conclut.

8 Géométrie : TD de niveau G1/G2 (Aurélien)

À venir...

2 Entraînement de mi-parcours

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice intérieure issue de $\widehat{BAC}$. Soit Γ le cercle de diamètre $[AD]$. Le cercle Γ recoupe les droites (AB) et (AC) en E et F respectivement. Soit X le point d'intersection des droites (CE) et (FB). Montrer que les droites (AX) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 2
Sur une grille infinie dont les cases sont coloriées en blanc et rouge, un jeton peut se déplacer d'une case rouge à une autre si ces deux cases sont sur la même ligne ou colonne, et si les cases situées entre elles sont aussi rouges : on appelle une telle action *déplacement*.
Une grille infinie est dite *splendide* si les conditions suivantes sont vérifiées :

— Elle contient 2026 cases coloriées en rouge, les autres étant coloriées en blanc.

— Au moins deux jetons sont placés sur la grille, et chaque jeton est sur une case rouge.

— En un déplacement, un jeton ne peut aller sur la case d'un autre jeton.

— En deux déplacements, n'importe quel jeton peut aller sur la case de n'importe quel autre jeton.

Déterminer le nombre maximal de jetons que peut contenir une grille infinie splendide.

Exercice 3
Soit ABC un triangle. Soit N le milieu de l'arc BC contenant le point A dans le cercle circonscrit à ABC. Soit ω un cercle passant par les points A et N, qui recoupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en les points E et F respectivement. Soient O_1 et O_2 les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles AEC et AFB. Montrer que les droites (AN) et (O_1O_2) sont parallèles.

Exercice 4
Soit m un entier strictement positif et G un graphe connexe à m arêtes. Montrer qu'il est possible de numéroter les arêtes en utilisant exactement une fois chaque entier de 1 à m, de sorte que, pour tout sommet de degré au moins 2, les entiers marqués sur les arêtes incidentes à celui-ci soient premiers entre eux dans leur ensemble.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Soit H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC. On a que H appartient à Γ. Comme (AD) est la bissectrice issue de A dans le triangle AEF, D est le pôle sud issu de A dans ce même triangle.

Par conséquent, $ED = DF$. D'autre part, comme $\widehat{DEA} = \widehat{DFA} = 90$, on a alors que $DEA \simeq DFA$, donc $AE = AF$.

On a que A, E, H et D sont cocycliques, ainsi :

$$BED \sim BHA \implies \frac{BE}{BH} = \frac{BD}{BA}$$

De même, on a que :

$$CFD \sim CHA \implies \frac{CF}{CH} = \frac{CD}{CA}$$

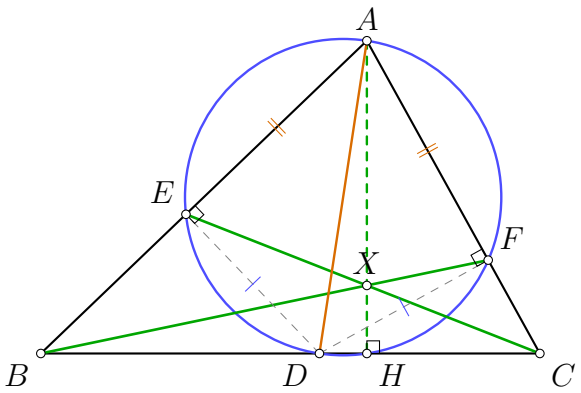
D'autre part, on a d'après le théorème de la bissectrice :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

Finalement, on a que :

$$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BH}{HC} \cdot \frac{CF}{FA} = \frac{BH}{BE} \cdot \frac{CF}{HC} = \frac{BA}{BD} \cdot \frac{CD}{CA} = 1$$

Ainsi, d'après le théorème de Céva, $(EC), (BF)$ et (AH) sont concourantes et donc X est sur la hauteur issue de A dans ABC.



Solution de l'exercice 2

Analyse : On considère une grille splendide. Soit k le nombre de jetons placés sur la grille. Supposons par l'absurde que deux jetons sont sur la même ligne. Alors, comme un jeton ne peut pas se rendre sur la case d'un autre jeton en un déplacement, il y a nécessairement une case blanche entre ces deux jetons. Mais alors, pour aller sur la case de l'autre jeton, un jeton aura nécessairement besoin de se déplacer une fois verticalement, et donc aussi une deuxième fois verticalement pour revenir sur la ligne initiale. De plus, il doit se déplacer au moins une fois horizontalement et donc a besoin d'au moins 3 déplacements : c'est absurde. Donc, il n'y a jamais deux jetons sur la même ligne. De même, il n'y a jamais deux jetons sur la même colonne.

Pour toute paire de jetons situés en (x, y) et (x', y'), comme l'un peut aller sur la case de l'autre en deux mouvements, nécessairement au moins (x, y') ou (x', y) est rouge. De plus, cette case ne contient pas de jeton : on dit que c'est une case intermédiaire. Comme il n'y a jamais deux jetons sur la même ligne ou sur la même colonne, une case intermédiaire n'est associé qu'à une paire de jetons.
Il y a donc au moins $\binom{k}{2}$ cases intermédiaires et donc au moins

$$k + \binom{k}{2} = k + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{k(k+1)}{2}$$

cases rouges. Ainsi, $\frac{k(k+1)}{2} \leqslant 2026$ et donc $k \leqslant 63$.

Synthèse : On colorie en rouge les cases (x, y) avec $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant 63$ et on place un jeton sur les cases où $x = y$. Il reste alors $2026 - \frac{63\times 64}{2} = 10$ cases à colorier : on les choisit arbitrairement dans la grille. Alors, la grille ainsi créée est bien splendide et comporte 63 jetons.

Solution de l'exercice 3

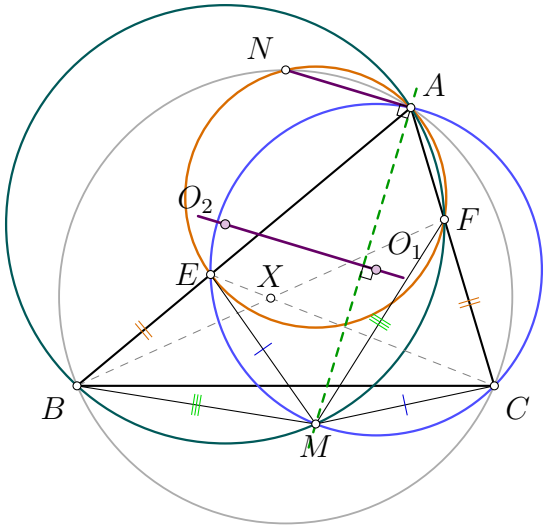
Soit M la seconde intersection des cercles circonscrit à AEC et ABF. On pose X comme le point d'intersection des droites (EC) et (BF).

On a donc que M est le point de Miquel du quadrilatère complet formé par $AEBXFC$.

Tout d'abord, on considère la similitude de centre N qui envoie E sur F et B sur C. Or, N est le pôle nord issu du sommet A dans le triangle ABC, donc $NB = NC$. Ainsi, cette similitude est une rotation, ce qui nous donne $EB = FC$.

De plus, X est le centre de la similitude qui envoie E sur C et B et sur F. On a que $EB = FC$, cette similitude est donc une rotation. Donc $XE = XC$ et $XF = XB$. Ainsi, le point X est le pôle sud issu de A dans le triangle AEC, il est donc sur la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$.

Finalement, l'axe radical des cercles circonscrit à AEC et ABF est donc la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$. En particulier la droite (O_1O_2) est perpendiculaire à son axe radical, donc la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$. Or (AN) est la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$. Donc (AN) est aussi perpendiculaire à la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$. Finalement, cela permet de conclure que $(AN)//(O_1O_2)$.



Solution de l'exercice 4
On suppose que G n'est pas réduit à un sommet, car sinon c'est immédiat.
Commençons par décrire un algorithme pour numéroter les arêtes. Tant qu'il reste des arêtes pas encore numérotées, on considère le plus grand chemin élémentaire (qui ne repasse pas sur une arête, mais repasse éventuellement sur un sommet) n'utilisant que des arêtes pas encore numérotées : en cas d'égalité, on en choisit un arbitrairement. Supposons qu'on ait déjà utilisé les numéros entre 1 et k. Alors, en suivant l'ordre du chemin, on numérote les arêtes avec $k+1, k+2, \ldots$

Montrons maintenant que cette numérotation convient. On dit qu'un sommet est *sûr* si :

— il est de degré 1 et qu'on a numéroté son unique arête incidente

— il est de degré $\geqslant 2$, qu'on a numéroté au moins une de ses arêtes incidentes et que le PGCD de ces numéros est 1.

On remarque que si un sommet est sûr, alors il le restera pour toujours.

On va montrer qu'après chaque étape de l'algorithme précédemment décrit, tous les sommets dont on a numéroté au moins une arête incidente sont sûrs.
Initialement, comme aucune arête n'est numéroté, la propriété est bien vérifiée.
Supposons que la propriété est vérifiée au début d'une étape, et montrons qu'elle l'est encore à l'issue de cette étape. Notons $s_1, \ldots, s_l$ les sommets du plus long chemin élémentaire choisi. Tout d'abord comme i et $i+1$ sont premiers entre eux pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, les sommets $s_2, s_3, \ldots, s_{l-1}$ sont sûrs.
Intéressons-nous maintenant à s_1 pour montrer qu'il va aussi devenir sûr :

— Si s_1 est de degré 1, alors il est sûr.

— Si s_1 a déjà eu une arête coloriée pendant une étape précédente, alors s_1 est sûr par hypothèse.

— Si s_1 apparaît parmi $s_2, \ldots, s_{l-1}$, alors s_1 est sûr.

— Si s_1 a une arête incidente pas encore numérotée, alors on aurait pu prolonger le chemin, ce qui est absurde par maximalité de sa longueur.

Le dernier cas serait que s_1 soit confondu avec s_l. On a la même chose pour s_l.

Il nous reste donc à traiter le cas où $s_1 = s_l$: notre chemin est alors un cycle.
Si l'un des sommets a une arête incidente pas encore numéroté, alors on aurait allongé le cycle en formant un chemin : c'est impossible.
Si l'un des sommets a une arête incidente qui appartient a un précédent chemin, alors on aurait pu allonger ce précédent chemin en ajoutant ce cycle lorsqu'on passait par ce sommet : c'est aussi impossible par maximalité de la longueur de ce précédent chemin.
Ainsi, tous les sommets de notre cycle ont pour seules arêtes incidentes des arêtes qui appartiennent à ce cycle. Donc, par connexité de G, notre cycle contient tous les sommets et donc aussi toutes les arêtes de G. Mais alors, cela signifie que ce chemin est le premier et donc comme 1 et m sont premiers entre eux, on a bien que $s_1 = s_l$ est sûr.

Finalement, à l'issue de toutes les étapes, tous les sommets sont sûrs et donc notre numérotation convient.

Solution n°2 de l'exercice 4
On va raisonner par récurrence forte sur m.
Les cas $m = 0$ et $m = 1$ sont immédiats.
Considérons à présent que $m \geqslant 2$.
Supposons qu'on ait un sommet s_1 de degré 1. Tant qu'on peut et qu'on n'est pas sur un sommet de degré $\geqslant 3$, on prolonge notre chemin vers un sommet pas encore vu. Notons, alors $s_1, \ldots, s_k$ les sommets du chemin ainsi formé. On a alors deux cas :

— s_k est de degré 1. Alors notre chemin contient en fait tous les sommets de G par connexité et donc on peut simplement numéroter les arêtes $m, m-1, \ldots, 1$ en suivant l'ordre du chemin.

— s_k est de degré $\geqslant 3$. On considère le graphe G' où on a retiré les arêtes du chemin et les sommets $s_1, \ldots, s_{k-1}$: ce graphe est encore connexe. Par hypothèse de récurrence, G' admet une numérotation qui convient. On peut alors numéroter les arêtes du chemin avec $m, m-1, \ldots$ et ainsi on obtient une numérotation des arêtes de G qui convient.

On peut donc se ramener au cas où tous les sommets sont de degré $\geqslant 2$.

On sait alors qu'il existe un cycle dans notre graphe, qu'on note $s_1, s_2, \ldots, s_k, s_{k+1} = s_1$. Si tous les sommets sont de degré 2, alors par connexité, G se réduit à ce cycle et on peut numéroter dans l'ordre du cycle les arêtes et obtenir une numérotation valide.

Sinon, sans perdre de généralité, on peut supposer que s_1 est de degré $\geqslant 3$. Soit l le plus petit entier $\geqslant 2$ tel que s_l soit de degré $\geqslant 3$ (on peut avoir éventuellement $l = k+1$). On numérote alors les arêtes $\{s_1, s_2\}, \{s_2, s_3\}, \ldots, \{s_{l-1}, s_l\}$ avec $m, m-1, \ldots, m-l+2$. On considère alors G' le graphe où l'on a supprimé ces arêtes. Ce graphe est encore connexe. Donc, par hypothèse de récurrence, il admet une numérotation valide. De plus, comme s_1 et s_l sont de degré $\geqslant 3$, dans la numérotation de G obtenu, on a bien que les numéros de leurs arêtes incidentes sont premiers entre eux dans leur ensemble.

3 Deuxième partie : Algèbre et Arithmétique

1 Algèbre : Nombres complexes (Emilhan)

N.B. : Ces notes de cours souffrent cruellement de l'absence de dessins.

Premières définitions

On rappelle que les nombres complexes sont définis comme les nombres de la forme $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et i le nombre imaginaire tel que $i^2 = -1$. Le nombre a est appelé la *partie réelle* de z, notée $\Re(z)$ et b sa *partie imaginaire*, notée $\Im(z)$. L'identification naturelle avec le plan $\mathbb{R}^2$ nous permet de voir les nombres complexes comme des vecteurs et donc de définir leurs sommes ou de déterminer si deux nombres complexes sont (positivement) colinéaires ou non. Comme à l'école pour le plan, les sommes de nombre complexes s'effectuent coordonnées par coordonnées.
Nous pouvons également définir un produit sur les nombres complexes en utilisant la relation $i^2 = -1$: si $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ alors par définition

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Ce produit est associatif, commutatif, et l'addition est distributive comme pour les nombres réels. La règle du produit nul est toujours vérifiée.
On peut importer la notion de norme d'un vecteur pour les nombres complexes : si $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on appelle *module* de z la quantité $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Il s'agit de la distance entre (a, b) et l'origine du plan $(0, 0)$. Notons au passage que par définition, les parties réelles et imaginaires sont majorées, en valeur absolue, par le module. Comme la valeur absolue pour les nombres réels, le module est compatible avec la multiplication :

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Puisque le module d'un nombre complexe correspond à la distance à l'origine de son représentant dans le plan $\mathbb{R}^2$, on dispose comme pour les vecteurs d'une inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Par récurrence, on obtient :

Théorème 1 (Inégalité triangulaire)**.**
Soit $z_1, \dots z_n$ des nombres complexes. On a

$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + \cdots + |z_n|,$$

avec égalité ssi les nombres $z_1, \dots, z_n$ sont positivement colinéaires.

Exercice 1
Montrer que l'ensemble des sommes de deux carrés parfaits $\delta = \{a^2 + b^2, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est stable par produit.

Une autre transformation importante est la *conjugaison*. Géométriquement, cela correspond à une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses. Algébriquement, le nombre complexe conjugué $\overline{z}$ de $z = a + ib$ est défini comme $\overline{z} = a - ib$, donc $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$. Crucialement, on a les relations $z + \overline{z} = 2\Re(z)$ et $z - \overline{z} = 2\Im(z)$ et

$$|z|^2 = z \cdot \overline{z}.$$

En particulier, la conjugaison est compatible avec le module et la multiplication :

$$|\overline{z}| = |z| \quad \text{et} \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

et si $z \neq 0$, alors

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$$

est colinéaire au conjugué de z. Et si z est un nombre complexe de module 1, sur le cercle unité, alors $1/z = \overline{z}$.

Remarque 2. Un nombre complexe z est réel ssi $\overline{z} = z$ et est imaginaire pur ssi $\overline{z} = -z$.

Exercice 2
Si a, b, c sont trois nombres complexes de module 1, montrer que $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

Exercice 3 (Hamamatsu High School Mathematics Competition 2024 1)
Soit $x, y, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tels que les nombres $x^2 + y$, $y^2 + z$ et $z^2 + x$ soient réels tous les trois. Que vaut le produit des parties réelles de x, y et z ?

Décomposition polaire

Il est possible d'étendre l'exponentielle réelle $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ à l'exponentielle complexe $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ en définissant

$$\exp(i\theta) = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta).$$

Par exemple, $\exp(i\pi) = -1$ et $\exp(2i\pi) = \exp(0) = 1$.
Le vecteur $\exp(i\theta)$ correspond au vecteur unitaire formant un angle θ avec l'horizontale, et on définit

$$\exp(a + ib) := e^a \cdot e^{ib}.$$

Grâce à des formules trigonométriques, les règles de calcul usuelles restent vérifiées ($\exp(z + z') = \exp(z) \cdot \exp(z')$) et l'exponentielle complexe ne s'annule jamais. De plus, $|e^z| = \exp(\Re(z))$, et le *cercle unité* $\mathbb{U}$ est exactement l'ensemble des nombres complexes de la forme $\exp(i\theta)$. Remarquons enfin que par définition,

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cdot \cos(\theta).$$

Si $z \in \mathbb{U}$, il existe une unique classe d'angle θ modulo 2π pour laquelle $z = \exp(i\theta)$. Plus généralement, on appelle *argument* de $z \in \mathbb{C}^*$ l'angle θ (par abus de notation) associé à $z/|z|$.

On appelle *décomposition polaire* d'un nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$ la donnée de son module $|z|$ et de son argument $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ou, de façon équivalente, l'écriture :

$$z = r \cdot e^{i\theta}.$$

Cette décomposition est particulièrement adaptée au produit de nombres complexes, puisque

$$(r_1 \cdot e^{i\theta_1}) \cdot (r_2 \cdot e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 \cdot e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

De plus, on a

$$\overline{(re^{i\theta})} = re^{-i\theta} \quad \text{et} \quad (re^{i\theta})^{-1} = r^{-1} \cdot e^{-i\theta}.$$

Notons au passage que la multiplication par un nombre complexe $z = r \cdot e^{i\theta}$ correspond à une similitude directe du plan de centre l'origine, de rapport r et d'angle θ. Par exemple, la multiplication par $i = e^{i\pi/2}$ correspond à une rotation de $\pi/2$ radians, ou $90°$.
Il est souvent utile de se demander si appliquer une telle transformation (et généralement une simple rotation) ne permet pas de simplifier un peu le problème (les rotations préservant le module par exemple).

Exercice 4
Trouver tous les complexes z qui s'écrivent comme somme de 2026 complexes de module 1.

Exercice 5
Soit z et w deux complexes de modules $\leqslant 1$. Montrer que $z+w$ ou $z-w$ est de module $\leqslant \sqrt{2}$.

Nombres complexes et racines de polynômes

Puisqu'il nous est possible de parler des racines carrées de -1 (à savoir $\pm i$), il nous est possible de trouver les racines complexes (conjuguées) d'un polynôme réel du second degré grâce à la formule usuelle

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque 3. Réciproquement, un nombre complexe est toujours racine d'un polynôme à coefficients réels de degré 2.

Exercice 6
Soit $z \in \mathbb{C}$. Trouver $p, q \in \mathbb{R}$ tels que $z^2 + pz + q = 0$.

Un résultat central est le théorème de d'Alembert-Gauss :

Théorème 4.
Un polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe.

Démonstration. L'idée est de remarquer que $|P(z)| \to +\infty$ lorsque $|z| \to +\infty$ par croissances comparées, et que si z_0 est tel que $|P(z_0)|$ est minimal, alors $P(z_0) = 0$ en considérant par l'absurde $|P(z_0 + \epsilon \cdot e^{i\theta})|$. □

Corollaire 5. Un polynôme non constant à coefficients complexes et de degré n admet exactement n racines complexes comptées avec multiplicité.

Corollaire 6. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est non constant, il s'écrit de façon essentiellement unique comme produit de polynômes réels irréductibles de degrés 1 et 2.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur le degré de P. Si P est de degré 1, c'est évident.
Soit P un polynôme réel de degré $n \geqslant 2$. On sait qu'il admet n racines complexes comptées avec multiplicité. S'il admet une racine réelle, on peut factoriser et conclure par récurrence. Sinon, soit z une racine dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On sait que $\overline{z} \neq z$ et :

$$P(\overline{z}) = \overline{P}(\overline{z}) = \overline{P(z)} = 0,$$

donc on peut factoriser P par $(X - z) \cdot (X - \overline{z})$ qui est de degré 2 et à coefficients réels et conclure par récurrence. □

La décomposition polaire nous permet également de trouver certaines racines particulièrement simples. Par exemple, si l'on considère le polynôme $P_n(X) = X^n - 1$, ses n racines complexes sont les *racines n-ièmes* de l'unité

$$e^{ik\pi/n}, \quad k \in [0, n-1],$$

dont l'ensemble est parfois noté $\mathbb{U}_n$.

Fixons $m \in \mathbb{Z}$. Pour $n > 0$, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} S_m = \sum_{\xi \in \mathbb{U}_n} \xi^m &= \sum_{k=0}^{n-1} \exp(2ikm\pi/n) \\ &\text{`}=\text{'} \frac{\exp(2im\pi) - 1}{\exp(2im\pi/n) - 1} \\ &= \begin{cases} n \text{ si } n \mid m \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \\ &= n \cdot \mathbf{1}_{(n|m)}. \end{aligned}$$

En particulier, si $n > m$ et $m \neq 0$, cette somme vaut 0. Par linéarité, on en déduit le 'Root of Unity filter' :

Lemme 7. Si $P \in \mathbb{C}_d[X]$ et $n > d$, alors

$$\sum_{\xi \in \mathbb{U}_n} P(\xi) = n \cdot P(0).$$

Cette astuce nous permet d'exprimer des coefficients d'un polynôme en fonction de valeurs prises sur le cercle unité.

Exercice 7
Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme complexe de degré $d \geqslant 1$. Montrer qu'il existe un nombre complexe unitaire $z \in \mathbb{U}$ tel que $|P(z)| \geqslant \max_{i=0}^{d} |a_i|$.

Exercices

Exercice 8
Existe-t-il des nombres complexes $a, b \in \mathbb{C}$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \overline{z} = az + b \quad ?$$

Exercice 9
Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer qu'il existe $n > 0$ tel que $|z^n - 1| \geqslant \sqrt{3}$.

Exercice 10 (IMC 2024, P1)
Déterminer les paires de nombres complexes $(z, w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de module 1 tels que

$$z + w + z\overline{w} \in \mathbb{R}.$$

Exercice 11
Soit P un polynôme unitaire de degré n et à coefficients complexes dont toutes les racines complexes sont de module 1. Montrer que toutes les racines complexes du polynôme

$$Q(X) = 2X \cdot P'(X) - nP(X)$$

sont également de module 1.

Exercice 12
Soit $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. Montrer que $e^{2ix} + e^{2iy} + e^{2iz} = 0$.

Exercice 13 (VJIMC 1998 2.3)
Soit $0 < a_0 < \cdots < a_n$ des nombres réels strictement positifs. Montrer que les racines complexes du polynôme

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

sont toutes de module > 1.

Exercice 14 (VIMONI End-course exam - P3 Grade 11)
Soit p un nombre premier et $a_1, \ldots, a_{2026}$ des entiers positifs qui ne sont pas divisibles par p. Montrer qu'il existe un nombre complexe z de module 1 tel que

$$\left| \prod_{k=1}^{2026} (1 - z^{a_k}) \right| \geqslant p^{\frac{2026}{p-1}}.$$

Exercice 15
Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $\forall z \in \mathbb{U}, P(z) \in \mathbb{U}$.

Indications

- **Exo 1 :** Interpréter $a^2 + b^2$ comme $|a + ib|^2$.
- **Exo 2 :** Diviser par abc, qui est de module 1.
- **Exo 3 :** Réécrire les conditions en fonction des parties réelles et imaginaires de chaque nombre.
- **Exo 4 :** Effectuer une rotation pour se ramener à $\mathbb{R}_+$ et traiter le cas de la somme de deux nombres complexes.
- **Exo 5 :** Se ramener au cas où $z = 1$.
- **Exo 6 :** Si z est une racine, un autre nombre est racine du polynôme ...
- **Exo 7 :** Modifier le root of unity filter pour décaler les exposants du polynôme.
- **Exo 8 :** Il y a un argument purement géométrique ...
- **Exo 9 :** Raisonner géométriquement, on tourne autour du cercle.
- **Exo 10 :** Un nombre complexe z est réel ssi $\overline{z} = z$. On pourra essayer de factoriser par des solutions connues à la fin ...
- **Exo 11 :** Écrire P sous forme factorisée dans $\mathbb{C}[X]$.
- **Exo 12 :** Commencer par traiter le cas où $x = 0$.
- **Exo 13 :** Essayer de faire apparaître des polynômes de la forme $1 + X + \cdots + X^k$.
- **Exo 14 :** Essayer de trouver une solution qui soit une racine de l'unité ...
- **Exo 15 :** Transformer la condition de l'énoncé en égalité polynomiale.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Soit $n_1 = a_1^2 + b_1^2$ et $n_2 = a_2^2 + b_2^2$ deux éléments de δ. Le point clef est de remarquer que $n_1 = |z_1|^2$ et $n_2 = |z_2|^2$, où $z_k = a_k + ib_k$ pour $k = 1, 2$. En particulier,

$$n_1 \cdot n_2 = |z_1 \cdot z_2|^2 \in \delta,$$

ce qui conclut. On peut écrire explicitement :

$$(a_1^2 + b_1^2) \cdot (a_2^2 + b_2^2) = (a_1a_2 - b_1b_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2)^2.$$

Solution de l'exercice 2
Puisque a, b, c sont unitaires, on a $|abc| = 1$. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} |ab + bc + ca| &= |ab + bc + ca|/|abc| \\ &= |1/a + 1/b + 1/c| \\ &= |\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}| \quad \text{car } a, b, c \text{ sont unitaires} \\ &= |a + b + c| \end{aligned}$$

par linéarité de la conjugaison et compatibilité avec le module.

Solution de l'exercice 3
Par hypothèse, on a

$$0 = \Im(x^2 + y) = \Im(y) + 2\Re(x) \cdot \Im(x).$$

Ainsi, on a $\Re(x) = -\frac{\Im(y)}{2\Im(x)}$. On procède de même pour les deux autres nombres, et un produit cyclique nous donne

$$\Re(x) \cdot \Re(y) \cdot \Re(z) = -\frac{1}{8}.$$

Solution de l'exercice 4
Montrons qu'il s'agit exactement des nombres complexes de module $\leqslant 2026$ par double inclusion.

Un sens est clair : par inégalité triangulaire, un nombre complexe qui s'écrit comme somme de 2026 nombres complexes de module $\leqslant 1$ est lui-même de module $\leqslant 2026$.

Réciproquement, remarquons qu'il nous suffit de montrer que n'importe quel nombre complexe de module $\leqslant 2$ s'écrit comme somme de deux nombres complexes de module 1, quitte à raisonner par récurrence ou répéter 1013 fois cette somme de deux nombres complexes.
Quitte à effectuer une rotation, il nous suffit de montrer qu'un nombre réel qui est compris entre 0 et 2 s'écrit comme somme de deux nombres complexes de module 1, ce qui est une conséquence immédiate de la formule :

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta).$$

Solution de l'exercice 5
Puisque le module est invariant par rotation du plan, on peut supposer sans perte de généralité que $z = 1$. Afin de minimiser le module de $z \pm w$, il faut faire en sorte que les vecteurs z

et $\pm w$ pointent dans des directions les plus opposées possible. Quitte à remplacer w par $-w$, supposons que $\Re(w) \geqslant 0$ et montrons que $|z-w| \leqslant \sqrt{2}$.
Notons $w = a + ib$, avec $a \geqslant 0$ par hypothèse. On calcule alors :

$$\begin{aligned} |z-w|^2 = (1-a)^2 + b^2 &= 1 + a^2 + b^2 - 2a \\ &\leqslant 1 + a^2 + b^2 \\ &\leqslant 2, \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6
Il suffit de prendre $p = -2 \cdot \Re(z)$ et $q = |z|^2$. En effet, le polynôme

$$P(X) = X^2 - 2 \cdot \Re(z)X + |z|^2 = (X - z)(X - \overline{z})$$

est bien à coefficients réels et admet deux racines dans $\mathbb{C}$: z et $\overline{z}$.

Solution de l'exercice 7
Fixons un certain nombre naturel $n > d$ et notons, pour n'importe quel $p \in \mathbb{Z}$, $S_p = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^p$.
Par somme géométrique, on sait que

$$S_p = \mathbf{1}_{[n \text{ divise } p]} \cdot n.$$

L'idée est claire : puisque $n > d$, on a par "root of unity filter" :

$$\begin{aligned} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} P(z) &= \sum_{z \in \mathbb{U}_n} \sum_{k=0}^{d} a_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{d} a_k S_k \\ &= n\, a_0. \end{aligned}$$

Plus généralement, si $0 \leqslant \nu \leqslant d$ on peut translater les exposants de P en introduisant $Q = X^{-\nu} \cdot P$, et le root of unity filter donne alors

$$\begin{aligned} |a_\nu| &\leqslant \frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |z|^{-\nu} \, |P(z)| \\ &= \frac{1}{n} \sum_{z \in \mathbb{U}_n} |P(z)| \\ &\leqslant \max_{\mathbb{U}_n} |P|, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat.

Solution de l'exercice 8
Non.
Clairement, $a = 0$ ne convient pas. Si $a \neq 0$, on peut l'écrire sous forme polaire $a = r \cdot e^{i\theta}$ et il est alors clair que $z \mapsto az$ est une similitude directe. Donc $z \mapsto az + b$ est une similitude directe quels que soient $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{C}$. Or, ce n'est pas le cas de $z \mapsto \overline{z}$ qui est une symétrie axiale.

Solution n°2 de l'exercice 8
On peut également voir l'impossibilité d'une telle relation 'algébriquement', car la conjugaison n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire. Plus précisément, on peut remplacer z par iz et obtenir l'équation

$$-i\overline{z} = aiz + b.$$

Or, l'équation de l'énoncé implique aussi, pour tout z :

$$i\overline{z} = i(az + b),$$

donc $aiz+b = -i(az+b)$ pour tout z. On en déduit aisément que $a = b = 0$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 9
On commence par remarquer que $|e^{2i\pi/3} - 1| = \sqrt{3}$ par le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle formé par les points 1, -1 et $e^{i\pi/3}$.
Notons $\mathcal{D} \subset \mathbb{U}$ l'ensemble des points compris entre $e^{2i\pi/3}$ et $e^{4i\pi/3}$ (dans le secteur angulaire de gauche). Par notre première remarque, l'énoncé est équivalent au fait de montrer que pour tout $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, il existe $n > 0$ pour lequel $z^n \in \mathcal{D}$.

Commençons par traiter le cas où z n'est pas une racine de l'unité, c'est-à-dire que $z = e^{i\pi\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Dans ce cas, le théorème d'équidistribution de Weyl nous dit que les puissances de z formeront un sous-ensemble dense du cercle unité, qui contiendra à fortiori un point dans $\mathcal{D}$. Il est possible de le redémontrer de façon très élémentaire.
Puisque z n'est pas une racine de l'unité, les puissances successives z^n, avec $n > 0$, sont toutes distinctes. Par principe des tiroirs infinis, il existe donc $n > m > 0$ et $\theta < 2\pi/3$ tel que $z^n = e^{i2\pi/3} \cdot z^m$ (on est simplement en train de dire qu'on peut trouver deux puissances arbitrairement proches sur le cercle unité). On a alors $|\arg(z^{n-m})| \leqslant 2\pi/3$. En particulier, une certaine puissance de z^{n-m} appartiendra à $\mathcal{D}$, ce qui conclut.

Traitons maintenant le cas où z est une racine de l'unité. Si $z = -1$, alors $n = 1$ convient. Sinon, son ordre vaut au moins 3. Donc z s'écrit sous la forme $\exp(2ik\pi/n)$, où $(k, n) = 1$ et $n \geqslant 3$. Par Bézout, une certaine puissance de z vaut $\exp(2i\pi/n)$ et on conclut alors comme précédemment car $2\pi/n \leqslant 2\pi/3$.

Solution de l'exercice 10
Puisque z et w doivent être de module 1, on a $\overline{z} = 1/z$ et $\overline{w} = 1/w$. De plus, un nombre complexe λ est réel ssi $\overline{\lambda} = \lambda$. Dans notre cas, l'équation de l'énoncé se réécrit donc :

$$z + w + z/w = 1/z + 1/w + w/z.$$

En multipliant le tout par zw, on trouve :

$$0 = z^2w + zw^2 + z^2 - w^2 - z - w = (z + w)(z - 1)(w + 1).$$

Ainsi, les solutions sont exactement $z = -w$ ou $z = 1$ ou $w = -1$.

N.B. : Pour trouver ce genre de factorisations, il est utile de trouver des solutions particulières.

Solution n°2 de l'exercice 10
Notons $z = e^{i\theta_1}$ et $w = e^{i\theta_2}$. On a alors $z\overline{w} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$. En écrivant le fait qu'un nombre complexe λ est réel ssi $\Im(\lambda) = 0$, l'équation de départ se réécrit alors :

$$\sin(\theta_1) + \sin(\theta_2) + \sin(\theta_1 - \theta_2).$$

En utilisant des relations trigonométriques, il est possibles d'exprimer tous les termes en fonction de $\sin(\frac{\theta_1+\theta_2}{2})$ et $\sin(\frac{\theta_1-\theta_2}{2})$ ou en fonction de $\sin(\theta_1/2)$ et $\sin(\theta_2/2)$. On obtient alors une factorisation comme dans la première solution pour conclure.

Solution de l'exercice 11
Notons $a_1, \dots, a_n$ les racines complexes de P, comptées avec multiplicité. On a alors $P(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$ et $P'(X) = \sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(X - a_j)$. En développant, on trouve :

$$Q(X) = \sum_{k=1}^{n}(X + a_k)\prod_{j\neq k}(X - a_j).$$

Ainsi, lorsque $P(z) \neq 0$, on a :

$$\frac{Q(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n}\frac{z + a_k}{z - a_k}.$$

En particulier,

$$\Re\left(\frac{Q(z)}{P(z)}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{|z|^2 - |a_k|^2}{|z - a_k|^2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{|z|^2 - 1}{|z - a_k|^2}.$$

Si z est une racine de Q qui n'est pas racine de P, elle doit donc nécessairement être de module 1. Puisque les racines de P sont de module 1, cela conclut.

Solution de l'exercice 12
Les équations étant invariantes par multiplication par une constante, on peut translater les trois variables x, y, z par $-x$ et donc supposer que $x = 0$.
On veut montrer que si $e^{iy} + e^{iz} = -1$, alors $e^{2iy} + e^{2iz} = -1$. Or, la première équation implique que les deux parties réelles de e^{iy} et e^{iz} sont négatives par inégalité triangulaires, et que les parties imaginaires sont opposées. Donc $z \equiv \pi - y \pmod{2\pi}$. On trouve enfin que $\{e^{iy}, e^{iz}\} = \{e^{\pm 2i\pi/3}\}$, ce qui conclut car le passage au carré va simplement échanger les deux valeurs (puisque $\xi^4 = \xi$ pour une racine troisième de l'unité).

Solution de l'exercice 13
Supposons par l'absurde que P possède une racine complexe z de module $\leqslant 1$.
Considérons le produit :

$$(1 - z)P(z) = -a_0 z^{n+1} + (a_0 - a_1)z^n + \cdots + (a_{n-1} - a_n)z + a_n.$$

Cette quantité doit s'annuler par hypothèse, mais par inégalité triangulaire, on obtient :

$$\begin{aligned}|(1 - z)P(z)| &\geqslant a_n - (a_n - a_{n-1}) \cdot |z| - \cdots - (a_1 - a_0) \cdot |z|^n - a_0 \cdot |z|^{n+1} \\ &\geqslant a_n - (a_n - a_{n-1}) - \cdots - (a_1 - a_0) - a_0 \quad \text{car } |z| \leqslant 1 \\ &= 0.\end{aligned}$$

On doit donc avoir égalité dans toutes les inégalités. En particulier, $|z| = 1$ et z est un réel positif. C'est une contradiction car $z = 1$ n'est pas une racine de P.

Solution n°2 de l'exercice 13
Donnons ici une solution un peu plus motivée.

Afin de mieux comprendre les hypothèses, on peut s'intéresser au cas limite où tous les a_i sont égaux. Dans ce cas, les racines de P sont les racines de $1+z+\cdots+z^n = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}$, donc des racines de l'unité (de module 1).
Notons $P_n(z) = 1+z+\cdots+z^n$. On veut décomposer P en telles tranches :

$$P(z) = a_0 \cdot P_n(z) + (a_1 - a_0) \cdot P_{n-1}(z) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \cdot P_0(z).$$

En multipliant par $(z-1)$, on obtient alors :

$$(z-1) \cdot P(z) = a_0 \cdot (z^{n+1} - 1) + (a_1 - a_0) \cdot (z^n - 1) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \cdot (z-1).$$

Si z est une racine de P de module $\leqslant 1$, cette somme doit s'annuler mais les parties réelles de tous les termes de la somme sont $\leqslant 0$. Comme précédemment, toutes les égalités doivent être atteintes et en particulier $\Re(z-1) = 0$, donc $z = 1$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 14
Les hypothèses nous incitent à considérer les nombres $z_n = \exp(2i\pi n/p)$ pour $n = 1, \ldots, p-1$. Notons $M(z)$ le produit de l'énoncé et $M_n = M(z_n)$. Il nous suffit de montrer que $|M_1| \cdots |M_{p-1}| \geqslant p^{2026}$. On réécrit donc :

$$M_1 \cdots M_{p-1} = \prod_{k=1}^{2026} \prod_{n=1}^{p-1} (1 - z_n^{a_k}).$$

Or,

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{p-1} (1 - z_n^{a_k}) &= \prod_{n=1}^{p-1} (1 - z_1^{na_k}) \\ &= \prod_{n=1}^{p-1} (1 - z_1^n) \quad \text{car } (p, a_k) = 1. \end{aligned}$$

De plus, on sait que

$$\prod_{n=1}^{p-1} (X - z_1^n) = \frac{X^p - 1}{X - 1} = 1 + X + \cdot + X^{p-1}.$$

En particulier, en évaluant l'identité précédente en 1, on obtient que $\prod_{n=1}^{p-1} (1 - z_n^{a_k}) = p$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 15
Montrons qu'il s'agit exactement des polynômes de la forme $C \cdot X^k$, où $C \in \mathbb{C}$ est une constante de module 1 et $k \geqslant 0$. Remarquons au passage que ces polynômes sont en effet solutions, de sorte qu'il suffit de montrer la partie analyse.

Soit $P(z) = \sum_{n=0}^{d} a_n z^n$ un polynôme complexe comme dans l'énoncé. On sait que

$$\forall z \in \mathbb{U}, |P(z)|^2 = 1.$$

L'idée de l'exercice est d'exploiter la rigidité des polynômes à partir de cette équation qui est vraie pour une infinité de nombres complexes z. En développant, on obtient

$$|P(z)|^2 = \overline{\left(\sum_{n=0}^{d} a_n\, z^n\right)}\left(\sum_{m=0}^{d} a_m\, z^m\right) = \sum_{n,m=0}^{d} \overline{a_n}\, a_m\, z^{m-n}$$
$$= \sum_{k=-d}^{d}\left(\sum_{m-n=k} \overline{a_n}\, a_m\right) z^k.$$

En multipliant par X^d, on obtient que les polynômes X^d et $\sum_{k=0}^{2d}\left(\sum_{m-n=k-d} \overline{a_n}\, a_m\right) z^k$ coïncident sur l'ensemble infini $\mathbb{U}$, et on peut donc utiliser la rigidité des fonctions polynomiales pour obtenir :

$$\sum_n |a_n|^2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall k \neq 0,\ \sum_{m-n=k} \overline{a_n}\, a_m = 0.$$

La deuxième condition entraîne que tous les coefficients sauf un sont nuls. En effet, si l'on suppose par l'absurde que plusieurs (a_k) sont nuls, on peut appeler $k_0 < k_1$ les deux indices extrêmes tels que $a_{k_0}, a_{k_1} \neq 0$. On a alors

$$0 = \sum_{m-n=k_1-k_0} \overline{a_n}\, a_m = \overline{a_{k_0}} a_{k_1},$$

ce qui constitue une contradiction. Comme il est par ailleurs manifestement impossible que tous les a_k soient nuls, cela démontre bien qu'un seul des coefficients est non nul.

La première condition entraîne alors que cet unique coefficient non nul est de module 1, et donc qu'une potentielle solution est nécessairement de la forme annoncée.

Solution n°2 de l'exercice 15
Donnons une solution alternative pour l'analyse.

Pour n'importe quel polynôme complexe $P(X) = \sum_{n=0}^{d} a_n\, X^n$, notons $\overline{P}(X) = \sum_{n=0}^{d} \overline{a_n}\, X^n$ le polynôme complexe dont les coefficients sont les conjugués des coefficients précédents.

Remarquons que par définition, si $z \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$, alors $\overline{P(z)} = \overline{P}(\overline{z})$. En particulier, si $P(z) \in \mathbb{U}$, alors $1 = P(z) \cdot \overline{P}(\overline{z})$.

Soit maintenant $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme vérifiant les hypothèses de l'énoncé. Remarquons enfin que si $R \in \mathbb{C}[X]$ est un polynôme de degré d, alors $X^d \cdot R(1/X)$ est à nouveau un polynôme (dont l'ordre des coefficients à simplement été inversé).

Considérons le polynôme $Q(X) = P(X) \cdot X^d \cdot \overline{P}(1/X)$.
Alors, si $u \in \mathbb{U}$, on obtient :

$$Q(u) = P(u) \cdot u^d \cdot \overline{P}(\overline{u}) = u^d,$$

puisque $1/u = \overline{u}$. Par rigidité des polynômes, on obtient $Q(X) = X^d$ et donc que P divise X^d dans $\mathbb{C}[X]$. On conclut alors facilement puisque la seule racine complexe de P est donc 0.

2 Arithmétique : Factorielles (Maxime et Rémi)

Il y a plusieurs idées à avoir en tête en s'attaquant à un problème avec des factorielles. Voici les plus importantes :

— Divisibilité : $n!$ est divisible par beaucoup de nombres différents, par exemple chaque entier inférieur à n. Un premier p divise $n!$ si et seulement si $p \leqslant n$.

— Valuations p-adiques : Pour tout premier p et entier positif n, la formule de Legendre nous indique que

$$v_p(n!) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$$

où $s_p(n)$ désigne la somme des chiffres de n écrit en base p. En particulier, on a

$$\frac{n+1}{p} - 1 \leqslant v_p(n!) \leqslant \frac{n-1}{p-1}$$

pour tout entier strictement positif n.

— Taille : une factorielle, c'est "extrêmement gros", puisque les factorielles croissent plus vite que tous les polynômes et toutes les puissances : pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, pour tout $c > 0$, pour n assez grand on a $n! > P(n), c^n$.

— Théorème de Wilson : p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

Au cours de la séance, les 5 premiers exercices ont été traités.

Exercices

Exercice 1 (Kazakhstan 2016)
Trouver tous les quadruplets (a, b, c, d) d'entiers strictement positifs tels que $a! + b! + c! = 2^d$.

Exercice 2
Trouver tous les entiers $n > 1$ tels que $1! + \ldots + (n-1)! \mid n!$

Exercice 3 (JBMO 2023 P1)
Trouver tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $a! + b$ et $b! + a$ soient tous les deux des puissances de 5.

Exercice 4 (N2 2022)
Soit $n \geqslant 3$ un entier. Pour chaque couple de nombres premiers p et q tels que $p < q \leqslant n$, Morgane a écrit la somme $p + q$ au tableau. Elle note ensuite $\mathcal{P}(n)$ le produit de toutes ces sommes. Par exemple, $\mathcal{P}(5) = (2+3) \times (2+5) \times (3+5) = 280$.

Trouver toutes les valeurs de $n \geqslant 3$ pour lesquelles $n!$ divise $\mathcal{P}(n)$.

Exercice 5 (BMO SL 2020, N3)
Soit $k \geqslant 2$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_k$ on ait :

$$x_1! + \ldots + x_k! \mid f(x_1)! + \ldots + f(x_k)!$$

Exercice 6 (IMO 2019, P4)
Trouver tous les couples (k, n) d'entiers strictement positifs tels que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)\dots(2^n - 2^{n-1})$$

Exercice 7 (BMO 2025 SL, N1)
Soit k un entier strictement positif, et soient $n_1, n_2, \dots, n_k > 1$ des entiers distincts. On suppose qu'il existe un entier a tel que

$$n_1! + \dots + n_k! = a^{n_k}$$

Montrer qu'au moins l'un des entiers $n_1, n_2, \dots, n_k$ est premier.

Exercice 8 (P15 envoi TN 2023)
Pour tout $n > 0$, on note $S_n = 1! + \dots + n!$. Montrer qu'il existe un nombre premier $p > 67^{67}$ divisant un terme de la suite.

Exercice 9 (N3 2023)
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \geqslant 2$, soit $E_k(n)$ le r maximal tel que k^r divise $n!$. Montrez qu'il existe une infinité de n tels que $E_{10}(n) > E_9(n)$ et une infinité de m tels que $E_{10}(m) < E_9(m)$.

Exercice 10 (P5 2022)
Trouver tous les triplets (a, b, p) d'entiers strictement positifs avec p premier tels que

$$a^p = b! + p.$$

Exercice 11 (N7 2005)
Soit P un polynôme de degré $\geqslant 2$. Montrer qu'il existe un entier naturel n pour lequel $P(n!)$ n'est pas premier.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Supposons sans perte de généralité que $a \leq b \leq c$. Si $a \geq 3$, alors $3 \mid a! + b! + c!$, donc $3 \mid 2^d$, absurde. Ainsi, on distingue deux cas :

Cas 1 : $a = 1$. On a alors $1 + b! + c! = 2^d$. Si $b \geq 2$, alors $b!$ et $c!$ sont pairs, donc 2^d est impair, absurde. Ainsi, $b = 1$, ce qui donne $2 + c! = 2^d$. Si $c \geq 4$, alors $2^d \equiv 2[4]$, absurde. Il reste donc à tester les cas $c \leq 3$, ce qui donne les solutions $(1, 1, 2, 2)$ et $(1, 1, 3, 3)$.

Cas 2 : $a = 2$. On a alors $2 + b! + c! = 2^d$. Si $b \geq 4$, alors $b!$ et $c!$ sont multiples de 4, donc $2^d \equiv 2[4]$, absurde. Ainsi, $b \leq 3$, ce qui donne 2 sous-cas.

— Si $b = 3$, on a $8 + c! = 2^d$. Si $c \geq 6$, alors $16 \mid c!$, donc $2^d \equiv 8[16]$, absurde. On en déduit que $3 \leq c \leq 5$, et on trouve les solutions $(2, 3, 4, 5)$ et $(2, 3, 5, 7)$.

— Si $b = 2$, on a $4 + c! = 2^d$. Si $c \geq 4$, alors $8 \mid c!$, donc $2^d \equiv 4[8]$, absurde. On en déduit que $2 \leq c \leq 3$, ce qui ne donne aucune solution.

Finalement, l'équation admet 4 solutions : $(2, 3, 4, 5)$, $(2, 3, 5, 7)$, $(2, 3, 4, 5)$ et $(2, 3, 5, 7)$.

Solution de l'exercice 2
On constate que $n = 2$ est solution. On suppose désormais que $n \geq 3$. On va chercher à encadrer $n!$ entre deux multiples du membre de droite. L'idée vient du fait qu'il est clair que $n(1! + 2! + \ldots + (n-1)!) > n!$, donc le quotient est strictement inférieur à n et on peut chercher à le déterminer. On a d'une part :

$$(n-1)((n-1)! + (n-2)!) = (n-1)(n-1)! + (n-1)! = n(n-1)! = n!$$

Ainsi, $(n-1)(1! + 2! + \ldots + (n-1)!) > n!$. D'autre part,

$$\begin{aligned}
(n-2)((n-1)! + (n-2)! + \ldots + 1!) &= n!\left(\frac{n-2}{n} + \frac{n-2}{n(n-1)} + \frac{n-2}{n(n-1)(n-2)} + \ldots\right) \\
&< n!\left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{n} + \underbrace{\frac{1}{n(n-1)} + \ldots}_{n-3 \text{ termes}}\right) \\
&< n!\left(\frac{n-2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) \\
&= n!
\end{aligned}$$

Le quotient de $n!$ par le membre de gauche est strictement compris entre $n-1$ et $n-2$, donc il n'est pas entier, ce qui conclut.

Solution n°2 de l'exercice 2
On peut commencer par remarquer que le membre de gauche est impair. Ainsi, il doit diviser $\frac{n!}{2^{v_2(n!)}}$ d'après le lemme de Gauss. Or $v_2(n!) \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ d'après la formule de Legendre, donc

$$\frac{n!}{2^{v_2(n!)}} \geqslant \frac{n!}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \geqslant \frac{n!}{n} = (n-1)! > (n-1)! + \ldots + 1!$$

L'inégalité ci-dessus est vraie dès que $2^{\lfloor n/2 \rfloor} \geqslant n$, ce qui est le cas pour $n \geqslant 6$. Il reste à traiter les cas $n < 6$, et on voit que seul $n = 2$ convient.

Solution de l'exercice 3
Supposons sans perte de généralité que $a \geqslant b$. On distingue deux cas :

Cas 1 : $a = b$. Dans ce cas, $a! + a = a((a-1)! + 1) = 5^k$, donc a divise 5^k, donc $a = 5^\ell$ avec $\ell \leqslant k$. Si $\ell = 1$, le couple $(a, b) = (5, 5)$ convient. Sinon, on a $\ell \geqslant 2$, auquel cas $a - 1 \geqslant 5$ et donc $(a-1)! + 1 \equiv 1 \pmod 5$, mais comme ce nombre est aussi une puissance de 5 (il divise 5^k), on doit avoir $(a-1)! + 1 = 1$, absurde.

Cas 2 : $a > b$. Notons $a = b + s$ avec $s \geqslant 1$, et $a! + b = 5^k$ avec $k \geqslant 1$. Ainsi, on peut réécrire $b((b-1)! \cdot (b+1) \cdots (b+s) + 1) = 5^k$. De nouveau, on obtient $b = 5^\ell$ avec $\ell \geqslant 0$, et si $b - 1 \geqslant 5$ alors $(b-1)! \cdot (b+1) \cdots (b+s) + 1 \equiv 1 \pmod 5$, d'où la même absurdité que précédemment. De plus, si $s \geqslant 5$, alors $5 \mid (b+1) \cdots (b+5) \mid (b+1) \cdots (b+s)$, et donc $(b+1) \cdots (b+s) + 1 \equiv 1 \pmod 5$, à nouveau absurde. On en déduit que $b \leqslant 5$ et $s \leqslant 4$. Il ne reste plus qu'à tester tous ces cas, et on trouve $(b, s) = (1, 3)$, soit $(a, b) = (4, 1)$.
Finalement, les seules solutions sont $(a, b) = (5, 5), (4, 1)$ et $(1, 4)$.

Solution de l'exercice 4
Soit n une solution éventuelle, et soit r le plus grand nombre premier tel que $r \leqslant n$. Puisque r divise $n!$, il divise $\mathcal{P}(n)$, donc il existe deux nombres premiers p et q tels que $p < q \leqslant n$ et r divise $p + q$. Par maximalité de r, on sait que $p + q < 2r$, de sorte que $p + q = r$. Puisque q et r sont impairs, p est donc pair, et $p = 2$.

De même, il existe deux nombres premiers s et t tels que $s < t \leqslant n$ et q divise $s + t$. Nous allons démontrer que $q - 2$ est premier. En effet, si $t \leqslant q$, alors $s + t = q$, donc $s = 2$ et $t = q - 2$. Sinon, $t = r = q + 2$, donc $q < t + s < 2q + 2 < 3q$, de sorte que $t + s = 2q$ et $s = q - 2$.

En particulier, 3 divise l'un des trois nombres premiers $q - 2$, q et $q + 2$; il s'agit nécessairement de $q - 2$, ce qui signifie que $q - 2 = 3$ et que $q + 2 = r = 7$. Ainsi, $n \geqslant 7$, et $n!$ divise

$$\mathcal{P}(n) = (2+3) \times (2+5) \times (2+7) \times (3+5) \times (3+7) \times (5+7) = 2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7.$$

Puisque $2 \times 4 \times 6 \times 8 = 2^7 \times 3$ ne divise pas $\mathcal{P}(n)$, on a nécessairement $n = 7$.

Réciproquement, $n = 7$ est bien une solution, car $7! = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$.

Solution de l'exercice 5
Soit f une solution éventuelle. En prenant $x_1 = \ldots = x_k = x$, la relation donne que $k \cdot x! \mid k \cdot f(x)!$, ce qui implique que $x! \mid f(x)!$. On déduit que $\boxed{x \leqslant f(x)}$ pour tout entier x strictement positif.

Fixons désormais un nombre premier $p > f(1)$, $x_1 = 1, x_2 = p - 1$ et $x_3 = \ldots = x_k = N$ avec $N \geqslant p$. Puisque $f(N) \geqslant N \geqslant p$, $p \mid f(N)!$ et $p \mid N!$. De plus, d'après le théorème de Wilson, $p \mid (p-1)! + 1$. Ainsi, la relation de l'énoncé implique que

$$p \mid 1 + (p-1)! + (k-2)N! \mid f(1)! + f(p-1)! + (k-2)f(N)!$$

Comme p divise $f(N)!$, on a $p \mid f(1)! + f(p-1)!$. Mais $p > f(1)$ donc p ne divise pas $f(1)!$. Donc p ne divise pas non plus $f(p-1)!$. On a donc $f(p-1) \leqslant p - 1$ et $\boxed{f(p-1) = p-1}$ pour tout entier $p > f(1)$.

Prenons alors n un entier strictement positif et $p > f(1)$ un nombre premier. On pose $x_1 = n, x_2 = \ldots = x_k = p-1$. La relation de l'énoncé donne

$$n! + (k-1)\cdot(p-1)! \mid f(n)! + (k-1)\cdot f(p-1)! = f(n)! + (k-1)\cdot(p-1)!.$$

Mais alors

$$n! + (k-1)\cdot(p-1)! \mid f(n)! + (k-1)\cdot(p-1)! - (n! + (k-1)\cdot(p-1)!) = f(n)! - n!.$$

Cette relation de divisibilité étant vraie pour tout nombre premier $p > f(1)$, le nombre $f(n)! - n!$ admet une infinité de diviseurs, il est donc nul. On a bien $\boxed{f(n) = n}$ pour tout entier n.

Réciproquement, on vérifie que la fonction f vérifie la relation de divisibilité.

Solution de l'exercice 6

Avec tant de facteurs 2 dans le membre de droite, on aimerait étudier la valuation 2-adique :

— A droite, elle vaut

$$0 + 1 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

— A gauche, on peut utiliser la formule de Legendre pour obtenir que la valuation vaut :

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^l} \right\rfloor \leqslant \sum_{l=1}^{k} \frac{k}{2^l} = \frac{k}{2}\frac{1-(\frac{1}{2})^{k+1}}{1-1/2} < k$$

Ainsi, $k > \dfrac{n(n-1)}{2}$, donc $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)! < (2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-2^{n-1}) < 2^{n^2}$.

C'est ici que va intervenir l'argument de croissance : la factorielle croit beaucoup plus vite que la puissance (et même que le membre de droite ici). En fait, pour $n \geqslant 6$, on a $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)! > 2^{n^2}$ et donc une contradiction. Reste à le montrer par récurrence :

— Pour $n = 6$, on a $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)! = 15! > 12^4 \times 8^4 \times 4^4 \times 3 \times 2 = 3^5 \times 2^{29} = 243 \times 2^{29} > 128 \times 2^{29} = 2^{36}$

— Supposons que $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)! > 2^{n^2}$. Alors :

$$\begin{aligned}
2^{(n+1)^2} &= 2^{n^2} \times 2^{2n+1} \\
&< \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! \times 2^{2n+1} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)! \times \frac{2^{2n+1}}{\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)\times\ldots\times\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)} \\
&< \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)! \times \frac{2^{2n+1}}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^n}
\end{aligned}$$

On conclut ensuite en remarquant que pour $n \geqslant 6$, $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \geqslant 15$, et donc que

$$2^{(n+1)^2} < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)! \times 2\left(\frac{4}{15}\right)^n < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!$$

Pour terminer, il faut traiter les entiers de 1 à 5 à la main :

— Pour $n = 1$, la seule solution est $k = 1$.

— Pour $n = 2$, on veut $k! = 6$, donc la seule solution est $k = 3$

— Pour $n = 3$, on veut $k! = 168$, donc il n'y a pas de solution

— Pour $n = 4$, on doit avoir un facteur 7 dans $k!$ donc $k \geqslant 7$, mais alors $9 \mid k!$, ce qui aboutit à une contradiction.

— Pour $n = 5$, on doit avoir un facteur 31 dans $k!$ donc $k \geqslant 31$, mais alors $k! > 31 \times (2^n - 1)(2^n - 2)\dots(2^n - 2^{n-1}) = k!$, ce qui aboutit à une contradiction.

Solution de l'exercice 7
On traite deux cas.

Premier cas : n_k est le minimum des n_i. Alors comme les n_i sont deux à deux distincts, chaque n_i avec $i < k$ est strictement supérieur à n_k. Donc $(n_k + 1)! \nmid n_1! + \dots + n_k! = a^{n_k}$, mais $n_k! \mid n_1! + \dots + n_k! = a^{n_k}$.

Donc il existe p premier tel que $v_p((n_k + 1)!) > v_p(a^{n_k}) = n_k v_p(a)$. Donc $n_k v_p(a) < v_p((n_k + 1)!) \leqslant \frac{n_k+1-1}{p-1} \leqslant n_k$. Donc $v_p(a) = 0$.

Si $p < n_k + 1$, $p \mid n_k! \mid a^{n_k}$, et donc $p \mid a$, absurde.

Donc $p \geqslant n_k + 1$ et $p = n_k + 1$ puisque $p \mid (n_k + 1)!$. On regarde tout modulo $p = n_k + 1$. Alors $n_1! + \dots + n_k! \equiv n_k! \equiv (p - 1)! \equiv -1 \pmod p$ par Wilson. Or $a^{n_k} = a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ par petit Fermat, puisque $v_p(a) = 0$. Donc $1 \equiv -1 \pmod p$, donc $p = 2$. Donc $n_k = 2 - 1 = 1$, absurde.

Deuxième cas : n_k n'est pas le minimum des n_i. Alors, par symétrie des rôles joués par $n_1, \dots, n_{k-1}$, on peut supposer sans perte de généralité que c'est n_1 le min des n_i.

De même que précédemment, $(n_1 + 1)! \nmid a^{n_k}$, $n_1! \mid a^{n_k}$, donc il existe p premier tel que $v_p((n_1 + 1)!) > v_p(a^{n_k})$. Donc $n_k v_p(a) < v_p((n_1 + 1)!) \leqslant \frac{n_1+1-1}{p-1} \leqslant n_1 \leqslant n_k$. Donc $v_p(a) = 0$.

Si $p < n_1 + 1$, $p \mid n_1! \mid a^{n_k}$, absurde, donc $p \geqslant n_1 + 1$. Or $p \mid (n_1 + 1)!$ donc $p \leqslant n_1 + 1$, d'où $p = n_1 + 1$.

Si chacun des n_i, $i > 1$, est strictement supérieur à $n_i + 1$, alors $a^{n_k} = n_1! + \dots + n_k! = n_1!(1 + \sum_{i=2}^{k} (n_1+1)\dots n_i)$. Ce facteur de droite est impair, puisque chaque produit $(n_1+1)\dots n_i$ contient au moins 2 entiers consécutifs et est donc pair. Donc $v_2(a^{n_k}) = v_2(n_1!)$, donc $n_k v_2(a) = v_2(n_1!) < n_1 \leqslant n_k$. Donc $v_2(a) = 0$, donc $v_2(n_1!) = 0$ et $n_1 = 1$, absurde.

Donc l'un des n_i, $i > 1$, est inférieur à $n_1 + 1$. Or par minimalité de n_1, $n_i \geqslant n_1$ pour tout i, et on a même $n_i > n_1$ pour tout $i > 1$ car les n_i sont deux à deux distincts.

Donc un des n_i vaut $n_1 + 1$, qui est bien premier. Ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8
Supposons par l'absurde que le problème soit faux, notons $p_1, \dots, p_k$ les premiers divisant au moins un terme de la suite (S_n).

Une idée serait d'essayer de montrer que $(v_{p_i}(S_n))_n$ est bornée. Malheureusement, cela semble s'avérer compliqué (je ne sais même pas si c'est vrai).

Une autre idée serait de montrer que $(v_{p_i}(S_n))_n$ est majorée par une suite simple ne croissant pas trop vite, par exemple n. Malheureusement, cela ne marche pas non plus.

Ce qui marche, c'est de montrer que pour tout constante C, à i fixé, à partir d'un certain rang, pour tout m il y a au plus deux entiers $n \in [m, m+C]$ vérifiant $v_{p_i}(S_n) \geqslant 2n$.

En effet, soient $n < n' \leqslant n + C$ tels que $v_{p_i}(S_n) \geqslant 2n$, $v_{p_i}(S_{n'}) \geqslant 2n' \geqslant 2n$. Alors $p_i^{2n} \mid S_n$, $p_i^{2n} \mid S_{n'}$, et donc $p_i^{2n} \mid S_{n'} - S_n = (n+1)! + \ldots + n'! = n!(n+1+(n+1)(n+2)+\ldots+(n+1)\ldots n')$.

Or $v_{p_i}(n!) \leqslant n$, donc $p_i^n \mid (n+1) + (n+1)(n+2) + \ldots + (n+1)(n+2)\ldots n'$, et donc $p^n \leqslant (n+1) + (n+1)(n+2) + \ldots + (n+1)(n+2)\ldots n' \leqslant (n+1) + (n+1)(n+2) + \ldots + (n+1)(n+2)\ldots(n+C)$.

Le terme de droite est un polynôme en n, alors que le terme de gauche est une puissance de n, qui croît donc beaucoup plus vite que tout polynôme. Donc pour n assez grand (soit pour m assez grand), cette inégalité ne tient plus, ce qui prouve le résultat annoncé.

Prenons $C = k$. Pour tout m suffisamment grand, pour tout i, il existe au plus un $n \in [m, m+k]$ tel que $v_{p_i}(S_n) \geqslant 2n$. Par principe des tiroirs, il existe donc $n \in [m, m+C]$ tel que pour tout i, $v_{p_i}(S_n) < 2n$. Donc $S_n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{v_{p_i}(S_n)} < \prod_{i=1}^{k} p_i^{2n}$. Donc il existe des n arbitrairement grands tels que $n! < S_n < M^n$ (où $M = \prod_{i=1}^{k} p_i^2$), ce qui constitue évidemment une contradiction. Ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9

Cet exercice est inadéquat dans le contexte des maths olympiques, dans le sens où l'exercice se termine avec un théorème : Legendre.

La forme $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$ est bien connue du commun des olympiens, mais il existe une seconde forme :

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}$$

où $s_p(n)$ désigne la somme des chiffres de n en base p.

De plus, remarquons que $v_{10}(n!) = v_5(n!)$ car il y a clairement plus de facteurs 2 que 5. Et $v_9(n!) = \lfloor \frac{v_3(n!)}{2} \rfloor$.

Ainsi, en combinant les résultats ci-dessus,

$$v_{10}(n) = \frac{n - s_5(n)}{4}$$

$$v_9(n) = \left\lfloor \frac{\frac{n-s_3(n)}{2}}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - s_3(n)}{4} \right\rfloor$$

.

— Maintenant, prenons n une puissance 5ème. Alors $s_5(n) = 1$ et $s_3(n) > 1$.
Ainsi,

$$v_{10}(n) = \frac{n-1}{4}$$

et

$$v_9(n) = \left\lfloor \frac{n - s_3(n)}{4} \right\rfloor < \frac{n-1}{4} = v_{10}(n)$$

. Cela nous fait un cas de résolu !

— prenons $n = 3^{2k}$ une puissance paire de 3. D'une part, $s_5(n) > 1$, et de l'autre, $n - 1 = 3^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod 4$ donc $\left\lfloor \frac{n-s_3(n)}{4} \right\rfloor = \frac{n-1}{4}$
Ainsi,

$$v_9(n) = \frac{n-1}{4} < \frac{n - s_5(n)}{4} = v_{10}(n)$$

Cela conclut.

Solution de l'exercice 10
Il faut clairement avoir $a > 1$. On peut alors traiter 3 cas :

— Si $a < p$, alors $a > b$ car sinon $a \mid p$, impossible car $a \notin \{1, p\}$. Cependant, on a alors $b! < a! < a! < a^p - p = b!$, ce qui est aussi une contradiction !

— Si $a > p$, alors $b! = a^p - p > p^p - p \geqslant p!$ d'où $b > p$. Ainsi, a doit être divisible par p, et $b! = a^p - p$ n'est pas divisible par p^2, donc $b < 2p$.
Maintenant, si $a < p^2$, alors $\frac{a}{p}$ est un diviseur de a^p et $b!$ car $\frac{a}{p} < p < b$, et donc $\frac{a}{p}$ divise p, absurde. Ainsi, $a \geqslant p^2$, mais c'est également impossible car alors :

$$\begin{aligned} b! + p &< p + (2p-1)! \\ &= (1 \times (2p-1)) \cdot (2 \times (2p-2)) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \times (p+1)) \cdot p + p \\ &< \left(\frac{2p}{2}\right)^{2(p-1)} \times p + p \\ &< p^{2p} \leqslant a^p \end{aligned}$$

— Reste alors le cas $a = p$, qui donne $b! = p^p - p$. On peut traiter les cas $p = 2, 3, 5$ et constater que seuls $p = 2$ et $p = 3$ sont solutions.
Maintenant si $p \geqslant 7$, alors $b! = p^p - p > p!$ donc $b \geqslant p + 1$, d'où :

$$v_2((p+1)!) \leqslant v_2(b!) = v_2(p^{p-1}-1) \underbrace{=}_{LTE} 2v_2(p-1) + v_2(p+1) - 1 = v_2\left(\frac{p-1}{2} \times (p-1)(p+1)\right)$$

Or, ces trois facteurs distincts apparaissent dans $(p+1)!$, mais comme $p + 1 \geqslant 8$, il y a au moins un des autres facteurs qui est pair, ce qui nous apporte une contradiction.

Les seules solutions sont donc données pour $a = p = 2$ ou $a = p = 3$.

Solution de l'exercice 11
Ici, la clé va être d'utiliser le théorème de Wilson. En effet, d'après ce théorème, étant donné p premier, on a $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$, et donc pour tout $1 \leqslant k \leqslant p - 1$,

$$-1 \equiv (p-1)! \equiv 1 \cdot \ldots \cdot (p-k)(p-k+1)(p-k+2) \ldots (p-1) \equiv (p-k)!(-1)^{k-1}(k-1)! \pmod p$$

d'où $(p-k)! \equiv \dfrac{(-1)^k}{(k-1)!} \pmod p$.

On va donc introduire le polynôme "inversé" de P, ie le polynôme Q défini par $Q(X) = X^{deg(P)} P\left(\frac{1}{X}\right)$. Notons $c_k = \dfrac{(-1)^k}{(k-1)!}$. On a $P((p-k)!) \equiv P\left(\frac{1}{c_k}\right) \equiv Q(c_k) c_k^{-deg(P)} \pmod p$.

Donc si $p \mid Q(c_k)$ avec $p > k-1$, $p \mid P((p-k)!)$ et donc $p = P((p-k)!)$, puisque $P((p-k)!)$ est premier.

On remarque alors que pour k suffisamment grand, $Q(c_k)$ a un facteur premier strictement supérieur à $(k-1)!$. En effet, si on note d le coefficient constant de Q (d est non-nul car c'est le coefficient dominant de P), on choisit k tel que $v_r((k-1)!) > v_r(d)$ pour tout r premier divisant d. Si $Q(c_k)$ n'a que des facteurs premiers inférieurs à k strictement, alors ces facteurs premiers divisent $(k-1)!$ et donc d. Or pour chacun de ces facteurs premiers r, $v_r(d) < v_r((k-1)!)$ et donc $v_r(d) = v_d(Q(c_k))$. Donc $Q(c_k) \mid d$, ce qui est clairement impossible en prenant k assez grand (car $|Q(c_k)|$ devient arbitrairement grand, tandis que k est fixe).

On cherche donc un facteur premier p de $Q(c_k)$ suffisamment grand par rapport à k pour avoir $P((p-k)!) > p$.

Posons $L(t) = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, t)$ pour tout entier $t > 0$ et prenons $x = \mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, t) + 2$, avec $t \geqslant 6$, et tel que t est impair. Alors $x, x+1, \ldots, x+t-1$ sont tous composés (car $x+i$ est divisible par $2+i$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant t-2$, et $x+t-1$ est pair), donc $Q(c_x)$ admet un facteur premier p strictement supérieur à $x-1$ qui est donc supérieur à $x+t$, pour x assez grand.

Montrons que $m! \geqslant n! + 2(m-n)$ pour tous $m \geqslant n \geqslant 2$. La preuve se fait par récurrence sur m. Si $m = n$, c'est évident. Si on a $m! \geqslant n! + 2(m-n)$, alors $(m+1)! = (m+1)m! \geqslant (m+1)n! + 2(m+1)(m-n) \geqslant n! + 2(m-n) + 2n! \geqslant n! + 2(m-n) + 2 = n! + 2(m+1-n)$, ce qui conclut.

Donc $(p-x)! \geqslant t! + 2(p-x-t) > 3L(t) + 2p - 2t - 2x = 2p + 3L(t) - 2t - 2L(t) - 4 = 2p + L(t) - 2t - 4 > 2p$. En effet, $3L(t) \mid t!$ puisque $t \geqslant 6$, et $L(t) > 2t + 4$ pour tout t assez grand, puisque $t(t-1) \mid L(t)$.

Comme $|P|$ est monotone à partir d'un certain rang, on a donc $p = P((p-x)!) = |P((p-x)!)| > |P(2p)| > p$ pour tout p assez grand (on a p assez grand en prenant t assez grand). C'est donc une contradiction, ce qui conclut.

3 Arithmétique : Polynômes à coefficients entiers (Solal et Théo)

Cours

Le cours portait sur les polynômes à coefficients entiers. Ce sont des objets extrêmement complexes sur lesquels on peut utiliser une artillerie particulièrement développée. On a donc fait le choix ici de se concentrer sur ce qu'il y a de plus basique, qui suffit néanmoins à résoudre la majorité des exercices posés en olympiade.

Commençons donc par nommer le résultat phare de ce cours.

Lemme 1 (Propriété fondamentale)**.** Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $a, b \in \mathbb{Z}$, on a

$$a - b \mid P(a) - P(b).$$

Démonstration. Écrivons $P = \sum_{i=0}^{n} c_k X^k$ avec les c_k entiers. On remarque maintenant que pour $i \in [\![0, n]\!]$, comme $a \equiv b \pmod{a-b}$ on a $a^i \equiv b^i \mod a - b$, et donc

$$P(a) \equiv \sum_{i=0}^{n} c_i a^i \equiv \sum_{i=0}^{n} c_i b^i \equiv P(b) \mod a - b,$$

comme désiré. □

Remarque 2. Une façon alternative (et beaucoup plus utile !) d'appréhender ce résultat est la suivante. Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$ et n un entier quelconque, un polynôme est n-périodique modulo n. Autrement dit,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad P(k+n) \equiv P(k) \mod n.$$

Ainsi comprendre la valeur de $P(k)$ modulo n revient avant tout à comprendre la valeur de k modulo n !

On pourra, pour bien comprendre comment appliquer ce lemme, s'entraîner en particulier sur les exercices 1, 2, 3 et 4. On peut néanmoins en présenter dès maintenant une première rapide application, qui prend la forme d'un lemme extrêmement utile !

Lemme 3. Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que $P(0) \neq 0$. Alors, il existe une constante C telle que pour tout entier relatif n on ait $\operatorname{pgcd}(n, P(n)) \leqslant C$.

Démonstration. Soit n un entier relatif et d un diviseur de $\operatorname{pgcd}(n, P(n))$. On a donc en particulier $n \equiv 0 \pmod{d}$, et ainsi $P(n) \equiv P(0) \mod d$. Puisque que d divise aussi $P(n)$, cela signifie que d divise $P(0)$ et donc que $|d| \leqslant |P(0)|$ puisque qu'on avait supposé $P(0) \neq 0$. On peut donc prendre $C = |P(0)|$! □

Remarque 4. On peut en fait drastiquement généraliser ce lemme. Effectivement, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ premiers entre eux alors il existe une combinaison de Bézout de la forme $AP + BQ = 1$ avec $A, B \in \mathbb{Q}[X]$. Quitte à multiplier cette combinaison par un entier N bien choisi, on peut obtenir $(NA)P + (NB)Q = N$ avec NA et NB deux polynômes cette fois-ci à coefficients entiers. Dès lors, si pour un certain n on a d qui divise $P(n)$ et $Q(n)$, il s'ensuit que d divise aussi N et donc que pour tout entier relatif n on a $\operatorname{pgcd}(P(n), Q(n)) \leqslant N$!

Dans un deuxième temps, énonçons un résultat un peu moins connu mais tout aussi fondamental en ce qui regarde l'arithmétique des polynômes à coefficients entiers.

Théorème 5 (Théorème de Schur)**.**
Pour P un polynôme non constant à coefficients entiers, il existe une infinité de premiers p tels qu'on puisse trouver un entier n pour lequel $p \mid P(n)$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que P n'est divisible que par un nombre fini de nombres premiers, que l'on note $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
Puisque P n'est pas constant, on peut se donner un entier n tel que $P(n)$ ne soit pas nul.
On pose alors $v = \max_{i\in[\![1,k]\!]} v_{p_i}(P(n))$ et on note $N = (p_1 \ldots p_k)^{v+1}$. Pour $\ell \in \mathbb{Z}$, on remarque ensuite que

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad P(n+\ell N) \equiv P(n) \not\equiv 0 \mod p_i^{v+1}.$$

Dès lors, par hypothèse tous les diviseurs de $P(n+\ell N)$ sont parmi les p_i, tandis que la valuation p_i-adique de $P(n+\ell N)$ est toujours majorée par v. On en déduit donc que

$$\forall \ell \in \mathbb{Z}, \quad |P(n+\ell N)| \leqslant (p_1 \ldots p_k)^v.$$

Ainsi, en prenant ℓ très grand, il faut que P prenne des valeurs bornées aussi loin qu'on veut. D'un autre côté, P est de degré au moins 1 donc a un comportement asymptotique divergent, ce qui fournit notre absurdité. □

La preuve est un peu technique, et ce n'est pas si grave de ne pas en comprendre la trame et l'intuition en première lecture. Il est par contre important de connaître ce résultat, quitte à ré-essayer de le démontrer/d'en comprendre la démonstration en guise d'exercice 21. Ceci dit, la technique du choix du N (ayant une valuation plus grande que $P(n)$ pour chaque p premier divisant n) peut s'avérer utile. On pourra d'ailleurs trouver deux autres preuves de ce résultat, aux saveurs complètement différentes, en la solution de l'exercice 20.

Finalement on mentionne aussi le théorème de Dirichlet, dont la démonstration dépasse largement le cadre du cours. Celui-ci est de temps à autre utile (surtout dans des compétitions type BMO voire RMM), il est important de l'avoir en tête.

Théorème 6 (Théorème de la progression arithmétique de Dirichlet)**.**
Etant donné un entier n strictement positif et un entier a premier avec n, il existe une infinité de nombres premiers p congrus à a modulo n.

Ce cours n'aborde pas les polynômes modulo p, le théorème d'Hensel, et l'irréductibilité de polynômes à coefficient entiers. Le dernier sujet est moins tendance en mathématiques olympiques récemment, les deux premiers sujets sont pertinents, et abordés dans certains cours du groupe E (voir par exemple ici).

Exercices

Exercice 1
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et a un entier. Montrer que $P(a) - a$ divise $P^{2026}(a) - 2P^{2025}(a) + P^{2024}(a)$.

Exercice 2
Déterminer les polynômes P à coefficients entiers tels que $a+b$ divise $P(a) - P(b)$ pour tous les entiers relatifs a et b tels que $a + b \neq 0$.

Exercice 3 (USAMO 1974)
Soit P un polynôme à coefficients entiers. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers a, b et c distincts tels que

$$\begin{cases} P(a) = b \\ P(b) = c \\ P(c) = a \end{cases}$$

Exercice 4
Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(n + P(n))$ est un premier pour une infinité d'entiers $n \geqslant 0$.

Exercice 5 (ELMO 2016 P4)
Le grand Théo dispose d'un polynôme P à coefficients entiers tels que $n \mid P(2^n)$ pour tout entier n positif. Montrer que le polynôme du grand Théo est le polynôme nul.

Exercice 6
Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(n)$ divise $2^n - 1$ pour tout entier naturel n.

Exercice 7
Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers tel que $P(n) > 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note aussi $f(n)$ le plus grand facteur premier de $P(n)$.
Existe-t-il une infinité d'entiers $n \geqslant 1$ tels que $f(n+1) > f(n)$?

Exercice 8 (APMO 2025 P3)
Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers tel que $P(0) \neq 0$. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers telle que $P(i-j) \mid a_i - a_j$ pour tous les entiers distincts i et j. Prouver que la suite $a_1, a_2, \ldots$ est constante.

Exercice 9 (Olympiade Bulgare)
Soit f un polynôme à coefficients entiers non constant, ainsi que n et k deux entiers. Montrer qu'il existe un entier a tel que chacun des nombres $f(a)$, $f(a+1)$, …, $f(a+n-1)$ ait au moins k diviseurs premiers distincts.

Exercice 10 (Vieux Romania TST)
Trouver tous les polynômes f à coefficients entiers tels que $f(p)$ est une puissance d'un premier pour tout p premier.

Exercice 11 (BMO 2023 P3)
Pour un entier n strictement positif, on note $\omega(n)$ son nombre de diviseurs premiers distincts. Déterminer tous les polynômes P à coefficients entiers, tels que si n est un entier strictement positif vérifiant $\omega(n) \geqslant 2023^{2023}$, alors $P(n)$ est aussi un entier strictement positif tel que

$$\omega(n) \geqslant \omega(P(n)).$$

Exercice 12 (PAMO 2026 P3)
Déterminer tous les polyômes P à coefficients entiers tels que

— $P(n) > 0$ pour tout entier n positif ;
— Pour tous les entiers positifs n et k et les premiers p tels que $p \mid 3^n - 2^n$ on a

$$p^k \mid 3^n - 2^n \iff p^k \mid 3^{P(n)} - 2^{P(n)}.$$

Exercice 13 (APMO 2021 P2)
Pour un polynôme P et un entier positif n, on note P_n le nombre de paires d'entiers (a, b) telles que $1 \leqslant a < b \leqslant n$ et $|P(a)| - |P(b)|$ est divisible par n. Déterminer tous les polynômes à coefficients entiers tels que $P_n \leqslant 2026$ pour tous les entiers positifs n.

Exercice 14 (IMO 2006 P5)
Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré $n > 1$ et soit k un entier positif. On considère le polynôme $Q = P(P(\dots P(P(x))\dots))$, où P est répété k fois. Montrer qu'il existe au plus n entiers t tels que $Q(t) = t$.

Exercice 15 (OFM Senior 2026 P1)
Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que, pour tous les entiers $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, le nombre $P(a) - P(b)$ est divisible par $a + 2b$ ou $b + 2a$

Exercice 16
Déterminer tous les entiers n strictement positifs tels que si P est un polynôme à coefficients entiers tel que $0 \leqslant P(k) \leqslant n$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n + 1$, alors $P(0) = P(1) = \dots = P(n)$.

Exercice 17 (Iran TST 2004)
Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que $P(n) > n$ pour tout entier n strictement positif. Soit (x_k) une suite définie par les relations $x_1 = 1$ et $x_{i+1} = P(x_i)$ pour $i \geqslant 1$. On suppose que pour tout N, au moins un des x_i est divisible par N. Montrer que $P = X + 1$.

Exercice 18
Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers tels que $P(b) - P(a)$ divise $Q(b) - Q(a)$ pour tous entiers a et b. Montrer qu'il existe un polynôme R à coefficients rationnels tel que $Q = R \circ P$.

Exercice 19 (USAMO 1995 P4)
Soit $q_0, q_1, \dots$ une suite infinie d'entiers qui satisfait les deux conditions suivantes :

— $m - n$ divise $q_m - q_n$ pour $m > n \geqslant 0$; et
— il existe un polynôme P tel que $|q_n| < P(n)$ pour tout n.

Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $q_n = Q(n)$ pour tout n

Exercice 20 (Généralisation du lemme de Schur)
Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'entiers positifs strictement croissante telle qu'il existe un polynôme P non constant vérifiant que $a_n \leqslant P(n)$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer qu'il existe une infinité de premiers p divisant au moins un des a_i.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On remarque que $P(a) \equiv a \mod P(a) - a$. On en déduit donc que :

$$P^{2026}(a) \equiv P^{2025}(P(a)) \equiv P^{2025}(a) \mod P(a) - a,$$

puis similairement que $P^{2025}(a) \equiv P^{2024}(a) \mod P(a) - a$. Ainsi on a

$$P^{2026}(a) - 2P^{2025}(a) + P^{2024}(a) \equiv P^{2024}(a) - 2P^{2024}(a) + P^{2024}(a) \equiv 0 \mod P(a) - a,$$

ce qui permet de conclure.

Solution n°2 de l'exercice 1
On remarque que par la propriété fondamentale, $P(a) - a \mid P^2(a) - P(a)$.
D'un autre côté on sait aussi que $P^2(a) - P(a) \mid P^3(a) - P^2(a)$, de sorte que $P(a) - a$ divise aussi $P^3(a) - P^2(a)$.
Ainsi, en itérant, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'entier $P(a) - a$ divise $P^{k+1}(a) - P^k(a)$.
Dès lors, en prenant $k = 2025$ ainsi que $k = 2024$, on trouve que

$$\begin{cases} P(a) - a \mid P^{2026}(a) - P^{2025}(a); \\ P(a) - a \mid P^{2025}(a) - P^{2024}(a), \end{cases}$$

et donc que $P(a) - a$ divise bien

$$P^{2026}(a) - P^{2025}(a) - (P^{2025}(a) - P^{2024}(a)) = P^{2026}(a) - 2P^{2025}(a) + P^{2024}(a).$$

Remarque 7.
Bien que correcte, la solution 2 de l'exercice 1 ne met pas en avant la vraie philosophie de la propriété fondamentale que nous avons mentionnée dans la remarque 2. Il est donc vraiment important de comprendre la solution n°1 et de s'entraîner à effectuer ce genre de raisonnements.

Solution de l'exercice 2
L'énoncé est intéressant puisque l'hypothèse n'est pas vide. Effectivement, la propriété que l'on nous donne ressemble beaucoup à la propriété fondamentale à ceci près que cette dernière nous donnerait plutôt :

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}, \quad a + b \mid P(a) - P(-b).$$

Considérons désormais P un polynôme solution. Pour $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a + b \neq 0$, nous avons donc :

$$a + b \mid P(a) - P(b),$$

mais aussi par notre remarque

$$a + b \mid P(a) - P(-b).$$

Ainsi en cherchant à isoler b on trouve que $a + b \mid P(b) - P(-b)$.
Ceci est vrai pour a arbitrairement grand, ce qui force $P(b) - P(-b) = 0$. Dès lors

$$\forall b \in \mathbb{Z}, \quad P(b) = P(-b),$$

ce qui implique donc que P est un polynôme pair. Il est alors classique que P s'écrit sous la forme $\sum_{i=0}^{n} a_i X^{2i}$ pour des a_i entiers.

Réciproquement, si P est un polynôme pair alors pour $a, b \in \mathbb{Z}$, on sait que

$$a + b \mid P(a) - P(-b) = P(a) - P(b),$$

donc P est bien solution !

Solution de l'exercice 3
Supposons par l'absurde avoir un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ et trois entiers distincts a, b et c tels que

$$\begin{cases} P(a) = b \\ P(b) = c \\ P(c) = a \end{cases}.$$

Puisque P est à coefficients entiers, on sait que :

$$a - b \mid P(a) - P(b) = b - c,$$

et donc $|a - b| \leqslant |b - c|$. En procédant de manière cyclique on a ainsi

$$|a - b| \leqslant |b - c| \leqslant |c - a| \leqslant |a - b|,$$

de sorte qu'on ait égalité dans toutes les inégalités. Finalement on peut supposer sans perte de généralité que $a = \max(a, b, c)$ de sorte que $a - b = |a - b| = |a - c| = a - c$, d'où $b = c$, ce qui est absurde et conclut.

Solution de l'exercice 4

Remarquons d'abord que les polynômes P constants égaux à un nombre premier sont clairement solution, et les autres polynômes constants ne le sont pas. On suppose donc désormais P non constant.

Soit P un polynôme solution, de degré $d \geqslant 1$. On commence par remarquer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$P(n + P(n)) \equiv P(n) \equiv 0 \mod P(n),$$

de sorte que $P(n + P(n))$ est toujours divisible par $P(n)$. Pourtant, puisque P n'est pas constant il existe N tel que $P(n) \notin \{-1, 1\}$ pour $n \geqslant N$. Étant donné $P(n + P(n))$ est supposé premier pour une infinité de n, cela signifie qu'on dispose de tels entiers n arbitrairement grands qui vérifient donc

$$P(n) = P(n + P(n)) \text{ ou } P(n) = -P(n + P(n)).$$

L'une des deux égalités est donc vérifiée pour infiniment souvent et est donc une égalité polynomiale. Si $d \geqslant 2$ c'est absurde car le membre de gauche de l'égalité est systématiquement de degré d, tandis que celui de droite est systématiquement de degré $d^2 > d$.

Il reste donc à traiter le cas $d = 1$. On écrit pour cela $P = aX + b$ et on développe :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n + P(n)) = a((a + 1)n + b) + b = a(a + 1)n + (a + 1)b = (a + 1)(an + b).$$

Si n est très grand alors le terme en $an + b$ est ne vaut pas -1 ou 1 donc $a + 1$ vaut -1 ou 1. On a ainsi soit $a = 0$, d'où P constant, soit $a = -2$, d'où $P = -2X + b$. Réciproquement, si $P(X)$ est de la forme $b - 2X$, $P(n + P(n)) = P(b - n) = b - 2(b - n) = 2n + -b$ qui prend une infinité de valeurs premières si et seulement si b est impair : en effet, il prend toutes les valeurs impaires assez grandes si b est impair, et sinon est toujours pair et ne vaut 2 que pour un nombre fini de n.

Ainsi les solutions sont les polynômes de la forme $-2X + b$ avec b un entier relatif impair, ou constants égaux à un nombre premier.

Solution de l'exercice 5
On va montrer que P s'annule sur toutes les puissances de 2, ce qui suffira pour conclure. En effet, soit $i \in \mathbb{N}$ et $p > |P(2^i)|$ un premier. On sait que $\text{pgcd}(p-1, p) = 1$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \equiv i \pmod{p-1}$ et $n \equiv 0 \pmod{n}$

$$p \mid n \mid P(2^n),$$

ainsi que, par Petit Fermat,

$$p - 1 \mid 2^n - 2^i \mid P(2^n) - P(2^i).$$

On en déduit donc en sommant que $p \mid P(2^i)$ ce qui implique $P(2^i) = 0$ car $p > |P(2^i)|$.

Remarque 8.
L'exercice est assez caractéristique de certaines techniques utilisées sur les exercices de polynômes à coefficients entiers. La divisibilité est n divise $P(2^n)$. Si on fixe p premier, l'important est la congruence de n mod p, et du côté de $P(2^n)$, l'important est la congruence de 2^n mod p, donc celle de n mod $p-1$. Comme p et $p-1$ sont premiers entre eux, on peut choisir n de sorte à avoir la bonne congruence mod p et $p-1$ (en prenant ici 0 mod p, et une quantité quelconque mod $p-1$).

Solution de l'exercice 6
Si P est constant, on obtient en prenant $n = 1$ que $P = \pm 1$ qui convient réciproquement.
Autrement, P n'est pas constant et il existe une infinité de premiers p divisant une valeur de P par le théorème de Schur. Donnons nous un tel p impair, et n un entier positif tel que p divise $P(n)$, de sorte que p divise $2^n - 1$. D'une part, p divise $P(n+p)$, et divise donc $2^{n+p} - 1$. D'autre part, p divise aussi $2^p(2^n - 1) = 2^{n+p} - 2^p$, et p divise donc $2^p - 1$. Ainsi par Petit Fermat, p divise $2 - 1 = 1$, ce qui est absurde.
Dès lors, la seule possibilité est bien $P = \pm 1$.

Solution n°2 de l'exercice 6
On va utiliser une astuce relativement classique. Il s'agit de remarquer que pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P(n + P(n)) \equiv P(n) \equiv 0 \mod P(n),$$

et donc $P(n) \mid P(n + P(n)) \mid 2^{n+P(n)} - 1$.
Ainsi l'ordre ω de 2 modulo $P(n)$ divise n ainsi que $n + P(n)$. Il divise donc leur plus grand diviseur commun, qui vaut aussi $\operatorname{pgcd}(n, P(n))$.
D'un autre côté si on se donne q qui divise $\operatorname{pgcd}(n, P(n))$, alors $n \equiv 0 \mod q$ et donc $P(n) \equiv P(0) \mod q$, de sorte que q divise aussi $P(0)$. Dès lors :

- Soit $P(0) = 0$ et donc n divise $P(n)$ pour tout entier n. En prenant n premier on trouve $n \mid P(n) \mid 2^n - 1$ alors que $2^n - 1 \equiv 2 - 1 \equiv 1 \mod n$, ce qui est absurde.
- Soit $P(0) \neq 0$ et donc $\operatorname{pgcd}(n, P(n)) < |P(0)|$. Il s'ensuit que pour tout entier naturel n, l'ordre de 2 modulo $P(n)$ est borné par $|P(0)|$. Dès lors nécessairement P est borné et donc constant.

Si P est constant égal à c alors en prenant $n = 1$ on trouve $c = \pm 1$. Réciproquement de telles constantes sont bien solutions, ce qui conclut !

Solution de l'exercice 7
Montrons que la réponse est affirmative. Pour le prouver, on suppose donc par l'absurde qu'il existe N tel que $f(n) \geqslant f(n+1)$ pour tout entier $n \geqslant N$.
En particulier, la suite des $f(i)$ est donc majorée par $\max_{1 \leqslant k \leqslant N} f(k)$ et donc la suite des nombres premiers divisant P est elle aussi majorée.
D'un autre côté, puisque P n'est pas constant le théorème de Schur nous donne l'existence de nombres premiers arbitrairement grands divisant P en une certaine valeur entière, ce qui nous fournit l'absurdité recherchée.

Solution de l'exercice 8
Pour $k \in \mathbb{N}$, on note $d_k = \text{pgcd}(k, P(k)+k) = \text{pgcd}(k, P(k))$.

Lemme 9. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite (a_n) est d_k-périodique modulo $P(k)$.

On sait déjà par hypothèse que pour $n \in \mathbb{N}$, $P(k)$ divise $a_{n+k} - a_n$, et donc en itérant que $P(k)$ divise $a_{n+\ell k} - a_n$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}$. La suite (a_n) est donc k-périodique modulo $P(k)$.
En outre, on sait aussi que pour $n \in \mathbb{N}$

$$P(k) \mid P(k + P(k)) \mid a_{n+P(k)+k} - a_n.$$

La suite (a_n) est donc aussi $P(k)+k$-périodique modulo $P(k)$. Il existe maintenant une combinaison de Bézout $ku + (P(k)+k)v = d_k$ avec sans perte de généralité u positif. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$a_n \equiv a_{n+k} \equiv \cdots \equiv a_{n+ku} \equiv a_{n+ku+(P(k)+k)} \equiv \cdots \equiv a_{n+ku+(P(k)+k)v} \equiv a_{n+d_k} \mod P(k),$$

donc (a_n) est bien d_k-périodique modulo $P(k)$!

Soit n et m deux entiers, on va montrer que $u_n = u_m$. Remarquons pour cela que si $p > |P(0)|$ est un nombre premier alors

$$P(p) \equiv P(0) \not\equiv 0 \mod p$$

car $P(0) \neq 0$, donc $d_p = 1$. La suite (u_n) est ainsi constante modulo $P(p)$, d'où $P(p) \mid u_n - u_m$. En prenant p assez grand on peut garantir que $P(p) > |u_n - u_m|$, ce qui va imposer $u_n - u_m = 0$! Le problème est maintenant résolu.

Remarque 10. On a en fait démontré en toute généralité qu'une suite m-périodique et n-périodique est en fait $\text{pgcd}(m,n)$-périodique.

Solution n°2 de l'exercice 8
Par Schur, il existe une infinité de premiers p divisant une valeur de la forme $P(n)$ pour n un entier positif. Donc comme de plus $P(0) \neq 0$, il existe une infinité de nombres premiers p divisant une valeur $P(n)$ mais pas $P(0)$. Donnons nous p un tel premier, n tel que p divise $P(n)$.

Soit r le reste de la division euclidienne de n par p, comme p divise $n - r$, p divise $P(n) - P(r)$, donc p divise $P(r)$. En particulier, on a forcément $r \neq 0$, donc $1 \leqslant r \leqslant p-1$: r est premier avec p.

De même que dans la solution précédente, on montre que la suite est r et $p+r$ périodique (car comme p divise $p + r - r$, p divise $P(p+r) - P(r)$, donc divise $P(p+r)$). Donc elle est $\text{pgcd}(p+r, r) = \text{pgcd}(p, r) = 1$ périodique modulo p. En particulier, on a que $a_n \equiv a_0 \pmod p$ pour tout entier positif n.

Or ceci est valable modulo une infinité de p, donc on a $a_n = a_0$ pour tout $n \geqslant 0$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9
Cet exercice fait clairement penser à l'exercice plus classique où $f(x) = x$, et on va procéder de manière complétement analogue ! Déjà, le théorème de Schur nous donne une suite infinie strictement croissante $p_1 < p_2 < \dots$ de premiers à laquelle on peut faire correspondre une suite d'entiers $x_1, x_2, \dots$ telle que $p_i \mid P(x_i)$ pour tout i.
On peut maintenant construire notre solution grâce à un système de restes chinois ! Effectivement, le système

$$\begin{cases} x \equiv x_1 \mod p_1 \\ x \equiv x_2 \mod p_2 \\ \vdots \\ x \equiv x_k \mod p_k \\ x \equiv x_{k+1} - 1 \mod p_{k+1} \\ \vdots \\ x \equiv x_{2k} - 1 \mod p_{2k} \\ \vdots \\ x \equiv x_{(n-1)k+1} - (n-1) \mod p_{(n-1)k+1} \\ \vdots \\ x \equiv x_{nk} - (n-1) \mod p_{nk} \end{cases}$$

admet au moins une solution que l'on peut noter a. Pour $i \in [\![0, n-1]\!]$ et $\ell \in [\![ik+1, (i+1)k]\!]$, on a alors par construction

$$P(a+i) \equiv P((x_\ell - i) + i) \equiv P(x_\ell) \equiv 0 \mod p_\ell,$$

donc chacun des $P(a+i)$ est divisible par au moins k premiers distincts : les p_ℓ pour ℓ entre $ik+1$ et $(i+1)k$.

Remarque 11. On aurait pu mettre en forme plus facilement le système en indexant nos premiers p_i et nos entiers x_i selon deux variables i et j. Ainsi si on se donne une liste $(p_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ de premiers distincts et une liste $(x_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant k \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ d'entiers tels que $p_{i,j} \mid f(x_{i,j})$, on peut construire a tel que pour $1 \leqslant \ell \leqslant n$, les k premiers $p_{1,\ell}, p_{2,\ell}, \dots, p_{k,\ell}$ divisent tous $f(a+\ell-1)$ en posant similairement

$$a \equiv x_{i,j} - j + 1 \mod p_{i,j}$$

pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et $1 \leqslant j \leqslant n$.

Solution de l'exercice 10
Supposons qu'il existe $p \neq q$ deux premiers pour lesquels $f(p)$ est une puissance de q différente de 1, qu'on note q^r. Il existe une infinité de premiers p' valant p modulo q^{r+1} par théorème de Dirichlet. En particulier, q^{r+1} divise $p - p'$ donc $f(p) - f(p') = q^r - f(p')$. En outre, q divise q^{r+1}, donc divise $q^r - f(p')$, donc q divise $f(p')$. Ainsi $f(p')$ est une puissance de q. De plus q^{r+1} ne divise pas $f(p')$, donc $f(p')$ est de la forme q^b avec $1 \leqslant b \leqslant r$. Or $q^{r+1} > q^r - q^b \geqslant 0$ et q^{r+1} divise $q^r - q^b$, donc $b = r$.
Ainsi pour chaque p', on a $f(p') = q^r$, donc f prend une infinité de fois la même valeur et est constant.
Si f n'est pas constant, pour tout p premier, $f(p)$ est une puissance de p. Or si f est de degré k, pour p assez grand $f(p) < p^{k+1}$. En particulier, pour tout p assez grand, $f(p) = p^r$ avec $0 \leqslant r \leqslant k$. Il existe un r pour lequel l'équation $f(p) = p^r$ a une infinité de solutions, donc f est le polynôme X^r.

Solution n°2 de l'exercice 10

On va à nouveau montrer qu'un tel polynôme est constant de valeur une puissance de premier, ou de la forme X^k, qui conviennent de manière évidente. L'idée de cette solution alternative va être d'essayer de construire trois premiers distincts p, q et r tels que q et r divisent $f(p)$.

Lemme 12. Un polynôme f non constant qui satisfait à l'énoncé doit vérifier $f(0) = 0$.

Démonstration. Le théorème de Schur nous donne des premiers p arbitrairement grands tels qu'il existe k tel que $p \mid f(k)$. Si jamais on a $\operatorname{pgcd}(k, p) \neq 1$ alors cela signifie que $p \mid k$ et donc que p divise aussi $f(0)$. Ainsi si $f(0) \neq 0$, on peut trouver deux premiers distincts q et r ainsi que deux entiers k et ℓ tels que $q \mid f(k)$, $r \mid f(\ell)$ et $\operatorname{pgcd}(k, q) = \operatorname{pgcd}(\ell, r) = 1$.
Remarquons désormais que le théorème des restes chinois nous donne l'existence d'un entier a tel que

$$x \equiv a \mod qr \iff \begin{cases} x \equiv k \mod q \\ x \equiv \ell \mod r \end{cases}.$$

Un tel a est nécessairement premier avec qr car k l'est avec q et ℓ l'est avec r. Le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet nous donne ainsi l'existence d'un premier p tel que $p \equiv a \mod qr$, c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases} p \equiv k \mod q \\ p \equiv \ell \mod r \end{cases}.$$

On a alors $f(p) \equiv f(k) \equiv 0 \mod q$ et similairement $f(p) \equiv f(\ell) \equiv 0 \mod r$ donc $qr \mid f(p)$ et $f(p)$ ne peut être la puissance d'un premier, ce qui est absurde ! □

Ainsi en appliquant une première fois notre lemme, on en déduit qu'essentiellement on a $f(0) = 0$ et donc qu'il existe $g \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $f = Xg$. Or le polynôme g vérifie en fait aussi les mêmes hypothèses que f ! On peut donc itérer.
Pour formaliser ça, on écrit f sous la forme $f = X^k h$ avec k maximal, de sorte que $h(0) \neq 0$. On constate alors que pour p premier, $f(p)$ est la puissance d'un premier et donc $h(p)$ aussi. Dès lors, puisque $h(0) \neq 0$ le lemme nous dit que h est forcément constant égal à c.

— Si $k = 0$ alors c est forcément de la forme p^ℓ avec p un premier et ℓ un entier naturel.

— Si $k \geqslant 1$ alors $p \mid f(p)$ donc c vaut 1 et $f = X^k$.

On a donc trouvé les seules solutions, qui conviennent bien, ce qui conclut !

Solution n°3 de l'exercice 10

On peut mixer un peu les deux premières solutions ! Une fois le lemme prouvé, supposons f non constant. On a directement que p divise $f(p)$ pour tout premier p, donc $f(p)$ est toujours une puissance de p. On conclut alors comme dans la première solution.

Solution de l'exercice 11
Notons $C = 2023^{2023} + 1$ ainsi que N le produit des 2023^{2023} premiers premiers. Nous allons montrer que les solutions sont de la forme $P(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{N}$ ou $P(x) = c$ avec $\omega(c) \leqslant C$. Il est déjà clair qu'elles fonctionnent.

Le cas où P est constant étant direct, on le suppose de degré $\geqslant 1$. On distingue alors deux cas.

— Si $P(0) \neq 0$ alors le théorème de Schur nous donne des premiers distincts $p_1 < \cdots < p_{C+1}$, tous strictement plus grands que $\max(|P(0)|, N)$, auxquels on peut faire correspondre des entiers $x_1, \ldots, x_{C+1}$ tels que $p_i \mid P(x_i)$. Si $p_i \mid x_i$ alors $p_i \mid P(0)$, ce qui est impossible car $P(0) \neq 0$ et $p_i > |P(0)|$. Dès lors, le théorème de Dirichlet nous donne l'existence d'un premier q tel que

$$\forall i \in [\![1, C+1]\!], \quad Nq \equiv x_i \mod p_i.$$

Posons $n = Nq$. Par construction

$$\forall i \in [\![1, C+1]\!], \quad P(n) \equiv P(x_i) \equiv 0 \mod p_i,$$

donc $\omega(P(n)) \geqslant C+1$ alors que $\omega(n) = C$, ce qui est absurde !

— Si $P(0) = 0$ alors on écrit $P(x) = x^k Q(x)$ avec k maximal et $Q \in \mathbb{Z}[X]$ (ainsi $Q(0) \neq 0$), de sorte que si $\omega(n) \geqslant C$:

$$\omega(n) \geqslant \omega(P(n)) = \omega(n^k Q(n)) \geqslant \omega(n).$$

On a donc égalité partout, et ainsi si un premier p divise $Q(n)$ alors p divise n. Si Q est constant alors la seule possibilité est donc $Q(x) = 1$. Autrement, on considère $p > |Q(0)|$ divisant $Q(n)$ pour un certain n, de même que précédemment n n'est pas divisible par p, d'où la conclusion !

Solution de l'exercice 12

Montrons que les solutions sont de la forme $2^i \cdot 3^j \cdot x$ avec $i, j \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme solution.

Lemme 13. Il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = xQ(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la deuxième hypothèse nous apprend déjà que

$$3^n - 2^n \mid 3^{P(n)} - 2^{P(n)}.$$

On reconnait ici deux expressions de la forme $a^k - b^k$ à a et b fixés premiers entre eux donc il est connu que

$$\operatorname{pgcd}(3^n - 2^n, 3^{P(n)} - 2^{P(n)}) = 3^{\operatorname{pgcd}(n,P(n))} - 2^{\operatorname{pgcd}(n,P(n))}.$$

Rappelons en rapidement la preuve. Pour $m \geqslant n$ et d un diviseur de $3^n - 2^n$ on a

$$3^m - 2^m = 3^{m-n} \times 3^n - 2^{m-n} \times 2^n \equiv 3^n \times (3^{m-n} - 2^{m-n}) \mod d,$$

de sorte que $d \mid 3^m - 2^m$ si et seulement si $d \mid 3^{m-n} - 2^{m-n}$ car $\operatorname{pgcd}(d, 3) = 1$. On retombe ainsi sur une équation de récurrence de la forme $\operatorname{pgcd}(3^m - 2^m, 3^n - 2^n) = \operatorname{pgcd}(3^{m-n} - 2^{m-n}, 3^n - 2^n)$ où on effectue un algorithme d'Euclide sur les puissances, d'où la conclusion.

Ainsi $3^n - 2^n$ divise $3^{\operatorname{pgcd}(n,P(n))} - 2^{\operatorname{pgcd}(n,P(n))}$ pour tout $n \geqslant 1$. Dès lors, pour $p > |P(0)|$ premier on a $\operatorname{pgcd}(p, P(p)) \in \{1, p\}$, donc $\operatorname{pgcd}(p, P(p)) = p$ car $3^n - 2^n$ est strictement plus grand que 1 pour $n \geqslant 2$. On a en outre $p \mid P(p) - P(0)$ donc $p \mid P(0)$ ce qui donne bien $P(0) = 0$ car $p > |P(0)|$.

On réinjecte maintenant cette nouvelle égalité dans l'énoncé en écrivant que

$$3^{P(n)} - 2^{P(n)} = (3^n)^{Q(n)} - (2^n)^{Q(n)}.$$

Cela rappelle clairement le LTE ! Effectivement, si jamais le polynôme Q n'est pas constant alors d'après le théorème de Schur on peut trouver un premier $p \notin \{2, 3\}$ et un entier n tel que $p \mid Q(n)$. En outre d'après le théorème des restes chinois on peut trouver un entier m positif tel que $m \equiv n \mod p$ et $m \equiv 0 \mod p - 1$. On a alors $p \mid 3^m - 2^m$ donc

$$v_p((3^m)^{Q(m)} - (2^m)^{Q(m)}) = v_p(3^m - 2^m) + v_p(Q(m)) \geqslant v_p(3^m - 2^m) + 1,$$

ce qui contredit la deuxième hypothèse de l'énoncé et permet de conclure !

Réciproquement on a en fait montré plus généralement que l'ensemble des diviseurs premiers de Q est $\{2, 3\}$, donc si Q est constant alors $Q = 2^i \cdot 3^j$ car P est positif sur $\mathbb{N}^*$, et le P obtenu fonctionne alors clairement par notre même argument de LTE.

Solution n°2 de l'exercice 12

Voici une manière alternative de montrer que $P(0) = 0$. On pose $P(X) = XQ(X) + P(0)$ avec Q un polynôme à coefficients entiers. On a alors modulo $3^n - 2^n$, comme $3^n \equiv 2^n$:

$$0 \equiv 3^{P(n)} - 2^{P(n)} \equiv (3^n)^{Q(n)} 3^{P(0)} - (2^n)^{Q(n)} 2^{P(0)} \equiv (2^n)^{Q(n)} (3^{P(0)} - 2^{P(0)}) \pmod{3^n - 2^n}.$$

On en déduit que $3^n - 2^n$ divise $(2^n)^{Q(n)}(3^{P(0)} - 2^{P(0)})$ mais comme il est premier avec 2, $3^n - 2^n$ divise $3^{P(0)} - 2^{P(0)}$ pour tout n, donc la seconde quantité est nulle, ce qui implique $P(0) = 0$.

Solution de l'exercice 13
On va montrer que les solutions sont de la forme $x+c$ ou $-x-c$ avec $c \geqslant -2027$. Il est clair qu'elles fonctionnent bien : en effet, dans le cas $x+c$, les valeurs prises par P sont des valeurs consécutives positives, sauf les éventuelles premières valeurs si c est strictement négatif : le polynôme prend au plus les valeurs négatives $-2026, \dots, -1$ et chacune au plus une fois. Donc pour tout n, il y a au plus n couples (a,b) avec $1 \leqslant a < b \leqslant n$ des entiers tels que n divise $|P(a)| - |P(b)|$ sont les 2026 éventuels couples où $P(a) = -P(b)$. Le cas $-x-c$ est identique.
Soit P un polynôme solution. Notons que P n'est pas constant. Remarquons déjà que quitte à remplacer P par $-P$ on peut supposer P de coefficient dominant positif de sorte que P soit positif à partir d'un entier $C \geqslant 0$.

Lemme 14. P est injectif modulo tout premier p assez grand.

Effectivement, si ce n'est pas le cas alors pour on a des premiers p_k arbitrairement grands pour lesquels il existe a_k et b_k non congrus modulo p tels que $p_k \mid P(a_k) - P(b_k)$. Dès lors si on pose $n = \prod_{i=1}^{\ell} p_i$, on sait que pour deux entiers a et b qui satisfont le système

$$\begin{cases} x \in \{a_1, b_1\} \mod p_1 \\ x \in \{a_2, b_2\} \mod p_2 \\ \vdots \\ x \in \{a_k, b_k\} \mod p_\ell \end{cases}$$

on a

$$\forall i \in [\![1, \ell]\!], \quad P(a) - P(b) \equiv P(a_i) - P(a_i) \equiv 0 \mod p_i,$$

donc $n \mid P(a) - P(b)$. Or par le théorème des restes chinois il y a exactement 2^ℓ solutions distinctes au système précédent dans $\{1, \dots, n\}$. On a donc au moins $2^\ell - C$ solutions plus grandes que C que l'on note $x_1 < \cdots < x_{2^\ell - C} \leqslant n$. Dès lors

$$\forall i \in [\![2, 2^\ell - C]\!], \quad n \mid P(x_1) - P(x_i) = |P(x_1)| - |P(x_i)|,$$

d'où $2^\ell - C - 1 \leqslant 2026$, ce qui est absurde pour ℓ assez grand.

On peut alors conclure ! En effet, pour tout premier p assez grand, les entiers n et $n+1$ ne sont pas congrus modulo p donc $p \nmid P(n+1) - P(n)$. Ainsi le polynôme $P(x+1) - P(x)$ n'a qu'un nombre fini de diviseurs premiers, et est donc constant d'après le théorème de Schur : P est affine.

Dès lors si $P(x) = cx + d$ avec $c \geqslant 2$ alors pour a et b assez grands on a $|P(a)| - |P(b)| = c(a-b)$ donc pour $k \geqslant 2\max(2027, C+1)$ et $n = ck$, les couples $(i, k+i)$ pour $\frac{k}{2} \leqslant i \leqslant k$ vérifient $n \mid |P(k+i)| - |P(i)| = ck$ et il y en a au moins $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor > 2026$.

Pour traiter le cas du terme constant, on remarque finalement que si $P(x) = x + c$ alors pour $c < -2027$ on a pour les 2027 paires $(a,b) = (1, -1-2c), (2, -2-2c), \dots, (2027, -2027-2c)$ que $|P(a)| = |P(b)|$, donc pour tout n assez grand on a une contradiction.

Solution de l'exercice 14
On commence par un lemme qui généralise le problème de l'USAMO 1974.

Lemme 15. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et x un entier tel que que $P^k(x) = x$ pour un certain k. Alors $P^2(x) = x$.

Considérons n l'entier strictement positif minimal tel que $P^n(x) = x$. On pose alors $x_j = P^{j-1}(x)$ pour tout j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant n$, en considérant les indices modulo n, on a $x_{i+1} = P(x_i)$ pour tout entier i. En particulier, $x_1, \ldots, x_n$ sont deux à deux distincts : si on avait $x_i = x_j$ avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on aurait $x_{n-j+i+1} = P^{n+1-j}(x_i) = P^{n+1-j}(x_j) = x_{n+1} = x_1$ ce qui serait absurde par minimalité de n.

$$x_2 - x_1 \mid P(x_2) - P(x_1) = x_3 - x_2 \mid \cdots \mid x_1 - x_n \mid x_2 - x_1,$$

donc

$$|x_2 - x_1| = |x_3 - x_2| = \cdots = |x_n - x_1| := a.$$

Supposons $k \geqslant 3$, on considère i tel que x_i est maximal. Comme $|x_i - x_{i+1}| = |x_i - x_{i-1}|$, on a $x_i - x_{i-1} = x_i - x_{i+1}$ donc $x_{i-1} = x_{i+1}$ ce qui est absurde car par périodicité, toute suite de n valeurs consécutives de x_i ne contient que des termes distincts. Ainsi $n = 1$ ou 2, et dans les deux cas il est clair que $P^2(x) = x$. Tous les x_i sont donc égaux, ce qui est absurde par construction.

On s'intéresse maintenant aux racines entières de $P^2(x) - x$. Déjà si tous les entiers t tels que $P^2(t) = t$ vérifient $P(t) = t$ alors le problème est vérifié car le polynôme $P(x) - x$ a au plus n racines. On peut donc se donner deux entiers $a \neq b$ tels que $P(a) = b$ et $P(b) = a$.
A nouveau on a $n \geqslant 2$ donc si le problème n'est pas vérifié il existe $\{c, d\} \neq \{a, b\}$ (non forcément distincts) tels que $P(c) = d$ et $P(d) = c$. Comme précédemment on trouve alors :

$$a - c \mid b - d \mid a - c \quad \text{et} \quad a - d \mid b - c \mid a - d,$$

de sorte que $|a - c| = |b - d|$ et $|a - d| = |b - c|$.

On peut déjà imposer sans perte de généralité $a = \max(a, b, c, d)$ et $c \geqslant d$. Si $b \geqslant c$ alors $a + c = b + d$ ce qui est absurde car $a > b$ et $c \geqslant d$. On a donc $c \geqslant b$ ce qui donne $a + b = c + d$. Posons $m = a + b$, ainsi $P(c) + c = m = P(a) + a = P(b) + b$. Ainsi pour tout entier t tel que $P^2(t) = t$, on a $P(t) + t = m$ (pour $t = a, b$ c'est évident, et sinon on peut prendre $c = t$). Le polynôme $P(x) + x - m$ ayant au plus n racines, cela permet de conclure !

Remarque 16. Une fois qu'on a démontré le premier lemme on peut être un peu perdu pour analyser les racines entières de $P^2(x) - x$. Pour comprendre comment avancer, on peut constater que si on prend a, b, c, d quatre entiers alors par interpolation de Lagrange il existe un polynôme R à coefficients rationnels de degré 3 tel que $R(a) = b$, $R(b) = a$, $R(c) = d$ et $R(d) = c$. Or le problème affirme que c'est impossible que R soit à coefficients entiers ! On espère donc pouvoir trouver des informations contradictoires à partir de ces quatre données exclusivement en utilisant $m - n \mid P(m) - P(n)$, ce qui conduit donc à l'obtention de l'égalité cruciale $a + b = c + d$.

Solution de l'exercice 15

Montrons que les seules solutions sont les polynômes constants. Déjà, ces derniers sont bien solutions. On prend $b = 2b'$ dans l'hypothèse de l'énoncé, avec b' un entier strictement positif fixé. On distingue maintenant les deux cas :

— Si $a + 2b$ divise $P(a) - P(b)$ alors on a $a \equiv -2b \mod a + 2b$ donc

$$a + 2b \mid P(b) - P(-2b) = P(2b') - P(-4b').$$

— Si $2a + b$ divise $P(a) - P(b)$, alors $a + b'$ divise $P(a) - P(2b')$, donc divise aussi $P(-b') - P(2b')$.

Pour a assez grand, $a+2b$ est strictement plus grand que $|P(2b')-P(-4b')|$ et $|P(-b')-P(2b')|$, donc $P(2b') = P(-4b')$, ou $P(-b') = P(2b')$. Ceci étant vrai pour tout b', on a une infinité de b' pour lesquels une des équations est vérifiée, donc $P(-4X) = P(2X)$ ou $P(-X) = P(2X)$. En remplaçant X par $-X/2$ dans le premier cas, on obtient aussi que $P(2X) = P(-X)$, et si on note d le degré, et c le coefficient dominant (en supposant $P \neq 0$), on a $2^d c = (-1)^d c$, donc $2^d = (-1)^d$, ce qui implique $d = 0$. Ainsi P est constant, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 16
Cet exercice est un peu un piège. L'objectif est aussi de rappeler que si un polynôme a deux racines, le factoriser est une bonne idée. Essayons maintenant de voir ce qui se passe pour de petites valeurs de n.

Pour $n = 1$, on se rend compte que le polynôme $X(2 - X)$ invalide la propriété de l'énoncé. Pour $n = 2$, c'est le polynôme $X(3 - X)$ qui nous fournit un contre-exemple. L'énoncé est donc faux pour $n = 1$ et $n = 2$.
Pour $n = 3$, l'énoncé est en fait à nouveau mis en défaut, cette fois-ci par le polynôme $X(4 - X)(X - 2)^2$.

Montrons maintenant que tout entier $n \geqslant 4$ est solution. Soit $n \geqslant 4$ et $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $0 \leqslant P(k) \leqslant n$ pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n + 1$.

Déjà $n + 1$ divise $P(0) - P(n + 1)$ alors que $n \geqslant P(0) - P(n + 1) \geqslant -n$: on a forcément $P(0) = P(n+1)$. Dès lors le polynôme translaté $P-P(0)$ admet 0 et $n+1$ comme racines, donc il peut se factoriser sous la forme $X(n+1-X)Q(X)$, avec Q un polynôme à coefficient entiers.

D'un autre côté la fonction qui à x associe $x(n+1-x)$ est strictement croissante sur $[0, (n+1)/2]$ puis strictement décroissante jusqu'en $n + 1$ (et symétrique autour de $(n + 1)/2$). Ainsi pour i vérifiant $2 \leqslant i \leqslant n + 1 - 2 = n - 1$, on a que

$$i(n + 1 - i) \geqslant 2(n + 1 - 2) = 2(n - 1) = n + n - 2 > n.$$

Ainsi $i(n + 1 - i)$ divise $P(i) - P(0)$, qui est toujours compris entre $-n$ et n, de sorte que $P(i) = P(0)$.

Il reste alors à montrer que $P(1) = P(n) = P(0)$. Or d'après ce qu'on vient de dire, si $n \geqslant 4$ alors $P(2) = P(3) = P(0)$ et donc $Q(2) = Q(3) = 0$. On peut ainsi poser $Q(X) = (X - 2)(X - 3)R(X)$, de sorte que $n \geqslant |P(1) - P(0)| = 2n \times |R(1)|$: forcément $R(1) = 0$, c'est-à-dire $P(1) = P(0)$. Dès lors

$$n \geqslant |P(n) - P(0)| = n(n - 2)(n - 3)|R(n)| \geqslant 2n \times |R(n)|,$$

donc similairement $P(n) = P(0)$. La propriété de l'énoncé est ainsi bien vérifiée dans ce cas !

Dès lors, les entiers n solutions sont exactement ceux plus grand que 4.

Solution de l'exercice 17

Notons que par hypothèse, la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement croissante. De plus, pour tout $n \geqslant 1$, $x_{n+1} - x_n$ divise $P(x_{n+1}) - P(x_n) = x_{n+2} - x_{n+1}$. En itérant $x_{n+1} - x_n$ divise $x_{n+i+1} - x_{n+i}$ pour tout $i \geqslant 0$.

Supposons par l'absurde que $x_{n+1} - x_n$ ne divise pas x_n. Comme il divise $x_{n+1} - x_n$, il ne divise pas x_{n+1}. En itérant celui-ci ne divise pas x_{n+i} pour tout $i \geqslant 0$. Ainsi tout multiple, parmi la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'un nombre de la forme $M(x_{n+1} - x_n)$ est parmi $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Or pour M assez grand $M(x_{n+1} - x_n)$ est plus grande strictement que $x_1, \ldots, x_{n-1}$, donc cette quantité ne divise aucun terme de la suite ce qui est absurde.

Ainsi pour tout n, $x_{n+1} - x_n$ divise x_n. Donc pour tout $n \geqslant 1$, $P(x_n) - x_n = |P(x_n) - x_n| \leqslant x_n$, donc $P(x_n) \leqslant 2x_n$. Ceci impose, comme x_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$, que P est de la forme $aX + b$ avec $a \leqslant 2$.

Or $P(1) > 1$ et $P(1) - 1 = a_2 - a_1$ divise $a_1 = 1$, donc $P(1) = 2$, ainsi $a + b = 2$. Le fait d'avoir $P(n) > n$ pour tout entier $n \geqslant 1$ impose $a \geqslant 1$, donc $P(X) = X + 1$ ou $2X$.

Dans le cas $P(X) = 2X$, on a $x_{i+1} = 2x_i$ pour tout $i \geqslant 1$, donc $x_n = 2^{n-1}$ par récurrence immédiate. Aucun terme de la suite n'est divisible par 3 ce qui est absurde.

Ainsi on a bien $P(X) = X + 1$.

Solution de l'exercice 18
Déjà si P est constant, on obtient facilement que Q est constant et prendre $R = Q$ conclut. Supposons désormais P non constant, notons d son degré.
Dans ce qui suit, on désignera par P^i la puissance i-ème de P : il n'y a d'itérées nulle part.

Lemme 17 (Décomposition en base P de Q)**.** Il existe $k \geqslant 0$ et $A_0, \dots, A_k$ des polynômes à coefficients rationnels de degré au plus $d-1$ tels que $Q = \sum_{i=0}^{k} A_i P^i$.

Démonstration. On procède par récurrence sur le degré de Q (sans rien supposer sur P et Q). Si celui-ci vaut au plus $d-1$, on peut prendre $k = 0$ et $A_0 = Q$. Pour l'hérédité, on prend $d' \geqslant d$, et on suppose que pour tout polynôme de degré strictement inférieur à d' l'énoncé est vrai. On fait la division euclidienne de d' par d : $d' = qd + r$. On fait alors la division euclidienne de Q par P^q, on obtient A_q et R des polynômes à coefficients rationnels tels que $Q = A_q P^q + R$, avec R de degré strictement plus petit que d', et A_q de degré $r \leqslant d-1$. En appliquant l'hypothèse de récurrence à R, on obtient le résultat voulu. □

Ainsi posons $Q = \sum_{i=0}^{k} A_i P^i$. Considérons M un entier strictement positif tel que MA_i est à coefficients entiers pour tout i. On a ainsi que pour toute paire d'entier (a, b), $P(b) - P(a)$ divise $M(Q(b) - Q(a)) = \sum_{i=0}^{k} MA_i(b)P^i(b) - MA_i(a)P^i(a)$. Or modulo $P(b) - P(a)$, $P(b) \equiv P(a)$, donc

$$0 \equiv \sum_{i=0}^{k} M(A_i(b) - A_i(a))P^i(a) \pmod{P(b) - P(a)}.$$

A a fixé, la quantité $Z(b) = \sum_{i=0}^{k}(A_i(b) - A_i(a))P^i(a)$ est un polynôme en b de degré au plus $d-1$ alors que $P(b) - P(a)$ est un polynôme en b de degré d. Dès lors, pour b assez grand on doit avoir $|P(b) - P(a)| > |Z(b)|$, c'est-à-dire $Z(b) = 0$. Ainsi $Z = 0$ et dès lors la quantité $\sum_{i=0}^{k} M(A_i(b) - A_i(a))P^i(a) = 0$ est forcément nulle pour tous a et b entiers.

Fixons désormais $b = 0$, et voyons $\sum_{i=0}^{k} M(A_i(0) - A_i(a))P^i(a) = 0$ comme un polynôme en a. Montrons que $A_i(X) = A_i(0)$ pour tout i. Soit j minimal pour lequel c'est faux, dans ce cas $P^{j+1}(X)$ divise $\sum_{i=0}^{k} M(A_i(0) - A_i(X))P^i(X) = 0$, et divise $\sum_{i=j+1}^{k} M(A_i(0) - A_i(X))P^i(X) = 0$, donc celui-ci divise $\sum_{i=0}^{j} M(A_i(0) - A_i(X))P^i(X) = 0$. Or par minimalité de j, $\sum_{i=0}^{k} M(A_i(0) - A_i(X))P^i(X) = 0 = M(A_j(0) - A_j(X))P^j(X)$ qui est divisible par P^{j+1}, donc P divise $M(A_j(0) - A_j(X))$ qui est de degré plus petit que celui de P, donc qui est nul : ainsi $A_j = A_j(0)$ ce qui est absurde.

Ainsi $Q = \sum_{i=0}^{k} A_i(0)P^i = R \circ P$ pour $R(X) = \sum_{i=0}^{k} A_i(0)X^i$ ce qui conclut.

Remarque 18. Si P est unitaire, on peut montrer que les A_i sont à coefficient entiers

Solution de l'exercice 19
Pour $d = \deg P$, notons Q l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à d tel que $Q(i) = q_i$ pour $0 \leqslant i \leqslant d$. Q n'est pas forcément à coefficients entiers, mais quitte à le multiplier par un entier N adéquat non nul, le polynôme NQ sera lui à coefficients entiers.
Pour $i \in \mathbb{N}$ on pose maintenant $r_i = NQ(i) - Nq_i$. On remarque alors que pour n et m deux entiers positifs, on sait que $m - n \mid NQ(m) - NQ(n)$ et que $m - n \mid q_m - q_n$ et donc $m - n$ divise toujours $r_m - r_n$.

Lemme 19. Il existe un entier N tel que $r_n = 0$ pour tout $n \geqslant N$.

Démonstration. Effectivement, on a déjà par construction $r_i = 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant d$. On en déduit ainsi que pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$n - i \mid r_n - r_i = r_n,$$

pour tout $0 \leqslant i \leqslant d$, de sorte que

$$\mathrm{ppcm}(n, n-1, \ldots, n-d) \mid r_n.$$

Montrons que la quantité de droite est de l'ordre d'un polynôme de degré $d+1$. Pour cela, pour un premier p on considère l'entier $m \in [\![1, d]\!]$ qui maximise $v_p(n-m)$.
On sait alors que pour $i \in [\![0, d]\!]$ différent de m, si p^k divise $n - i$ alors p^k divise aussi $(n-i) - (n-m) = m - i$, de sorte que :

$$v_p(n-i) \leqslant v_p(i-j) \leqslant \max_{k \in [\![1,d]\!]} v_p(k).$$

On en déduit ainsi que :

$$v_p(\mathrm{ppcm}(n-1, n-2, \ldots, n-d)) \leqslant v_p((n-1)(n-2)\ldots(n-d)) - (d-1) \times \max_{k \in [\![1,d]\!]} v_p(k).$$

Dès lors, puisque d est fixé et que $\max_{k \in [\![1,d]\!]} v_p(k) = 0$ pour p assez grand, on dispose d'une constante C telle que

$$\mathrm{ppcm}(n, n-1, \ldots, n-d) \geqslant \frac{n(n-1)\ldots(n-d)}{C}.$$

Ainsi, si r_n n'est pas nul on doit avoir

$$P(n) \geqslant |r_n| \geqslant \frac{n(n-1)\ldots(n-d)}{C},$$

ce qui n'est pas possible pour n assez grand car le membre de gauche est un polynôme de degré $d+1$ alors que celui de droite est de degré d. □

Finalement, pour $i \in \mathbb{N}$ on peut donc écrire que pour $n \geqslant N$ on a

$$n - i \mid r_n - r_i = -r_i.$$

En prenant n assez grand, cela force $r_i = 0$ et donc la suite des (r_n) est nulle et on a bien $Q(i) = q_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$!

Remarque 20.
En fait ici le polynôme Q nous est donné (ce qui motive donc la solution !). Effectivement, si on note d le degré de P alors Q va manifestement devoir être de degré plus petit que d, ce qui signifie que Q est en fait le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points a_i pour $0 \leqslant i \leqslant d$.

Solution de l'exercice 20
Déjà notons que a_n tend vers $+\infty$, donc $P(n)$ aussi (et est forcément strictement croissant pour n assez grand). De plus, si on note d le degré de P (on pose exceptionnellement $d = 0$ si $P = 0$), pour n assez grand $P(n) \leqslant n^{d+1}$

Il existe donc un entier N tel que si $n \geqslant N$, $n^{d+1} \geqslant P(n) > P(i)$ pour tout entier i vérifiant $0 \leqslant i < N$. Ainsi pour tout $n \geqslant N$, pour tout $i \leqslant n$, on a $a_i \leqslant P(i) \leqslant P(n) \leqslant n^{d+1}$.

Supposons qu'il existe un nombre fini de premiers divisant un terme de la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ qu'on note $p_1, \dots, p_k$. Il existe alors pour tout n et j $\alpha_n^{(j)}$ tel que $a_n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_n^{(j)}}$.

En particulier, pour tout $n \geqslant N$, pour tout $i \leqslant n$ et pour tout j vérifiant $1 \leqslant j \leqslant k$, on a que $n^{d+1} \geqslant a_i \geqslant p_j^{\alpha_i^{(j)}}$, donc $\alpha_i^{(j)} \leqslant \log_{p_j}(n^{d+1}) = (d+1)\log_{p_j}(n)$.

En particulier, le k uplet $(\alpha_i^{(j)}, \dots, \alpha_k^{(j)})$ prend au plus $(d+1)^k \log_{p_1}(n) \dots \log_{p_k}(n)$, qui pour n assez grand est strictement inférieur à n. Donc pour n assez grand, il existe deux indices $i \neq i'$ donnant le même uplet, ainsi $a_i = a_{i'}$ ce qui est absurde. Ainsi la suite admet une infinité de facteurs premiers.

Solution n°2 de l'exercice 20
Supposons par l'absurde que la suite (a_n) ne soit divisible que par un nombre fini de premiers, que l'on note $p_1, \dots, p_k$. La remarque cruciale ici est que chaque a_i s'écrit donc comme un produit de la forme $\prod_{j=1}^{k} p_j^{\alpha_j}$, et qu'on a unicité puisque la suite des a_i est injective. On peut donc dire que :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_i} \leqslant \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}} &= \prod_{i=1}^{k} (1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots) \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - p_i^{-1}} \\ &< +\infty.\end{aligned}$$

On a donc obtenu un certain contrôle sur les a_i, qui permet de montrer que la suite (a_i) va devoir croître relativement vite (ce qui pourrait contredire le fait qu'elle est supposée sous-polynomiale). Malheureusement ce n'est pas encore suffisant puisque si $a_i = i^2$, on n'a pas d'absurdité dans notre inégalité.
On va donc améliorer légèrement ce que l'on vient de faire en écrivant que pour $d \in \mathbb{N}$, on a toujours :

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_i^{1/d}} \leqslant \sum_{\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_1^{\alpha_1/d} \dots p_k^{\alpha_k/d}} &= \prod_{i=1}^{k} (1 + \frac{1}{p_i^{1/d}} + \frac{1}{p_i^{2/d}} + \dots) \\ &= \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - p_i^{-1/d}} \\ &< +\infty \ ; \qquad (1)\end{aligned}$$

Dès lors en prenant $d = \deg P + 1$, on voit que $a_n^{1/d} \leqslant P(n)^{1/d} \leqslant n$ pour tout n assez grand.

Ainsi on a une certaine constante N telle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{a_n} \geqslant \sum_{n \geqslant N} \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{1}{C} \sum_{n \geqslant N} \frac{1}{n} = +\infty,$$

car la série harmonique diverge, ce qui contredit notre inégalité (1) et conclut !

Remarque 21. On peut améliorer légèrement le résultat en remplaçant l'hypothèse d'injectivité de la suite a_i (c'est-à-dire $f(i)$) par une hypothèse de C-injectivité avec C une constante fixée (i.e. $\mathrm{Card}(f^{-1}(m)) \leqslant C$ pour tout entier m).

4 Algèbre : Équations fonctionnelles (Erik)

Tous les exercices et solutions sont tirées du polycopié d'équations fonctionnelles fait par Rémi à paraître prochainement sur le site de la POFM.

Le but du cours est de résoudre des équations fonctionnelles classiques où les bons réflexes sont nécessaires : étude de l'injectivité, de la surjectivité, essayer d'égaliser des termes, deviner les solutions, et bien sûr de multiples substitutions.

Une remarque était de faire attention lorsqu'un argument permet de conclure que $f(x)$ ne peut prendre que 2 (ou quelques valeurs) pour chaque x : par exemple $+x$ ou $-x$. On ne peut pas directement en conclure que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$ ou $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x$. En effet, on pourrait encore avoir une fonction (bizarre) qui vaut 1 en 1, mais -2 en 2, $-\pi$ en π, ... On doit donc écarter ces cas à l'aide d'un raisonnement (souvent bien plus simple que tout le travail fourni jusque là).

Exercices

Exercice 1 (BMO 2023)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x))$$

Exercice 2 (Mongolie 2011)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x - y)\left(f(f(x)^2) - f(f(y)^2)\right) = (f(x) + f(y))\,(f(x) - f(y))^2$$

Exercice 4 (Olympic revenge 2002)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \geq 1$:

$$f^n(n) = n + 1$$

où f^n désigne la composée n-ième de f.

Exercice 5 (BMO 2007)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

Exercice 6 (Inde 2013)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x(1 + y)) = f(x)(1 + f(y))$$

Exercice 7 (Iran 2020)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y))$$

Exercice 8 (EGMO 2021)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f\left(xf(x) + y\right) = f(y) + x^2$$

Exercice 9 (BxMO 2025)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(x^2 + f(y)\right) = f(x)^2 - y$$

Exercice 10 (EMC 2024)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$,

$$f(x + yf(x)) = xf(1 + y)$$

Solutions

Exercice 1 (BMO 2023)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x))$$

Solution de l'exercice 1
On commence par traiter à part le cas $f(f(x)) = 0$ pour tout réel x (on comprendra par la suite pourquoi). L'énoncé se réécrit $f(x + f(y)) = 0$ pour tout $x \neq 0$. Si f n'est pas la fonction nulle, on choisit un y tel que $f(y) \neq 0$, et on pose $x = -f(y)$, ce qui nous donne $f(0) = 0$. Mais en posant $y = 0$ on trouve alors que f est la fonction nulle.

On peut désormais supposer que $f(f(x)) \neq 0$ pour un certain x. Mais alors, si a et b sont deux réels tels que $f(a) = f(b)$, alors en remplaçant y par a puis par b successivement, on trouve

$$(a - x)f(f(x)) = xf(x + f(a)) = xf(x + f(b)) = (b - x)f(f(x))$$

On peut bien diviser par $f(f(x))$, et on trouve finalement $a = b$, donc f est injective.

En posant $x = 0$, $y = 1$, on trouve alors $f(f(0)) = 0$. Mais la substitution $y = x \neq 0$ nous indique également que $f(x + f(x)) = 0$. Ainsi, $f(x + f(x)) = f(f(0))$, d'où $f(x) = f(0) - x$ par injectivité (ce résultat est clairement vrai pour $x = 0$ également).

Finalement, les deux solutions possibles sont $f(x) = 0$, et $f(x) = -x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$, et on vérifie réciproquement qu'elles conviennent bien.

Exercice 2 (Mongolie 2011)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Solution de l'exercice 2
On commence par poser $x = 0$, et on obtient $f(f(0)^2 + f(y)) = y$. Ainsi, f est surjective. Si a et b sont deux réels tels que $f(a) = f(b)$, alors $a = f(f(0)^2 + f(a)) = f(f(0)^2 + f(b)) = b$ donc f est injective. On sait désormais que f est bijective.

Soit r le réel tel que $f(r) = 0$. En posant $x = r$, il vient $f(f(y)) = y$ pour tout réel y. Posons maintenant $x = f(z)$, ce qui donne

$$f(f(f(z))^2 + f(y)) = f(z)f(f(z)) + y = zf(z) + y = f(f(z)^2 + f(y))$$

Or f est injective, donc $f(f(z))^2 + f(y) = f(z)^2 + f(y)$, soit finalement $z^2 = f(z)^2$. Ainsi pour tout réel z, $f(z) = \pm z$. En particulier, $f(0) = 0$. Distinguons deux cas selon la valeur de $f(1)$:

Premier cas : si $f(1) = 1$ alors on pose $x = 1$ et on obtient $f(1 + f(y)) = 1 + y$. Si $f(y) = -y$, alors $f(1 + f(y)) = f(1 - y) = \pm(1 - y)$. Mais pour tout $y \neq 0$, $-1 + y \neq 1 + y$ et $1 - y \neq 1 + y$.

Finalement, $f(y) = y$ pour tout réel y. On vérifie aisément que l'identité est solution.

Deuxième cas : si $f(1) = -1$ alors on pose $x = 1$ et on obtient $f(1 + f(y)) = -1 + y$. Le même raisonnement aboutit à $f(y) = -y$ pour tout réel y, et on vérifie à nouveau qu'il s'agit bien d'une solution.

Finalement, les deux seules solutions sont $f(x) = x$ et $f(x) = -x$.

Solution n°2 de l'exercice 2
On commence par quelques substitutions basiques :

— $x = y$ donne $f(x + f(x)) = 0$.
— $x = 0$ donne $f(f(0)) = 0$.
— $x = f(0)$ donne $f(0)f(f(0) + f(y)) = (y - f(0))f(0)$

On distingue donc deux cas : soit $f(0) = 0$, soit $f(f(0) + f(y)) = y - f(0)$.

Si $f(f(0) + f(y)) = y - f(0)$, on pose $y = f(x) + x$, de sorte que $f(y) = 0$. On a alors $f(f(0)) = f(x) + x - f(0)$, ce qui se réécrit $f(x) = -x + f(0) + f(f(0))$. On vérifie réciproquement que toutes les fonctions de la forme $f(x) = -x + c$ avec c une constante réelle sont bien solutions.

On suppose désormais que $f(0) = 0$. En posant $y = 0$, on a $f(f(x)) = -f(x)$. On réécrit l'équation de l'énoncé sous la forme $xf(x + f(y)) = (x - y)f(x)$. On fait à nouveau la même substitution $y = f(z) + z$ avec z un réel quelconque, et il vient

$$xf(x) = (x - z - f(z))f(x) = xf(x) - (z + f(z))f(x)$$

Ainsi, $f(x)(z + f(z)) = 0$, donc soit f est la fonction nulle, soit $f(x) = -x$.

Finalement, les deux solutions sont $f(x) = 0$, et $f(x) = -x + c$ avec $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x - y)\left(f(f(x)^2) - f(f(y)^2)\right) = (f(x) + f(y))\,(f(x) - f(y))^2$$

Solution de l'exercice 3
On devine une identité remarquable déguisée, donc on se doute que les solutions seront les fonctions linéaires. On pose $y = 0$ pour trouver $xf(f(x)^2) = f(x)^3$. Cela va permettre de linéariser l'équation et de la rendre plus jolie. On peut réécrire

$$(x - y)\left(\frac{f(x)^3}{x} - \frac{f(y)^3}{y}\right) = (f(x) + f(y))\,(f(x) - f(y))^2\,.$$

A ce stade, on doit être tentés de développer puisque des termes (notamment ceux en $f(x)^3$ et $f(y)^3$) vont se simplifier. On trouve après simplification

$$xyf(x)f(y)(f(x) + f(y)) = y^2f(x)^3 + x^2f(y)^3. \quad (\star)$$

On constate que cette équation est polynomiale en $f(x)$, donc on fixe $y = 1$ pour ne garder que la variable x et on appelle $f(1) = c$. On obtient en réordonnant les termes :

$$f(x)^3 - cxf(x)^2 - c^2xf(x) + c^3x^2 = 0.$$

Or on veut que $f(x) = cx$ soit solution de notre équation fonctionnelle, donc on peut probablement factoriser par $f(x) - cx$. En effet, cela donne $(f(x) - cx)(f(x)^2 - c^2x) = 0$. Pour $x < 0$, on a $f(x)^2 - c^2x > 0$. Comme ce terme ne peut pas être nul, on trouve $f(x) = cx$ pour tout $x < 0$. A partir de là, la meilleure manière de conclure est en montrant l'imparité de la fonction, ce que l'on fait en remplaçant y par $-x$ dans l'équation $(\star)$. En effet, en factorisant par $(f(x)+f(-x))$ et en regroupant les termes, on trouve $(f(x)+f(-x))(f(x)^2+f(-x)^2) = 0$, donc $f(x) = -f(-x)$.

Les solutions sont donc bien les fonctions linéaires, qui conviennent réciproquement.

Exercice 4 (Olympic revenge 2002)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ vérifiant pour tout $n \geq 1$:

$$f^n(n) = n + 1$$

Solution de l'exercice 4
On commence par montrer par récurrence que $f^{\frac{n(n-1)}{2}}(1) = n$. Si la suite $(f^k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ prend deux fois la même valeur, alors elle est périodique, ce qui est impossible d'après ce qui précède. Donc la suite $(f^{(k)}(1))$ prend une unique fois chaque valeur de $\mathbb{N}^*$. Or on sait que $f^{\frac{n(n-1)}{2}}(1) = n$, donc si k n'est pas de la forme $\dfrac{n(n-1)}{2}$, $f^k(1)$ ne peut pas prendre une valeur entière, impossible.

Exercice 5 (BMO 2007, P4)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

Solution de l'exercice 5
Avec un peu de réflexion et d'expérience, on peut reconnaître quelque chose qui ressemble à une identité remarquable déguisée, le $4f(x)y$ correspondant à deux fois le double produit. Cela marche en effet bien si f est la fonction carré. Un peu de tâtonnement laisse deviner que les solutions sont $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 0$. Cela nous donne envie de poser la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x^2$ pour éliminer les termes parasites. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve simplement $g(g(x) + x^2 + y) = g(g(x) + x^2 - y)$.

Ici, il faut prendre le temps de bien interpréter : cette équation nous indique que la droite d'équation $x = g(z) + z^2$ est un axe de symétrie vertical de g pour toute valeur de z. On se rappelle que $g(z) + z^2 = f(z)$, donc si f n'est pas constante, alors $g(z) + z^2$ prend au moins deux valeurs différentes. La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation, donc le graphe de g est invariant par translation, autrement dit g est périodique. Pour tout y, on a plus précisément $g(y) = g(y + 2(f(x) - f(z))$, en composant les symétries d'axes $f(x)$ et $f(z)$, pour n'importe quels x et z. Prenons le temps d'apprécier toutes les

informations obtenues sans la moindre substitution pour l'instant !

Si on choisit deux nombres a et b, alors $2(f(a) - f(b))$ est une période de g ! On cherche alors quelles valeurs cette différence peut prendre. L'équation de départ est adaptée : si on dispose de x tel que $f(x) \neq 0$, alors en faisant varier y, on obtient que $f(a) - f(b)$ prend toutes les valeurs réelles. Ainsi on a deux cas : soit f est nulle, soit g est constante.

On trouve donc les solutions : $f(x) = 0$ pour tout x et $f(x) = x^2 + c$ pour tout x où c est une constante. On vérifie réciproquement que ces fonctions sont solution.

Exercice 6 (Inde 2013)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x(1 + y)) = f(x)(1 + f(y))$$

Solution de l'exercice 6
La fonction constante nulle est solution, on écarte ce cas. En posant $x = 0$, on obtient $f(0) = 0$, puis en posant $y = -1$, on obtient $f(-1) = -1$. En posant $x = -1$ et $y = -\frac{1}{2}$, on obtient $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$. En posant enfin $x = -\frac{1}{2}$ et $y = 1$, il vient $f(1) = 1$. Puis en $x = 1$, on obtient finalement $f(y+1) = 1 + f(y)$, donc $f(x(y+1)) = f(x)f(y+1)$. Quitte à faire un changement de variable, on a donc que f est multiplicative. L'équation de départ donne alors :

$$f(x + xy) = f(x) + f(x)f(y) = f(x) + f(xy)$$

En faisant varier y, on obtient que f est additive. De plus, comme f est multiplicative, pour $y \geq 0$, on a $f(y) = f(\sqrt{y})^2 \geq 0$. Donc $f(x + y) = f(x) + f(y) \geq f(x)$, donc f est croissante additive avec $f(1) = 1$ donc c'est l'identité, qui convient (d'après l'étude de l'équation de Cauchy).

Exercice 7 (Iran 2020)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y))$$

Solution de l'exercice 7
Le premier bon réflexe est de voir un x dans le membre de droite donc on cherche à montrer que f est injective. Si on suppose $f(x) = f(x')$ et qu'on écrit l'équation fonctionnelle pour x et x', on obtient en faisant la différence que $2x = 2x'$, et donc f est injective. On pose alors $x = 0$ et $y = f(0)$, et on obtient $f(f(f(0))) = 0$. En prenant ensuite $x = f(f(0))$ et $y = 0$, on obtient $f(f(0)) = -2f(f(0))$, donc $f(f(0)) = 0$. En appliquant f des deux côtés, on trouve $f(f(f(0))) = f(0)$, soit finalement $f(0) = 0$ en combinant avec ce qui précède.
On revient à l'équation initiale et on pose $x = 0$. Cela nous donne $f(y) = f(f(y))$, soit $f(y) = y$ par injectivité. On vérifie réciproquement que l'identité est bien solution de l'équation.

Exercice 8 (EGMO 2021, P2)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(xf(x) + y) = f(y) + x^2$$

Solution de l'exercice 8
On commence par montrer que f est surjective, en construisant un antécédent pour chaque rationnel. On sait que $f(0)$ est dans l'image de f, notée $\mathrm{Im}(f)$, et on veut montrer que $f(0)+\frac{p}{q}$ l'est aussi, pour tous $p, q \in \mathbb{Z}^*$.

Déjà, si $r \in \mathrm{Im}(f)$, alors $r+x^2 \in \mathrm{Im}(f)$, pour tout rationnel x, et donc $r+kx^2 \in \mathrm{Im}(f)$ pour tout rationnel x et tout entier $k>0$ par récurrence immédiate. Mais en réécrivant l'équation initiale sous la forme $f(y)=f(xf(x)+y)-x^2$, on peut montrer de même que $r+kx^2 \in \mathrm{Im}(f)$ pour tout rationnel x et tout entier $k<0$. Il ne reste plus qu'à choisir $r=f(0)$, $k=pq \in \mathbb{Z}$ et $x=\frac{1}{q} \in \mathbb{Q}$ pour obtenir que le nombre

$$f(0)+pq\times\left(\frac{1}{q}\right)^2 = f(0)+\frac{p}{q}$$

est bien dans l'image de f, comme recherché. Finalement, f est bien surjective.

On choisit désormais x de sorte que $f(x)=0$ (possible par surjectivité), et on obtient $f(y)=f(y)+x^2$. Ainsi, $x=0$ et donc $f(0)=0$. En posant $y=0$, il vient $f(xf(x))=x^2$. En particulier, on a d'une part $f(f(1))=1$ avec $x=1$, et d'autre part $f(f(1)f(f(1)))=f(f(1))=f(1)^2$ avec $x=f(1)$. Ainsi, $f(1)^2=1$.

Si $f(1)=1$, $x=1$ donne $f(y+1)=f(y)+1$, d'où $f(n)=n$ pour tout entier n par récurrence immédiate. Comme $f(xf(x))=x^2$, on a, avec $y=xf(x)$,

$$f(2xf(x))=f(xf(x)+xf(x))=f(xf(x))+x^2=2x^2$$

et par récurrence, $f(nxf(x))=nx^2$ pour tout entier $n>0$. Il ne reste plus qu'à choisir n de sorte que $nxf(x)$ soit entier, et écrire

$$nx^2=f(nxf(x))=nxf(x)$$

d'où $f(x)=x$ pour tout rationnel x. Le cas $f(1)=-1$ est analogue et donne $f(x)=-x$.

Finalement, les deux solutions sont $f(x)=x$ et $f(x)=-x$, qui conviennent bien.

Exercice 9 (BxMO 2025, P1)
Existe-t-il une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2+f(y))=f(x)^2-y$$

Solution de l'exercice 9
On devine que le terme en $-y$ va poser problème, on s'attendrait plutôt à un $+y$ pour espérer avoir des solutions. Etudions donc le signe de f : en posant $y=0$ et en notant $f(0)=a$, on trouve $f(x^2+a)=f(x)^2 \geqslant 0$, donc f est positive sur $\mathbb{R}_{\geqslant a}$. On pose ensuite $x=\sqrt{|a|}$, ce qui donne :

$$\underbrace{f\Big(|a|+f(y)\Big)}_{\geqslant 0 \text{ pour } y \geqslant a} = \underbrace{f\left(\sqrt{|a|}\right)-y}_{\leqslant 0 \text{ pour } y \text{ grand}}$$

Solution n°2 de l'exercice 9
On va essayer de tirer parti de la formulation de l'énoncé, qui semble suggérer qu'il n'existe pas de telle fonction. Commençons par chercher des propriétés d'une solution éventuelle.
En fixant x, le membre de droite peut prendre n'importe quelle valeur réelle, donc f est surjective. On remarque également que f est injective, car si $f(a) = f(b)$, alors en remplaçant y par a puis par b, on trouve $f(x)^2 - a = f(x)^2 - b$, soit $a = b$. On observe ensuite que le membre de gauche est symétrique en x, donc en remplaçant x par $-x$, on trouve $f(x)^2 - y = f(-x)^2 - y$, donc $f(x) = \pm f(-x)$, mais comme f est injective, on doit avoir $f(x) = -f(-x)$ pour $x \neq 0$. Ainsi, $f(0) = 0$ car 0 doit être atteint, et toutes les autres images sont non nulles par injectivité.

Finalement, en posant $x = 1$ et $y = 0$, on trouve directement $f(1) = 1$ et donc $f(-1) = -1$, mais en prenant $x = 1$ et $y = -1$, cela donne $0 = f(0) = f(1) + 1 = 2$, absurde.

Exercice 10 (EMC 2024, P4)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tout $x, y > 0$:

$$f(x + yf(x)) = xf(1 + y)$$

Solution de l'exercice 10
On essaye de faire une substitution pour laquelle $x + yf(x) = 1 + y$. C'est possible en posant $y = \dfrac{x-1}{1-f(x)}$, à condition que $\dfrac{x-1}{1-f(x)} > 0$. On obtient alors $x = 1$, soit $y = 0$, ce qui contredit notre hypothèse. Ainsi, $\dfrac{x-1}{1-f(x)} \leqslant 0$, donc si $x > 1$, alors $f(x) \geqslant 1$. Comme $1 + y > 1$, on a donc :

$$f(x + yf(x)) = xf(1 + y) \geqslant x$$

En notant $z = x + yf(x)$ et en faisant tendre x vers z on peut montrer que $f(z) \geqslant z$. Formellement, supposons que $f(z) < z$ pour un certain z, et notons $f(z) = z - t$ avec $t > 0$. Alors pour $x = z - t/2$ et $y = \dfrac{t/2}{f(x)}$, on obtient $f(z) \geqslant z - t/2$, contradiction. Ainsi, $\boxed{f(z) \geqslant z}$ pour tout $z > 0$.

Utilisons cette borne sur l'autre membre de l'inégalité :

$$xf(1 + y) = f(x + yf(x)) \geqslant x + yf(x)$$

En divisant par x et en remplaçant $1 + y$ par y, on a donc, pour $y > 1$,

$$f(y) \geqslant 1 + \frac{f(x)}{x}(y - 1)$$

Soit c la plus petite constante telle que $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant c$ pour tout x (cette constante s'appelle la *borne supérieure*, et existe bien : si on pose $y = 1$, on a par exemple $c \leqslant f(2) - 1$ grâce à l'égalité précédente). En choisissant x_n tel que $\dfrac{f(x_n)}{x_n} = c - \dfrac{1}{n}$ (qui existe bien par définition de c), puis en faisant tendre n vers l'infini, on obtient à la limite :

$$f(y) \geqslant 1 + c(y - 1)$$

Il nous vient donc l'envie de réinjecter directement cette inégalité pour voir si on peut l'améliorer à nouveau. Cela donne :

$$xf(1+y) = f(x+yf(x)) \geqslant 1 + c(x+yf(x)-1) \geqslant 1 + c(x+yx-1)$$

En divisant par x et en remplaçant $1+y$ par y, on a donc , pour $y > 1$,

$$f(y) \geqslant cy + \frac{1-c}{x}$$

En faisant tendre x vers l'infini, on obtient finalement $f(y) \geqslant cy$. Mais par définition de c, on avait $f(y) \leqslant cy$, d'où $f(y) = cy$ pour tout $y > 1$. En réinjectant dans l'énoncé et en prenant x suffisamment grand, on trouve $c = 1$ (pour que x soit du même ordre de grandeur que cx).

Reste à traiter l'intervalle $]0, 1]$. Comme $c = 1$, on sait que $f(x) \leqslant x$ par définition de c. Mais on avait prouvé que $f(z) \geqslant z$ pour tout $z > 0$, donc finalement $f(x) = x$ pour tout $x > 0$. Réciproquement, l'identité convient bien.

5 Algèbre : TD de niveau A1/A2 (Hadrien)

Exercices

Exercice 1 (P1 EMC 2023)
Déterminer tous les ensembles de réels S tels que : 1 est le plus petit élément de S, pour tous $x, y \in S$ tels que $x > y$, $\sqrt{x^2 - y^2} \in S$

Exercice 2 (P1 EGMO 2023)
On a $n \geq 3$ réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pour tout $1 \leq i \leq n$ on pose $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i}$ (On définit a_0 comme étant a_n et a_{n+1} comme étant a_1). On suppose que pour tout i et j de 1 à n, on a $a_i \leq a_j$ si et seulement si $b_i \leq b_j$. Montrer que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Exercice 3 (P4 EGMO 2026)
Soit $1 = a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$ une suite de réels telle que $a_n = a_{2n} + a_{2n+1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Pour $r = 2026^{2026}$, montrer que

$$\frac{1}{r} \leq a_r \leq \frac{2}{r+1}.$$

Exercice 4 (A1 2024)
Déterminer tous les réels α tels que, pour tout entier strictement positif n, l'entier

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

est un multiple de n.

Exercice 5 (A1 2023)
Le professeur Chen nourrit ses 100 Pokémon. Chaque Pokémon possède une gamelle dont la capacité est un nombre réel strictement positif de kilogrammes. Le professeur Chen connaît la capacité de chacune des gamelles. La somme des capacités des 100 gamelles est égale à 100 kilogrammes.

Le professeur Chen répartit 100 kilogrammes de nourriture de telle sorte que chaque Pokémon reçoive un nombre entier positif ou nul de kilogrammes de nourriture (cette quantité peut être supérieure à la capacité de sa gamelle).

Le niveau d'insatisfaction d'un Pokémon qui reçoit N kilogrammes de nourriture et dont la gamelle a une capacité de C kilogrammes est défini par

$$|N - C|.$$

Déterminer le plus petit nombre réel D tel que, quelles que soient les capacités des gamelles, le professeur Chen puisse répartir la nourriture de manière que la somme des niveaux d'insatisfaction des 100 Pokémon soit au plus égale à D.

Exercice 6 (A1 2014)
Soit $0 < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$ une suite infinie d'entiers. Montrer qu'il existe un unique entier $n \geqslant 1$ tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}.$$

Exercice 7 (A1 2015)
Considérons une suite $a_1, a_2, \ldots$ de réels strictement positifs satisfaisant

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

pour tout entier $k \geqslant 1$. Montrer que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 8 (P1 EGMO 2016)
Soit n un entier positif impair, et soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\min_{i=1,\ldots,n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leqslant \max_{j=1,\ldots,n} (2x_j x_{j+1})$$

où $x_{n+1} = x_1$.

Exercice 9 (P4 OFM 2026)
Montrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$, pour lequel il existe au moins 2026 triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que

$$a^2 + b^3 + c^4 = n.$$

Exercice 10 (A2 2017)
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n, k$ et M des entiers strictement positifs tels que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = k \qquad \text{et} \qquad a_1 a_2 \cdots a_n = M.$$

Si $M > 1$, démontrer que le polynôme

$$P(x) = M(x+1)^k - (x + a_1)(x + a_2) \cdots (x + a_n)$$

n'admet aucune racine strictement positive.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On note $T = \{x^2 \quad \forall x \in S\}$.
Ainsi 1 est le plus petit élément de T et $\forall a > b$ dans T, $a - b \in T$. Si $\exists a \in T \setminus \mathbb{N}$, alors $a - 1 \in T$ donc par récurrence directe $\{a\} \in T$, ce qui est impossible puisque 1 est le plus petit élément de T. Donc tout les éléments de T sont des entiers plus grands que 1.
De plus, par récurrence directe, si n est dans T alors tout les entiers de 1 à n sont dans T.

D'où les solutions : $S = \{\sqrt{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*\}$ et $S = \{\sqrt{k} \quad \forall k \in \{1, 2, 3, ..., n\}\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ qui, réciproquement, fonctionnent en les vérifiant.

Solution de l'exercice 2
Procédons par l'absurde, on suppose que les réels ne sont pas tous égaux. On pose a_M un max et a_m un min des réels $a_1, \ldots, a_n$. Ainsi $a_M > a_m$, d'où $b_M > b_m$.
Or $b_M = \frac{a_{M-1}+a_{M+1}}{a_M} \leqslant 2 \leqslant \frac{a_{m-1}+a_{m+1}}{a_m} = b_m$: absurde !
Ainsi on a bien $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Solution de l'exercice 3
Montrons par récurrence que $\sum_k^{2k-1} a_k = 1$ pour tout k entier strictement positif.
Initialisation : $k = 1$, $a_1 = 1$
Hérédité : Soit k un entier strictement positif, on suppose que la propriété est vérifiée pour k.
On a donc

$$\sum_{i=k}^{2k-1} a_i = 1$$

Or $a_k = a_{2k} + a_{2k+1}$, d'où

$$1 = a_k + \sum_{i=k+1}^{2k-1} a_i = a_{2k} + a_{2k+1} + \sum_{i=k+1}^{2k-1} a_i = \sum_{i=k+1}^{2k+1} a_i$$

Ainsi pour $k = r$, on a $\sum_{i=r}^{2r-1} a_i = 1$, de plus, par décroissance de la suite, $1 = \sum_{i=r}^{2r-1} a_i \leqslant r \cdot a_r$, d'où $a_r \geqslant \frac{1}{r}$
Ensuite, pour tout k, en réutilisant la décroissance de la suite et en faisant bon usage de la minoration prouvée précédemment

$$1 = \sum_{i=k+1}^{2k+1} a_i = a_{2k+1} + \sum_{i=k+1}^{2k} a_i \geqslant \frac{1}{2k+1} + k a_{2k}$$

D'où $a_{2k} \leqslant \frac{2}{2k+1}$. Enfin, $r = 2026^{2026}$ est pair donc on a bien $a_r \leqslant \frac{2}{r+1}$.

Solution de l'exercice 4
Pour tout α un entier pair la condition est vérifiée car $\lfloor \alpha \rfloor + \cdots + \lfloor n\alpha \rfloor = \alpha(1 + \cdots + n) = n(n+1)\frac{\alpha}{2}$ est divisible par n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que ce sont les seules solutions.

Si α est un entier impair, on a que $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor = 3\alpha$ est impair : α impair n'est pas solution.

Si α n'est pas entier, on pose $\alpha = 2k + x$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$.

Cas 1 : $0 < x < 1$. Soit $m > 1$ le plus petit entier tel que $mx \geq 1$; On remarque que $mx = (m-1)x + x < 1 + 1 = 2$ donc $\lfloor mx \rfloor = 1$. En prenant $n = m$, la somme vaut $\lfloor \alpha \rfloor + \cdots + \lfloor m\alpha \rfloor = \lfloor 2k+x \rfloor + \cdots + \lfloor m(2k+x) \rfloor = 2k(1+\cdots+m) + \lfloor x \rfloor + \cdots + \lfloor mx \rfloor = km(m+1)+1$, ce qui n'est pas divisible par m.

Cas 2 : $-1 < x < 0$. Soit $m > 1$ le plus petit entier tel que $mx < -1$; On remarque que $mx = (m-1)x + x > -1 - 1 = -2$ donc $\lfloor mx \rfloor = -2$. En prenant $n = m$, la somme vaut $\lfloor \alpha \rfloor + \cdots + \lfloor m\alpha \rfloor = \lfloor 2k + x \rfloor + \cdots + \lfloor m(2k+x) \rfloor = 2k(1 + \cdots + m) + \lfloor x \rfloor + \cdots + \lfloor mx \rfloor = km(m+1) - 1 - 1 - \cdots - 1 - 2 = km(m+1) - m - 1$, ce qui n'est pas divisible par m.

Ainsi les solutions sont les entiers pairs.

Solution de l'exercice 5

La réponse est $D = 50$.

Pour la construction : 99 gamelles de capacité $\frac{1}{2}$, et une gamelle de capacité $\frac{101}{2}$, chaque Pokémon a une insatisfaction d'au moins $\frac{1}{2}$ Ainsi la somme des insatisfactions est supérieure 50. D'où $D \geqslant 50$

Maintenant montrons que $D \leqslant 50$.

On note $c_1, \ldots c_{100}$ les capacités des 100 gamelles de telle sorte que $\{c_1\} \leqslant \{c_2\} \leqslant \cdots \leqslant \{c_{100}\}$ (avec$\{x\}$ la partie fractionnaire de x).

On note $k = \{c_1\} + \{c_2\} + \cdots + \{c_{100}\} = c_1 + c_2 + \cdots + c_{100} - \lfloor c_1 \rfloor - \lfloor c_2 \rfloor - \cdots - \lfloor c_{100} \rfloor = 100 - \lfloor c_1 \rfloor - \lfloor c_2 \rfloor - \cdots - \lfloor c_{100} \rfloor$ ce qui est un entier.

Notre stratégie consiste à donner $\lfloor c_i \rfloor$ à la gamelle de capacité c_i pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, 100\}$.

Puis on rajoute 1 à chaque gamelle de capacité c_j pour tout $j \in \{100 - k + 1, \ldots, 100\}$ (ce qui est possible puisque $k \leqslant 100$), ce sont les k gamelles dont la capacité est la plus élevée.

De cette manière, on obtient une insatisfaction totale de

$$\sum_{i=1}^{100-k} \{c_i\} + \sum_{j=100-k+1}^{100} (1 - \{c_j\}) = \sum_{i=1}^{100-k} \{c_i\} + k - \sum_{j=100-k+1}^{100} \{c_j\} = 2 \sum_{i=1}^{100-k} \{c_i\}$$

De plus, par croissance des parties fractionnaires

$$2 \sum_{i=1}^{100-k} \{c_i\} \leqslant \frac{2(100-k)}{100} \sum_{i=1}^{100} \{c_i\} = \frac{(100-k)k}{50} \geqslant 50$$

D'où $D \leqslant 50$, ainsi $D = 50$.

Solution de l'exercice 6

On considère la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $b_i = (a_i - a_1) + \cdots + (a_2 - a_1)$ pour tout entier i strictement positif. On cherche un n tel que

$$a_n < \frac{a_0 + \cdots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}$$

$$\iff (n-1)a_n - (a_{n-1} + \cdots + a_1) < a_0 \leqslant na_{n+1} - (a_n + \cdots + a_1)$$

$$\iff b_n < a_0 \leqslant b_{n+1}$$

Or $b_1 = 0 < a_0$ et la suite est strictement croissante et entière. Ainsi on peut prendre n comme étant le plus grand entier tel que $b_n < a_0$ et on aura $b_{n+1} \geqslant a_0$.

Solution de l'exercice 7
On remarque que l'on peut réécrire la relation de récurrence comme :

$$\frac{k}{a_{k+1}} \leqslant a_k + \frac{k-1}{a_k}$$

pour tout entier $k \geqslant 1$.

Ensuite, procédons par récurrence pour montrer l'exercice, on notera $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ et on montrera que $s_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 2$.
Initialisation : $a_1 + a_2 \geqslant a_1 + \frac{1}{a_1} \geqslant 2$ par IAG.
Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ un entier. On suppose que $s_n \geqslant n$. En sommant les relations de récurrence pour les entiers entre 1 et n on obtient :

$$\frac{n}{a_{n+1}} \leqslant s_n \iff a_{n+1} \geqslant \frac{n}{s_n}$$

Enfin

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqslant s_n + \frac{n}{s_n} = n \cdot \frac{s_n}{n} + \frac{n}{s_n} \geqslant (n+1)\left(\frac{s_n^n}{n^n}\right)^{\frac{1}{n+1}} \geqslant n+1$$

Par IAG et en utilisant $s_n \geqslant n$.

Solution de l'exercice 8
On procède par l'absurde, on suppose ainsi que $\min_{i=1,\dots,n}(x_i^2 + x_{i+1}^2) > \max_{j=1,\dots,n}(2x_j x_{j+1})$ donc que $x_i^2 + x_{i+1}^2 > 2x_j x_{j+1}$ pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$.

On remarque que s'il existe $k \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_k \geqslant x_{k+1} \geqslant x_{k+2}$ alors $2x_k x_{k+1} \geqslant x_{k+1}^2 + x_{k+2}^2$: contradiction !
De même si $x_k \leqslant x_{k+1} \leqslant x_{k+2}$.

Ainsi pour tout entier k, a_k est soit strcitement plus grand que a_{k-1} et a_{k+1} soit strictement plus petit. Donc, si $a_k > a_{k+1}$ alors $a_{k+1} < a_{k+2}$ et si $a_k < a_{k+1}$ alors $a_{k+1} > a_{k+2}$. On suppose, sans perte de généralité, que $a_n < a_1 > a_2$, par récurrence directe et puisque n est impair, on obtient $a_n > a_1$: contradiction !

Solution de l'exercice 9
Pour résoudre cet exercice qui peut sembler être un problème d'arithmétique, il faut en fait ne pas vouloir utiliser des arguments d'arithmétique.

Pour ce faire, posons $f : (a, b, c) \longmapsto a^2 + b^3 + c^4$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, interressons-nous aux valeurs de $f(a, b, c)$ pour $a \in \{1, \dots, m^6\}$, $b \in \{1, \dots, m^4\}$ et $c \in \{1, \dots, m^3\}$.

$f(a, b, c)$ peut prendre des valeurs entières de 3 à $3m^{12}$, soit au plus $3m^{12}$ valeurs différentes. Mais il y a exactement $m^6 \cdot m^4 \cdot m^3 = m^{13}$ antécédents possibles. Ainsi, par principes

des tiroires, on compte au moins $\frac{m^{13}}{3m^{12}} = \frac{m}{3}$ triplets (a, b, c) qui ont la même image par la fonction f.

Enfin, il suffit de prendre $m = 2026 \cdot 3$ pour obtenir la bonne borne.

Solution de l'exercice 10
Cet exercice peut sembler un peu compliqué car il met en jeux un polynôme et beaucoup de variables avec des conditions étranges, mais il s'agit en fait d'une simple inégalité :

En effet l'énoncé revient à montrer que $M(x+1)^k < (x+a_1)\dots(x+a_n)$ ou que $M(x+1)^k > (x+a_1)\dots(x+a_n)$ pour tout réel $x > 0$. Dans notre cas on montrera que $M(x+1)^k < (x+a_1)\dots(x+a_n)$

Soit $1 \leqslant i \leqslant n$ un entier, on remarque que l'on peut réécrire $x + a_i = x + 1 + \cdots + 1$ avec a_i fois le chiffre 1. Par IAG, $x + a_i = (x+1) + 1 \cdots + 1 \geqslant a_i(x+1)^{\frac{1}{a_i}}$.

De plus, $M > 1$ donc il existe un $a_j > 1$. Ainsi l'inégalité $x + a_j \geqslant a_j(x+1)^{\frac{1}{a_j}}$ admet un cas d'égalité si et seulement si $x + 1 = 1 \implies x = 0$ ce qui est impossible, d'où $x + a_j > a_j(x+1)^{\frac{1}{a_j}}$.

En multipliant nos inégalités pour tout i on obtient

$$(x+a_1)\dots(x+a_n) > a_1a_2\dots a_n(x+1)^{\frac{1}{a_1}+\dots\frac{1}{a_n}} = M(x+1)^k$$

comme voulu (on a une inégalité stricte car tout est strictement positif et on a une inégalité stricte pour a_j).

6 Arithmétique : Divisibilité (Hugo et Serge)

Cours

L'objectif de ce TD est de savoir comment exploiter une hypothèse de divisibilité dans un problème avancé de de théorie des nombres. Signalons une liste de conseils pour cela :

— Écrire le plus de divisibilités (qui ont une chance d'être intéressantes) possibles : il ne faut pas hésiter en trouver beaucoup tout en faisant attention à ne pas s'éparpiller trop longtemps non plus.

— Pour cela, il faut faire des **combinaisons linéaires** avec des coefficients. De façon plus explicite, penser que si $a \mid b$ alors $a \mid au + bv$ pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$.

— Un autre outil très utile est le **lemme de Gauss** car il permet de se débarrasser d'un facteur potentiellement grand (voir la remarque sur la taille). Dans ce but, rappelons que si $a \wedge b = 1$ alors $a \wedge (ka + b) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

— Il est acceptable d'augmenter le degré des expressions si cela permet d'éliminer des termes d'une part et d'un mettre un en facteur d'autre part car ce dernier pourra disparaître grâce au lemme de Gauss.

— Penser à des **arguments de taille** : si $a \mid b$ et $|b| < a$ alors nous pouvons en déduire que $b = 0$ ce qui est une information très forte. Également, les inégalités sur les entiers « font des sauts » : si $b > a$ alors $b \geqslant a + 1$ pour $a, b \in \mathbb{Z}$, de même si $a \mid b$ et $b > ka$ alors $b \geqslant (k + 1)a$ pour $a, b, k \in \mathbb{N}^*$.

— Si l'on est bloqué et que l'on a pas encore pensé au **PGCD** et à la **division euclidienne** : y penser.

— Ne pas hésiter à changer de variables, ou à en introduire de nouvelles. Par exemple, si $a \mid b$, on peut poser $k = \frac{b}{a}$.

— Garder la foi et faire de preuve de **persévérance** : tous les exercices ne sont pas jolis, il peut y avoir plusieurs étapes et des disjonctions de cas. À la fin du problème, il reste souvent à vérifier les petits cas, cela peut parfois être fastidieux et pénible mais il faut le faire.

— On pense toujours à bien **vérifier ses solutions** à la fin si l'on n'a pas raisonné par équivalence (et on raisonne très rarement par équivalence sur ce genre de problèmes)

Exercices

Exercice 1
Soit $a, b, n \in \mathbb{N}^*$ avec $n > 1$, montrer que $n^a - 1$ divise $n^b - 1$ si et seulement si a divise b.

Exercice 2 (JBMO 2026 P2)
Déterminer toutes les paires (a, b) d'entiers strictement positifs telles que $a + 1$ divise $b + 2$ et b divise $2a^2$.

Exercice 3 (IMO SL 2021 N1)
Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que a^2+b+3 ne soit divisible par aucun cube de nombre premier et :

$$\frac{ab+3b+8}{a^2+b+3}=n$$

Exercice 4 (APMO 2022 P1)
Trouver toutes les paires (a,b) d'entiers strictement positifs telles que a^3 est un multiple de b^2 et $b-1$ est un multiple de $a-1$.

Exercice 5 (PAMO 2023 P2)
Déterminer tous les entiers strictement positifs et premiers entre eux m,n tels que m^3+n^3 divise $m^2+20mn+n^2$.

Exercice 6 (BMO SL 2020 N1)
Trouver tous les $n\in\mathbb{N}^*$ tels qu'il existe $a,b\in\mathbb{N}$ tels que $\frac{a^2+n^2}{b^2-n^2}$ soit un entier positif.

Exercice 7 (IMO SL 2016 N4)
Soit n,m,k et l des entiers strictement positifs avec $n\neq 1$ tels que n^k+mn^l+1 divise $n^{k+l}-1$.
Montrer que l'une des 2 propositions suivantes est vraie :
(i) $m=1$ et $l=2k$;
(ii) $l|k$ et $m=\frac{n^{k-l}-1}{n^l-1}$

Exercice 8 (BMO 2024 P3)
Soit $a,b\in\mathbb{N}^*$ distincts tels que 3^a+2 divise 3^b+2. Prouver que $a^2<b$.

Hors sujet

Exercice 9 (IMO 2023 P1)
Trouver tous les entiers n non premiers tels que si les diviseurs de n sont $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$ alors pour tout $i\in[\![1,k-2]\!]$, d_i divise $d_{i+1}+d_{i+2}$

Exercice 10 (IMO SL 2024 N1)
Trouver tous les entiers $n\in\mathbb{N}^*$ tels que pour tout diviseur positif d de n, $d+1$ est soit premier, soit un diviseur de n.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Si $b = ak$ on sait que $n^b - 1 = (n^a)^k - 1^k$ donc est divisible par $n^a - 1$.

Supposons $n^a - 1 \mid n^b - 1$ et posons alors $b = aq + r$ la division euclidienne de b par a. Nous savons par le cas précédent que $n^a - 1 \mid n^{aq} - 1 \mid n^b - n^r$, Ainsi, $n^a - 1 \mid n^r - 1$. Or, $r < a$ donc $0 \leqslant n^r - 1 < n^a - 1$ et nécessairement $n^r - 1 = 0$ donc $r = 0$ et $a \mid b$.

Solution de l'exercice 2
Nous voudrions effectuer des combinaisons linéaires pour exploiter les divisibilités. Pour cela, il nous faut une équation entre a et b. Nous allons donc poser $k = \frac{b+2}{a+1} \in \mathbb{N}^*$ de sorte que $b = k(a+1) - 2 = ka + k - 2$.

Alors, $ka + k - 2 \mid 2a^2$, essayons de faire partir le terme de plus haut degré, $2a^2$. On a $b \mid 2ka^2$ et $b \mid 2ka^2 + 2ak - 4a$, ainsi :

$$b \mid 2ak - 4a$$

Nous pouvons alors recommencer et éliminer $2ak$ puisque $b \mid 2ak + 2k - 4$, ainsi :

$$b \mid 2k + 4a - 4$$

Or $a \geqslant 1$ et $k > 0$ donc $2k + 4a - 4 > 0$ et nous en déduisons :

$$b = ak + k - 2 \leqslant 2k + 4a - 4 \quad ie \quad k(a-1) \leqslant 4a - 2$$

Supposons alors $a > 1$, nous avons $k \leqslant \frac{4a-2}{a-1} = 4 + \frac{2}{a-1}$. Ainsi, si $a > 3$ nous avons $k < 5$ donc $k \leqslant 4$.

Nous procédons alors par disjonction sur la valeur de k en supposant $a \geqslant 4$ (nous traiterons après les cas $a \leqslant 3$ mais cela sera aisé car $b \mid 2a^2$ donc il n'y aura qu'un nombre fini de b possibles) :

— $k = 1$: alors $b = a - 1 \mid 2a^2$ mais a et $a - 1$ sont premiers entre eux donc par le lemme de Gauss $a - 1 \mid 2$ et $a \leqslant 3$, ce cas est donc couvert par la suite

— $k = 2$: alors $b = 2a$. On vérifie alors que les couples $(a, 2a)$ sont solutions pour tout $a \in \mathbb{N}^*$.

— $k = 3$: alors $b = 3a + 1$ est premier avec a mais divise $2a^2$, donc $3a + 1$ divise 2 par le lemme de Gauss, absurde car $a \geqslant 1$

— $k = 4$: alors $b = 4a + 2$ et $2(2a + 1) \mid 2a^2$ donc $2a + 1 \mid a^2$ mais a et $2a + 1$ sont premiers entre eux donc $2a + 1 \mid 1$, absudre car $a > 0$.

Ainsi, pour $a \geqslant 4$, toutes les solutions sont de la forme $(a, 2a)$ et elles conviennent.
Traitons alors les cas $a \leqslant 3$:

— $a = 1$: alors $b \mid 2$ et $2 \mid b + 2$ donc $2 \mid b$ et $b = 2$. On trouve le couple $(1, 2)$, on sait déjà qu'il convient

— $a = 2$: alors $b \mid 8$ donc $b \in \{1, 2, 4, 8\}$ mais aussi $3 \mid b + 2$ donc $b \in \{1, 4\}$. Le couple $(2, 4)$ a déjà été vérifié, le couple $(2, 1)$ convient.

— $a = 3$: alors $b \mid 18$ donc $b \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ et $4 \mid b+2$ donc $b \in \{2, 6, 18\}$. Le couple $(3, 6)$ a déjà été vérifié. Les couples $(3, 2)$ et $(3, 18)$ conviennent.

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\{(a, 2a)/a \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2,1),(3,2),(3,18)\}$$

Solution n°2 de l'exercice 2
Une autre approche est de remarquer que si l'on exclut le cas où $a+1 = b+2$, on a $2(a+1) \leq b+2$, i.e. $b \geq 2a$.
En cherchant d'autre divisibilités, on remarque également que comme $b|2a^2$, on a $a+1|\frac{2a^2}{b}(b+2) = 2a^2 + \frac{4a^2}{b}$. Or $a^2 \equiv 1 \pmod{a-1}$. Donc $a+1|\frac{4a^2}{b}+2$. Cette divisibilité ressemble fortement à $a+1|b+2$.
Comme au début, en excluant le cas $a+1 = \frac{4a^2}{b}+2$, on a $\frac{4a^2}{b} \geq 2a$ et donc $b = 2a$.
Ainsi, on obient les solutions $(a, 2a)$ où $a \in \mathbb{N}$.
Reste à traiter à part le cas $a+1 = b+2$ i.e. $b = a-1$. Alors $a-1|2a^2$. Comme $a^2 \equiv 1 \pmod{a-1}$, $a-1|2$. Donc $a = 2$ ou $a = 3$ ce qui donne les solutions $(2,1)$ et $(3,2)$. Les deux conviennent après vérification.
De même, si $a+1 = \frac{4a^2}{b}+2$, on a $b = \frac{4a^2}{a-1} \in \mathbb{N}$. Donc $a-1|4$ comme précédemment et on obtient les solutions $(2,16),(3,18)$ et $(5,25)$. Après vérification, seul $(3,18)$ marche.
Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\{(a, 2a)/a \in \mathbb{N}^*\} \cup \{(2,1),(3,2),(3,18)\}$$

Solution de l'exercice 3
L'idée est de travailler avec l'hypothèse inhabituelle de l'énoncé, à savoir que a^2+b+3 n'est pas divisible par un cube. Cela nous donne envie de faire apparaître des cubes divisibles par cette quantité, pour cela on va travailler modulo a^2+b+3. On sait que $b \equiv -(a^2+3)$, donc on peut remplacer dans la relation de l'énoncé, ce qui donne :

$$ab+3b+8 \equiv -a(a^2+3) - 3(a^2+3) + 8 \equiv -(a^3+3a^2+3a+1) \equiv -(a+1)^3$$

On sait donc que $a^2+b+3 \mid (a+1)^3$, ce qui implique que chaque diviseur premier p de a^2+b+3 divise $a+1$, donc apparaît avec valuation au moins 2 dans $(a+1)^2$. Mais $v_p(a^2+b+3) \leqslant 2$ par hypothèse, donc $a^2+b+3 \mid (a+1)^2$.

On remarque alors que $0 < (a+1)^2 < 2(a^2+b+3)$ (car $2a \leqslant a^2+1$) donc $(a+1)^2 = a^2+b+3$, ou encore $b = 2a-2$ et en reportant dans l'énoncé, on obtient $n = 2$.

Réciproquement, on vérifie que pour $a = 2$ donc $b = 2$, $a^2+b+3 = 9$ n'est divisible par aucun cube différent de 1 et que $\frac{ab+3b+8}{a^2+b+3} = \frac{18}{9} = 2$

Solution n°2 de l'exercice 3
On présente un autre chemin de pensée pour aboutir au même résultat.

Le point de départ est cette fois de remarquer que le numérateur s'écrit $b+C$ où C ne fait pas intervenir b. Ainsi, avec des combinaisons linéaires, on peut éliminer n'importe quelle expression en b. Ainsi, nous avons :

$$a^2+b+3 \mid (ab+3b+8) - (a+3)(a^2+b+3) = -a^3-3a^2-3a-1 = -(a+1)^3$$

On conclut de la même façon que précédemment.

Solution de l'exercice 4
On remarque d'abord que si $b = 1$, tous les entiers a conviennent. On suppose donc $b > 1$. Alors, nous avons $a - 1 \leqslant b - 1$ donc $a \leqslant b$.

Posons $k = \frac{a^3}{b^2} \leqslant a$ de sorte que $a^3 = kb^2$. Alors, nous savons que $a - 1 \mid a^3 - 1 = kb^2 - 1$. Or par hypothèse, $b \equiv 1\ [a-1]$ donc $b^2 \equiv 1\ [a]$. Ainsi, $a - 1$ divise $k - 1$.

Si $k \neq 1$ alors $k - 1 \geqslant a - 1$ et $k \geqslant a$. Par double inégalité, nous avons $k = a$ donc $a = b$. On vérifie directement que (a, a) est solution.

Si $k = 1$, alors $a^3 = b^2$. Soit p un nombre premier, b^2 est un cube donc $3 \mid 2v_p(b)$ et ainsi $3 \mid v_p(b)$. Ainsi $b = c^3$ pour un $c \in \mathbb{N}^*$. Alors $a = c^2$ et $c^2 - 1 \mid c^3 - 1$. Or, $c + 1 \mid c^3 + 1$ et $c + 1 \mid c^2 - 1$, donc $c + 1 \mid 2$ et $c = 1$, donc $b = 1$ ce que nous avions exclu.

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\{(a, 1), (a, a)/a \in \mathbb{N}^*\}$$

Solution n°2 de l'exercice 4
La solution précédente est assez courte et contient peu de calcul mais elle nécessite de l'astuce. Nous présentons aussi une preuve bien moins élégante mais plus « automatique, mécanique » :

Devant un problème de la forme $A \mid B$, nous avons envie de retirer des multiples de A à B pour obtenir si possible $A \mid C$ avec C « petit. » Pour cela, il faut que A fasse intervenir les variables avec des degrés inférieurs à ceux de B. Nous sommes donc plutôt tenté de paramétrer selon $k = \frac{b-1}{a-1}$ parce que cela nous permet d'exprimer b de façon affine en a. On suppose donc $a > 1$ pour l'instant.

Nous avons $b = ka - k + 1$, b^2 comporte trop de termes et à des degrés trop divers, nous allons donc plutôt nous contenter de travailler avec b.

Nous avons $b \mid a^3$, nous voulons obtenir un multiple de b le plus petit possible. Éliminons donc les termes degré par degré (nous écrivons à droite des multiples de b et à chaque trait horizontal nous faisons la différence des deux multiples précédents) :

b	a^3		
	ka^3		on multiplie par k
	$ka^3 - ka^2 + a^2$	$(= a^2 b)$	pour pouvoir éliminer a^3
	$ka^2 - a^2$		
	$ka^2 - ka + a$	$(= ab)$	on élimine a^2
	$-a^2 + ka - a$		
	$-ka^2 + k^2 a - ka$		on multiplie par k
	$-ka^2 + ka - a$	$(= -ab)$	pour pouvoir éliminer a^2
	$k^2 a - 2ka + a$		
	$k^2 a - k^2 + k$	$(= kb)$	on élimine $k^2 a$
	$k^2 - 2ka + a - k$		
	$-2ka + 2k - 2$	$(= -2b)$	on élimine ka
	$k^2 - 3k + a + 2$		

Nous décidons de nous arrêter ici car $b \leqslant a^{\frac{3}{2}}$ et $k \approx \frac{b}{a} \leqslant \sqrt{a}$. Ainsi, le dernier multiple $B := k^2 - 3k + a + 2$ auquel nous sommes parvenu ne comporte que des termes d'ordre inférieur ou égal à a, or $b \approx ka$ est d'un ordre supérieur.

La question se pose de savoir si $B > 0$, cela est le cas si $k \geqslant 3$ car alors $k^2 - 3k \geqslant 0$ et $a + 2 > 0$. Nous supposons donc $k \geqslant 3$.

Alors, nous savons que $B \geqslant b$ c'est-à-dire $k^2 - 3k + a + 2 \geqslant ka - k + 1$, en réarrangeant, nous obtenons :

$$k^2 - k(a+2) + a + 1 \geqslant 0 \quad \textit{i.e.} \quad (k-1)(k-(a+1)) \geqslant 0$$

Puisque $k \geqslant 3$, nous en déduisons $k \geqslant a + 1$, donc $k(a-1) \geqslant a^2 - 1$ et $b \geqslant a^2$. Alors $a^3 \geqslant b^2 \geqslant a^4$, contradiction car nous avons pris $a > 1$.

Ainsi, nous avons montré que $a = 1$ ou $k < 3$, étudions les cas restants :

— Si $k = 0$ alors $b = 1$. On vérifie facilement alors que tout a convient.

— Si $k = 1$ alors $a = b$ et on vérifie que tous les couples (a, a) conviennent

— Si $k = 2$ alors $b = 2a - 1$ et b est premier avec a, or $b \mid a^3$, donc $b \mid 1$ et $b = 1$ et $a = 1$, cette solution a déjà été identifiée au premier point.

— Si $a = 1$ alors $b \mid 1$ et on retrouve le premier point.

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\{(a, 1), (a, a) / a \in \mathbb{N}\}$$

Solution de l'exercice 5

Soit m, n solution, on sait que $m + n \mid m^3 + n^3$. On peut alors éliminer les termes en m^2 et n^2 :

$$m + n \mid m^2 + 20mn + n^2 - (m+n)^2 = 18mn$$

Or $m + n$ et m sont premiers entre eux, de même que $m + n$ et n. Ainsi, par le lemme de Gauss $m + n \mid 18$.

Nous savons aussi que $m^2 - mn + n^2 \mid m^3 + n^3$ et donc :

$$m^2 - mn + n^2 \mid m^2 + 20mn + n^2 - (m^2 - mn + n^2) = 21mn$$

Or, de même, $\mathrm{PGCD}(m^2 - mn + n^2, m) = \mathrm{PGCD}(n^2, m) = 1$ et on a la même chose en remplaçant m par n. Le lemme de Gauss nous indique donc que $m^2 - mn + n^2 \mid 21$.

Chacun des deux résultats précédents serait suffisant pour ramener l'exercice à un traitement des petits cas, nous avons présenté les deux pour montrer les différentes solutions possibles et pour rendre la vérification plus rapide.

Ainsi, $m + n \in \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ et m, n sont premiers entre eux. Sans perte de généralité, disons que $m \geqslant n$

— $m + n = 1$ n'est pas possible car $m, n \geqslant 1$.

— $m + n = 2$: alors $m = n = 1$ et on a bien $m^2 - mn + n^2 = 1 \mid 21$

— $m + n = 3$ alors $(m, n) = (2, 1)$ et on a bien $m^2 - mn + n^2 = 3 \mid 21$

— $m + n = 6$ alors $(m, n) \in \{(5, 1), (4, 2), (3, 3)\}$ mais les deux dernières possibilités ne vérifient pas $\mathrm{PGCD}(m, n) = 1$. Pour la première on a bien $25 - 5 + 1 = 21 \mid 21$.

— $m + n = 9$ alors $(m, n) \in \{(8, 1), (7, 2), (6, 3), (5, 4)\}$. On exclut de même le couple $(6, 3)$ et on a $64 - 8 + 1 = 57 \nmid 21$; $49 - 14 + 4 = 39 \nmid 21$ mais $25 - 20 + 16 = 21 \mid 21$

— $m+n=18$. Or $m+n$ est premier avec m donc m est premier avec 18 et $m+n \leqslant 2m$ donc $17 \geqslant m \geqslant 9$ et on a $(m,n) \in \{(17,1),(13,5),(11,7)\}$. Remarquons aussi que $m^2-mn+n^2=(m-n)^2+mn \leqslant 21$ donc $m-n \leqslant 4$ ce qui exclu les deux premiers cas et pour le dernier $mn=77>21$.

Ainsi, les seules solutions possibles sont $(1,1),(2,1),(5,1),(5,4)$ (et leur symétrique) on les vérfie enfin :

— $1+1=2 \mid 1+20+1=22$ donc $(1,1)$ est bien solution

— $1+8=9 \mid 1+40+4=45$ donc $(2,1)$ et $(1,2)$ sont bien solutions

— $5^3+1=126 \mid 25+100+1=126$ donc $(5,1)$ et $(1,5)$ sont bien solutions

— $5^3+4^3=189$ mais $25+20\times 20+16=441$ et $189 \nmid 441$ (on a $189\times 2<400<441$ et $189\times 3>450>441$).

L'ensemble des solutions est donc :

$$\{(1,1),(2,1),(1,2),(5,1),(1,5)\}$$

Solution de l'exercice 6
Remarquons que si n convient avec (a,b), alors $(kn$ convient avec (ka,kb). En testant les petits cas, on remarque que $n=2$ fonctionne en prenant $a=4$ et $b=3$, ainsi, nous avons montré que tous les n pairs conviennent. Montrons maintenant que ce sont les seuls.

Soit n impair et $a,b \in \mathbb{N}$ avec $b>n$. Supposons par l'absurde que b^2-n^2 divise a^2+n^2.

— Si b est impair, alors $b^2-n^2 \equiv 0\ [4]$, donc $4 \mid a^2+n^2$ mais n est impair, donc a aussi et $a^2+n^2 \equiv 2\ [4]$, contradiction

— Si b est pair, alors $b^2-n^2 \equiv -1\ [4]$, donc b^2-n^2 admet nécessairement un facteur premier $p \equiv -1\ [4]$. Alors $p \mid a^2+n^2$ *i. e.* $a^2 \equiv -n^2\ [p]$, donc si $p \nmid n$, on aurait $(an^{-1})^2 \equiv -1\ [p]$ avec n^{-1} un inverse de n modulo p. Or $p \equiv -1\ [4]$, donc -1 n'est pas un résidu quadratique modulo p, contradiction.
Ainsi, $p \mid n$ or $p \mid a^2+n^2$ donc $p \mid a$; de plus, $p \mid b^2-n^2$ donc p divise b. Alors $(\frac{n}{p},\frac{a}{p},\frac{b}{p})$ est un nouveau triplet solution avec toujours $\frac{n}{p}$ impair, $\frac{b}{p}$ pair (car $p \neq 2$) et $\frac{b}{p}>\frac{n}{p}$. Par descente infinie, on conclut qu'il n'y a pas de solutions de cette forme.

Ainsi, les n solutions sont biens les entiers pairs.

Solution de l'exercice 7
On distingue deux cas :

— **Si** $\ell \leqslant k$ **:** On a

$$n^k+mn^\ell+1 \mid n^{k+\ell}-1+n^k+mn^\ell+1=n^\ell(n^k+n^{k-\ell}+m) \quad \Longrightarrow \quad n^k+mn^\ell+1 \mid n^k+n^{k-\ell}+m.$$

où on a utilisé le lemme de Gauss puisque n^ℓ est premier avec $n^k+mn^\ell+1$. Une autre combinaison linéaire donne

$$n^k+mn^\ell+1 \mid n^k+n^{k-\ell}+m-(n^k+mn^\ell+1)=n^{k-\ell}+m-mn^\ell-1.$$

Or $n^{k-\ell}+m < n^k+mn^\ell+1$ et $mn^\ell+1 < n^k+mn^\ell+1$, donc $0 \leqslant |n^{k-\ell}+m-mn^\ell-1| < n^k+mn^\ell+1$. Il vient que $\boxed{n^{k-\ell}+m=mn^\ell+1}$, ce qui se réécrit

$$m=\frac{n^{k-\ell}-1}{n^\ell-1}.$$

Cette fraction est entière, donc $n^\ell-1 \mid n^{k-\ell}-1$. Or $n^a-1 \mid n^b-1$ seulement si $a \mid b$, donc $\ell \mid k-\ell$ et $\boxed{\ell \mid k}$.

— **Si $\ell > k$:** On a cette fois-ci

$$n^k+mn^\ell+1 \mid n^{k+\ell}-1+n^k+mn^\ell+1 = n^k(n^\ell+mn^{\ell-k}+1) \quad \Longrightarrow \quad n^k+mn^\ell+1 \mid n^\ell+mn^{\ell-k}+1.$$

Cette divisibilité implique

$$n^k+mn^\ell+1 \leqslant n^\ell+mn^{\ell-k}+1 \quad \Longleftrightarrow \quad (m-1)n^\ell+n^k \leqslant mn^{\ell-k}.$$

Si $m-1 \geqslant 1$, alors $(m-1)n^\ell > (m-1)n^{\ell-k}$. Le nombre $(m-1)n^\ell$ est de plus un multiple de $n^{\ell-k}$, donc on récupère $(m-1)n^\ell \geqslant mn^{\ell-k}$. Ainsi, $(m-1)n^\ell+n^k > (m-1)n^\ell \geqslant mn^{\ell-k}$, ce qui contredit l'inégalité donnée. On a donc $\boxed{m=1}$.

Si $m=1$, la divisibilité ci-dessus devient

$$n^k+n^\ell+1 \mid n^\ell+n^{\ell-k}+1 \quad \Longrightarrow \quad n^k+n^\ell+1 \mid n^{\ell-k}-n^k.$$

Comme $0 < n^{\ell-k}, n^k < n^k+n^\ell+1$, on déduit que $0 < |n^{\ell-k}-n^k| < n^k+n^\ell+1$ et $n^{\ell-k}=n^k$, ce qui conduit à $\boxed{\ell=2k}$.

Ceci réalise les solutions de l'exercice.

Solution de l'exercice 8

Remarquons immédiatement que $b \geqslant a$ et même $b > a$ puisque $b \neq a$.

On raisonne modulo $A=3^a+2$, notre objectif est de montrer que A divise des nombres les plus petits possibles. On a $3^a \equiv -2\ [A]$, afin de diminuer l'exposant, nous allons remplacer le plus de fois possible 3^a par -2. Posons donc $b=aq+r$ la division euclidienne de b par a, on a donc $q \geqslant 1$ et $0 \leqslant r \leqslant a-1$.

Nous avons alors :

$$-2 \equiv 3^b \equiv (3^a)^q \times 3^r \equiv (-2)^q 3^r\ [A].$$

Or 2 est premier avec A, nous avons donc $1 \equiv (-2)^{q-1}3^r$. Nous pouvons encore diminuer les nombres en jeu en remplaçant 3^r par $3^a \equiv -2$ au prix d'une multiplication par 3^{a-r}. Nous avons donc :

$$3^{a-r} \equiv (-2)^{q-1} \times 3^a \equiv (-2)^q\ [A]$$

Ainsi, $A \mid 3^{a-r}-(-2)^q$. Or $q \geqslant 1$ donc $3^{a-r} \neq (-2)^q$, nous en déduisons donc :

$$3^a+2 \leqslant \left|3^{a-r}-(-2)^q\right| \leqslant 3^{a-r}+2^q$$

Distinguons alors deux cas :

— $r \geqslant 1$ alors $3^{a-r} \leqslant 3^{a-1}$ donc l'inégalité précédente donne : $3^a + 2 \leqslant 3^{a-1} + 2^q$ donc $2(3^{a-1}+1) \leqslant 2^q$ et ainsi $2^{q-1} > 3^{a-1}$, nous en déduisons donc $q-1 \geqslant a-1$ et donc $q \geqslant a$ et $b \geqslant aq+1 \geqslant a^2+1 > a^2$.

— $r = 0$, alors nous avions déjà $1 \equiv (-2)^{q-1}3^r$ et 3^r est assez petit. Nous avons donc $A \mid (-2)^{q-1} - 1$. Si $q = 1$ alors $a = b$ ce qui est exclu, donc $(-2)^{q-1} \neq 1$ et nous avons alors :

$$3^a + 2 \leqslant |(-2)^{q-1} - 1| \leqslant 2^{q-1} + 1$$

Ainsi, $2^{q-1} > 3^a$ et nous en déduisons $q - 1 \geqslant a$, donc $q > a$ et $b = aq > a^2$.

Solution de l'exercice 9

Montrons qu'il s'agit des puissances de nombres premiers. On vérifie tout d'abord que ces entiers sont bien solutions du problème. En effet, si $n = p^k$ avec p un nombre premier et $r \geqslant 2$, on a $d_i = p^i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On vérifie que si $i \leqslant k-2$,

$$d_i = p^i \mid p^{i+1} + p^{i+2} = d_{i+1} + d_{i+2}.$$

Montrons à présent qu'il s'agit des seules solutions. L'idée est que si d_i, d_{i+1} et d_{i+2} sont trois diviseurs consécutifs de n, $n/d_{i+2}, n/d_{i+1}$ et n/d_i le sont également.

On observe que $d_{k-2} \mid d_{k-1} + d_k - n = d_{k-1}$ donc $d_{k-2} \mid d_{k-1}$. Ainsi, $d_2 = n/d_{k-1} \mid n/d_{k-2} = d_3$. A partir de là, on peut montrer de proche en proche que $d_2 \mid d_i$ pour tout i, ce que nous faisons ci après par récurrence double.

Initialisation : Celle-ci a déjà été faite au paragraphe précédent, puisqu'on a montré que $d_2 \mid d_3$ et qu'on a déjà que $d_2 \mid d_2$.

Hérédité : Supposons que $d_2 \mid d_{i-1}$ et d_i pour un certain $i \geqslant 3$. D'après la condition de l'énoncé,

$$d_2 \mid d_{i-1} \mid d_i + d_{i+1}.$$

Mais alors puisque $d_2 \mid d_i$, $d_2 \mid d_i + d_{i+1} - d_i = d_{i+1}$. Ceci achève la récurrence.

On conclut que d_2, correspondant au plus petit facteur premier de n, divise tous les diviseurs de n. Ainsi, n ne peut avoir d'autres facteurs premiers que d_2, sinon ceux-ci seraient divisibles par d_2, ce qui est absurde. Ainsi, n est une puissance de d_2.

Solution de l'exercice 10

Soit n un tel entier. Soit $k, l \in \mathbb{N}$ avec l impair tel que $n = 2^k l$.
l est un diviseur de n. Or $l+1$ étant premier avec l, $l+1$ est premier avec tous les diviseurs premiers impairs de n. Donc $l+1$ est une puissance de 2 qui divise n, ou alors $l+1 = 2$.
Si $l = 1$, alors $n = 2^k$. Supposons $k \geq 1$ 2^k et 2^{k-1} divisent n. Donc 2^k+1 et $2^{k-1}+1$ sont premiers. Or k ou $k-1$ est impair. Donc 3 divisent l'un des deux. Donc $2^k+1 = 3$ ou $2^{k-1}+1 = 3$ ie $k = 2$ ou $k = 1$. Il faut aussi compter le cas $k = 0$ ce qui donne $n = 1, 2, 4$.
Supposons maintenant $l \geq 2$. Alors $l+1$ est une puissance de 2 qui divise n. Donc n est de la forme $n = 2^k(2^m - 1)$ avec $m \leq k$.
2^k et 2^{k-1} sont des diviseurs de n. Or 2^k+1 est premier avec $n = 2^k \cdot (2^m - 1)$. De même pour $2^{k-1}+1$. Donc 2^k+1 et $2^{k-1}+1$ sont premiers. Or 3 divise l'un de ces nombres. Donc $2^k+1 = 3$ ou $2^{k-1}+1 = 3$ ce qui n'est pas possible car $k \geq 3$.
Si $k \leq 2$, on teste les cas possibles :

— $k = 1, m = 1$: $n = 2$

— $k = 2, m = 1 : n = 6$

— $k = 2, m = 2 : n = 12$

Après vérification, l'ensemble des solutions est

$$\{1, 2, 4, 12\}$$

.

7 Arithmétique : TD de niveau N1/N2 (Félix)

Exercices

Exercice 1
Soit x un rationnel de $]0,1[$. On note y le nombre de $]0,1[$ dont le $n-$ème chiffre après la virgule est le 2^n-ème chiffre après la virgule de x pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que y est rationnel.

Exercice 2
Soit F la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 2$, $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$. Trouver tous les entiers a et b tels que b divise $F_n - 2na^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 3
Pour tout entier strictement positif k, on note $S(k)$ la somme de ses chiffres. Déterminer les polynômes P à coefficients entiers tels que, pour tout entier $n \geqslant 2026$, on a $P(n) > 0$ et

$$S(P(n)) = P(S(n)).$$

Exercice 4
Trouver tous les triplets d'entiers positifs m, p, q avec p et q premiers tels que $2^m p^2 + 1 = q^7$.

Exercice 5
Trouver toutes les paires x, y d'entiers tels que $1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$

Exercice 6
(IMO N2 2015) Soient a et b deux entiers strictements positifs tels que $a! + b!$ divise $a!b!$. Montrer que $3a \geqslant 2b + 2$.

Exercice 7
Trouver toutes les paires de nombres premiers p, q vérifiant $p^2 \mid q^3 + 1$ et $q^2 \mid p^6 - 1$

Exercice 8
Trouver tous les entiers n tels que n^2 divise $2^n + 1$

Solutions

Solution de l'exercice 1

Notons $x = 0, x_1 \dots x_n \dots$ le développement décimal de x, où x_n est le $n-$ème chiffre de x après la virgule. Puisque x est rationnel, son développement décimal est périodique à partir d'un certain rang, et on note p la période et N le rang à partir duquel cette suite est périodique. L'objectif est de montrer que la suite (x_{2^n}) est également périodique à partir d'un certain rang.

Décomposons la période p sous la forme $p = 2^\alpha \beta$ avec β impair. Soit ω l'ordre de 2 modulo β. Alors pour $n \geqslant \alpha$, on vérifie les deux congruences

$$2^{n+\omega} \equiv 2^n \mod \beta, \quad 2^{n+\omega} \equiv 0 \equiv 2^n \mod 2^\alpha.$$

On déduit que $2^{n+\omega} - 2^n$ est un multiple de p, de sorte que $x_{2^{n+\omega}} = x_{2^n}$. La suite (x_{2^n}) est donc périodique à partir du rang $\max(2^\alpha, N)$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

Avec $n = 1$, on a $b \mid 1 - 2a$ et avec $n = 3$, on a $b \mid 2 - 6a^3$. On a donc $b \mid (1-2a)(1+2a+4a^2) = 1 - 8a^3$, et $b \mid 4(2 - 6a^3) - 3(1 + 8a^3) = 5$. Par conséquent b vaut $-1, 1, -5$ ou 5. Le cas $b = \pm 1$ est trivialement vrai pour tout a. Dans le cas $b = \pm 5$, $b \mid 1 - 2a$ donne $a \equiv 3 \pmod 5$, et on peut vérifier que ce cas fonctionne soit en étudiant le cycle (de longueur 20 de F_n modulo 5, soit avec un argument de récurrence.

Solution de l'exercice 3

Si P est constant égal à c, on a $S(c) = c$. Comme $S(x) \leqslant x$ pour tout x, avec égalité seulement si c n'a qu'un chiffre, on déduit que $1 \leqslant c \leqslant 9$, et réciproquement ces constantes sont solutions.

On suppose que P est non constant.

Commençons par noter qu'en prenant $n = \overline{99\dots9}$ (avec k chiffres), alors $P(S(n)) = P(9k)$ est un nombre positif (car il vaut $S(P(n))$), donc le coefficient dominant de P est strictement positif.

L'objectif est de construire des entiers n grand dont on maitrise $S(n)$. Les candidats idéaux sont les nombres de la forme $x \cdot 10^k$ avec $x \in \{1, \dots, 9\}$, car ce sont de grands nombres et qu'ils ont un seul chiffre non nul. Notons d le degré de P et $P(X) = c_d X^d + \dots + c_0$.

Prenons $n = 10^k$ avec k suffisamment grand, c'est-à-dire tel que $|c_i| < 10^k$ pour tout indice i. On a

$$P(1) = S(P(10^k)) = S(c_d 10^{kd} + \dots + c_0).$$

Supposons que l'un des c_i soit négatif et prenons l'indice i maximal pour cette propriété. Notons que $i \leqslant d - 1$. Si on note $c_j = \overline{b_1^j b_2^j \dots b_{r_j}^j}$ pour tout j, on trouve

$$\begin{aligned} S(P(10^k)) &\geqslant S(c_{i+1}10^{i+1} - |c_i|10^i) \\ &= S\left(\overline{b_1^{i+1} b_2^{i+1} \dots b_{r_{i+1}}^{i+1}} \underbrace{9\dots9}_{k-r_i \text{ chiffres}} \overline{(9-b_1^i)(9-b_2^i)\dots(9-b_{r_i})}\right) \\ &\geqslant 9(k - r_i). \end{aligned}$$

Mais alors $P(S(10^k)) = P(1) \geqslant 9(k - r_i)$, ce qui est absurde. Ainsi, tous les coefficients de P sont positifs.

On recommence cette fois-ci avec $n = 9 \times 10^k$. Là aussi, en prenant k suffisamment grand,

$$P(9 \times 10^k) = \overline{9^d c_d}0 \ldots 0\overline{9^{d-1}c_{d-1}}0 \ldots 0 \ldots\ldots \overline{9c_1}0 \ldots 0\overline{c_0},$$

de sorte que

$$9^d c_d + \ldots + c_0 = P(9) = P(S(9 \times 10^k)) = S(P(9 \times 10^k)) = S(9^d c_d) + \ldots + S(c_0).$$

Sachant que $S(m) \leqslant m$ avec égalité seulement si $m \leqslant 9$, on trouve que $S(9^i c_i) = 9^i c_i$ pour tout i et que $9^d c_d \leqslant 9$, si bien que $d \leqslant 1$.

Si $d = 1$, comme $9c_1 \leqslant 9$, $c_1 = 1$. L'égalité devient $S(n + c_0) = S(n) + c_0$. Si $c_0 \neq 0$ alors on prend $n = 10^k + 10 - c_0$ et l'égalité donne $2 = S(n + c_0) = 1 + 10 - c_0 + c_0 = 11$, ce qui est absurde.

Ainsi soit P est l'identité, soit $d \leqslant 0$ et P est constant, ce qui nous ramène au cas traité plus haut.

Les seules solutions sont les polynômes constants égaux à un nombre compris entre 1 et 9, ainsi que l'identité.

Solution de l'exercice 4

$2^m p^2 = q^7 - 1 = (q-1)(q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)$. Le second terme étant impair, il ne peut valoir que 1, p ou p^2, et $q - 1$ vaut alors $2^m p^2$, $2^m p$ ou 2^m respectivement. Comme $q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 > q - 1$, seul le dernier de ces cas est possible, donc $q - 1 = 2^m$ et $q^6 + q^5 + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = p^2$. Si $m \geqslant 2$, alors $4 \mid q - 1$, donc $q \equiv 1 \pmod 4$, $q^6+q^5+q^4+q^3+q^2+q+1 \equiv 3 \pmod 4$, et ça ne peut pas être un carré. On a donc nécessairement soit $m = 0$ et $q = 2$, soit $m = 1$ et $q = 3$, et on vérifie facilement que ce ne sont pas des solutions, il n'en existe donc aucune.

Solution de l'exercice 5

Sans perte de généralité, on suppose y positif. On voit immédiatement que $x < 0$ ne marche pas et $x = 0$ donne les solutions $(0, 2)$ et $(0, -2)$. $(y+1)(y-1) = y^2-1 = 2^x+2^{2x+1} = 2^x(2^{x+1}+1)$, ce qui a une valuation 2-adique de x. $y + 1$ et $y - 1$ sont de même parité, et si $x \geqslant 1$, cette parité est paire. On en déduit qu'un des deux est congru à 2 modulo 4, donc de valuation 1 et l'autre a pour valuation $x - 1$. On a donc $y = k2^{x-1} \pm 1$ avec k impair positif. Si $k = 1$, $y^2 \leqslant (2^{x-1}+1)^2 = 2^{2x-2}+2^x+1 < 1+2^x+2^{2x+1}$, ce cas ne peut donc pas marcher. Si k n'est pas 1, alors $k \geqslant 3$, donc $y \geqslant 3\times 2^{x-1}-1$, et $y^2 \geqslant 9\times 2^{2x-2}-6\times 2^{x-1}+1 \geqslant 2^{2x+1}+2^x+1+(2^{2x-2}-2^{x+2})$, ce qui n'est possible que si $2^{2x-2} - 2^{x+2}$ est négatif ou nul, donc si $x \leqslant 4$. On peut alors vérifier les petits cas à la main et on trouve l'unique autre paire de solutions, $(4, 23)$ et $(4, -23)$

Solution de l'exercice 6

Si $a > b$, le résultat est trivialement vrai, donc on peut considérer uniquement le cas $a \leqslant b$. On a alors $a! + b! \mid a!(a! + b!) - a!b! = (a!)^2$, et donc $1 + (b!/a!) \mid a!$. On note $M = b!/a! = \prod_{k=a+1}^{b} k$, ce qui est un multiple de p pour tout $p \leqslant b - a$ (car le produit de p entiers consécutifs est toujours multiple de p). Les facteurs premiers de $1 + M$ sont donc tous supérieurs ou égaux à $b - a + 1$, mais inférieurs ou égaux à a (car $1 + M$ divise $a!$). De plus, si $b - a + 1 > a/2$, chacun de ces facteurs peut apparaitre une seule fois dans les facteurs de $1 + M$ car ils apparaissent une seule fois dans $a!$ (car ils sont supérieurs à $a/2$). Il y a alors au plus $a - (b - a + 1)$ ($< a/2$, donc $\leqslant (a - 1)/2$) tels facteurs, on a donc $1 + M \leqslant a^{(a-1)/2}$, ce qui est impossible car M est le

produit de $b-a$ (donc au moins $(a-1)/2$) nombres tous supérieurs à a. Par conséquent, on ne peut pas avoir $b-a+1 > a/2$, donc $b-a+1 \leqslant a/2$; $2b-2a+2 \leqslant a$ et $3a \geqslant 2b+2$.

8 Algèbre : Systèmes d'équations (Matteo)

Idées clées

— Factoriser les équations, les mettre sous une forme plus élégante (information locale)
— Considérer le produit/la somme des équations (information générale)
— Comparer des équations ayant un terme commun (informartion locale)
— Utiliser des inégalités, des arguments de tailles (information générale)

Exercices

Exercice 1 (Mexico National Olympiad 2011)

Soit n un entier strictement positif. Déterminer tous les n-uplets $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ de réels tels que :

$$a_1^2 + a_1 - 1 = a_2$$
$$a_2^2 + a_2 - 1 = a_3$$
$$\ldots$$
$$a_n^2 + a_n - 1 = a_1$$

Exercice 2 (BMO Tour 1 2026)

Déterminer tous les triplets de réels (x, y, z) satisfaisant les équations :

$$x^2 + 2yz = 4; \qquad y^2 + 2xz = 4; \qquad z^2 + 2xy = 1$$

Exercice 3
(JBMO 2020 P1)
Déterminer tous les triplets de réels non nuls (a, b, c) tels que le système suivant soit vérifié :

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Exercice 4
(P1 concours 18 Mathraining)
Déterminer tous les triplets (a, b, c) de réels strictement positifs tels que :

$$(a+b)\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = (b+c)\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right) = (c+a)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 4$$

Exercice 5
Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer tous les n-uplets de réels positifs $(x_1, \cdots, x_n)$ tel que pour tout i :

$$(x_i + 1)(x_{i+1} + 1) = x_i^2 + x_i + 2$$

Exercice 6
(JBMO 2018 P3)
Soit $k > 1$ un entier et $n > 2018$ un entier impair. On suppose qu'il existe des rationnels strictement positifs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ non tous égaux tels que :

$$x_1 + \frac{k}{x_2} = x_2 + \frac{k}{x_3} = \cdots = x_n + \frac{k}{x_1}$$

a) Démontrer qu'il existe un entier m tel que $k = m^2$
b) Trouver la plus petite valeur de k telle qu'il existe un tel n et de tels $x_1, x_2, \ldots, x_n$ satisfaisant les conditions de l'énoncé.

Exercice 7
(EMO 2026 P5)
Soit $n \geq 4$ un entier. Déterminer tous les n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels positifs tel que :

$$x_1 + x_2 = x_2x_3 + 1$$

$$x_2 + x_3 = x_3x_4 + 1$$

$$\cdots$$

$$x_n + x_1 = x_1x_2 + 1$$

Exercice 8
Soit $n \geq 5$ un entier et P un n-gone convexe. On numérote $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ses sommets. On suppose que, pour tout $1 \leq i \leq n$, les diagonales de P issues du sommet A_i découpent l'angle $\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$ en $n-2$ angles égaux.
Démontrer que P est le n-gone régulier.

Exercice 9
(IMO 2018 P2)
Déterminer tous les entiers $n \geq 3$ pour lesquels il existe des réels $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ avec $a_1 = a_{n+1}$, $a_2 = a_{n+2}$ et

$$a_ia_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, n$

Exercice 10
(IMO SL A5 2024)
Déterminer toutes les suites $a_1, a_2, \ldots$ périodiques de nombres réels vérifiant les deux conditions suivantes pour tout entier $n \geq 1$:

$$a_{n+2} + a_n^2 = a_n + a_{n+1}^2$$

et $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$

Bonus

— EGMO 2019 P1
— BMO SL A3 2024
— Mexico National Olympiad 2025 P2
— BMO 1984 P4

Solutions

Solution de l'exercice 1
Dans un système on cherche d'abord à obtenir des informations globales sur la suite avant de s'interesser à des informations locales.

De manière globale, on peut remarquer qu'en additionant toutes les équations les a_i vont s'annuler.
En faisant cela on trouve donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a_i - 1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i+1}$$

ou encore

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = n$$

On a donc obtenu une information globale sur notre suite (la somme des carrées des termes de la suite vaut n). Toute seule, cette équation ne semble pas nous aider. On va donc tenter de trouver une autre information sur la suite.

En considérant une équation de manière locale on a donc $a_i^2 + a_i - 1 = a_{i+1}$ qui peut se réecrire comme

$$a_i(a_i + 1) = a_{i+1} + 1$$

On remarque cette fois que si tous les $a_i \neq -1$ alors en multipliant les équations les facteurs $a_i + 1$ vont s'annuler.

Traitons d'abord le cas où un des a_i vaut -1.
Si $a_i = -1$ alors $a_{i+1} = a_i^2 + a_i - 1 = -1$.
De proche en proche on comprend donc que tous les termes doivent valoir -1. Réciproquement $(a_1, a_2, \cdots, a_n) = (-1, -1, \cdots, -1)$ est bien solution. On peut maintenant supposer que tous les a_i sont différents de -1.

Revenons à notre équations

$$a_i(a_i + 1) = a_{i+1} + 1$$

En multipliant toutes ces équations entre elles on a alors

$$\prod_{i=1}^{n} a_i(a_i + 1) = \prod_{i=1}^{n} (a_{i+1} + 1)$$

ou encore

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$$

On a donc une info sur la somme des carrés et sur le produit des termes.
Pour mettre en relation ces infos on peut remarquer que si

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = 1$$

alors

$$\prod_{i=1}^{n} a_i^2 = 1$$

Maintenant en regardant les a_i^2 on voit qu'ils sont évidemment positifs, de somme n et de produit 1.

Comparer la somme et le produit peut alors nous faire penser à l'IAG.

$$1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} a_i^2} = 1$$

On doit donc avoir égalité dans notre inégalité ou encore $a_i^2 = a_j^2$ pour tout i et j.

Pour conclure, on peut remarquer que $a_1^2 = \frac{na_1^2}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} = \frac{n}{n} = 1$.
Tous les termes au carré valent 1 mais comme on les a supposés différents de -1 on peut même affirmer que tous les termes valent 1.

Réciproquement, on vérifie que $a_i = 1$ pour tout i est bien une solution au système.
On obtient donc deux solutions, qui sont les seules : $a_i = 1$ pour tout i et $a_i = -1$ pour tout i.

Solution de l'exercice 2
On commence par une analyse globale :
En sommant les équations, on trouve $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2xz = 9$ ou encore

$$(x + y + z)^2 = 9$$

Ainsi, $x + y + z = \pm 3$. Passons maintenant à une analyse locale :
En comparant les deux premières équations qui partage la même constante on trouve

$$x^2 + 2yz - (y^2 + 2xz) = 0$$

ou encore en factorisant

$$(x - y)(x + y - 2z) = 0$$

Nous devons donc traiter deux cas :

1er cas : $x = y$
On regarde alors la troisième équation qui devient

$$1 = z^2 + 2x^2$$

Or $x + y + z = \pm 3$ donc $z = 3 - 2x$ ou $z = -3 - 2x$.

Dans le premier cas on a $1 = (3 - 2x)^2 + 2x^2$ ou encore

$$6x^2 - 12x + 8 = 0$$

qui se réécrit

$$6(x - 1)^2 + 2 = 0$$

qui ne possède pas de solution.
Dans le second cas on a $1 = (-3-2x)^2 + 2x^2$ ou encore

$$6x^2 + 12x + 8 = 0$$

qui se réécrit

$$6(x+1)^2 + 2 = 0$$

qui ne possède pas de solution.

2nd cas : $x + y - 2z = 0$
Encore une fois $x + y + z = \pm 3$

Si $x + y + z = 3$, alors

$$3 = 3 - 0 = x + y + z - (x + y - 2z) = 3z$$

ou encore $z = 1$.
L'égalité $z^2 + 2xy = 1$ implique alors $xy = 0$.
Si $x = 0$ on a $y = 3 - x - z = 2$.
Si $y = 0$ on a $x = 3 - y - z = 2$.
Réciproquement les triplets $(0, 2, 1)$ et $(2, 0, 1)$ sont bien solutions.

Si $x + y + z = -3$, alors

$$-3 = -3 - 0 = x + y + z - (x + y - 2z) = 3z$$

ou encore $z = -1$.
L'égalité $z^2 + 2xy = 1$ implique alors $xy = 0$.
Si $x = 0$ on a $y = -3 - x - z = -2$.
Si $y = 0$ on a $x = -3 - y - z = -2$.
Réciproquement les triplets $(0, -2, -1)$ et $(-2, 0, -1)$ sont bien solutions.

Solution de l'exercice 3
Les faits qu'on ait seulement 3 variables, des faibles degrés et des égalités entre des expressions symétriques en chacune des variables sont un signe qu'introduire les polynômes symétriques élémentaires peut être une bonne idée.

On pose alors $a + b + c = x, ab + bc + ac = y$ et $abc = z$
Nos équations étant parfaitement symétriques, nous savons que nous pouvons tout exprimer en fonction de x, y, z.

Ainsi,

$$a + b + c = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{ab + bc + ac}{abc}$$

se réécrit comme

$$x = \frac{y}{z}$$

De même,

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

se réécrit comme

$$(a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = \frac{(ab+bc+ac)^2 - 2abc(a+b+c)}{(abc)^2}$$

ou encore

$$x^2 - 2y = \frac{y^2 - 2xz}{z^2}$$

On remplace alors ce que l'on sait grâce à la première équation dans la deuxième :

$$(\frac{y}{z})^2 - 2y = \frac{y^2 - 2 \times \frac{y}{z} \times z}{z^2}$$

ou encore

$$y^2 - 2yz^2 = y^2 - 2y$$

qui est équivalent à

$$y(z^2 - 1) = 0$$

Si $y = 0$ par l'équation $x = \frac{y}{z}$ on a aussi $x = 0$.
Ainsi, $a^2 + b^2 + c^2 = (a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ac) = 0$ ce qui force $a = b = c = 0$ qui est exclut.

Si $z^2 = 1$:
En remarquant que si (a, b, c) est solution alors $(-a, -b, -c)$ aussi on peut alors supposer que $z = 1$.
Dès lors, on a

$$x = \frac{y}{z} = y$$

ou encore

$$a + b + c = ab + bc + ac$$

On remplace alors c par $\frac{1}{ab}$ qui donne

$$a + b + \frac{1}{ab} = ab + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ou encore

$$(a+b)ab + 1 = (ab)^2 + a + b$$

qui se réecrit comme

$$(ab-1)(ab-a-b+1) = 0$$

Si $ab = 1$ alors $c = \frac{1}{ab} = 1$ et tous les triplets $(x, \frac{1}{x}, 1)$ fonctionnent bien.
Si $a = 1$ on retombe sur $bc = 1$ et les solutions de la forme $(x, \frac{1}{x}, 1)$ à permutation près.

Finalement on n'oublie pas de considérer les triplets de la forme $(-a, -b, -c)$ qui donnent alors toutes les solutions : $(1, \frac{1}{x}, x)$, $(-1, \frac{1}{x}, x)$ et toutes leurs permutations.

Solution de l'exercice 4
En testant des petits cas, on se rend compte qu'un des trois produits est généralement trop

grand. Pour réussir à avoir l'égalité on se rend compte que nos variables doivent être très proches, voire égales.
Ces remarques sont un signe qu'on va pourvoir/devoir utiliser des inégalités classiques ...

En développant nos expressions et en soustrayant 1 à chaque membre de l'égalité on trouve

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}=\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}=\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=3$$

Dès lors, par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$9=\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\geq 9\sqrt[9]{\frac{a^3b^3c^3}{a^3b^3c^3}}=9$$

Nous sommes alors dans le cas d'égalité de l'IAG, c'est à dire que tous les termes sont égaux et notamment $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}\iff a=b$. De manière similaire on a $a=c$ et on en déduit alors que

$$a=b=c$$

Réciproquement, on vérifie que lorsque les trois variables sont égales on a bien l'égalité voulue.

Solution n°2 de l'exercice 4
Une alternative est de multiplier les inégalités et d'utiliser l'inégalité arihémtico-harmonique pour obtenir que $(a+b)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})\geq 4$. De la même manière en considérant le cas d'égalité on trouve que toutes les variables sont égales.

Solution de l'exercice 5
Avant de commencer, il est important de mettre les équations sous une forme plus utilisable. En effet, la factorisation donnée par l'énoncé ne permet malheureusement pas de faire directement de remarque pertinente.

Une façon de faire est de transformer les équations en

$$x_i(x_i-x_{i+1})=x_{i+1}-1$$

Avec cette factorisation on remarque alors qu'un peut relier le signe de x_i-x_{i+1} et la position relative de x_{i+1} par rapport à 1.

En effet, comme $x_i>0$ ($x_i=0$ est impossible en regardant l'équation entre x_i et x_{i-1}) on sait que x_i-x_{i+1} et $x_{i+1}-1$ sont de même signe.
En particulier, si $x_{i+1}\geq 1$ alors $x_i-x_{i+1}\geq 0$ et donc $x_i\geq x_{i+1}\geq 1$. Par récurrence on trouve alors que toutes nos variables sont du même coté de 1 (le cas $x_{i+1}\leq 1$ se traite similairement).

Dès lors, $1-x_{i+1}$ est de signe constant et de même pour x_i-x_{i+1}. On en déduit que (x_n) est une suite monotone et cyclique. Elle est donc constante!!

En posant $x_i=x_{i+1}$ dans l'énoncé on trouve la seule consante possible 1.
Réciproquement on vérifie que tous le n-uple $(x_1,\cdots,x_n)=(1,\cdots,1)$ est bien solution!!

Solution de l'exercice 6
1)

L'énoncé nous donne une série d'égalités entre nos variables mais ne nous donne pas la constante à laquelle ces expressions sont égales. De plus, un téléscopage n'apparait pas de manière évidente au sein d'une même expression.
Il semble donc plus judicieux de chercher des informations de manière locale en comparant nos expressions plutôt que de chercher directement des informations générales.

En prenant la différence de deux expressions successives on trouve alors

$$x_i - x_{i+1} + \frac{k}{x_{i+1}} - \frac{k}{x_{i+2}} = 0$$

ou encore

$$x_i - x_{i+1} = k \times \frac{x_{i+1} - x_{i+2}}{x_{i+1}x_{i+2}}$$

On remarque ainsi que si $x_i \neq x_{i+1}$ pour tout i alors en multipliant toutes nos equations entre elles on peut obtenir des informartions générales sur le produit des x_i.

On traite rapidement le cas où $x_i = x_{i+1}$:
En réinjectant cela directement dans l'énoncé on obtient $x_i + \frac{k}{x_{i+1}} = x_{i+1} + \frac{k}{x_{i+2}}$ qui force alors $x_{i+1} = x_{i+2}$ car $k \neq 0$. Par récurrence, on obtient alors que toutes variables sont égales ce qui est interdit.

On suppose à présent que $x_i \neq x_{i+1}$ pour tout i.
En multipliant entre elles les équations que l'on a obtenu par comparaison on trouve

$$\prod_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i - x_{i+1})}{x_i x_{i+1}}$$

qui se réecrit comme :

$$k^n = (\prod_{i=1}^{n} x_i)^2$$

Etant donné que n est impair et que les x_i sont rationnels, k doit être un carré !
Cela prouve la partie 1.

2)
Comme k est un carré et $k > 1$ on a $k \geq 4$.
On peut alors trouver une solution pour $k = 4$ avec $n = 2019$ et $(x_1, x_2, \cdots, x_{2019}) = (2, -1, -4, \ldots, 2, -1, -4)$

Solution de l'exercice 7
On voit que pour n pair les n-uplets $(1, t, 1, t, \ldots, 1, t)$ sont solutions. Cela est un indice que des considérations générales on peut de chance de fonctionner.

Pour le point de vue local, il y a au moins deux manières de faire :

Dans cette preuve on va comparer les équations entre elles.
En soustrayant l'équation i de l'équation $i + 1$, on obtient

$$x_{i+2} - x_i = x_{i+2}(x_{i+3} - x_{i+1})$$

Puisque $x_{i+2} > 0$ d'après l'énoncé, on en déduit que $x_{i+2} - x_i$ et $x_{i+3} - x_{i+1}$ sont de même signe pour tout i.
Par conséquent, $x_{i+3} - x_{i+1}$ et $x_{i+4} - x_{i+2}$ sont de même signe pour tout i, ce qui implique que $x_{i+2} - x_i$ et $x_{i+4} - x_{i+2}$ sont de même signe pour tout i.

En particulier, si $x_3 \geqslant x_1$ (le cas $x_3 \leqslant x_1$ étant analogue), alors pour n impair, on obtient $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_5 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_2 \leqslant x_4 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_1$, d'où l'égalité de toutes les variables ;

tandis que pour n pair, on obtient $x_1 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_1$ et $x_2 \leqslant x_4 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_2$, ce qui signifie que toutes les variables d'indice impair sont égales entre elles et que toutes les variables d'indice pair sont égales entre elles.

Lorsque n est impair, en posant toutes les variables égales à x, on obtient $2x = x^2 + 1$, soit $x = 1$; la seule solution est donc $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 1$.

Lorsque n est pair, en posant toutes les variables d'indice impair égales à a et toutes les variables d'indice pair égales à b, toutes les équations deviennent

$$a + b = ab + 1$$

soit

$$(a - 1)(b - 1) = 0$$

Cette condition est vérifiée si et seulement si au moins l'une des valeurs a ou b est égale à 1.
Ainsi, lorsque n est pair, les solutions sont $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = 1$ et $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = t$, ou bien $x_1 = x_3 = \ldots = x_{n-1} = t$ et $x_2 = x_4 = \ldots = x_n = 1$, où t est un nombre réel positif quelconque.

Solution n°2 de l'exercice 7
Une alternative est de réarranger en factorisant chacun de nos lignes de la manière suivante

$$x_i - 1 = x_{i+1}(x_{i+2} - 1)$$

et comme $x_{i+1} > 0$ on comprend que x_i et x_{i+1} se situe du même coté de 1.

Si n est impair on a alors que toutes les variables se situent du même coté de 1.
Si $x_i \leq 1$ (l'autre cas étant similaire) pour tout i alors on a

$$x_i - 1 = x_{i+1}(x_{i+2} - 1) \leq x_{i+2} - 1$$

.
Or comme cela est vrai pour tout i on a alors $x_1 \leqslant x_3 \leqslant x_5 \leqslant \ldots \leqslant x_n \leqslant x_2 \leqslant x_4 \leqslant \ldots \leqslant x_{n-1} \leqslant x_1$, d'où l'égalité de toutes les variables ;

Si n est pair on a alors que toutes les varaibles d'indices de même parité se situent du même coté de 1. On trouve exactement de la même manière qu'avant que tous les variables d'indice de même parité sont égales. On conclue alors comme dans la solution précédente.

Solution de l'exercice 8
A première vue nous sommes face à un problème de géométrie et sommes donc assez

décontenancé vis à vis de la thématique du cours (c'est à ca qu'on reconnait un bon exo).

Fort de nos connaissances nous ne nous laissons pas abattre et commencons donc le problème de géométrie comme il se doit : on pose les angles!!
Posons alors $x_i = \frac{\widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}}{n-2}$.

En faisant une figure et en regardant les sommes des angles des triangles partageant deux cotés avec le n gone nous trouvons alors

$$x_{i-1} + (n-2)x_i + x_{i+1} = 180$$

Enfin de l'algèbre!!

On remarque ici que comme $n \geq 5$, nous avons $n - 2 \geq 3$. Le poids de x_i est donc supérieur à la somme des poids de x_{i-1} et x_{i+1}, cela est donc un signe assez clair qu'on a envie de regarder le maximum ou le minimum de nos x_i.

Posons donc j et k les indices tel que x_j soit le max de nos variables et x_k le min. Nous avons alors

$$2x_j + (n-2)x_k \geq x_{k-1} + (n-2)x_k + x_{k+1} = 180 = x_{j-1} + (n-2)x_j + x_{j+1} \geq (n-2)x_j + 2x_k$$

ou encore

$$(n-4)x_k \geq (n-4)x_j \iff x_k \geq x_j$$

Or en se rappelant que x_j est le max et x_k le min on en déduit que $x_j = x_k$ et que toutes nos variables sont égales!!

A partir de là, je laisse le lecteur se rendre compte que les triangles sont isocèles et que tous les angles sont égaux impliquant l'énoncé ...

Solution de l'exercice 9
Analyse : Soit $n \geqslant 3$ et $a_1, \ldots, a_{n+2}$ qui vérifient les conditions demandées.

On prolonge $a_1, \ldots, a_{n+2}$ en une suite $a_1, a_2, \ldots$ n-périodique qui vérifie donc pour tout $i \geqslant 1$, $a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$.
Pour tout $i \geqslant 1$, on a : $(a_{i+2} - 1)a_{i+2} = a_i a_{i+1} a_{i+2} = a_i(a_{i+3} - 1)$ et donc $a_{i+2}^2 - a_i a_{i+3} = a_{i+2} - a_i$.
Ainsi, pour tout $k \geqslant 1$, en sommant notre égalité pour $i = k, k+1, \ldots, k+n-1$, on a en

utilisant la n-périodicité :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+2} - \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i && \text{(VI.1)}\\
&= \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+2} - a_i && \text{(VI.2)}\\
&= \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+2}^2 - a_i a_{i+3} && \text{(VI.3)}\\
&= \sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+2}^2 - \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i a_{i+3} && \text{(VI.4)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{k+n-1} a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{k+n-1} a_{i+3}^2 - \sum_{i=k}^{k+n-1} a_i a_{i+3} && \text{(VI.5)}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{k+n-1} (a_i - a_{i+3})^2 && \text{(VI.6)}
\end{aligned}$$

Donc, comme un carré est toujours positif, on a pour tout $k \leqslant i \leqslant k+n-1$, $(a_i - a_{i+3})^2 = 0$ et donc $a_{i+3} = a_i$. En particulier, $a_{k+3} = a_k$.
Donc, la suite est 3-périodique. Ainsi, comme elle est aussi n-périodique, elle est p-périodique avec $p = \text{PGCD}(n, 3)$.
Comme l'équation $x^2 + 1 = x$ n'admet aucune solution réelle, notre suite n'est pas 1-périodique. Donc, $p = 3$ et ainsi $3 \mid n$.

Synthèse : si n est divisible par 3, alors on pose $a_i = 2$ si $3 \mid i$ et $a_i = -1$ sinon. On a bien $a_{n+1} = a_1$ et $a_{n+2} = a_2$. De plus, comme $(-1) \times 2 + 1 = -1$ et $(-1) \times (-1) + 1 = 2$, on a bien pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $a_i a_{i+1} + 1 = 2$.

Finalement, il existe de tels réels si et seulement si n est divisible par 3.

Solution de l'exercice 10
Réponse : Les seuls suites solutions sont les suites de la forme $a, a, a, \ldots$ avec a réel et de la forme $a, -a, a, -a, \ldots$ avec $a \in [-1/2, 1/2]$.

On vérifie tout d'abord que pour tout a, la suite constante égale à a vérifie bien la condition de l'énoncé et est bien solution. D'autre part, si $a \in [-1/2, 1/2]$ et si (a_n) est définie par $a_{2k-1} = a$ et $a_{2k} = -a$ pour tout $k \geqslant 1$, alors pour tout indice k, on a

$$a_{2k+1} + a_{2k-1}^2 = a + a^2 = a_{2k-1} + a_{2k}^2 \quad \text{et} \quad |a_{2k} - a_{2k-1}| = |-2a| \leqslant 1,$$

$$a_{2k+2} + a_{2k}^2 = -a + a^2 = a_{2k} + a_{2k+1}^2 \quad \text{et} \quad |a_{2k+1} - a_{2k}| = |2a| \leqslant 1,$$

donc la suite (a_n) est bien solution du problème.

Soit (a_n) une suite solution du problème et soit T sa période. L'idée est de réécrire la relation de récurrence pour faire appraître une expression dont on peut facilement calculer

le produit sous toute une période. En ajoutant a_{n+1} des deux côtés de l'équation, on trouve $a_{n+2}+a_n^2 = a_n + a_{n+1}^2 + a_{n+1}$, ce qui se réécrit

$$a_{n+2}+a_{n+1} = a_n + a_{n+1} + (a_{n+1}^2 - a_n^2) = (a_{n+1}+a_n)(1+a_{n+1}-a_n).$$

Pour peu que l'on puisse diviser par $a_n + a_{n+1}$, c'est-à-dire si $a_n + a_{n+1} \neq 0$ pour tout n, on trouve que pour tout entier n,

$$\frac{a_{n+2}+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} = (1+a_{n+1}-a_n).$$

En effectuant le produit de cette relation sur toute une période, c'est-à-dire pour k entre n et $n+T-1$, on trouve

$$\prod_{k=n}^{n+T-1}(1+a_{k+1}-a_k) = \prod_{k=n}^{n+T-1}\frac{a_{k+2}+a_{k+1}}{a_{k+1}+a_k} = \frac{a_{n+T+1}+a_{n+T}}{a_{n+1}+a_n} = 1.$$

D'autre part, puisque $|a_{k+1}-a_k| \leqslant 1$ pour tout k, chaque facteur $1+a_{k+1}-a_k$ est positif. On peut donc appliquer l'inégalité des moyennes qui donne

$$1 = \prod_{k=n}^{n+T-1}(1+a_{k+1}-a_k) \leqslant \left(\frac{\sum_{k=n}^{n+T-1}(1+a_{k+1}-a_k)}{T}\right)^T = \left(\frac{T+a_{n+T}-a_n}{T}\right)^T = 1.$$

Les facteurs $1+a_{k+1}-a_k$ vérifient donc le cas d'égalité de l'inégalité des moyennes, c'est-à-dire qu'ils sont tous égaux, ce qui implique que $a_{k+1}-a_k = a_{n+1}-a_n$ pour $k = n, \ldots, n+T-1$. Cette égalité étant vraie pour tout entier n, on trouve que $a_{n+1}-a_n = a_2-a_1$ pour tout n. On déduit par récurrence immédiate que $a_{n+1} = n(a_2-a_1)+a_1$ pour tout entier n. On a alors

$$(n+T)(a_2-a_1)+a_1 = a_{n+T+1} = a_{n+1} = n(a_2-a_1)+a_1,$$

ce qui implique $T(a_2-a_1) = 0$ et $a_2 = a_1$ sont $a_{n+1} = a_1$ pour tout n et la suite (a_n) est constante.

Supposons finalement qu'il existe un indice n tel que $a_{n+1}+a_n = 0$. La relation $\frac{a_{n+2}+a_{n+1}}{a_{n+1}+a_n} = (1+a_{n+1}-a_n)$ implique que $a_{n+2}+a_{n+1} = 0$ et, par récurrence immédiate, $a_{k+1}+a_k = 0$ pour tout $k \geqslant n$. Mais alors $a_{k+1} = -a_k$ pour tout $k \geqslant n$. Poour $\ell < n$, il existe un entier r tel que $\ell + rT \geqslant n$. On a alors $a_{\ell+1} = a_{rT+\ell+1} = -a_{rT+\ell} = -a_\ell$, de sorte que $a_{k+1} = -a_k$ pour tout indice k. On a donc $a_{2k-1} = a_1$ et $a_{2k} = -a_1$ pour tout indice k. Enfin, $|-2a_1| = |a_2-a_1| \leqslant 1$, ce qui implique que $a_1 \in [-1/2, 1/2]$, ce qui conduti à la deuxième solution annoncée.

Solution n°2 de l'exercice 10

On introduit les suites auxiliaires (s_n) et (d_n) définie par $s_n = a_n + a_{n+1}$ et $d_n = a_{n+1} - a_n$ pour tout entier n. Comme (a_n) est périodique, s_n et d_n sont également périodiques. La relation de l'énoncé implique

$$s_{n+1} = a_{n+2}+a_{n+1} = a_n + a_{n+1} + (a_{n+1}^2 - a_n^2) = (a_{n+1}+a_n)(1+a_{n+1}-a_n) = s_n(1+d_n),$$

$$d_{n+1} = a_{n+2}-a_{n+1} = a_n - a_{n+1} + (a_{n+1}^2 - a_n^2) = (a_{n+1}-a_n)(a_{n+1}+a_n-1) = d_n(s_n-1).$$

Si $s_n = 0$ pour un certain rang n, on montre de même que dans la solution précédente que (a_n) correspond à la suite $a, -a, \ldots$ avec $a \in [-1/2, 1/2]$. De même, si $d_n = 0$ pour un certain rang n, on conclut que la suite (a_n) est constante.

On suppose à présent que $d_n, s_n \neq 0$ pour tout indice n. On étudie les signes possibles pour d_n et s_n.

— Soit n un indice quelconque. Puisque $s_{n+1} \neq 0$, on a $1+d_n \neq 0$. Puisque $|d_n| \leqslant 1$, $1+d_n \geqslant 0$, donc s_{n+1} et s_n sont de même signe. Mais si s_n est négatif, $|d_{n+1}| = |d_n||s_n - 1| > |d_n|$, de sorte que la suite $(|d_n|)$ est strictement croissante, ce qui l'empêche d'être périodique. Ainsi, $s_n > 0$ pour tout indice n.

— Soit n un indice tel que $d_n > 0$. On suppose que $s_n \geqslant 1$. Alors $d_{n+1} = d_n(s_n - 1) \geqslant 0$, donc $d_{n+1} > 0$ et $s_{n+1} = s_n + d_{n+1} + d_n > s_n \geqslant 1$. Mais alors on a par une récurrence immédiate que $d_k \geqslant 0$ pour tout k et que (s_n) est strictement croissante, ce qui contredit la périodicité de (s_n). Ainsi, pour tout indice n, si $d_n > 0$, alors $0 < s_n < 1$.

Notons à présent T la période de la suite (a_n). Alors $d_1 + \ldots + d_T = a_{T+1} - a_1 = 0$, donc l'un au moins des d_i est positif (et donc strictement positif. Soit k un indice tel que $d_k > 0$. D'après le point précédent, $0 < s_k < 1$. Montrons par récurrence que $s_n < 2$ pour tout $n \geqslant k$.

Initialisation : pour $n = k$, on a bien $s_k < 1 < 2$.

Hérédité : Supposons que $s_n < 2$ pour un indice $n \geqslant k$ fixé.

Si $d_n < 0$, on a $0 < 1 + d_n < 1$, d'où $s_{n+1} = s_n(1 + d_n) < s_n < 2$.

Si $d_n > 0$, on a $0 < s_n < 1$. Mais alors, puisque $d_n < 1$, $s_{n+1} = s_n(1 + d_n) \leqslant 2s_n < 2$.

Dans les deux cas $s_{n+1} < 2$, ce qui achève la récurrence.

On déduit que pour tout indice $n \geqslant k$, $|s_n - 1| < 1$ et $|d_{n+1}| = |d_n||s_n - 1| < |d_n|$, donc la suite (d_n) est strictement décroissante, ce qui contredit encore sa périodicité et conclut l'exercice.

Solution n°3 de l'exercice 10

On suppose une fois de plus que $a_n + a_{n+1}$ et $a_{n+1} - a_n$ sont non nuls pour tout n. Notons que cela implique que $a_{n+2} \neq a_n$ pour tout n (sinon, $a_n^2 = a_{n+1}^2$, ce qui implique $a_n \pm a_{n+1} = 0$). De même que dans la solution 2, on déduit de l'énoncé la relation suivante :

$$a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n)(a_{n+1} + a_n - 1). \qquad (\bigstar)$$

Notons T la période de la suite (a_n). La suite de la preuve se divise en plusieurs étapes :

Étape 1 : $a_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout indice n.

Tout d'abord, si $a_n > \dfrac{1}{2}$ pour tout n, alors $a_{n+1} + a_n - 1 > 0$ pour tout n. En reprenant l'égalité ($\bigstar$), cela implique que les différences $a_{n+1} - a_n$ sont de même signe (et non nuls d'après notre supposition de début de solution), donc la suite (a_n) est strictement monotone, ce qui contredit sa périodicité.

Supposons désormais qu'il existe deux indices i et j tels que $a_i \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $a_j > \dfrac{1}{2}$. Quitte à regarder a_{j+kT} avec k suffisamment grand, on peut supposer que $j > i$. Quitte à regarder a_{j-1}, on peut supposer que $j = i + 1$. Autrement dit, on considère un indice i tel que $a_i \leqslant \dfrac{1}{2}$ et

$a_{i+1} > \dfrac{1}{2}$. Comme $a_{i-1}^2 - a_{i-1} \geqslant -\dfrac{1}{4}$ (cette inégalité est équivalente à l'inégalité $\left(a_{i-1} - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$), on trouve

$$a_i^2 = a_{i+1} + a_{i-1}^2 - a_{i-1} \geqslant a_{i+1} - \frac{1}{4} > \frac{1}{2} - \frac{1}{4} > \frac{1}{4}.$$

On trouve $|a_i| > \dfrac{1}{2}$. Comme de plus $a_{i+1} \geqslant \dfrac{1}{2}$, on déduit que $a_i \geqslant a_{i+1} - |a_i - a_{i+1}| \geqslant -\dfrac{1}{2}$, ce qui force $a_i > \dfrac{1}{2}$, d'où la contradiction.

On déduit bien que $a_n \leqslant \dfrac{1}{2}$ pour tout indice n. En particulier, $a_{n+1} + a_n - 1 \leqslant 0$ pour tout n, de sorte qu'en réinjectant dans (★), on trouve que $a_{n+2} - a_{n+1}$ et $a_{n+1} - a_n$ sont toujours de signe contraire.

Étape 2 : La suite (a_n) alterne de signe : $a_n > 0$ si et seulement si $a_{n+1} \leqslant 0$.

Tout d'abord, si $a_n > 0$ pour tout indice n, on trouve en utilisant l'étape 1 que pour tout indice n, $0 < 1 - a_{n+1} - a_n < 1$, de sorte que $|a_{n+2} - a_{n+1}| = |a_{n+1} - a_n| \cdot |1 - a_{n+1} - a_n| < |a_{n+1} - a_n|$, et la suite $(|a_{n+1} - a_n|)$ est strictement décroissante, ce qui contredit sa périodicité.

De même, on ne peut pas avoir $a_n \leqslant 0$ pour tout indice n. Si c'est le cas, alors pour tout indice n, $a_{n+1} + a_n \leqslant 0$, donc $a_{n+1} + a_n < 0$ d'après notre supposition faite en début de solution. Ainsi, $1 - a_{n+1} - a_n > 1$, de sorte que $|a_{n+2} - a_{n+1}| = |a_{n+1} - a_n| \cdot |1 - a_{n+1} - a_n| > |a_{n+1} - a_n|$, et la suite $(|a_{n+1} - a_n|)$ est strictement croissante, ce qui contredit sa périodicité.

On suppose maintenant qu'il existe un indice n tel que $a_n > 0$ et $a_{n+1} > 0$. Au vu de la discussion précédente, il existe un indice $i \geqslant n + 2$, pris minimal, tel que $a_i \leqslant 0$. Quitte à changer n, on peut supposer $i = n + 2$. Mais alors

$$a_n^2 - a_n = a_{n+1}^2 - a_{n+2} \geqslant 0,$$

ce qui donne $a_n \geqslant 1$ après simplification par a_n qui est strictement positif. Ceci contredit l'étape 1.

De même, s'il existe un indice n tel que $a_n > 0$ et $a_{n+1}, a_{n+2} \leqslant 0$, on trouve par le même calcul que $a_n \geqslant 1$, ce qui est absurde.

On conclut donc que a_n change de signe à chaque indice.

Étape 3 : Conclusion

Considérons k un indice tel que $|a_k|$ est maximal (la suite (a_n) étant périodique, elle est bornée, ce qui justifie l'existence d'un tel k). On distingue différents cas selon les tailles de $|a_{k-2}|, |a_{k-1}|$ et $|a_k|$.

— Si $|a_{k-2}| = |a_k|$, alors $a_{k-2} = a_k$ d'après l'étape 2, mais cela contredit la supposition faite en début de solution.

— Si $|a_{k-1}| < |a_{k-2}| < |a_k|$. En particulier, $|a_k| > 0$. Si $a_k > 0$, alors $a_k - a_{k-2} = a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 < 0$, ce qui implique $a_{k-2} > a_k$, contredisant la maximalité de $|a_k|$. Si $a_k < 0$, alors $a_k - a_{k+2} = a_k^2 - a_{k+1}^2 > 0$, ce qui implique $a_{k+2} < a_k < 0$, contredisant la maximalité de $|a_k|$.

— Si $|a_{k-2}| \leqslant |a_{k-1}| \leqslant |a_k|$. On commence par supposer $a_k > 0$. D'après l'étape 2, on a $a_{k-2} < -a_{k-1} < a_k$. En réinjectant dans (★), on trouve

$$a_{k-1}^2 - a_{k-2}^2 = a_k - a_{k-2} > -a_{k-1} - a_{k-2},$$

ce qui se réécrit $(a_{k-2} + a_{k-1})(a_{k-1} - a_{k-2} + 1) > 0$. Puisque $a_{k-2} + a_{k-1} < 0$, on trouve $a_{k-1} - a_{k-2} > -1$, ce qui contredit la condition de l'énoncé.

Si maintenant on suppose que $a_k < 0$, on trouve d'après l'étape 2 que $a_{k-2} > -a_{k-1} > a_k$ et en réinjectant dans (★),

$$a_{k-2}^2 - a_{k-1}^2 = a_{k-2} - a_k > a_{k-2} + a_{k-1},$$

ce qui se réécrit $(a_{k-2} + a_{k-1})(a_{k-2} - a_{k-1} - 1) > 0$. Puisque $a_{k-2} + a_{k-1} > 0$, on trouve $a_{k-2} - a_{k-1} > 1$ ce qui contredit à nouveau l'énoncé.

On n'a donc pas de solution avec les suppositions de de début de solution, ce qui nous permet de conclure.

4 Entraînement de fin de parcours

Exercices

Exercice 1
Déterminer tous les triplets (x, y, z) de réels tels que :

$$\begin{cases} x^2 + y = 2x \\ y^2 + z = 2y \\ z^2 + x = 2z \end{cases}.$$

Exercice 2
Déterminer s'il existe une infinité de triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que chaque diviseur premier de $a! + b! + c!$ soit inférieur à 2026.

Exercice 3 (Kosovo 2026)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f\left(f\left(x^2 y\right) + x f(y)^2\right) = xy f\left(x + f(y)\right)$$

Exercice 4
Pour un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ et un entier strictement positif n, on note P_n le nombre de couples d'entiers (a, b) telles que $1 \leqslant a < b \leqslant n$ et $|P(a)| - |P(b)|$ est divisible par n.
Déterminer tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P_n \leqslant 2026$ pour tous les entiers strictement positifs n.

Solutions

Solution de l'exercice 1
En regoupant les mêmes variables d'un même coté on peut réecrire le système comme : Déterminer tous les triplets (x, y, z) de réels tels que :

$$\begin{cases} x^2 - 2x = -y \\ y^2 - 2y = -z \\ z^2 - 2z = -x \end{cases}.$$

En ajoutant 1 de chaque coté on peut alors factoriser nos expressions comme :

$$\begin{cases} (1-x)^2 = 1 - y \\ (1-y)^2 = 1 - z \\ (1-z)^2 = 1 - x \end{cases}.$$

En combinant les équations on trouve ainsi $(1-x) = (1-z)^2 = (1-y)^4 = (1-x)^8$.

Dès lors, $1 - x$ est solution de $a^8 - a = 0$ ou encore $a(a^7 - 1) = 0$. Les solutions sont donc $a = 0$ et $a = 1$. Qui force $1 - x = a$ à être parmi ces deux valeurs.

On trouve finalement que x vaut 1 ou 0. En injectant dans l'énoncé, on peut trouver que si une des variables est nulle elles le sont toutes et si une des variables vaut 1 elles sont toutes égales à 1.

Réciproquement, les deux triplets $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$ sont clairement solutions du système.

Solution de l'exercice 2
On va montrer que la réponse est négative.

On suppose par l'absurde que le problème est faux, ie qu'il y a une infinité de tels triplets, et par la suite on ne va considérer que de tels triplets (a, b, c), avec en plus $a \leqslant b \leqslant c$. S'il y a un triplet avec $a \geqslant 2027$, alors $2027 \mid a!$, $2027 \mid b!$, $2027 \mid c!$, et donc $a! + b! + c!$ admet un diviseur premier strictement supérieur à 2026, 2027.

On montre que b va être borné. Si $b \geqslant 2 \cdot 2026$, pour tout premier inférieur à 2026, puisque $a \leqslant 2026$, $v_p(b!) > v_p(a!)$, $v_p(c!) > v_p(a!)$, et donc $v_p(a! + b! + c!) = v_p(a!)$, et ce pour tout premier p inférieur à 2026, et donc pour tout premier divisant $a!$ ou $a! + b! + c!$. On a donc $a! + b! + c! = a!$, absurde. Donc $b < 2 \cdot 2026$.

On a une infinité de triplets (a, b, c), mais seulement un nombre fini de valeurs possibles pour a, b. Par principe des tiroirs, il existe a et b tels qu'il existe une infinité de c tels que $a + b! + c!$ ait chaque diviseur premier inférieur à 2026. On ne considérera que ces a, b fixés par la suite. On prend $c > 2026 + 2(a! + b!)$. Alors si $p \mid a! + b!$, $p \mid c!$ donc $p \mid a! + b! + c!$ et $p \leqslant 2026$. De plus pour tout premier $p \leqslant 2026$, $v_p(c!) > v_p(a! + b!)$, et donc $v_p(c! + a! + b!) = v_p(a! + b!)$. Aucun premier supérieur à 2027 ne divise $a! + b!$ ou $a! + b! + c!$, donc cette relation reste vraie pour tout p. Donc $a! + b! + c! = a! + b!$, absurde, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3
On commence par poser $x = 1$, qui donne $f\left(f\left(y\right) + f(y)^2\right) = yf\left(1 + f(y)\right)$. Comme tous ces

termes dépendent uniquement de $f(y)$, on trouve directement que f est injective, en remplaçant y par a puis par b, si a et b sont tels que $f(a) = f(b)$.
On pose maintenant $y = \dfrac{1}{x}$ pour faire disparaître le xy, ce qui donne par injectivité :

$$f(x) + xf\left(\frac{1}{x}\right)^2 = x + f(1/x)$$

Cette expression ne fait intervenir que $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$, donc en remplaçant x par $\dfrac{1}{x}$, on a une deuxième équation vérifiant la même propriété :

$$\frac{f(x)^2}{x} + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + f(x)$$

On a donc un système de deux équations à deux inconnues. Pour alléger, notons $a = f(x)$ et $b = f\left(\frac{1}{x}\right)$. On a alors $a + xb^2 = x + b$ et $a^2/x + b = 1/x + a$. Ainsi, $x(b^2 - 1) = b - a$ et $(a^2 - 1)/x = a - b$. En les multipliant, il vient

$$(a^2 - 1)(b^2 - 1) = -(b - a)^2$$

Après développement, et simplification, cela se réarrange en

$$(ab - 1)^2 = 0$$

D'où $f(x)f(1/x) = 1$ pour tout $x > 0$. En particulier, $f(x) = 1$ si et seulement $x = 1$ car f est injective. On utilise maintenant l'identité $f(1/x) = 1/f(x)$ (bien défini car f est strictement positive) sur la première équation, ce qui fournit

$$f(x) + \frac{x}{f(x)^2} = x + \frac{1}{f(x)}$$

Cette expression se factorise sous la forme

$$(f(x) - x)\left(1 - \frac{1}{f(x)^2}\right) = 0$$

On a donc $f(x) = x$ ou $f(x) = 1$ pour tout x, mais comme on a vu que $f(x) \neq 1$ pour $x \neq 1$, on a bien $f(x) = x$ pour tout x (ce qui est valable pour $x = 1$ aussi).
Finalement, la seule solution est l'identité, dont on vérifie qu'elle convient bien.

Solution de l'exercice 4
On élimine directement les polynômes constants, qui ne sont clairement pas solutions.

On va montrer que P est injectif modulo n pour tout n. Si jamais il existe n tel que P n'est pas injectif modulo n, alors il existe une valeur c tel que $P(m) \not\equiv c \pmod{n}$ pour tout m. Donc $P(m) \not\equiv c + kn \pmod{ln}$ pour tous k, l, m entiers. Donc P évite l valeurs modulo ln.

Quitte à remplacer P par $-P$, on peut supposer que P a un coefficient dominant strictement positif. Donc il existe $M > 0$ tel que si $m \geqslant M$, $P(m) \geqslant 0$. Donc $|P|$ évite au plus $l - M$ valeurs modulo ln (car une valeur évitée par P mais prise par $|P|$ est prise par $|P(0)|$ ou $|P(1)|$ ou ... ou $|P(M-1)|$). En prenant l assez grand, on a que $|P|$ évite au moins 2027

valeurs modulo ln.

On note k_1 le nombre de fois où la première valeur est prise par $|P(1)|, \ldots, |P(ln)|$, k_2 le nombre de fois où la deuxième valeur est prise par $|P(1)|, \ldots, |P(ln)|$, ..., $k_{ln-2027}$ le nombre de fois où la $ln-2027$-ème valeur est prise par $|P(1)|, \ldots, |P(ln)|$. Alors $P_n = \sum_{i=1}^{ln-2027} \binom{k_i}{2}$. Or pour tout entier $x \in \mathbb{N}$, $\binom{x}{2} \geqslant x-1$. En effet, si $x=0$ c'est vrai, si $x=1$ c'est vrai, et si $x \geqslant 2$ c'est vrai puisque $\frac{x}{2} \geqslant 1$. Donc $P_n = \sum_{i=1}^{ln-2027} \binom{k_i}{2} \geqslant \sum_{i=1}^{ln-2027} k_i - 1 = ln - (ln-2027) = 2027$, puisque clairement $\sum_{i=0}^{ln-2027} k_i = ln$. Donc dans ce cas-là P n'est pas solution.

Donc P est injectif modulo n. Donc si $n \mid P(i)-P(j)$, $n \mid i-j$. Donc $P(i)-P(j) \mid i-j$. On fixe j, on a donc $P(i) \leqslant i + P(j) - j$ pour tout i assez grand. Puisque P est à coefficients entiers et à coefficient dominant strictement positif, on a donc $P(n) = n + C$. Si $C \geqslant 0$, clairement P est solution car alors $P_n = 0$ pour tout n.

Si $C < 0$, alors si $1 \leqslant a < b \leqslant -C$, $|P(a)| - |P(b)| = -(a-b)$ n'est pas divisible par n. Si $-C \leqslant a < b \leqslant n$, $|P(a)| - |P(b)| = a - b$ n'est pas divisible par n. On regarde donc les paires (a,b) avec $1 \leqslant a < -C < b \leqslant n$. Alors $|P(a)| - |P(b)| = -a - C - (b+C) = -a - b - 2C$. Clairement, à a fixé, au plus une valeur de b satisfait $n \mid -a-b-2C$. Donc $P_n \leqslant -C-1$. Si $-C-1 \leqslant 2026$, soit $C \geqslant -2027$, P est solution. Si $C < -2027$, alors en prenant n assez grand, pour tout $1 \leqslant a < C$, on a $b = n-a-2C$ qui vérifie bien $C < b \leqslant n$, et donc $n \mid |P(a)| - |P(b)|$, et donc $P_n \geqslant -C-1 > 2026$, et donc P n'est pas solution.

Finalement, les solutions sont les $P(X) = X + C$ et les $P(X) = -(X+C)$, avec $C \geqslant -2027$.

VII. Groupe E

Contenu de cette partie

1 Première partie 614
1 Géométrie : Géométrie dynamique (Aurélien) 614
2 Arithmétique : Fonctions arithmétiques (Théo) 615
3 Algèbre : Équations fonctionnnelles non-classiques (Rémi) 627
4 Algèbre : Polynômes (Melvil et Hadriel) 643
5 Combinatoire : Grilles (Oscar) 650
6 Arithmétique : TD de niveau P1/P2 (Emilhan) 656
7 Combinatoire : Problèmes à goût d'algèbre/d'arithmétique (Anatole) . . 665
8 Nombres Complexes (Akin) 672
2 Entraînement de mi-parcours 678
3 Deuxième partie 689
1 Combinatoire : Séries génératrices (Théo) 689
2 Géométrie : TD de niveau P1/P2 (Gaëtan) 690
3 Arithmétique : Équations fonctionnelles dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ (Antoine D) 698
4 Combinatoire : TD de niveau P1/P2 (Arthur) 705
5 Géométrie : Petites idées simples (David) 709
6 Arithmétiques : Puissances (Maxime et Solal) 729
7 Algèbre : TD de niveau P1/P2 (Erik et Anatole) 772
8 Géométrie : Inversions (Serge) 779
4 Entraînement de fin de parcours 788

1 Première partie

1 Géométrie : Géométrie dynamique (Aurélien)

Ce cours est inclus dans le polycopié de géométrie dynamique d'Aurélien qui sera publié sous peu sur le site de la POFM.

2 Arithmétique : Fonctions arithmétiques (Théo)

L'objectif de ce TD était de voir des fonctions arithmétiques lorsqu'elles apparaissent explicitement. Parfois il faut utiliser leur expression explicite, parfois il faut utiliser les définitions ou propriétés de celles-ci.

Dans tous les exercices, pour tout $n \geqslant 1$, $\varphi(n)$ est la fonction indicatrice d'Euler, $\tau(n)$ le nombre de diviseurs de n, $p(n)$ le plus grand facteur premier de n et $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n. Les premiers exercices du TD sont voulus relativement abordables.

Exercices

Échauffement

Exercice 1
Déterminer tous les entiers strictement positifs n pour lesquels

$$1^{\varphi(n)} + 2^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)}$$

est premier avec n.

Exercice 2
Soit n un entier vérifiant $n \geqslant 2$, on note $p_1, \dots p_k$ ses diviseurs premiers 2 à 2 distincts. On suppose que n divise

$$2^{\varphi(n)} + 3^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)}$$

Montrer que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_1 p_2 \cdots p_k}$ est entier

Exercice 3
Une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs vérifie la condition

$$a_{n+1} = a_n + \tau(n)$$

pour tout entier positif n. Déterminer si deux termes consécutifs de cette suite peuvent être des carrés parfaits.

Exercice 4
Soit n un entier strictement positif. On note $g(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n de la forme $6k+1$ et $h(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n de la forme $6k-1$, où k est un entier non négatif. Déterminer tous les entiers positifs n tels que $g(n)$ et $h(n)$ soient de parités différentes.

Exercice 5
Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que $\tau(n)$ soit le plus grand diviseur de n différent de n.

Exercice 6
Pour n un entier strictement positif, on note $\alpha(n)$ la moyenne arithmétique des diviseurs de n et $\beta(n)$ la moyenne arithmétique des nombres $1 \leqslant k \leqslant n$ premiers avec n.

Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que $\alpha(n) = \beta(n)$.

Échauffement un peu plus intense

Exercice 7
Déterminer tous les entiers n strictement positifs tels que $\tau(n) \mid 2^{\sigma(n)} - 1$

Exercice 8
Déterminer tous les entiers strictement positifs n tels que $\sigma(n) = \tau(n)\lceil\sqrt{n}\rceil$.

Exercice 9
Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que

$$a + b = \varphi(a) + \varphi(b) + \operatorname{pgcd}(a, b).$$

Exercice 10
Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n pour lesquels $\varphi(n)$ et $\tau(n)$ sont tous les deux des carrés parfaits.

Exercice 11
Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ qui vérifient $\dfrac{\sigma(n)}{p(n) - 1} = n$.

Exercice 12
Pour tout entier n strictement positif, on note $\tau_1(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n qui sont congrus à 1 modulo 3. Déterminer toutes les valeurs entières positives possibles de la fraction

$$\frac{\tau(10n)}{\tau_1(10n)}.$$

Exercice 13
Déterminers les entiers n strictement positifs tels que n divise $\varphi(n)^{\tau(n)} + 1$ mais $\tau(n)^5$ ne divise pas $n^{\varphi(n)} - 1$.

Exercice 14
Déterminer s'il existe une infinité d'entiers m strictement positifs pour lesquels l'équation $\sigma(n) = m$ n'a qu'une seule solution.

Exercice 15
Soit x, y des entiers strictement positifs tels que pour tout n,

$$(ny)^2 + 1 \mid x^{\varphi(n)} - 1.$$

Montrer que $x = 1$.

Exercice 16
Déterminer toutes les valeurs impaires que peut prendre $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)}$ lorsque n parcourt $\mathbb{N}^*$.

Exercice 17
On définit une pseudo dérivation Δ sur $\mathbb{N}^*$ par $\Delta(p^k) = kp^{k-1}$ pour tout premier p et entier strictement positif k, et $\Delta(mn) = \Delta(m)\Delta(n)$ si m et n sont premiers entre eux.

Existe-t-il, pour tout entier $k \geqslant 1$, un entier m tel que $\Delta^{(k)}(m) = m$ mais $\Delta^{(j)}(m) \neq m$ pour tout $0 < j < k$?

Solutions

Solution de l'exercice 1
Soit p un premier divisant n. On peut regrouper les termes de $1^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)}$ par groupe de p consécutifs : dans chaque tel groupe, comme $p-1$ divise $\varphi(n)$, les $p-1$ premiers termes valent 1 mod p, et le dernier vaut 0 modulo p. Ainsi

$$1^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)} \equiv \frac{n}{p} \times (p-1) \equiv \frac{-n}{p} \pmod{p}.$$

Ainsi p divise $1^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)}$ si et seulement si p divise n/p, donc si p^2 divise n. De ceci on déduit que n est premier avec $1^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)}$ si et seulement si n est squarefree.

Solution de l'exercice 2
Soit n divisant $2^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)}$. Celui-ci est alors premier avec $1^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)}$, donc par l'exercice précédent est squarefree. De plus, en reprenant les calculs précédents, on a que pour tout i entre 1 et k,

$$2^{\varphi(n)} + \cdots + n^{\varphi(n)} \equiv -1 - \frac{n}{p_i} \pmod{p_i}.$$

Ainsi comme p_i divise n, p_i divise aussi $1 + \frac{n}{p_i}$, donc divise $\sum_{j=1}^{k} \frac{n}{p_j} + 1$. Ceci étant vrai pour tout i, on a que n divise $\sum_{j=1}^{k} \frac{n}{p_j} + 1$, donc en divisant par n, on obtient que $\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j} + \frac{1}{n}$ est entier, ce qui, comme $n = p_1 \dots p_k$ puisqu'il est square free, donne exactement le résultat voulu.

Solution de l'exercice 3
Supposon qu'il existe deux entiers consécutifs n et $n+1$ avec $n \geqslant 1$ tels que a_n et a_{n+1} sont des carrés. Soit m un entier strictement positif tel que $a_n = m^2$. Comme $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$, on a $a_{n+1} \leqslant m^2 + \sqrt{n}$. Or par définition, $a_{n+1} > a_n$, donc comme a_{n+1} est un carré, on a $a_{n+1} \geqslant (m+1)^2$. Ainsi $m^2 + 2\sqrt{n} \geqslant (m+1)^2 > m^2 + 2m$, donc $m < \sqrt{n}$.

Or cela implique $a_n < n$, mais il est facile de voir par récurrence que $a_k \geqslant k$ pour tout entier $k \geqslant 1$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 4
Posons $n = 2^b 3^c m$ avec m premier avec 2 et 3. Les diviseurs avant ± 1 modulo 6 de n sont exactement les diviseurs de m (car modulo 6, les nombres ne valant pas ± 1 sont ceux non premiers avec 6). Ainsi $g(m) = g(n)$ et $h(m) = h(n)$ et $g(m) + h(m) = \tau(m)$.

Comme on a l'équation $g(n) + h(n) = \tau(m)$, $g(n)$ et $h(n)$ sont de parité différente si et seulement si $\tau(m)$ est impair, de manière équivalente si m est un carré. Ainsi les entiers n solutions sont exactement les entiers de la forme $n = 2^b 3^c k^2$ pour $b, c, k \in \mathbb{N}^*$ (on peut enlever la contrainte k premier avec 2 et 3 sans souci).

Solution de l'exercice 5
Soit n un tel entier, posons $k = \tau(n)$. Les diviseurs de n sont parmis $\{1, \dots, k\} \cup \{n\}$. En particulier, comme il y a $k+1$ nombres dans cet ensemble, au plus un d'entre eux ne divise pas n. Supposons $k \geqslant 5$. Ainsi soit $k-1$, soit $k-2$ et $k-3$ divisent n.

Si $k-1$ divise n, comme $k-1$ est premier avec n, $k(k-1)$ divise n et est strictement plus grand que k, donc $k(k-1) = n$. En particulier, soit p un facteur premier de k, $p(k-1) \geqslant 2(k-1) > k$ car $k > 2$, donc de même $p(k-1) = n$, donc k est premier. En faisant le même raisonnement $k-1$ est premier, donc comme $k-1$ et k sont deux premiers consécutifs, $k = 3$ ce qui est absurde.

Si $k-1$ ne divise pas n, $k-2$ et $k-3$ divisent n. Ir $(k-2)(k-3) \geqslant 3(k-3) = k+2k-9 > k$ car $k \geqslant 5$, et $(k-2)(k-3)$ divise n (car $k-2$ et $k-3$ sont premiers entre eux), donc $n = (k-2)(k-3)$. Comme k divise n, k divise 6 ce qui implique $k = 6$. En particulier, les diviseurs de n sont $1, 2, 3, 4, 6, n$. n est donc un multiple de 12, et vaut forcément 12 car tout multiple de 12 a strictement plus que $\tau(12) = 6$ diviseurs. Réciproquement 12 est bien solution.

Il reste donc à traiter les cas $k = 1, 2, 3, 4$:

— Si $k = 1$, $n = 1$ qui ne vérifie pas l'énoncé car $n = k$.

— Si $k = 2$, n est premier, mais son plus grand diviseur différent de lui-même est 2, donc il ne peut être premier, ce qui est absurde.

— Si $k = 3$, n est de la forme p^2 avec p premier. De plus il est divisible par $k = 3$, donc $n = 9$, qui réciproquement est bien solution.

— Si $k = 4$, n est de la forme p^3 ou pq avec p, q premiers, et divisible par $k = 4$. L'entier n est donc forcément de la forme p^3 avec $p = 2$, donc égal à 8, qui réciproquement est bien solution.

Ainsi les solutions sont $n = 8, 9, 12$.

Solution de l'exercice 6

Notons déjà que 1 est clairement solution, supposons désormais que $n \geqslant 2$ vérifie $\alpha(n) = \beta(n)$.

Soit $k \in \{1, \dots, n-1\}$, alors k est premier avec n si et seulement si $n-k$ l'est. De plus n n'est pas premier avec n. En groupant les éléments premiers avec n en couple de la forme $(k, n-k)$, on a que $\beta(n) = n/2$ (ici on a considéré que $n/2$ n'est pas premier avec n, ce qui est vrai sauf si $n = 2$, mais pour $n = 2$ la formule est encore correcte).

Notons $1 < d_1, \dots, d_k < n$ les diviseurs positifs stricts de n. Notons que $d_k \leqslant \frac{n}{2}$ et $d_i \leqslant \frac{n}{2} - 1$ si $1 \leqslant i \leqslant k-1$. En particulier,

$$1 + d_1 + \cdots + d_k + n \leqslant 1 + n + \frac{kn}{2} - (k-1) = \frac{(k+2)n}{2} - (k-2)$$

En particulier on a $\alpha(n) \leqslant \frac{n}{2} - \frac{k-2}{k+2}$, donc dès que $k > 2$ $\alpha(n) < \beta(n)$.

Il reste donc à traiter le cas où n a $2, 3$ ou 4 diviseurs. Si n a 2 diviseurs, $\alpha(n) = \frac{n+1}{2} \neq \beta(n)$. Si n a 3 diviseurs, n est de la forme p^2, et $\alpha(n) = \frac{1+p+p^2}{3}$. Ainsi $\alpha(n) = \beta(n)$ équivaut à $2(1+p) = p^2$. Comme $1+p$ est premier avec p, strictement plus grand que 1, et divise p^2, c'est absurde.

Si n a 4 diviseurs, n est de la forme p^3 ou pq. Si $n = p^3$, on a alors $\frac{1+p+p^2+p^3}{4} = \frac{p^3}{2}$, donc $p^3 = 2(1+p+p^2)$, ce qui est absurde car $1+p+p^2$ est premier avec p. Si $n = pq$, on a $\frac{pq}{2} = \frac{(1+p)(1+q)}{4}$, donc $2pq = 2(1+p+q)$. Ainsi comme $pq - p - q + 1 = 2$ $(p-1)(q-1) = 2$, donc $(p, q) = (2, 3)$ ou $(3, 2)$, donc $n = 6$, qui réciproquement convient.

Les solutions sont donc $n = 1$ et $n = 6$.

Solution de l'exercice 7

Notons que $n = 1$ est clairement solution, supposons désormais qu'un $n \geqslant 2$ est solution et posons $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{b_i}$ où k est un entier strictement positif, les p_i sont des premiers deux à deux distincts, et les b_i des entiers strictement positifs qu'on suppose dans l'ordre croissant (quitte à intervertir les facteurs premiers). Considérons p le plus petit facteur premier de $\tau(n)$ (astuce standard sur un tel exercice), celui-ci divise $2^{\sigma(n)} - 1$. De plus, par définition $q \leqslant b_1 + 1$.

Notons ω l'ordre 2 modulo q qui existe par la divisibilité précédente. On a que ω divise $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{b_i+1}-1}{p_i-1}$, et par le théorème de Petit Fermat, ω divise $q - 1$.

Supposons par l'absurde $\omega \neq 1$ et considérons r un facteur premier de ω, celui-ci divise $q - 1$, et un nombre de la forme $\frac{p_i^{b_i+1}-1}{p_i-1}$. Ainsi il existe i tel que r divise $p_i^{b_i+1} - 1$, notons ω' l'ordre de p_i modulo r. Comme ω' divise $b_i + 1$, ainsi par définition, tout facteur premier de ω' vaut au moins q, donc soit $\omega' = 1$, soit $\omega' \geqslant q \geqslant r > r - 1 \geqslant \omega'$ ce qui est absurde.

Ainsi comme $\omega' = 1$, p_i vaut 1 modulo r, donc comme r divise $\frac{p_i^{b_i+1}-1}{p_i-1}$ qui vaut $1+\cdots+p_i^{b_i} \equiv b_i + 1 \pmod r$, on a que r divise $b_i + 1$ donc $\tau(n)$. Comme $r < q$ on a une contradiction. Ainsi $\omega = 1$, donc $2 \equiv 1 \pmod q$ ce qui est absurde.

Ainsi seul $n = 1$ est solution

Solution de l'exercice 8

L'entier $n = 1$ est clairement solution, on supposera donc $n \geqslant 2$ par la suite. Supposons que n vérifie l'égalité de l'énoncé. En fait l'inégalité $\sigma(n) \geqslant \tau(n)\sqrt{n}$ est connue. On peut associer les diviseurs par paires de la forme $(d, n/d)$ (en gardant éventuellement $\sqrt{n}$), de moyenne géométrique $\sqrt{n}$, donc de moyenne arithmétique valant au moins $\sqrt{n}$. Ainsi la moyenne totale de tout les diviseurs vaut $\frac{\sigma(n)}{\tau(n)}$ et vaut au moins $\sqrt{n}$.

Traitons déjà le cas où n est un carré, on a égalité dans le raisonnement précédent. Or 1 et n forment une paire, dont la moyenne arithmétique ne vaut pas $\sqrt{n}$ (elle est strictement plus grande car $1 \neq n$), donc on n'a pas égalité dans l'inégalité précédente. n n'est donc pas solution.

Si n n'est pas un carré il a un nombre pair de diviseurs qu'on note $d_1 < \cdots < d_{2k}$. Comme les paires $(d_i, d_{2k+1-i}$ pour i entre 1 et k ont produit n, et vérifient $d_1 < \cdots < d_k < \sqrt{n}$, on a que $d_1 + d_{2k} > d_2 + d_{2k-1} > \cdots > d_k + d_{k+1} > 2\sqrt{n}$. Posons ℓ tel que $\ell^2 < n < (\ell + 1)^2$, on a donc que $d_{k-i} + d_{k+1+i} \geqslant 2\ell + 1 + i$ pour tout i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant k - 1$. En particulier, $\sigma(n) \geqslant k(2\ell + 1) + 0 + \cdots + k - 1 = k(2\ell + 1) + \frac{k(k-1)}{2}$.

Or par hypothèse, $\sigma(n) = 2k(\ell + 1)$, donc $2k(\ell + 1) = k(2\ell + 1) + \frac{k(k-1)}{2}$, ainsi $k \geqslant \frac{k(k-1)}{2}$, donc $k \leqslant 3$.

Dans le cas $k = 3$, on a forcément égalité partout, c'est à dire que $n + 1 = 2\ell + 3 < 2\sqrt{n} + 3$, donc $n - 2\sqrt{n} = \sqrt{n}(\sqrt{n} - 2) < 2$, ce qui est faux dès que $\sqrt{n} \geqslant 3$. Comme le plus petit nombre avec 6 diviseurs est plus grand que 9, il n'y a pas de solutions.

Dans le cas $k = 2$, n est forcément de la forme p^3 ou pq avec $p < q$ premiers. Dans le cas pq, on veut que $1 + p + q + pq = 4\lceil pq \rceil$. Or dès que $pq \geqslant 25$, on a que $pq \geqslant 4(\sqrt{pq} + 1)$, car ceci est équivalent à $\sqrt{pq}(\sqrt{pq} - 4) \geqslant 4$, qui est vrai, et on ne peut avoir égalité. De plus, comme 4 divise $1 + p + q + pq = (1 + p)(1 + q)$, si p ou q vaut 2 l'autre vaut 3 mod 4. On se retrouve avec $(p, q) = (2, 3), (2, 7), (2, 11), (3, 5), (3, 7)$ à l'ordre près vu que $p \neq q$. Dans chacun des cas, sauf

6, on se rend compte qu'on a pas égalité : pour $2, 3)$ on obtient bien $12 = 12$, pour les autres dans l'ordre $24 \neq 16, 36 \neq 20, 24 \neq 16, 32 \neq 20$.

Dans le cas p^3, de même on montre que $p^3 \geqslant 25$ entraîne une contradiction, et par parité on ne peut avoir $p = 2$, donc $p = 3$. Or $1 + 3 + 9 + 27 = 40 \neq 4 \times 6 = 4\lceil\sqrt{27}\rceil$. Donc il n'y a pas de solution.

Reste le cas où $k = 2$ et n est premier, pour lequel on veut que $1 + p = 2\lceil\sqrt{p}\rceil$. Or dès que $\sqrt{p} \geqslant 3$, on a

$$1 + p - 2\lceil\sqrt{p}\rceil \geqslant 1 + p - 2(1 + \sqrt{p}) = \sqrt{p}(\sqrt{p} - 2) - 1 > 0.$$

Ainsi les seuls p pouvant convenir sont impairs vu l'équation est inférieur à 9, donc sont $3, 5, 7$. Dans chacun de ces cas, l'équation $1 + p = 2\lceil\sqrt{p}\rceil$ devient $4 = 4$, $6 = 6$ et $8 = 6$, donc seuls 3 et 5 sont solutions.

Ainsi les solutions sont $1, 3, 5, 6$.

Solution de l'exercice 9

Soit (a, b) un couple solution. Déjà si $a = b$, on obtient $a = 2\varphi(a)$. En particulier a ne vaut pas 1, et si on note p le plus grand facteur premier de a, de par la formule définissant $\varphi(a)$, on a que $V_p(\varphi(a)) = V_p(a) - 1$, donc il faut forcément $p = 2$. Ainsi a est une puissance de 2, et réciproquement, si $a = b = 2^k$ avec $k \geqslant 1$, $a + b = 2^{k+1} = 2^{k-1} + 2^{k-1} + 2^k = \varphi(a) + \varphi(b) + \mathrm{pgcd}(a, b)$.

Si $a \neq b$, sans perte de généralité, supposons $a > b$. Notons p_1 le plus petit facteur premier de a, comme $\mathrm{pgcd}(a, b) \leqslant b$, celui-ci est un diviseur de a différent de a, donc $\mathrm{pgcd}(a, b) \leqslant \frac{a}{p_1}$. De plus, si a s'écrit de la forme $p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$, où les a_i sont non nuls et les p_i dans l'ordre croissant, on a que

$$\varphi(a) = (p_1 - 1)p_1^{a_1 - 1} \prod_{j=2}^{k} (p_j - 1)p_j^{a_j - 1} \leqslant \frac{p_1 - 1}{p_1} p_1^{a_1} \prod_{j=2}^{k} p_j^{a_j} = n\frac{p_1 - 1}{p_1}.$$

En particulier, $\varphi(a) + \mathrm{pgcd}(a, b) \leqslant a$. Comme de plus, $\varphi(b) \leqslant b$, en sommant on obtient que $\varphi(a) + \varphi(b)\mathrm{pgcd}(a, b) \leqslant a + b$. Pour avoir égalité, il faut que $\varphi(b) = b$, ce qui n'est possible que si $b = 1$ (car tous les entiers entre 1 et b doivent être premiers avec b, donc b doit être premier avec lui-même), et que $\mathrm{pgcd}(a, b) = a/p_1$, donc $a = p_1$. Réciproquement, si a est premier et b vaut 1 (ou inversement, $a + b = a + 1 = a - 1 + 1 + 1 = \varphi(a) + \varphi(b) + \mathrm{pgcd}(a, b)$ ce qui conclut.

Ainsi les couples solutions sont les couples de la forme $(2^k, 2^k)$ pour $k \geqslant 1$, ou $(1, p)$ ou $(p, 1)$ avec p premier.

Solution de l'exercice 10

Le plus simple d'abord est de chercher des solutions de la forme $n = p^k$ avec p premier et k entier positif. On souhaite donc que $\varphi(n) = (p-1)p^{k-1}$ soit un carré, donc il faudrait que $p-1$ soit premier, et $k - 1$ soit pair, et tel que $\tau(n) = k + 1$ soit un carré (donc pair). Pour cela on prend $k = (2m)^2 - 1$ et $p = 2$, qui vérifie donc exactement les contraintes demandées. Tous les nombres de la forme $2^{(2m)^2-1}$ avec $m \geqslant 1$ sont solution.

Solution de l'exercice 11

Soit n solution. Posons $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ où les p_i sont deux à deux distincts, en ordre croissant, et

les a_i sont strictement positifs. On a alors

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1}}{n} = \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i - p_i^{-a_i}}{p_i - 1} \leqslant \prod_{i=1}^{k} \frac{p_i}{p_i-1}.$$

Vu la forme actuelle, il est très probable que ce produit vale au plus p_k. Formalisons cela :

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{p_k}{p_1 - 1} \prod_{i=2}^{k} \frac{p_{i-1}}{p_i - 1}.$$

Notons que par stricte croissance, $\frac{p_{i-1}}{p_i-1} \leqslant 1$ avec égalité si et seulement si $p_{i-1} = p_i - 1$, donc $i = 1$ et $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$. Sinon, on a $p_{i-1} \leqslant p_i - 2$, donc

$$p_k \frac{p_{i-1}}{p_i - 1} \leqslant p_k \frac{p_i - 2}{p_i - 1} = p_k - \frac{p_k}{p_i - 1} < p_k - 1.$$

Donc s'il existe i tel que $\frac{p_{i-1}}{p_i-1} < 1$, alors $\frac{\sigma(n)}{n} < \frac{p_k-1}{p_1-1} \leqslant p_k - 1 = p(n) - 1$, donc n n'est pas solution.

Ainsi si n est solution, soit $k = 1$ et n est une puissance d'un nombre premier, soit $k = 2$ et $p_1 = 2$ et $p_2 = 3$.

Réciproquement supposons que n est une puissance d'un nombre premier posons $n = p^k$ avec k un entier strictement positif, on a $n = \frac{p^{k+1}-1}{(p-1)^2}$, donc $p^k(p-1)^2 = p^{k+1} - 1$. Le terme de gauche est divislbe par p, mais celui de droite ne l'est pas, ce qui absurde.

Si n est de la forme $2^k 3^b$ avec k et b des entiers strictement positifs, on a $n = \frac{(2^{k+1}-1)(3^{b+1}-1)}{4}$ donc $2^{k+2}3^b = (2^{k+1} - 1)(3^{b+1} - 1)$. En particulier comme $2^{k+1} - 1$ est premier, c'est une puissance de 3. Il est connu que cela implique $k = 1$ ou $k = 0$ (il suffit de regarder mod 8), donc dans notre cas $k = 1$. Ainsi l'équation devient $8 \times 3^b = 3 \times (3^{b+1} - 1)$. En regardant la valuation 3 adique, on obtient $b = 1$, donc $n = 6$.

Réciproquement si $n = 6$, $\frac{\sigma(n)}{p(n)-1} = \frac{12}{2} = 6$ donc 6 est bien l'unique solution.

Solution de l'exercice 12

Soit n un entier strictement positif, calculons $\frac{\tau(10n)}{\tau_1(10n)}$. Posons $n = 3^k m$ avec m premier avec 3, on a alors que $\tau_1(10n) = \tau_1(10m)$ car les diviseurs de $10n$ valant 1 mod 3 sont premiers avec 3, donc sont exactement les diviseurs de $10m$ valant 1 mod 3. Et $\tau(10n) = \tau(10m)(k+1)$.Ceci nous permet de nous rendre compte qu'en prenant $m = 1$, comme $\tau(10) = 4$ et $\tau_3(10)2$, on obtient tous les nombres de la forme $2(k+1)$ c'est-à-dire tous les entiers pairs.Posons désormais $10n = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k} p_1^{c_1} \dots p_\ell^{c_\ell}$ où les q_i et p_j sont deux à deux distincts, les c_i et c_j sont strictement positifs, et les p_i sont les facteurs premiers congrus à 2 mod 3 de n, et les q_i sont les facteurs premiers congrus à 1 mod 3 de n. Tout diviseur se décompose comme un produit de ces facteurs premiers, d'exposant entre 0 et b_i ou c_i, et ce choix de puissance ne change pas la congruence mod 3 du diviseur. Posons $n_1 = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k}$ et $n_2 = p_1^{c_1} \dots p_\ell^{c_\ell}$, ainsi $\tau(n) = \tau(n_1)\tau(n_2)$ et $\tau_1(n) = \tau(n_1)\tau(n_1)$, donc

$$\frac{\tau(10n)}{\tau_1(10n)} = (k+1)\frac{\tau(n_2)}{\tau_1(n_2)}.$$

Ainsi, comme n_2 peut prendre toutes les valeurs multiples de 10 dont tous les facteurs premiers valent 2 mod 3, et k toutes les valeurs positives, il suffit de déterminer quelles valeurs ce rapport peut prendre.

Notons $\tau_3'(n_2)$ le nombre de facteurs de n_2 valant 2 mod 3. Montrons que

$$\tau_3(n_2) - \tau_3'(n_2) = \prod_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{c_j} (-1)^j.$$

Si on développe la somme sur le produit dans la somme précédente, on obtient un facteur qui vaut ± 1 pour chaque choix d'un uplet $(a_1, \dots, a_\ell)$ avec $0 \leqslant a_i \leqslant c_i$, qui vaut -1 si et seulement si le nombre de a_i impair est impair, i.e. si la somme des a_i est impaire. Ainsi comme un diviseur de la forme $p_1^{a_1} \dots p_\ell^{a_\ell}$ de n vaut $(-1)^{a_1+\dots+a_\ell} \pmod 3$, la somme précédente ajoute 1 pour chaque diviseur valant 1 mod 3, et enlève 1 pour chaque diviseur valant 2 mod 3, d'où l'égalité.

Or assez clairement $\sum_{j=0}^{c_j} (-1)^j$ vaut 0 si c_j est impair, 1 sinon, ainsi $\tau_3(n_2) - \tau_3'(n_2)$ vaut 0 ou 1. Comme $\tau_3(n_2) + \tau_3'(n_2) = \tau(n_2)$, on en déduit que $2\tau_3(n_2) = \tau(n_2)$ ou $\tau(n_2) + 1$.

Supposons désormais $\frac{\tau(n)}{\tau_3(n)}$ entier. Si $2\tau_3(n_2) = \tau(n_2)$, on a $\frac{\tau((n)}{\tau_3(n)} = 2(k+1)$ qui est pair (et on a déjà montré que les nombres pairs sont atteignables). Sinon, on a que $\tau(n_2) = 2\tau_3(n_2) - 1$, donc $\tau_3(n_2)$ est premier avec $\tau(n_2)$, donc divise forcément $k+1$. Ainsi $\tau(n_2)$ divise $\frac{\tau(n)}{\tau_3(n)}$, et celui-ci est divisible par $(V_2(n_2)+1)(V_5(n_2)+1)$, donc est forcément composé car $V_2(n_2) \geqslant 1$ et $V_5(n_2) \geqslant 1$.

Réciproquement si k est un nombre impair composé, on pose $k = ab$ avec $a, b > 1$, en posant $k = \tau_3(2^{a-1}5^{b-1})$, et $n = 3^{k-1}2^{a-1}5^{b-1}$, on a que $\tau(n) = kab$ et $\tau_3(n) = k$, donc $\frac{\tau(n)}{\tau_3(n)} = ab$, donc ab est bien de la forme de l'énoncé. Ainsi les entiers solutions sont les entiers pairs, et les entiers impairs composés (ou alternativement les entiers composés, et 2).

Solution de l'exercice 13

Supposons déjà n pair, dans ce cas $\varphi(n)$ doit être impair, donc n doit être égal à 2 (s'il possède un premier impair p, $p-1$ divise $\varphi(n)$ et si 4 divise n, 2 divise $\varphi(n)$). Réciproquement $n = 2$ convient car 2 divise 2, mais 2^5 ne divise pas 1.

Supposons désormais n impair et $n > 1$ qui ne convient pas. Notons que par hypothèse n et $\varphi(n)$ sont premiers entre eux, donc n est squarefree, donc en notant k son nombre de facteur premier, on a $k \geqslant 1$ et $\tau(n) = 2^k$. Soit q un facteur premier de n. On a alors que $\varphi(n)^{2^k} \equiv -1 \pmod q$, donc en mettant au carré, $\varphi(n)^{2^{k+1}} \equiv 1 \pmod q$. Ainsi $\varphi(n)$ admet un ordre mod q, qui divise 2^{k+1} mais pas 2^k, donc l'ordre vaut 2^{k+1}. En particulier, comme cet ordre divise $q-1$, on a que $V_2(q-1) \geqslant k+1$. Le même raisonnement peut aussi être fait pour n à la place de q, donc $V_2(n-1) \geqslant k+1$.

Par la seconde contrainte, on a que $V_2(n^{\varphi(n)} - 1) \leqslant 5k - 1$. Or par LTE si on note $q_1, \dots q_k$ les facteurs premiers de n, on a que

$$V_2(n^{\varphi(n)} - 1) = V_2(n^2 - 1) + V_2(\varphi(n)/2) \geqslant V_2(n-1) + 1 - 1 + \sum_{i=1}^{k} V_2(q_i - 1) \geqslant (k+1)(k+1).$$

Ainsi on a que $5k-1 \geqslant (k+1)^2$, donc $k(k-3) \leqslant -2$, ce qui est faux si $k \geqslant 3$. Donc $k = 1$ ou 2.

Si $k = 1$, n est premier, et modulo n, $\varphi(n)^{d(n)} + 1 \equiv (-1)^2 + 1 \equiv 2$, ce qui est absurde, donc n n'est pas solution. Si $k = 2$, on a égalité dans l'inégalité précédente, donc on doit forcément avoir $V_2(q_1 - 1) = 3 = V_2(q_2 - 1)$, donc $q_1 \equiv q_2 \equiv 9 \pmod{16}$. Ceci implique que n vaut $1 \pmod{16}$, donc on n'a pas égalité dans $V_2(n-1) = k+1$, ce qui est absurde.

Ainsi l'unique solution est $n = 2$.

Solution de l'exercice 14

On va montrer que la réponse est oui : il existe une infinité de m pour lesquels l'équation $\sigma(n) = m$ n'a qu'une seule solution. On va même montrer qu'il existe une infinité de m de la forme $p+1$ pour lesquels il existe un unique n, en l'occurence p, pour lequel $\sigma(n) = m$.

Supposons que cela est faux : pour tout p assez grand, il existe alors un entier $n_p \neq p$ tel que $\sigma(n_p) = p+1$. Le nombre n_p n'est pas divisible par p, sinon comme 1 et p divisent n_p et $\sigma(n_p) = p+1$, cela imposerait $n_p = p$.

Notons $n = q_1^{b_1} \dots q_k^{b_k}$ avec les q_i premiers deux à deux distincts, et les b_i strictement positifs. On a alors $p+1 = \prod_{i=1}^{k} \left(1 + q_i + \dots + q_i^{b_k - 1}\right)$. Quitte à prendre p impair (p est assez grand), il existe un i tel que $1+q_i+\dots+q_i^{b_k-1}$ est pair, donc q_i est impair, et b_k est impair. En particulier, $1+q_i$ divise $1+q_i+\dots+q_i^{b_k-1} = (1+q_i)\left(1+q_i^2+\dots+q_i^{b_k-1}\right)$, donc divise $1+p$, ainsi il existe $q_i < p$ divisant n_p tel que q_i+1 divise $p+1$.

En particulier, pour tout p assez grand (disons plus grand qu'un certain N), il existe $q < p$ tel que $q+1$ divise $p+1$. En particulier, on montre par récurrence sur p premier que tout p premier est divisible par un $q+1$ avec $q < N$. Notons P le produit des $q+1$ pour q premier vérifiant $q < N$. Par Dirichlet, il existe un p premier congru à 1 modulo P, donc $p+1 \equiv 2 \pmod{q+1}$ pour tout $q < N$, donc $q+1$ ne divise pas $p+1$ pour tout $q < N$ ce qui est absurde.

Ainsi comme demandé, il existe une infinité de m pour lesquels $\sigma(n) = m$ a une unique solution.

Solution de l'exercice 15

Considérons p un facteur premier de $(ny)^2 + 1$. Déjà p divise une somme de 2 carrés, donc p vaut 3 modulo 4, et est premier avec n. Et pour tout tel premier , il est connu qu'il existe un entier a tel que p divise a^2+1. Ainsi si de plus p ne divise pas y, en prenant $n \equiv y^{-1}a \pmod{p}$, on a que p divise $(ny)^2+1$. Fixons nous donc un tel p et un tel n.

De plus, l'ordre de x modulo p existe et divise $\varphi(n)$. Par Dirichlet, on peut choisir n premier valant $y^{-1}a \pmod{p}$ car a est non nul mod p par définition, ainsi l'ordre de x mod p divise $n-1$ et divise aussi $p-1$. Mais on peut aussi imposer que $n \equiv 2 \pmod{p-1}$ en imposant aussi $p > 3$: en effet, $p-1$ est premier avec p, et 2 est premier avec $p-1$, donc l'ordre divise à la fois $n-1 \equiv 1 \pmod{p-1}$ et $p-1$, donc vaut 1, ainsi p divise $x-1$.

Récapitulons : pour tout $p > 3$ valant 1 mod 4 et premier avec p, on a que p divise $x-1$. Donc $x = 1$.

Solution de l'exercice 16

Soit n un entier supérieur ou égal à 1, on pose $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{b_i}$ avec $k \geqslant 0$, les p_i des premiers deux

à deux distincts, et les b_i des entiers strictement positifs. On a que

$$\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)} = \frac{\prod_{i=1}^{k}(2b_i+1)}{\prod_{i=1}^{k} b_i}.$$

En particulier, $\frac{\tau(n^2)}{\tau(n)}$ ne peut prendre aucune valeur paire. Montrons par contre que cette quantité peut prendre toute les valeurs impaires. Déjà pour $n = 1$ on obtient 1. Notons que vu la formule précédente, il suffit de montrer que tout entier impair est produit de fractions de la forme $\frac{2n+1}{n+1}$.

Une idée naturelle est d'essayer de faire un produit téléscopique avec de telles fractions. Notons déjà que pour tout $k \geqslant 1$,

$$\frac{2n+1}{n+1}\frac{4n+1}{2n+1}\cdots\frac{2^k n+1}{2^{k-1}n+1} = \frac{2^k n+1}{n+1}.$$

Notons que à k fixé, $n+1$ divise $2^k n+1$ si et seulement s'il divise -2^k+1, donc en prenant par exemple $n = 2^k - 2$, on obtient $\frac{2^k n+1}{n+1} = \frac{(2^k-1)^2}{2^k-1} = 2^k - 1$. Ceci ne suffit malheureusement pas à obtenir tous les entiers : il faut généraliser.

Pour cela, on va viser d'avoir $n + 1 = a \times b$, avec a divisant $2^k n + 1$, donc de manière équivalente, a divisant $2^k - 1$. Prenons $a = 2^k - 1$ et b quelconque on a

$$\frac{2^k n+1}{n+1} = \frac{2^k(2^k-1)b - 2^k + 1}{(2^k-1)b} = \frac{2^k b - 1}{b}.$$

Utilisons cela pour montrer par récurrence que tout entier impair est produit de termes de la forme $\frac{2k+1}{k+1}$. Déjà 1 l'est. Pour l'hérédité, s'il existe $n \geqslant 3$ impair tel que tout entier impair i vérifiant $i < n$, i est produit de termes de la forme $\frac{2k+1}{k+1}$. Comme $n+1$ est pair, posons $n+1 = 2^a b$ avec b impair et $a \geqslant 1$. D'après ce qu'on a vu, $\frac{n}{b} = \frac{2^a b-1}{b}$ est un produit de fractions de la forme $\frac{2k+1}{k+1}$. Or $n = 2^k b - 1 \geqslant 2b - 1 \geqslant b$, et la chaîne d'inégalité est stricte à au moins un endroit, sauf si $b = 1$ et $k = 1$, ce qui implique $n = 1$ qui est absurde. Ainsi $b < n$, donc b est aussi produit de fractions de la forme $\frac{2k+1}{k+1}$. Donc $\frac{n}{b}b = n$ est produit de fractions de la forme $\frac{2k+1}{k+1}$, ce qui conclut l'hérédité.

Ainsi les valeurs entières possibles sont exactement les entiers impairs.

Solution de l'exercice 17

On va montrer que la réponse est oui : pour tout k, il existe un tel m. Notons déjà que pour $k = 1$ c'est assez évident puisque $\Delta(p^p) = p^p$.

Pour $k \geqslant 2$, on va adapter l'argument avec plusieurs facteurs premiers distincts $p_1, \ldots, p_k$ strictement plus grands que 3. L'objectif va être à chaque fois de changer la valuation p_i-adique de m en appliquant Δ pour revenir au point de départ, plus précisément on va chercher m tel que pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant k$, $V_{p_k}\left(\Delta^{(i)}(m)\right) = a_k$ si $i \neq k$, $a_k + 1$ sinon pour des a_i choisis intelligemment. Désormais, on prendra tous les indices mod k

A priori appliquer Δ à $\Delta^{(i)}(m)$ va diviser $\Delta^{(i)}(m)$ par $p_1 \ldots p_k$, et le multiplier par $a_1 \ldots a_{i-1}(a_i+1)a_{i+1}\ldots a_k$. Une supposition naturelle est que p_j divise a_j pour tout j, et p_{i+1} divise $a_i + 1$.

Ici on a un souci qui est que pour avoir p_j divise a_j et p_{j+1} divise a_j+1, on ne peut pas forcément avoir $a_j = p_j$ ou $p_{j+1} = a_j + 1$. Mais si la partie $\frac{a_1 \dots a_{i-1}(a_i+1)a_{i+1}\dots a_k}{p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1}^2 p_{i+2} \dots p_k}$ est première avec $p_1 \dots p_k$ et que celle-ci n'apporte aucun facteur carré, elle disparaîtra dans la suite. Récapitulons ce qu'on veut :

1. Pour tout i, p_i divise a_i.
2. Pour tout i, p_{i+1} divise $a_i + 1$.
3. Pour tout i, $\frac{a_1 \dots a_{i-1}(a_i+1)a_{i+1}\dots a_k}{p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1}^2 p_{i+2} \dots p_k}$, qu'on note s_{i+1} est premier avec les p_j et sans facteur carré.

Dans ce cas, on aura pour tout i,

$$\Delta\left(s_i p_1^{a_1} \dots p_{i-1}^{a_{i-1}} p_i^{a_i+1} p_{i+1}^{a_{i+1}} \dots p_k^{a_k}\right) = s_{i+1} p_1^{a_1} \dots p_i^{a_i} p_{i+1}^{a_{i+1}+1} p_{i+2}^{a_{i+2}} \dots p_k^{a_k}.$$

En particulier, on aura bien un cycle de taille k.
On peut remplacer l'item 3. par les items suivants :

3.a Pour tout $j \neq i$, p_j ne divise pas a_i.

3.b Pour tout $j \neq i+1$, p_j ne divise pas $a_i + 1$.

3.c Les a_i sont deux à deux premiers entre eux.

3.d Les a_i et $a_i + 1$ sont square-free.

3.e Pour tout j, $a_j + 1$ est premier avec chacun des a_i, sauf avec a_{j+1}, avec lequel il a un pgcd valant p_{j+1}.

En effet, 3.a, 3.b et 3.d assurent que s_{i+1} est premier avec les p_j, 3.c, 3.d et 3.e assurent que celui-ci est square-free.

Supposons qu'il existe $a_1, \dots, a_{i-1}$ vérifiant les différents items. Pour construire a_i, si $i < k$, on peut le construire valant -2 modulo $a_1 \dots a_{i-1} p_1 \dots p_{i-1} p_{i+1} \dots p_k$, 0 modulo p_i et -1 modulo p_{i+1}. Ceci donne par théorème des restes chinois une congruence modulo le produit des modulos, disons a modulo b, et permet de vérifier $1, 2, 3, 3a, 3b, 3c, 3e$. Pour $i = k$, on adapte en remplaçant a_1 par a_1/p_1 dans le premier cas, pour que les modulos soient bel et bien premiers entre eux.

Il suffit donc de montrer qu'il existe une infinité de k tel que $kb+a$ et $kb+a+1$ soient square-free, sachant que $\mathrm{PGCD}(a, k)$ et $\mathrm{PGCD}(a, k+1)$ est square free (les seuls facteurs premiers apparaissant avec multiplicité dans les modulos sont les p_i qui ne divisent pas a).

Montrons cela. Fixons $P > 0$ tel que tout facteur premier de b vaut au moins k, pour tout premier p vérifiant $p < P$, si k est premier avec p, il existe au plus deux classes pour k modulo p^2 pour lesquels $kb+a$ ou $kb+a+1$ est divisible par p^2, donc il y a au moins une classe modulo p^2 qui convient pour k. Si p divise k, si p^2 ne divise ni a ni $a+1$, prendre k valant 0 modulo p^2 empêche $kb + a$ et $kb + a + 1$ d'être divisible par p^2, et si sans perte de généralité p^2 divise a (et donc p est premier avec $a + 1$), prendre k valant 1 mod p^2 empêche p^2 de diviser $kb + a$ et $kb + a + 1$. Ainsi il existe une conguence k_0 modulo $\left(\prod_{p \leqslant P} p^2\right)$ (qu'on notera Q) tel que pour tout k valant k_0 modulo P, $kb + a$ et $kb + a + 1$ n'ont pas de facteurs premiers carré plus petit que P.

Ainsi si on prend k et la forme $Q\ell + k_0$, on sait que pour $Qb\ell + k_0 b + a$ et $Qb\ell + k_0 b + a + 1$, les éventuels facteurs carrés ne divisent ni Q ni b, et sont plus grand que P. Chaque potentiel

premier q strictement plus grand que P donne lieu à au plus deux congruences mod q^2 pour ℓ donnant un facteur premier au carré à un des deux termes. Si on choisit ℓ entre 1 et N, il y a donc au plus $2 + 2\frac{N}{q^2}$ choix interdits pour ℓ. Et seuls les facteurs q vérifiant $q^2 \leqslant Qb\ell + k_0 b + a + 1 \leqslant (Qb+1)N$ (quitte à prendre N assez grand) peuvent poser problème. Ainsi au total, lorsque N est assez grand, on a au plus :

$$\sum_{p \text{ premier, } P}^{\sqrt{(Qb+1)N}} \left(\frac{2N}{q^2} + 2\right) \leqslant 2N \sum_{p \geqslant P} \frac{1}{p^2} + 2\sqrt{(Qb+1)N}$$

valeurs de ℓ qui ne conviennent pas. Or comme la somme des $\frac{1}{n^2}$ converge, en choisissant dès le départ P grand, on a que $2N \sum\limits_{p \geqslant P} \frac{1}{p^2} < \frac{N}{2}$, et pour N grand, $2\sqrt{(Qb+1)N} < \frac{N}{2}$. Il y a donc strictement moins de N valeurs problématiques pour ℓ, donc une valeur convient, et permet d'avoir $kb + a$ et $kb + a + 1$ premier entre eux, ce qui conclut.

3 Algèbre : Équations fonctionnnelles non-classiques (Rémi)

Ces dernières années ont vu émerger une nouvelle mode dans le monde des équations fonctionnelles : les exercices ne sont plus tous de la forme "trouver toutes les fonctions telles que [insérer égalité plus ou moins moche dépendant de f, x et y]". On trouve désormais des énoncés plus originaux, dans lesquels on demande de prouver une propriété plus ou moins étonnante de f, ou de certaines valeurs prises par f. Si nous nous limitons ici à l'algèbre, il est à noter que cette tendance est tout aussi présente dans les shortlists IMO récentes en arithmétique (P3 2025, N4 2025, N7 2024) et même en... combinatoire (C9 2022)! Pour aller plus loin en arithmétique, on peut également citer le P4 de l'EMO 2026, le P5 de l'EGMO 2024 et le P2 de l'EGMO 2022.

Les exercices ci-dessous ont été séparés en deux parties : la nouvelle vague des exercices qui collent à cette tendance, et d'autres exercices inhabituels dans les termes qui apparaissent. L'idée principale qui se dégage de la séance est la suivante : **obtenir des informations sûres**. Cela peut paraître évident, mais dans beaucoup des exercices concernés on obtient soit plusieurs possibilités, soit une information conditionnée à une certaine hypothèse. Face à un tel exercice, souvent difficile par ailleurs, il faut plus que jamais chercher à se ramener aux fondamentaux : montrer que f vérifie une propriété usuelle (injectivité, surjectivité, monotonie, parité, ...), déterminer une valeur particulière de f (par exemple $f(0)$, $f(1)$, un zéro de f,...). On cherchera donc à faire des substitutions qui permettent de lever un doute.

Les exercices 1,2,6,9 et 10 ont été traités en cours.

La nouvelle vague

Exercice 1 (IMO 2023, A2)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2 - f(y)^2$$

pour tous les réels x et y. On suppose qu'il existe des réels x_0 et y_0 pour lesquels cette inégalité est stricte.

Démontrer que f ne change jamais de signe : soit $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, soit $f(x) \leqslant 0$ pour tout réel x.

Exercice 2 (Baltic Way 2024)
Soit S un ensemble fini. Si n est un entier strictement positif, on dit qu'une fonction $f : S \to S$ est une puissance n-ème s'il existe une fonction $g : S \to S$ telle que pour tout $x \in S$,

$$f(x) = g^n(x) = \underbrace{g(g(\ldots g}_{n \text{ fois } g}(x)\ldots))$$

On suppose qu'une certaine fonction $f : S \to S$ est une puissance n-ème pour chaque entier strictement positif n. Déterminer si $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in S$.

Exercice 3 (IMO 2025, A4)
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction non bornée et telle que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$f(m+n) = \max\{f(0), \ldots, f(m+n)\},$$

on a

$$f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs A, B, C et D tels que, pour tout entier positif n, on a $f(An+B) = Cn + D$.

Exercice 4 (IMO 2022, A6)
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y)$$

Trouver tous les nombres rationnels q tels que pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$, il existe un réel z tel que $f(z) = qz$.

Exercice 5 (IMO 2024, A4)
Soit $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Déterminer tous les sous-ensembles $\mathcal{S}$ de $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\}$ pour lesquels il existe une fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telle que

$$\mathcal{S} = \{f(a+b) - f(a) - f(b) \mid a, b \in \mathbb{N}^\star\}.$$

Exercice 6 (IMO 2024, P6)
Une fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ est dite *aquesuliane* si elle vérifie la propriété suivante : pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, au moins une des deux égalités est vérifiée :

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{ou} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Démontrer qu'il existe un entier c tel que pour toute fonction aquesuliane f, la quantité $f(r) + f(-r)$ prenne au plus c valeurs distinctes lorsque r parcourt $\mathbb{Q}$, et déterminer la plus petite valeur possible pour c.

Question intermédiaire : Montrer que toute fonction aquesuliane est bijective.

Autres exercices inhabituels

Exercice 7 (IMO 2010, P1)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

Exercice 8 (BMO SL 2016, A8)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour toute fonction $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(g(n)) - g(f(n))$ soit indépendant de $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 9 (Indonésie 2025)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tous réels x, y strictement positifs,

$$f(x+y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x)$$

Exercice 10 (Inde 2025)
Déterminer s'il existe une fonction $f : \{1, 2, ..., 2025\}^2 \to \{1, 2, ..., 2025\}$ telle que :

— Pour tout entier $i \leqslant 2025$, les nombres $f(i,1), f(i,2), ..., f(i,2025)$ sont tous distincts ;
— pour tous entiers $i \leqslant 2025$ et $j \leqslant 2024$, $f(f(i,j), f(i,j+1)) = i$.

Exercice 11 (IMO 2007, A2)
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est mystique si pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(m+n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

Trouver toutes les valeurs que peut prendre $f(2025)$, avec f une fonction mystique.

Exercice 12 (IMO 2022, P2)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe exactement un $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

Exercice 13 (IMO 2009, P5)
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$a, f(b), f(b + f(a) - 1)$$

soient les longueurs des côtés d'un triangle non aplati.

Solutions

Exercice 1 (IMO 2023, A2)
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f(x+y)f(x-y) \geqslant f(x)^2 - f(y)^2$$

pour tous les réels x et y. On suppose qu'il existe des réels x_0 et y_0 pour lesquels cette inégalité est stricte.

Démontrer que f ne change jamais de signe : soit $f(x) \geqslant 0$ pour tout réel x, soit $f(x) \leqslant 0$ pour tout réel x.

Solution de l'exercice 1
Ci-dessous, on note $\mathbf{I}(x, y)$ l'inégalité de l'énoncé.

Soit a et b deux réels quelconques, puis $u = (a+b)/2$ et $v = (a-b)/2$. Les inégalités $\mathbf{I}(u, v)$ et $\mathbf{I}(v, u)$ indiquent que

$$f(a)f(b) \geqslant f(u)^2 - f(v)^2 \text{ et } f(a)f(-b) \geqslant f(v)^2 - f(u)^2,$$

de sorte que $f(a)(f(b) + f(-b)) \geqslant 0$; on note $\mathbf{J}(a, b)$ cette inégalité.

Or, lorsque $a = x_0 + y_0$ et $b = x_0 - y_0$, l'inégalité $\mathbf{I}(u, v) = \mathbf{I}(x_0, y_0)$ est stricte, donc $\mathbf{J}(a, b)$ est stricte également. Par conséquent, lorsque $b = x_0 - y_0$, la somme $f(b) + f(-b)$ est non nulle, et elle est de même signe que chaque réel $f(a)$, ce qui conclut.

Exercice 2 (Baltic Way 2024)
Soit S un ensemble fini. Si n est un entier strictement positif, on dit qu'une fonction $f\colon S \to S$ est une puissance n-ème s'il existe une fonction $g\colon S \to S$ telle que pour tout $x \in S$,

$$f(x) = g^n(x) = \underbrace{g(g(\ldots g}_{n \text{ fois } g}(x)\ldots))$$

On suppose qu'une certaine fonction $f\colon S \to S$ est une puissance n-ème pour chaque entier strictement positif n. Déterminer si $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in S$.

Solution de l'exercice 2
Notons $m = |S|$ le nombre d'éléments de S. Soit $x_0 \in S$, et soit $g : S \to S$ une fonction. On étudie l'*orbite* de x_0, c'est-à-dire ses images successives par g, qui se présente sous le motif suivant :

$$x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_{a-1} \to y_1 \to y_2 \to \cdots \to y_b \to y_1 \to \cdots,$$

Les x_i sont les images successives avant d'atteindre un cycle, et y_i forment un cycle (si x_0 est déjà dans un cycle, alors $y_1 = x_0$). Notons que tous les x_i sont distincts, sinon on aurait un cycle à l'intérieur des x_i et on ne pourrait pas sortir de cette portion, donc $a \leqslant m$. De même, le cycle est de taille au plus m car les y_i sont tous distincts, donc $b \leqslant m$.

On sait que f est une puissance n-ème, donc pour tout entier $n > 0$, il existe une fonction g telle que $f = g^n$. Il ne reste plus qu'à trouver le bon n pour lequel $g^{2n} = g^n$. De ce qui précède, on déduit que si on applique g au moins m fois, toutes les images des éléments de S feront partie d'un certain cycle, de longueur $b \leq m$. Autrement dit, si $n \geq m$, alors pour

$x_0 \in S$, $g^n(x_0) \in \{y_i\}$. Pour s'assurer que $g^{2n}(x_0) = g^n(x_0)$, il suffit de choisir un n qui soit multiple de b, de sorte à retomber sur le même y_i après n applications supplémentaires de g. Comme $b \leq m$, il suffit de choisir $n = m!$, puisque pour tout $b \leq m$, $b \mid m!$.

Finalement, si g est une fonction telle que $f = g^{m!}$, alors $f^2 = g^{2m!} = g^{m!} = f$, donc on a bien $f(f(x)) = f(x)$ pour tout $x \in S$.

Exercice 3 (IMO 2025, A4)
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction non bornée et telle que, pour tous $m, n \in \mathbb{N}$ vérifiant

$$f(m+n) = \max\{f(0), \ldots, f(m+n)\},$$

on a

$$f(m+n) = f(m) + f(n).$$

Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs A, B, C et D tels que, pour tout entier positif n, on a $f(An+B) = Cn+D$.

Solution de l'exercice 3
On dira qu'un entier a est un *pic* si $f(a) \geqslant f(c)$ pour tout $c < a$.
On remarque que $f(0) = \max\{f(0)\}$. Ainsi, $f(0) = f(0) + f(0)$, ce qui donne que $f(0) = 0$.

On commence par montrer qu'il existe une infinité de pics. f possède au moins un pic, à savoir 0. On pose $a_0 = 0$ et on définit, pour tout indice $n \geqslant 0$, a_{n+1} comme le plus petit entier strictement supérieur à a_n tel que $f(a_{n+1}) \geqslant f(a_n)$ (qui existe bien puisque la fonction f est non bornée). Par construction, la suite (a_n) est une suite de pics pour f.

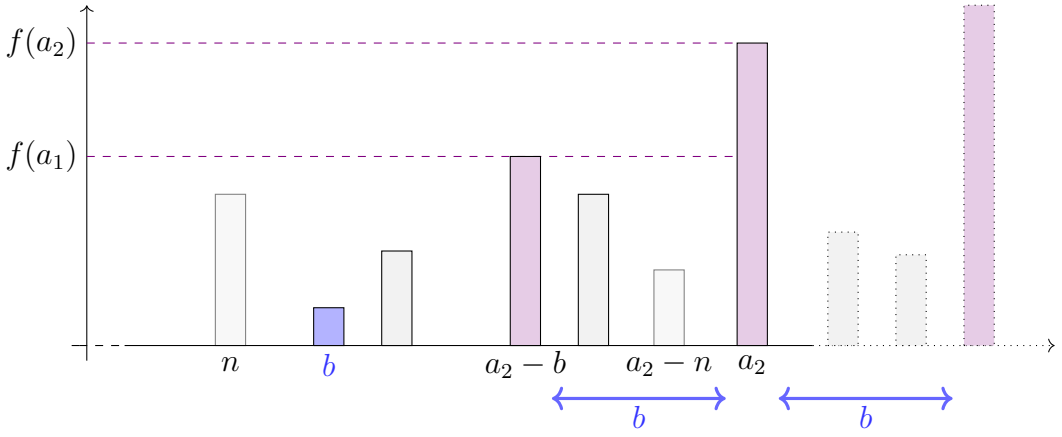
Tout pic a vérifie $f(a) = f(c) + f(a-c)$ pour tout entier $0 \leqslant c \leqslant a$.

On note m le minimum de f sur l'ensemble des entiers strictement positifs, et on note b le plus petit antécédent strictement positif de m. On considère $a_1, a_2 \geqslant b$ deux pics consécutifs.

On montre que $a_1 = a_2 - b$: Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$f(b) + f(a_2 - b) = f(n) + f(a_2 - n) = f(a_1) + f(a_2 - a_1).$$

Par définition de b, $f(b) \leqslant f(a_2 - n)$, donc $f(a_2 - b) \geqslant f(n)$. On déduit que $f(a_2 - b) = \max\{f(1), \ldots, f(a_2 - 1)\}$. En particulier, $a_2 - b$ est un pic, donc $a_2 - b \leqslant a_1$. On déduit que $f(a_2 - b) \leqslant f(a_1)$. En revenant à l'égalité ci-dessus, on déduit que $f(a_2 - a_1) \leqslant f(b)$. Par minimalité de $f(b)$, $f(a_2 - a_1) = f(b)$ et, par minimalité de b, on déduit que $a_2 - a_1 \geqslant b$. En combinant avec l'inégalité précédente, on déduit bien que $a_2 - b = a_1$.



On déduit par récurrence que les pics de f supérieurs à b sont les entiers de la forme a_1+nb. Pour tout entier n, on a $f(a_1 + nb) = f(b) + f(a_1 + (n-1)b)$, et par récurrence immédiate, $f(a_1 + nb) = f(a_1) + nf(b)$. On conclut alors en prenant $(A, B, C, D) = (b, a_1, f(b), f(a_1))$. On vérifie bien que $f(a_1) \geqslant f(b) \geqslant 1$ puisque, si $f(b) = 0$, on trouverait que $f(a_1 + nb) = f(a_1)$, donc les valeurs de f en les pics seraient constantes, contredisant le caractère borné de f.

Remarque : La dernière étape de la preuve montre que si a est un pic et b un antécédent du minimum m de f sur $\mathbb{N}$, alors $a - b$ est également un pic et, par récurrence descendante, que $a - \ell b$ est un pic pour tout ℓ et tout pic a. On peut alors conclure comme suit :

D'après le principe des tiroirs, il existe un reste r tel qu'une infinité de pics ont le même reste dans leur division euclidienne par b. Autrement dit, on dispose d'une infinité de pics de la forme $qb + r$ avec q un entier. Étant donné un entier n, prenons $q > n$ tel que $qb + r$ est un pic. D'après l'étape précédente, $nb + r = qb + r - (q - n)b$ est également un pic. Ainsi, tous les entiers de la forme $nb + r$ sont des pics.

Puisque, pour tout entier n, $f(nb+r) = f(b)+f((n-1)b+r)$, on déduit par récurrence que $f(nb + r) = nf(b) + f(r)$, ce qui conclut l'exercice en prenant $(A, B, C, D) = (b, r, f(b), f(r))$.

Solution n°2 de l'exercice 3

De même que dans la solution 1, on montre que $f(0) = 0$ et qu'il existe une infinité de pics pour f. On note (a_k) la suite des pics de f.

Notons que si un entier $a_{k-2} < a < a_k$ satisfait $f(a) \geqslant f(a_{k-1})$, alors $a = a_{k-1}$. En effet, si $a < a_{k-1}$, puisque $f(a) \geqslant f(a_{k-1})$, a serait un pic, contredisant que a_{k-2} et a_{k-1} sont consécutifs. Si $a > a_{k-1}$, alors f admet un pic en un point de $\{a_{k-1} + 1, \ldots, a\}$, contredisant le fait que a_{k-1} et a_k sont consécutifs. En particulier, pour tout entier $a \in [\![a_{k-2}, a_k - 1]\!]$, $f(a) \leqslant f(a_{k-1})$.

Pour tout entier $k \geqslant 2$, l'énoncé appliqué au pic a_k implique que

$$f(a_k) = f(a_k - a_{k-1}) + f(a_{k-1}) = f(a_{k-1} - a_{k-2}) + f(a_k - (a_{k-1} - a_{k-2})).$$

Comme $a_{k-2} < a_k - a_{k-1} + a_{k-2} < a_k$, on a $f(a_k - (a_{k-1} - a_{k-2})) \leqslant f(a_{k-1})$. On déduit alors de l'égalité ci-dessus que $f(a_k - a_{k-1}) \leqslant f(a_{k-1} - a_{k-2})$.

La suite $(f(a_k - a_{k-1}))_{k\geqslant 2}$ est alors une suite décroissante d'entiers positifs, elle est donc constante égale à C à partir d'un certain rang ℓ : pour tout $k \geqslant \ell$, $f(a_k - a_{k-1}) = C$.

Pour un indice $k \geqslant \ell + 1$, l'égalité $f(a_k - a_{k-1}) = f(a_{k-1} - a_{k-2})$ implique que $f(a_{k-1}) = f(a_k - (a_{k-1} - a_{k-2}))$. On déduit que $a_{k-1} = a_k - a_{k-1} + a_{k-2}$. On a donc montré que la suite

$(a_k - a_{k-1})$ est égale à une constante A à partir du rang $\ell+1$. L'égalité ci-dessus se réécrit alors comme $f(a_{k-1} + A) = C + f(a_{k-1})$.

En itérant cette égalité, on a pour tout entier n que $f(An + a_\ell) = nf(A) + f(a_\ell)$, ce qui permet de conclure en prenant $(A, B, C, D) = (A, a_\ell, f(A), f(a_\ell))$.

Exercice 4 (IMO 2022, A6)
Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + f(y)) = f(x) + f(y)$$

Trouver tous les nombres rationnels q tels que pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$, il existe un réel z tel que $f(z) = qz$.

Solution de l'exercice 4
Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions recherchées. On commence par procéder à quelques substitutions simples à la recherche de certaines solutions. Notons que les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{F}$, donc cet ensemble n'est pas vide. Dans la suite, f désigne toujours une fonction quelconque de $\mathcal{F}$.

En posant $x = y = 0$, on trouve $f(f(0)) = 2f(0)$. On peut réutiliser directement ce résultat en posant $x = f(0)$ et $y = 0$, pour trouver $f(2f(0)) = f(f(0)) + f(0) = 3f(0)$.
Une récurrence immédiate suivant le même procédé nous donne alors $f(nf(0)) = (n+1)f(0)$ pour tout entier $n > 0$. Cette égalité se réécrit $f(nf(0)) = \dfrac{n+1}{n} \times nf(0)$, donc pour tout entier $n > 0$, $\dfrac{n+1}{n} \in \mathcal{S}$.

Essayons de généraliser ce résultat : en posant $x = -f(0)$ et toujours $y = 0$, il vient $f(0) = f(-f(0)) + f(0)$, d'où $f(-f(0)) = 0$. En particulier, $0 \in \mathcal{S}$.
On continue avec $x = -2f(0)$, et on trouve $f(-2f(0)) = -f(0)$, puis la même récurrence avec $x = -nf(0)$ donne à nouveau $f(nf(0)) = (n+1)f(0)$ pour tout entier $n < 0$.

Finalement, tous les rationnels de la forme $\dfrac{n+1}{n}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$ sont dans $\mathcal{S}$. Notons au passage qu'il s'agit exactement des rationnels q tels que $\dfrac{1}{q-1}$ est entier.

C'est ici qu'intervient la difficulté principale de l'exercice. Il s'agit désormais de comprendre qu'il n'y aura pas d'autres solutions, et de chercher à construire des contre-exemples pour tous les autres rationnels. Une manière naturelle d'y arriver est de commencer par chercher une fonction $f \in \mathcal{F}$ à valeurs entières. On remarque que si $f(y) = n$ est entier, l'équation se réécrit $f(x + n) = f(x) + n$, et une manière simple de réaliser cette condition pour tout entier n est de construire une fonction telle que $f(x + 1) = f(x) + 1$, puisque cette égalité implique les autres par récurrence immédiate. Une telle fonction est déterminée uniquement par l'image de $[0, 1]$.

Récapitulons : soit f une fonction telle que $f(a) \in \mathbb{Z}$ pour tout $a \in [0, 1[$, et telle que $f(a + 1) = f(a) + 1$. Une telle fonction vérifie bien l'équation de l'énoncé d'après le paragraphe précédent. Soit $q \in \mathbb{Q}$ tel que $\dfrac{1}{q-1}$ n'est pas entier. Il s'agit de montrer que pour

chaque $a \in [0,1[$, on peut choisir $f(a) \in \mathbb{Z}$ de sorte qu'il n'existe aucun entier n pour lequel $f(a+n) = q(a+n)$.

Comme $f(a+n) = f(a)+n$, cela se réécrit $f(a) = qa + n(q-1)$, ou encore $\dfrac{f(a)-qa}{q-1} = n$. Il suffit donc de choisir $f(a)$ de sorte que $\dfrac{f(a)-qa}{q-1}$ ne soit jamais entier. Si $f(a) = 0$, ne convient pas, cela signifie que $\dfrac{-qa}{q-1} \in \mathbb{Z}$. De même, si $f(a) = 1$ ne convient pas, alors $\dfrac{1-qa}{q-1} \in \mathbb{Z}$. Mais alors $\dfrac{-qa}{q-1} + \dfrac{1-qa}{q-1} = \dfrac{1}{q-1} \in \mathbb{Z}$, ce qui contredit notre hypothèse. On peut donc bien construire $f \in \mathcal{F}$ (et même à valeurs dans $\{0,1\}$!) pour laquelle $f(z) \neq qz$ pour tout z, si $\dfrac{1}{q-1}$ n'est pas entier.

Finalement, les seules solutions sont celles trouvées au début : tous les rationnels de la forme $\dfrac{n+1}{n}$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$.

Exercice 5 (IMO 2024, A4)
Soit $\mathbb{N}^\star$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Déterminer tous les sous-ensembles $\mathcal{S}$ de $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\}$ pour lesquels il existe une fonction $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telle que

$$\mathcal{S} = \{f(a+b) - f(a) - f(b) \mid a, b \in \mathbb{N}^\star\}.$$

Solution de l'exercice 5
Réponse : tous les sous-ensembles $\mathcal{S}$ de taille 1 ou 2.

Construction :

Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble de $\{2^0, 2^1, 2^2, \ldots\}$ de cardinal 1 ou 2.

- Si $|\mathcal{S}| = 1$, disons $\mathcal{S} = \{2^k\}$ avec $k \geqslant 0$, alors on vérifie que la fonction $f : x \mapsto 2^{k+1}x - 2^k$ va bien de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^\star$ et pour tous $a, b \geqslant 1$,

$$f(a+b) - f(a) - f(b) = 2^{k+1}(a+b) - 2^k - (2^{k+1}a - 2^k) - (2^{k+1}b - 2^k) = 2^k.$$

  Plus généralement, toute fonction de la forme $f(x) = cx - 2^k$ vérifie la propriété.

- Supposons $|\mathcal{S}| = 2$, disons $\mathcal{S} = \{2^k, 2^\ell\}$ avec $0 \leqslant k < \ell$. L'idée est d'utiliser l'identité $\lfloor \alpha(x+y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor \in \{0,1\}$ en sachant que dès que α n'est pas entier, les deux valeurs 0 et 1 sont bien atteintes chacune pour au moins un couple (x,y) (preuve en annexe). De cette façon, en posant $f : x \mapsto (2^\ell - 2^k)\lfloor \alpha x \rfloor - 2^k$, on a pour tous $a, b \geqslant 1$,

$$f(a+b) - f(a) - f(b) = (2^\ell - 2^k) \underbrace{\left(\lfloor \alpha(x+y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor\right)}_{\in \{0,1\}} + 2^k \in \{2^\ell, 2^k\}$$

  et le fait que α soit non entier garantit que chaque valeur peut être atteinte.

  En prenant $\alpha > 2$, on s'assure de plus que f est à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$, puisque pour tout $x \geqslant 1$,

$$f(x) = (2^\ell - 2^k)\lfloor \alpha x \rfloor - 2^k > (2^\ell - 2^k) \underbrace{(\alpha x - 1)}_{> 2x-1 \geqslant 1} - 2^k > 2^\ell - 2^k - 2^k \geqslant 0.$$

Ainsi, tout ensemble de taille 1 ou 2 vérifie l'exercice.

Analyse : Montrons que si $\mathcal{S}$ vérifie la propriété de l'énoncé, alors $|\mathcal{S}| = 1$ ou $|\mathcal{S}| = 2$. Soit $\mathcal{S}$ un ensemble solution et f une fonction satisfaisant la propriété pour $\mathcal{S}$. Pour tout couple (a, b) d'entiers strictement positifs, on dispose d'un entier noté $e(a, b)$ tel que

$$f(a + b) - f(a) - f(b) = 2^{e(a,b)}.$$

On vérifie notamment que $e(a, b) = e(b, a)$. L'énoncé cherche alors les ensembles de valeurs que peut prendre la fonction $e(\ ,\ )$.

Étape 1 : Si a, b et c sont des entiers, les trois entiers $e(a, b), e(b, c)$ et $e(c, a)$ peuvent prendre au plus deux valeurs distinctes. En effet, en calculant de trois manières différentes $f(a+b+c)$:

$$f(a + b + c) = f(a) + f(b + c) + 2^{e(a,b+c)} = f(a) + f(b) + f(c) + 2^{e(a,b+c)} + 2^{e(b,c)},$$

$$f(a + b + c) = f(b) + f(a + c) + 2^{e(b,a+c)} = f(a) + f(b) + f(c) + 2^{e(b,a+c)} + 2^{e(c,a)},$$

$$f(a + b + c) = f(c) + f(a + b) + 2^{e(c,a+b)} = f(a) + f(b) + f(c) + 2^{e(c,a+b)} + 2^{e(a,b)}.$$

On déduit que $2^{e(a,b+c)} + 2^{e(b,c)} = 2^{e(b,a+c)} + 2^{e(c,a)} = 2^{e(c,a+b)} + 2^{e(a,b)}$.

Ceci conduit aux égalités $\{e(a, b + c), e(b, c)\} = \{e(b, a + c), e(a, c)\} = \{e(c, a + b), e(a, b)\}$, par unicité de l'écriture en base 2. Ces égalités implique que les trois entiers $e(a, b), e(b, c)$ et $e(c, a)$ ne peuvent prendre qu'au plus deux valeurs distinctes.

Intermède : Soit k un entier tel qu'il existe deux entiers a et b tels que $e(a, b) = k$. Dans les étapes suivantes, on étudie l'ensemble des couples (a, b) vérifiant $e(a, b) = k$. Pour cela, on fixe, parmi tous les couples (a, b) vérifiant $e(a, b) = k$, le couple (a_0, b_0) tel que $a_0 + b_0$ est de somme s_k minimale. Dans les étapes $2, 3$ et 4, cet entier s_k est noté s pour simplifier les notations. On suppose de plus que $k \neq e(1, 1)$ (ce qui signifie que la fonction e prend au moins deux valeurs distinctes). Ainsi, $s_k > 2$.

Étape 2 : Pour tout couple (c, d) tel que $c + d = s$, on a $e(c, d) = k$.

On développe $f(s)$ de deux façons différentes de manière à faire apparaître les entiers $e(a_0, s - a_0)$ et $e(c, s - c)$. Si $c > a_0$,

$$\begin{aligned} f(s) = f(a_0 + (c - a_0) + s - c) &= f(a_0) + f(c - a_0 + s - c) + 2^{e(a_0,s-a_0)} \\ &= f(a_0) + f(c - a_0) + f(s - c) + 2^{e(a_0,s-a_0)} + 2^{e(c-a_0,s-c)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(s) = f(a_0 + (c - a_0) + s - c) &= f(s - c) + f(a_0 + c - a_0) + 2^{e(c,s-c)} \\ &= f(s - c) + f(a_0) + f(c - a_0) + 2^{e(c,s-c)} + 2^{e(c-a_0,a_0)}. \end{aligned}$$

On déduit l'égalité $\{(e(a_0, s-a_0), e(c-a_0, s-c)\} = \{e(c, s-c), e(c-a_0, a_0)\}$. Si on avait $e(a_0, s-a_0) = e(c-a_0, a_0) = k$, cela contredirait la minimalité de s puisque $c-a_0+a_0 = c < s$. On a donc $e(a_0, s-a_0) = e(c, s-c)$.

Dans le cas où $c < a_0$, on effectue le même raisonnement avec les entiers b_0 et d.

Étape 3 : Pour tout $1 < c < s-1$, on a $e(c, 1) = e(s-c, 1)$.

D'après l'étape 2, $e(c, s-c) = k$. D'après l'étape 1 appliquée au triplet $\{c, s-c, 1\}$, les entiers $k = e(c, s-c), e(c, 1)$ et $e(s-c, 1)$ prennent au plus deux valeurs distinctes. Mais si $e(c, 1) = k$, cela contredirait encore la minimalité de s puisque $c+1 < s$. On a donc $e(c, 1) \neq k$, et de la même façon $e(s-c, 1) \neq k$ donc $e(c, 1) = e(s-c, 1)$.

Étape 4 : Pour tout $1 \leqslant c < s-1$, $e(c, 1) = e(s-c-1, 1)$.

Tout comme dans l'étape 2, il s'agit de calculer $f(s)$ de deux façons différentes pour faire apparaître $e(c, 1)$ et $e(s-c-1, 1)$.

$$\begin{aligned} f(s) = f(1+c+(s-c-1)) &= f(1+c) + f(s-c-1) + 2^{e(1+c, s-c-1)} \\ &= f(1) + f(c) + f(s-c-1) + 2^{e(1+c, s-c-1)} + 2^{e(c,1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(s) = f(1+c+(s-c-1)) &= f(1+s-c-1) + f(c) + 2^{e(c, s-c)} \\ &= f(1) + f(c) + f(s-c-1) + 2^{e(c, s-c)} + 2^{e(s-c-1, 1)}. \end{aligned}$$

On déduit que $2^{e(1+c, s-c-1)} + 2^{e(c,1)} = 2^{e(c, s-c)} + 2^{e(s-c-1, 1)}$. Or d'après l'étape 2, $e(1+c, s-c-1) = e(c, s-c) = k$, ce qui implique que $e(c1,) = e(s-c-1, 1)$.

Étape 5 : $e(c, 1) = e(1, 1)$ pour tout $1 \leqslant c < s-1$.

Les étapes 3 et 4 combinées impliquent, dès que $c < c+1 < s-1$,

$$e(c, 1) = e(s-c-1, 1) = e(c+1, 1).$$

Ainsi, la quantité $e(c, 1)$ pour $1 \leqslant c < s-1$ ne dépend pas de c.

Étape 6 : Conclusion.

Supposons maintenant que $|\mathcal{S}| \geqslant 3$. On dispose de deux valeurs k et ℓ et deux entiers s_k et s_ℓ vérifiant les étapes $2, 3, 4$ et 5. Supposons quitte à renommer les variables que $2 < s_k < s_\ell$. Puisque $s_k - 1 < s_\ell - 1$, l'étape 5 appliquée à s_ℓ et $c = s_k - 1$ implique

$$k = e(s_k - 1, 1) = e(1, 1),$$

ce qui contredit l'hypothèse faite sur k. Ainsi $|\mathcal{S}| \leqslant 2$.

Annexe : Preuve que si α n'est pas entier, il existe un couple (x, y) tel que $\lfloor \alpha(x+y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor = 0$ et un couple (x, y) tel que $\lfloor \alpha(x+y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor = 1$.

Posons $g(\alpha, x, y) = \lfloor \alpha(x+y) \rfloor - \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha y \rfloor$. Notons que $g(\alpha, x, y) = g(\{\alpha\}, x, y)$ pour tous entiers x, y (où $\{\alpha\}$ désigne la partie fractionnaire de α). On peut donc se contenter de traiter le cas où $0 < \alpha < 1$.

- Si, $\alpha = 1/2$, alors $g(\alpha, 1, 1) = 1$ tandis que $g(\alpha, 1, 2) = 0$.

- Si $0 < \alpha < 1/2$, on note n le plus grand entier tel que $n\alpha > 1$. On a donc $n \geqslant 3$. Alors $g(\alpha, n-1, 1) = 1$ tandis que $g(\alpha, n, 1) = 0$. Pour le calcul de $g(\alpha, n, 1)$, on remarque qu'on $1 = \lfloor n\alpha \rfloor < n\alpha < \lfloor n\alpha \rfloor + 1/2$, (sinon on aurait $1 < (n-1)\alpha$, contredisant la minimalité de n), ce qui donne bien que $\lfloor (n+1)\alpha \rfloor = \lfloor n\alpha \rfloor$ et nous permet d'obtenir la valeur de $g(\alpha, n, 1)$.
- Si $1/2 < \alpha < 1$, on dispose d'un entier n tel que $1 - 1/n \leqslant \alpha < 1 - 1/(n+1)$. Alors $\lfloor n\alpha \rfloor = \lfloor n + 1\alpha \rfloor$ et $g(\alpha, n, 1) = n - 1 - (n-1) = 0$. D'autre part, on a l'encadrement

$$n - 2 + \frac{1}{n} = \frac{(n-1)^2}{n} \leqslant (n-1)\alpha < \frac{(n-1)n}{n+1} < n - 1,$$

de sorte que $\lfloor (n-1)\alpha \rfloor = n - 2$ et $g(\alpha, n-1, 1) = n - 1 - (n-2) - 0 = 1$.

Exercice 6 (IMO 2024, P6)
Une fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ est dite *aquesuliane* si elle vérifie la propriété suivante : pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$, au moins une des deux égalités est vérifiée :

$$f(x + f(y)) = f(x) + y \quad \text{ou} \quad f(f(x) + y) = x + f(y).$$

Démontrer qu'il existe un entier c tel que pour toute fonction aquesuliane f, la quantité $f(r) + f(-r)$ prenne au plus c valeurs distinctes lorsque r parcourt $\mathbb{Q}$, et déterminer la plus petite valeur possible pour c.

Question intermédiaire : Montrer que toute fonction aquesuliane est bijective.

Solution de l'exercice 6
En posant $x = y$, on trouve que $f(x) + x$ est un point fixe de f pour tout x. Montrons d'abord que f est injective. Supposons que $f(a) = f(b)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $f(a + f(b)) = f(a) + b$. Mais alors

$$f(a) + b = f(a + f(b)) = f(a + f(a)) = a + f(a)$$

car $a + f(a)$ est un point fixe. Ainsi, $a = b$ donc f est injective.

Comme $f(0)$ est un point fixe, on a $f(0) = 0$ par injectivité. En posant $y = -f(x)$, on a soit $f(x + f(-f(x)) = 0$, soit $f(0) = x + f(-f(x))$. Or $f(0) = 0$, donc le premier cas s'écrit $f(x + f(-f(x)) = f(0)$, d'où $x + f(-f(x)) = 0$ par injectivité, et on retombe sur le second cas. Finalement, on a toujours $f(-f(x)) = -x$, et en particulier, f est surjective.

Exercice 7 (IMO 2010, P1)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

Solution de l'exercice 7
En posant $x = y = 0$, on trouve $f(0) = f(0)\lfloor f(0) \rfloor$, donc $\lfloor f(0) \rfloor = 1$ ou $f(0) = 0$.

Cas 1 : $\lfloor f(0) \rfloor = 1$. Avec $y = 0$, on obtient $f(0) = f(x)$ pour tout x, donc f est constante. Comme $\lfloor f(0) \rfloor = 1$, on a $f(x) = c$ avec $c \in [1, 2[$.

Cas 2 : $f(0) = 0$. En posant $x = y = 1$, on a $f(1) = f(1)\lfloor f(1) \rfloor$ et donc $f(1) = 0$ ou $\lfloor f(1) \rfloor = 1$. Mais si $f(1) = 0$, alors en posant $x = 1$, on trouve directement que f est la fonction nulle. Supposons donc que $\lfloor f(1) \rfloor = 1$.

En posant $y = 1$ et $x \in [0; 1[$, on a $f(0) = f(x)\lfloor f(1) \rfloor$. Ainsi, $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0; 1[$. Mais en posant $x = 2$ et $y = \dfrac{1}{2}$, on obtient alors $f(1) = 0$, contradiction.

Finalement, les seules solutions sont les fonctions constantes $f(x) = c$ avec $c = 0$ ou $c \in [1; 2[$, qui conviennent réciproquement.

Exercice 8 (BMO SL 2016, A8)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour toute fonction $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(g(n)) - g(f(n))$ soit indépendant de $n \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 8
La principale difficulté consiste à ne pas se laisser impressionner par un tel énoncé. En effet, l'idée que cet exercice sert à rappeler ici est que composer deux fonctions dans des ordres différents permet de faire rentrer ou sortir certains termes des parenthèses (même idée que calculer $f \circ f \circ f$ de deux façons différentes quand on a une expression de $f \circ f$). Ici, il suffit de poser $g : x \mapsto x+1$, ce qui donne $f(g(x)) - g(f(x)) = f(x+1) - (f(x)+1)$, donc $f(x+1) - f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Cette expression nous intéresse particulièrement sur les entiers, puisqu'elle permet de calculer tous les termes à partir d'un seul : ici, cela donne que f est affine. Il ne reste plus qu'à trouver celles qui marchent, ce qu'on peut faire en choisissant $g : x \mapsto x^2$, ce qui montre que l'expression $(ax + b)^2 - ax^2 + b$ doit être indépendante de x. Les calculs donnent $a^2 - a = 0$ et $2ab = 0$, donc soit $a = 0$ et f est constante, soit $b = 0$ auquel cas $a = 1$. On vérifie facilement réciproquement que les constantes et l'identité sont bien solutions.

Exercice 9 (Indonésie 2025)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tous réels x, y strictement positifs,

$$f(x + y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x)$$

Solution de l'exercice 9
On commence par remarquer que le membre de gauche est symétrique en x, y, donc en échangeant x et y on trouve :

$$\max(f(x), y) + \min(f(y), x) = \max(f(y), x) + \min(f(x), y)$$

En posant $y = f(x)$, cela nous donne $f(x) + \min(f(f(x)), x) = \max(f(f(x)), x) + f(x)$, soit $f(f(x)) = x$ pour tout $x > 0$.

On aimerait donc montrer que f est croissante pour conclure qu'il s'agit de l'identité. On remarque que :

$$f(x + y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x) > \max(f(x), y) \geqslant f(x)$$

Autrement dit pour tous réels $z > x$, on peut écrire $z = x+y$ avec $y > 0$, et obtenir $f(z) > f(x)$, donc f est bien croissante comme attendu. La seule solution est donc l'identité, qui convient bien.

Exercice 10 (Inde 2025)
Déterminer s'il existe une fonction $f : \{1, 2, ..., 2025\}^2 \to \{1, 2, ..., 2025\}$ telle que :

— Pour tout entier $i \leqslant 2025$, les nombres $f(i, 1), f(i, 2), ..., f(i, 2025)$ sont tous distincts ;

— pour tous entiers $i \leqslant 2025$ et $j \leqslant 2024$, $f(f(i, j), f(i, j + 1)) = i$.

Solution de l'exercice 10
On commence par s'intéresser à la première condition : on a un ensemble de 2025 images distinctes, mais f ne peut prendre que 2025 valeurs. Cela nous indique donc que chaque valeur est prise exactement une fois sur chaque colonne si l'on représente f graphiquement. Autrement dit, la fonction $x \mapsto f(a, x)$ est bijective pour tout a fixé.

Soit $x \in \{1, 2, ..., 2025\}$, et soit a l'entier tel que $f(x, x) = a$. On dispose donc d'un unique entier x' tel que $f(a, x') = x$.
Si $x' \neq 2025$, alors $a = f(f(a, x'), f(a, x' + 1)) = f(x, f(a, x' + 1))$, mais comme $a = f(x, x)$, on a $f(a, x' + 1) = x$ par injectivité. Mais ceci contredit $f(a, a) = x$, donc $x' = 2025$.

Notons à présent $b = f(2025, 2025)$. D'après ce qui précède, $f(b, 2025) = 2025$.
D'après la deuxième condition de l'énoncé,

$$f(2025, 2025) = b = f(f(b, 2024), f(b, 2025)) = f(f(b, 2024), 2025)$$

Par injectivité, cela implique que $f(b, 2024) = 2025$. Mais alors $f(b, 2024) = f(b, 2025) = 2025$, ce qui contredit à nouveau notre injectivité en colonne.

Il ne peut donc pas exister de telle fonction f.

Exercice 11 (IMO 2007, A2)
On dit qu'une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est mystique si pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$f(m + n) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

Trouver toutes les valeurs que peut prendre $f(2025)$, avec f une fonction mystique.

Solution de l'exercice 11
Les solutions sont tous les entiers entre 1 et 2026 inclus.

Commençons par fournir une construction pour les entiers entre 1 et 2025. Soit $k \in [\![1, 2025]\!]$. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2025 - k \\ x - (2025 - k) & \text{si } x > 2025 - k \end{cases}$$

Soit $c = 2025 - k$. Soit m, n deux entiers. Si $m \leq c$, on a directement

$$f(m + n) \geq f(n) \geq f(f(n)) \geq f(m) + f(f(n)) - 1$$

Sinon, on a

$$f(m+n) = m+n-c = f(m)+n \geq f(m)+f(f(n)) \geq f(m)+f(f(n))-1$$

Ainsi, cette fonction f vérifie la condition de l'énoncé.

Intéressons-nous maintenant au cas où $f(2025) = 2026$. Considérons la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } 2025|x \\ x & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit m, n deux entiers. Si $2025|n$, on a

$$f(m+n) = f(m)+n = f(m)+f(f(n))-1$$

Sinon,

$$f(m+n) \geq m+n \geq f(m)-1+n \geq f(m)-1+f(f(n))$$

On cherche donc maintenant à montrer que $f(2025) \leq 2026$. Soit f une fonction vérifiant la condition de l'énoncé. Supposons que $f(2025) > 2026$, et soit $d = f(2025) - 2025$.
Tout d'abord, on a $f(m+n) \geq f(m)$, donc f est croissante.
Soit n tel que $f(n) > n$. On a alors, avec $m = f(n) - n$,

$$f(f(n)-n) \leq 1$$

Or, $f(2025) > 1$ donc, par croissance de f, $f(n)-n < 2025$. Ainsi, pour tout n, $f(n) < n+2025$.
On peut montrer par récurrence que pour tout $k \geq 1$, $f(k \cdot 2025) \geq k \cdot (2025+d-1)$. En effet, on a déjà, pour $k = 1$,

$$f(2025) = 2025+d \geq 2025+d-1$$

Soit $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Supposons cette inégalité vraie pour $k-1$, montrons-la pour k. On a

$$\begin{aligned} f(k \cdot 2025) &= f((k-1) \cdot 2025 + 2025) \\ &\geq f((k-1) \cdot 2025) + f(f(2025)) - 1 \\ &\geq \Big[(k-1) \cdot (2025+d-1)\Big] + f(2025) - 1 \\ &\geq \Big[(k-1) \cdot (2025+d-1)\Big] + 2025 + d - 1 \\ &\geq k(2025+d-1) \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. Or, pour k assez grand, on a $f(k \cdot 2025) - k \cdot 2025 = k(d-1) > 2025$, ce qui est absurde et conclut la preuve.

Exercice 12 (IMO 2022, P2)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe exactement un $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

Solution de l'exercice 12
On commence par essayer de deviner la solution. D'après l'IAG, on sait que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2.$$

On se doute donc que la solution va être $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Si c'est le cas, pour un $x > 0$, le seul y tel que $xf(y) + yf(x) \leqslant 2$ est $y = x$, le cas d'égalité de l'IAG. Cela nous donne une stratégie pour avancer dans l'exercice : montrer que $x = y$.

On sait que pour chaque x il existe un unique y tel que $xf(y)+yf(x) \leqslant 2$. Cette inégalité est symétrique, donc si on appelle *collègue* de x l'unique y qui vérifie l'inégalité pour x, alors x est le collègue de y si et seulement si y est le collègue de x. Par l'absurde, supposons qu'il existe $x \neq y$ tels que x et y sont collègues. Alors x n'est pas son propre collègue, donc $xf(x)+xf(x) > 2$, donc $f(x) > \frac{1}{x}$ et de même $f(y) > \frac{1}{y}$. Mais alors, on a notre contradiction :

$$xf(y) + yf(x) > \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$$

On a établi que tout $x > 0$ est son propre collègue. Ainsi, on a $f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$ pour tout $x > 0$.
Et d'autre part, pour tous $x \neq y$,

$$xf(y) + yf(x) > 2$$

On adopte désormais une stratégie assez simple : supposer par l'absurde $f(c) < \frac{1}{c}$ pour un certain $c > 0$, et voir ce qui se passe. On suppose donc que $f(c) = \frac{1}{c+\varepsilon} < \frac{1}{c}$. On va montrer que c et $c + \varepsilon$ sont collègues. On a :

$$(c+\varepsilon)f(c) + cf(c+\varepsilon) = 1 + cf(c+\varepsilon) \leqslant 1 + \frac{c}{c+\varepsilon} \leqslant 2$$

On a donc notre contradiction, donc la seule solution est $f(x) = \frac{1}{x}$, qui convient bien.

Exercice 13 (IMO 2009, P5)
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$a, f(b), f(b + f(a) - 1)$$

soient les longueurs des côtés d'un triangle non aplati.

Solution de l'exercice 13
L'énoncé semble atypique : dire que trois longueurs sont les côtés d'un triangle semble être une condition peu restrictive et manipulable a priori. On commence par trouver une réécriture plus algébrique de la condition. Si x, y, z sont les côtés d'un triangle, on a par exemple

$$x + y > z$$

ou

$$x > |y - z|$$

La deuxième condition est particulièrement restrictive si x est petit. On cherche donc à prendre $x = 1$. Le seul terme dans l'énoncé dont on maîtrise la valeur est a, on prend donc $x = a, y = f(b), z = f(b + f(a) - 1)$ et on obtient

$$a > |f(b) - f(b + f(a) - 1)|$$

Avec $a = 1$ l'inégalité s'écrit $1 > |f(b) - f(b + K)|$, avec $K = f(1) - 1$. Ainsi, pour tout b,

$$f(b) = f(b + K)$$

Si $K > 0$, f est alors une fonction périodique. Mais on peut alors écrire une autre inégalité : $a < f(b) + f(b + f(a) - 1)$. On peut ici faire diverger a en fixant b. On prend par exemple $b = 1$, et $a = 1 + n \cdot K$. On obtient

$$1 + n \cdot K < f(1) + f(f(1 + n \cdot K)) = f(1) + f(f(1))$$

ce qui est clairement faux pour n assez grand. Ainsi, $K = 0$ donc $f(1) = 1$.

Prenons maintenant $b = 1$. On a $f(b) > |a - f(b + f(a) - 1)|$, donc $1 > |a - f(f(a))|$. Ainsi, pour tout a, $f(f(a)) = a$. f est donc bijective.
Intéressons-nous maintenant à $f(2)$. Prenons $a = 2$. Soit $L = f(2) - 1$. On obtient comme avant

$$2 > |f(b) - f(b + L)|$$

$L \neq 0$ car $f(2) \neq f(1)$. Ainsi, $f(b) \neq f(b + L)$ donc pour tout b,

$$f(b) = f(b + L) \pm 1$$

Soit $\varepsilon(b) = f(b + L) - f(b)$ On remarque que si $\varepsilon(b) = -\varepsilon(b + L)$, alors $f(b + 2L) = f(b)$, ce qui est aburde car f est injective. Ainsi, $\varepsilon(b) = \varepsilon(b + L)$. Par récurrence immédiate, pour tout n, $\varepsilon(b + nL) = \varepsilon(b)$ donc

$$f(b + nL) = f(b) + \varepsilon(b) + \varepsilon(b + L) + ... + \varepsilon(b + (n - 1)L)) = f(b) + n \cdot \varepsilon(b)$$

Si $\varepsilon(b) = -1$, on obtient $f(b + nL) < 0$ pour n assez grand, ce qui est encore une fois absurde. Ainsi, $\varepsilon(b) = 1$, et

$$f(b + nL) = f(b) + n$$

pour tous b et n. On obtient alors

$$\begin{aligned} b + L^2 &= f(f(b + L^2)) \\ &= f(f(b) + L) \\ &= f(f(b)) + 1 \\ &= b + 1 \end{aligned}$$

d'où $L = 1$ et $f(2) = 2$. On obtient donc que pour tout b, $f(b + 1) = f(b) + 1$. Ainsi, par récurrence immédiate, $f(n) = n$ pour tout n.
Réciproquement, la fonction identité est clairement solution, et c'est la seule.

4 Algèbre : Polynômes (Melvil et Hadriel)

Exercices

Polynômes à plusieurs variables

Exercice 1 ($\star$ A2 2020)
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes à 3 variables X, Y, Z à coefficients entiers. Soit $\mathcal{B}$ le sous ensemble de $\mathcal{A}$ formé par tous les polynômes pouvant s'écrire de la façon suivante :

$$(X+Y+Z)P(X,Y,Z) + (XY+YZ+ZX)Q(X,Y,Z) + XYZR(X,Y,Z)$$

avec $P, Q, R \in \mathcal{A}$. déterminer le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $x^i y^j z^k \in \mathcal{B}$ pour tout $i, j, k \geq 0$ tels que $i+j+k \geq n$.

Exercice 2 ($\star$)
Soient $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ tels que $\forall x, y \in \mathbb{R}\ P(x,y) = P(y,x)$. On suppose que $(X-Y) \mid P(X,Y)$, montrer que $(X-Y)^2 \mid P(X,Y)$

Exercice 3 ($\star$)
Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ tel que $P(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}_+^*$?

Exercice 4
Soit E une partie de $\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $M \in \mathbb{R}^2$, on peut trouver $A \in E$ dont la distance à M est inférieure ou égale à 1. Trouver l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ qui s'annulent sur E.

Exercice 5 (A5 2025)
Trouver tous les entiers $n \geq 2$ tels que le polynôme

$$P_n := X^n + Y^n + Z^n - X^{n-2}YZ - XY^{n-2}Z - XYZ^{n-2}$$

Puisse s'écrire $P_n(X,Y,Z) = Q_n(X,Y,Z) \times R_n(X,Y,Z)$ avec Q_n, R_n à coefficients entiers et non constants.

Exercice 6
Montrer que

$$\frac{X^2+Y^2+Z^2}{2} \cdot \frac{X^5+Y^5+Z^5}{5} \equiv \frac{X^7+Y^7+Z^7}{7} \pmod{X+Y+Z}$$

Exercice 7
Soient $P_1, ..., P_k \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_q]$ des polynômes à coefficients entiers et p un nombre premier tels que $\sum_{i=1}^{k} deg(P_i) < p$. Montrer que le nombre de racines en commun des polynômes dans $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^q$ est est un multiple de p.

Exercice 8 (A2 RMM 2020)
Soit $n > 1$. On note $\mathbb{U}_n$ les racines n-iemes de l'unité. Soit $P \in \mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]$ tel que pour tout $a_1, \cdots a_n \in \mathbb{U}_n$, $P(a_1, \cdots a_n) = 0$ si et seulement si tous les a_i sont différents. Quel est le plus petit degré possible pour P ?

Equation de polynômes

Exercice 9 ($\star$ P2 RMM 2018)
Existe-t-il des polynômes à coefficients réels P, Q tels que pour tout réel x :

$$P(x)^{10} + P(x)^9 = Q(x)^{21} + Q(x)^{20}$$

Exercice 10 ($\star$)
Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ premiers entre eux et non constants. Montrer qu'il existe au plus trois $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $P + \lambda Q$ soit le carré d'un polynôme.

Exercice 11 (Iran MO 2017)
Trouver tous les polynômes $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tels que pour tout réel x,

$$P(Q(x)) = P(x)^{2017}$$

Exercice 12 (IMC 2018, Problème 9)
Déterminer toutes les paires $P(x)$, $Q(x)$ de polynômes complexes unitaires (c'est-à-dire de coefficient dominant égal à 1) telles que $P(x)$ divise $Q(x)^2 + 1$ et $Q(x)$ divise $P(x)^2 + 1$.

Exercice 13 (EMC 2021 P4)
Trouver tous les entiers $d > 0$ tel qu'il existe P et Q dans $\mathbb{R}[X]$ tels que le degré de P soit d et

$$P(x)^2 + 1 = (x^2 + 1)Q(x)^2.$$

Analyse des racines d'un polynômes

Exercice 14 (IMC 2017, Problème 7 $\star$)
Soit $p(x)$ un polynôme non constant à coefficients réels. Pour tout entier strictement positif n, on pose

$$q_n(x) = (x+1)^n\, p(x) + x^n\, p(x+1).$$

Démontrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n tels que toutes les racines de $q_n(x)$ soient réelles.

Exercice 15 (USA TST 2014 P1 $\star$)
Soit n un entier pair et $c_1, \ldots, c_{n-1}$ des nombres réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n-1} |c_i - 1| < 1$$

Montrer que le polynôme

$$2x^n - c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} - \ldots - c_1 x + 2$$

n'admet pas de racines réelles.

Exercice 16 (IMO SL 2017 A1 ⋆)
Soient $a_1, \ldots, a_n, k$ et M des entiers strictement positifs. On suppose que

$$\tfrac{1}{a_1} + \ldots + \tfrac{1}{a_n} = k \quad \text{et} \quad a_1 a_2 \ldots a_n = M$$

On suppose que $M > 1$. Montrer que le polynôme $M(1+X)^k - (X+a_1)\ldots(X+a_n)$ ne possède pas de racine strictement positive.

Exercice 17 (IMO 2016 P5)
L'équation

$$(x-1) \times \ldots \times (x-2016) = (x-1) \times \ldots \times (x-2016)$$

est écrite au tableau. On désire efface certains facteurs de degré 1 de sorte que l'équation restante n'admette pas de solution réelle. Déterminer le plus petit nombre de facteurs linéaires à effacer pour réaliser cet objectif.

Exercice 18 (A8 2025)
Alice et Bob jouent à un jeu. Pour commencer, Alice écrit des réels non nuls (non nécessairement distincts) sur un tableau. A chaque tour, les joueurs jouent dans cet ordre.

— D'abord, Bob choisit un polynôme $P_k(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ dont les coefficients $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_1, a_0$ sont tous les nombres écrits au tableau dans un ordre de son choix. (par exemple, si les nombres écrits au tableau sont $4, -3, 4$, alors $k = 2$ et Bob peut choisir les polynômes $4x^2 - 3x + 4$ ou $-3x^2 + 4x + 4$ mais pas $4x - 3$ ni $-3x^2 - 3x + 4$.)

— Ensuite, si l'équation $P_k(x) = 0$ n'a pas de solutions réelles, le jeu s'arrête. Autrement, Alice choisit un réel r tel que $P_k(r) = 0$ et l'écrit au tableau, de tel sorte qu'il y ait désormais un nombre de plus au tableau.

Déterminer si Alice peut peut prolonger le jeu indéfiniment, peu importe ce que fait Bob.

Lemmes utiles

Exercice 19 (⋆ IMC P5 2023)
Soit p un nombre premier et $k \geq 1$ un entier tels que $\{a^k + a | a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\}$ forme un ensemble complet de résidus modulo p. Quels valeur peut prendre $2^k + 2$ modulo p ?

Exercice 20 (⋆ APMO 2014)
Trouver tous les entiers n tels que pour tout k, il existe a tels que

$$n \mid a^3 + a - k$$

Exercice 21 (IMC 2012 P5)
Soit $a \in \mathbb{Q}$ et n entier. Montrer que le polynôme

$$P(x) = X^{2^n}(x+a)^{2^n} + 1$$

est irréductible

Solutions

Solution de l'exercice 3
On va voir qu'on peut trouver un tel polynôme. Pour en construire un, on va faire une sorte de parabole qui se ballade. On va choisir un polynôme de la forme :

$$P(X,Y) = A(Y)X^2 + B(Y)X + C(Y)$$

On connait bien les paraboles, en particulier leur minimum. Ainsi si on arrive à choisir $A, B, C \in \mathbb{R}[X]$ tels que les minima de ces paraboles soit tous strictement positifs mais qu'on peut en trouver arbitrairement proche de 0, on a gagné.
A $y \in \mathbb{R}$ fixé, le minimum de la fonction $x \mapsto P(x,y)$ est atteint en $\frac{-B(y)}{2A(y)}$, donc le minimum est :

$$P(\frac{-B(y)}{2A(y)}, y) = \frac{B(y)^2}{4A(y)} - \frac{B(y)^2}{2A(y)} + C(y) = C(y) - \frac{B(y)^2}{4A(y)}$$

On voit ici que l'expression qu'on a obtenu pour le minimum en fonction de y est une fraction rationnelle. C'est ce qui permet ce polynôme d'agir d'une facon qui paraît étrange pour un polynôme.
Réflechissons donc aux contrainter que doivent satisfaire A, B, C. A doit etre strictement positif pour que toutes les paraboles soit tournées vers le haut, et $C(y) - \frac{B(y)^2}{4A(y)}$ doit tendre vers 0 lorsque y tend vers $\pm\infty$ tout en restant positif.
On va prendre C contsant égal à 1. Ainsi $\frac{B(y)^2}{4A(y)}$ doit tendre vers 1 lorsque y tend vers $\pm\infty$, et doit rester en dessous de 1. On peut tout satisfaire en prenant $B = 2Y^2$ et $A = (Y^2+1)^2$. Ainsi le polynôme $(Y^2+1)^2X^2 + 2Y^2X + 1$ satisfait les conditions de l'énoncé, et la réponse est positive.

Solution de l'exercice 4
Soit $P \in \mathbb{R}[X,Y]$ s'annulant sur E. On va montrer que ce polynôme est nul. On va voir ce polynôme comme un polynôme en X à coefficients dans $\mathbb{R}[Y]$. On pose donc $P = \sum_{k=0}^{\deg_X P} P_k(Y)X^k$. Montrons que $P_{\deg_X P}$ est le polynôme nul. On va noter $N := \deg_X P$.
L'idée est de se placer sur une bande $\mathbb{R} \times [a,b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$ sont choisis de telle sorte à ce que les variations en valeur aboslue des P_i soit petits sur $[a,b]$ ce qui assurera que le terme dominant de P sur cette bande est $P_N(Y)X^N$.

Choisissons donc ces a, b. On sait que chaque P_i tend vers l'infini en valeur absolue en $\pm\infty$ ou alors est constant. On va supposer que si P_N est constant, alors il est non nul, car sinon on a fini. Les autres polynômes constants ne seront pas dérangeants, donc focalisons nous sur les polynômes non constants. On prend a tel que tous les P_i soient monotones sur $[a, +\infty[$ et soient de valeur absolue supérieure à 1, et $b = a + 2$. Quitte à multiplier P par une constante, on suppose aussi que les P_i constants sont de valeur absolue supérieure à 1 sur $[a,b]$. On pose C le maximum des valeurs absolues atteints par les P_i sur $[a,b]$ pour $i \in \{0, 1, ..., N-1\}$, polynômes constants inclus.

On sait que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $(x_n, y_n) \in E$ à distance au plus 1 de $(n, a+1)$ tel que $P(x_n, y_n) = 0$. Puisque (x_n, y_n) est à distance au plus 1 de $(n, a+1)$, on sait que $x_n \geqslant n - 1$ et

$y_n \in [a,b]$. On a pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}(n-1)^N \leqslant & |P_N(y_n)x_n^N| \\ = & |\sum_{k=0}^{N-1} P_k(y_n)x_n^k| \\ \leqslant & (CN)(n+1)^{N-1}\end{aligned}$$

Ce qui n'est pas possible en prenant n suffisament grand. On a donc P_N nul sur $[a,b]$, donc nul partout. On conclut par récurrence que chaque P_i est nul. Ainsi, le seul polynôme s'annulant sur tout E est le polynôme nul.

Solution de l'exercice 9
Première chose : on regarde les degrés. On déduit notamment qu'il existe d tel que $\deg Q = 10d$ et $\deg P = 21d$.

Ensuite, on factorise des deux côtés : $P(X)^9(P(X)+1) = Q(X)^{19}(Q(X)+1)$. On dérive cette équation et on trouve

$$P'P^8(10P+9) = Q'Q^{19}(20+21Q)$$

On déduit notamment que $Q^{19} \mid \gcd(P'P^8(10P+9), P^9(P+1))$. Or la relation $10(P+1) - (10P+9) = 1$ donne que les polynômes $10P+9$ et $P+1$ sont premiers entre eux. Ainsi, Q^{19} divise $P^8 \gcd(P', P)$. En regardant les degrés, cela donne

$$19 \times 10d \leqslant 8\deg P + \deg P = 9 \times 21d$$

ce qui est absurde. Il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 10
On va raisonner par l'absurde. Supposons qu'on ait $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ non constants premiers entre eux et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $i \in \{1,2,3,4\}$, $P + \lambda_i Q$ soit un carré. On commence par une observation sur les degrés de P et Q. On peut les supposer différents. En effet, s'ils ne le sont pas, il suffit de retrancher μQ à P, où μ est le rapport entre leur coefficients dominants, et d'ajouter μQ à Q. Ces nouveaux polynômes satisfont toujours nos hypothèses. Supposons donc que nos polynômes P et Q sont de degrés différents.
Ensuite, on va expliciter les équations que P et Q satisfont :

$$P + \lambda_i Q = R_i^2$$

pour $i \in \{1,2,3,4\}$. En dérivant, on obtient

$$P' + \lambda_i Q' = 2R_iR_i'$$

Ainsi, R_i divise $P' + \lambda_i Q'$ et $P + \lambda_i Q$ donc divise leur combinaison linéaire $PQ' - QP'$.
On va essayer d'obtenir une absurdité à partir de ca, en faisant des raisonnements sur le degré. Remarquons que les R_i sont premiers entre eux. En effet, s'ils ne l'étaient pas, alors ils auraient un facteur en commun avec Q et donc P, contredeisant le fait que P et Q sont premiers entre eux. Ainsi $R_1R_2R_3R_4 \mid PQ' - QP'$. Or puisque $\deg P \neq \deg Q$, le degré de chaque R_i vaut $\frac{1}{2}\max(\deg P, \deg Q)$. Ainsi si $PQ' - QP' \neq 0$, on a $2\max(\deg P, \deg Q) \leqslant \deg P + \deg Q - 1$ ce qui n'est pas possible. Ainsi $PQ' = QP'$. Or ceci n'est pas possible car

leur coefficients dominants ne peuvent pas être égaux vu que P et Q n'ont pas le même degré. On est donc amené vers une absurdité, ce qui termine l'exercice.

Solution de l'exercice 15
Soit $P(x)$ le polynôme de l'énoncé. Les coefficients et l'hypothèse invitent à considérer le polynôme

$$Q(x) = x^n - x^{n-1} + \ldots - x + 1$$

et à étudier $P(x) - Q(x)$.
D'une part, on a pour $x \leqslant 0$:

$$P(x) = 2x^n + \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{(-1)^i x^i}_{\geqslant 0} + 2 \geqslant 2$$

donc les racines réelles de P sont nécessairement strictement positives.
On a ensuite :

$$P(x) = P(x) - Q(x) + Q(x) = x^n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i - 1)x^i + \frac{x^{n+1}+1}{x+1}$$

Si $x \leqslant 1$, alors $|\sum_{i=1}^{n-1}(c_i - 1)x^i| < 1$ de sorte que $P(x) \geqslant 1 - 1 + \frac{x^{n+1}+1}{x+1} > 0$ pour $x \leqslant 1$.
Si $x > 1$, on se ramène à $x < 1$ avec, de même que précédemment,

$$x^n + 1 + \sum_{i=0}^{n}(c_i - 1)x^i = x^n \left(1 + (x^{-1})^n + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i - 1)(x^{-1})^{n-i}\right) \geqslant 0$$

de sorte qu'à nouveau $P(x) > 0$.

Solution de l'exercice 16

Première solution : Il suffit de montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$. Or, d'après l'inégalité de Bernouilli : $(1+y)^a > 1 + ya$ si $y > 0$:

$$(x + a_1)\ldots(x + a_n) < a_1(x+1)^{1/a_1} a_2(1+x)^{1/a_2} \ldots a_n(1+x)^{1/a_n} = M(1+x)^k$$

ce qui donne le résultat voulu.
Deuxième solution : La première solution est peut-être trop astucieuse, mais cet exercice peut être vu comme un deuxième exemple de l'application de l'IAG au niveau olympique.

Commençons par remarquer que 0 est bien une racine du polynôme. Nous allons donc montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$, ou ce qui revient au même qu'on a $a_1(1+x)^{1/a_1} \cdot a_2(1+x)^{1/a_2} \cdots a_n(1+x)^{1/a_n} > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$.

Il suffit donc de montrer que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_j(1+x)^{1/a_j} > (x+a_j)$ pour tout $x > 0$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique pondérée, on a

$$x + a_j = (x+1) + (a_j - 1) = a_j \left[\frac{1}{a_j}(x+1) + \frac{a_j - 1}{a_j}1\right] \geqslant a_j(x+1)^{1/a_j},$$

avec égalité si et seulement si $x + 1 = 1$, i.e. $x = 0$, ce qui est exclus. D'où, l'inégalité stricte.

Solution de l'exercice 17

Réponse : 2016

Tout d'abord, si l'on retire moins de 2016 facteurs, d'après le principe des tiroirs il existe un facteur $x-k$ qui n'est retiré sur aucun des deux côtés, donc l'équation admet la solution réel $x=k$.

Montrons à présent que l'on peut retirer 2016 facteurs de sorte que l'équation n'admet aucune solution.

Pour cela, on retire à gauche les facteurs de la forme $x-4k+3, x-4k$ (pour $1 \leqslant k \leqslant 504$) et à droite les facteurs de la forme $x-4k+2$ et $x-4k+1$. Montrons que l'équation

$$(x-1)(x-4)\dots(x-2013)(x-2016) = (x-2)(x-3)\dots(x-2014)(x-2015)$$

n'admet pas de solution réelle.

• : Le résultat est vrai si $x \in \{1,\dots,2016\}$ puisque l'un des côtés du tableau est alors nul et pas l'autre.

• : Si $x<1$ ou $x>2016$, alors $(x-(4k+2))(x-(4k+3)) > (x-(4k+1))(x-(4k+4))$ pour tout $k \in \{0,\dots,503\}$ de sorte que le côté droit est plus grand que le côté gauche.

• : Si $4k<x<4k+1$, la preuve s'adapte.

• : Si $4k+1<x<4k+2$ et $4k+3<x<4k+4$, alors le produit $(x-(4k+1))(x-(4k+4))$ est négatif et les autres facteurs $(x-(4j+1))(x-(4j+4))$ sont positifs, de sorte que le membre de gauche est strictement négatif. En revanche les facteurs $(x-(4j+2))(x-(4j+3))$ sont positifs, donc le membre de droite est strictement positif.

• : Si $4k+2<x<4k+3$. Cette fois-ci on a $(x-1)(x-2016) > (x-2)(x-2015)$ et $(x-4j)(x-4j-1) > (x-4j+1)(x-4j-2)$ pour tout j, de sorte que le côté gauche est strictement plus grand que le côté droit.

5 Combinatoire : Grilles (Oscar)

Exercices

Exercice 1
Oscar et Paul jouent à un jeu sur un échiquier 5202×5202. Chacun son tour, en commençant par Oscar, Oscar met un X dans une case vide, et puis Paul met un O dans une case vide. Oscar gagne s'il réussi à remplir un carré 2×2 de X, et sinon c'est Paul qui gagne.
Lequel des joueurs possède une stratégie gagnante ?

Exercice 2
On considère une grille 10×15. Quel est le nombre minimal de chemins bas-droite nécessaires pour paver la grille ? Quel est le nombre de pavages différents utilisant ce nombre de chemins ?

Exercice 3 (P4 IMO 2018)
Un site est un point (x, y) du plan tel que x et y soient des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 20. Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre.
Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière de laquelle Bernard place ses pierres bleues.

Exercice 4 (C1 2017)
On considère un rectangle à côtés entiers impairs. On divise celui-ci en plus petits rectangles dont les côtés sont toujours entiers. Montrer qu'il existe un des petits rectangles dont les distances aux quatre côtés du grand rectangle sont toutes de même parité.

Exercice 5
Un rectangle dans le plan est dit *semi-entier* si ses côtés sont parallèles aux axes et qu'au moins l'un de ses côtés a une longueur entière.
On pave un grand rectangle, dont les côtés sont parallèles aux axes, avec un nombre fini de petits rectangles semis-entiers. Montrer que ce grand rectangle est également semi-entier.

Exercice 6 (Chine 2017 TSTST 3 Jour 2 P3)
Soit n un entier impair. On colorie les cases d'une grille $n \times n$ en rouge ou en bleu. On suppose que les cases d'une couleur donnée forment un *chemin*, c'est-à-dire que l'on peut numéroter les cases de la couleur $C_1, \ldots, C_m$ afin que C_i et C_j aient un côté en commun si et seulement si $|i - j| = 1$. Montrer que le centre de la grille est une extrémité d'un des deux chemins.

Exercice 7 (IMO P6 2022)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un *carré nordique* est une grille $n \times n$ dont les cases ont été numérotées de 1 à n^2, chaque numéro étant utilisé une seule fois. Deux cases distinctes sont considérés comme adjacentes si elles ont un côté commun. Toute case dont le numéro est inférieur aux numéros des cases qui lui sont adjacentes est appelée *vallée*. Un *chemin de randonnée* est une suite formée d'au moins une case, telle que :

— la première case de la suite est une vallée

— deux cases consécutives de la suite sont toujours adjacentes

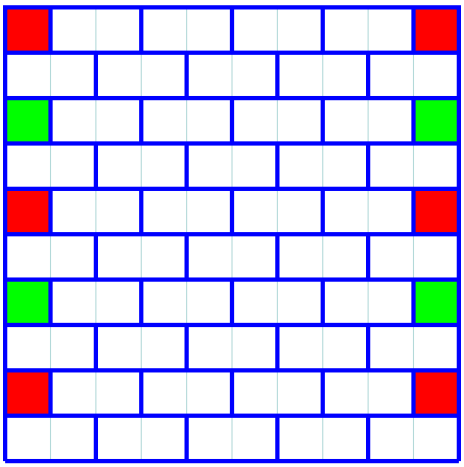
— les cases de la suite sont numérotées dans l'ordre strictement croissant.

Trouver, en fonction de n, le plus petit nombre possible de chemins de randonnée que peut contenir un carré nordique.

Exercice 8 (C6 2021)
Un chasseur et un lapin invisible jouent sur une grille infinie à maille carrée, c'est-à-dire où chaque case a quatre voisines : à gauche, à droite, en haut et en bas. Tout d'abord, le chasseur colorie chaque case de la grille, mais ne peut utiliser qu'un nombre fini de couleurs. Le lapin choisit ensuite une case de la grille, qui sera son point de départ. Il commence alors à se déplacer : chaque minute, il indique au chasseur la couleur de la case sur laquelle il se trouve, puis il se déplace sur une des quatre cases adjacentes. Evidemment, comme il est invisible, les seules informations auxquelles le chasseur a accès sont les couleurs que le lapin annonce chaque minute juste avant de se déplacer.
Le chasseur gagne si, au bout d'une durée finie, il peut identifier la case que le lapin avait initialement choisie, ou bien si le lapin revient en une case où il s'était déjà trouvé précédemment.
Le chasseur dispose-t-il d'une stratégie gagnante ?

Solutions

Solution de l'exercice 1
On pave la grille de cette manière (en prenant comme exemple un grille 10×10) : On remarque



qu'en plaçant un carré 2×2, il y a forcément exactement un domino entier qui est recouvert par le carré. On en déduit la stratégie suivante pour Paul :

- Si Oscar joue sur une case non colorée, Paul joue sur la case qui appartient au même domino.
- Si Oscar joue sur une case colorée, Paul joue sur la case colorée de la même ligne.

Ainsi, Oscar ne peut remplir un domino, et donc ne peut remplir un carré 2×2.

Solution de l'exercice 2
On va tout au long de la preuve considérer les diagonales haut-droite qui ont la propriété essentielle qu'un chemin bas-droite ne peut passer que par une case au plus d'une telle diagonale. Ainsi, en considérant une telle diagonale qui comporte 10 cases, on montre qu'on a besoin d'au moins 10 chemins.
De plus, on peut se débrouiller aisément avec 10 chemins : un chemin par ligne. Ainsi, le nombre minimal de chemins bas-droite nécessaires pour paver la grille est 10.

On s'intéresse maintenant à un pavage utilisant exactement 10 chemins. Sur chacune des 6 diagonales contenant 10 cases, on sait que chaque chemin passe par exactement une case de la diagonale. Les cases de la première ligne sont nécessairement toutes atteintes par le même chemin, mais alors les cases de la deuxième ligne sont aussi toutes atteintes par le même chemin et ainsi de suite. On en déduit que sur ces 6 diagonales, les chemins vont tous à l'horizontale. On se ramène alors à compter le nombre de manière de commencer les chemins dans le triangle en haut à gauche, et aussi le nombre de manière de les terminer dans le triangle en bas à droite. Ces deux quantités étant égales par symétrie, dénombrons le nombre de moyens de commencer les chemins en haut à gauche.
Sur la diagonale contenant 9 cases, il y aura exactement 9 chemins différents et donc exactement un chemin va commencer sur la première diagonale à 10 cases : on a 10 manières de le choisir, et ensuite cette diagonale à 9 cases sera déterminée de manière unique. De même, pour la diagonale suivante, on a 9 choix et ainsi de suite. Il y a donc $10 \times 9 \times \ldots \times 2 = 10!$

manières de commencer les chemins en haut à gauche.
Finalement, il existe $(10!)^2$ manières de paver la grille avec 10 chemins bas-droite.

Solution de l'exercice 3
On va montrer que la réponse est 100.

Premièrement, Alice peut s'assurer de placer au moins 100 pierres rouges. En effet, on peut colorier les sites en damier, et Alice peut alors jouer uniquement sur les cases noires. Dans ce cas, elle ne peut pas avoir deux pierres à distance $\sqrt{5}$, et elle peut donc poser ses pierres arbitrairement afin de remplir la moitié des cases noires au moins (avec égalité si Bob ne joue que sur des cases noires), c'est-à-dire 100 cases.

Montrons maintenant qu'Alice ne peut pas faire mieux. Considérons une sous-grille 4×4 dont on colorie les cases selon :

A	B	C	D
C	D	A	B
B	A	D	C
D	C	B	A

Alors si Alice joue sur une case A par exemple, elle en bloque deux autres et Bob peut jouer sur la dernière, afin d'empêcher Alice de rejouer sur une case A. De cette manière, Bob peut empêcher Alice de poser strictement plus de 4 pierres dans le carré 4×4. En pavant le carré 20×20 par 25 tels carrés, Bob peut empêcher Alice de poser strictement plus de 100 pierres.

Solution de l'exercice 4
On pave le rectangle en damier, de façon à ce que les coins soient noirs. Alors un rectangle à l'intérieur a des distances aux quatre côtés du grand de même parité si et seulement si ses quatre coins sont noirs, ou encore si et seulement s'il possède strictement plus de cases noires que de cases blanches.
Mais le grand rectangle possède une case noire de plus que de cases blanches, donc un petit rectangle comme précédemment existe forcément.

Solution de l'exercice 5
On pave le plan en damier avec des carrés de côté $\frac{1}{2}$ parallèlement aux côtés des rectangles, en commençant avec une case noire dans le coin en bas à gauche du grand rectangle. Alors on remarque que sur un rectangle semi-entier, le côté entier a la même longueur blanche que noire donc le rectangle contient la même aire blanche que noire. Mais alors c'est le cas pour tous les petits rectangles, et donc pour le grand.
On note a et b la longueur des côtés du grand rectangle. On divise alors le grand rectangle en un rectangle $\lfloor a \rfloor \times \lfloor b \rfloor$ en bas à gauche, un rectangle $\lfloor a \rfloor \times (b - \lfloor b \rfloor)$ en haut à gauche, un rectangle $(a - \lfloor a \rfloor) \times \lfloor b \rfloor$ en bas à droite et un rectangle $(a - \lfloor a \rfloor) \times (b - \lfloor b \rfloor)$ en haut à droite. Les trois premiers rectangles sont semi-entiers, donc le dernier rectangle contient aussi la même aire blanche que noire. Mais ce dernier rectangle a des côtés strictement inférieurs à 1 et son coin en bas à gauche coïncide avec celui d'un carré noir. Celui-ci contient alors une aire noire strictement supérieure à l'aire blanche à moins qu'il soit d'aire nulle, c'est-à-dire que a ou b est entier.

Solution de l'exercice 6
Considérons un coloriage comme dans l'énoncé. Alors si on considère le coin en bas à gauche de la grille de coordonnées $(1, 1)$, c'est soit une extrémité d'un des deux chemins, soit un

"tournant" d'un des deux chemins, allant du haut vers la droite. Si c'est un tournant, la case en $(2, 2)$ est de l'autre couleur, et c'est de même une extrémité d'un chemin ou un tournant de ce chemin, allant du haut vers la droite. De cette façon, tant que l'on n'atteint pas une extrémité, on trouve que les cases de la diagonale sont des tournants du chemin allant du haut vers la droite. Mais ceci ne peut pas être le cas de la case en haut à droite donc il y a forcément une extrémité sur la diagonale.

Montrons maintenant que chaque diagonale a au moins deux extrémités de chemins. On considère par exemple la diagonale bas-gauche/haut-droite comme précédemment. Si celle-ci ne contenait qu'une seule extrémité de chemin, alors cette extrémité aurait un tournant haut-droite en bas à gauche, et un tournant bas-gauche en haut à droite. Cette extrémité ne peut pas avoir la même couleur qu'un des tournants sinon cela formerait un carré 2×2 de même couleur. Les deux tournants sont donc de la même couleur, et l'extrémité est de l'autre couleur. Mais alors celle-ci est isolée du reste de la grille, donc toute la grille sauf cette extrémité est unicolore, ce qui est clairement impossible si $n \geq 3$, et si $n = 1$ le problème est simple.

Cependant, les quatre extrémités des chemins ne peuvent pas se trouver sur les diagonales. En effet, si l'on colorie la grille en damier avec des cases noires sur les coins, celle-ci a une case noire de plus que de case blanche car n est impair. Mais si chaque chemin a deux extrémités sur les diagonales, chaque chemin a deux extrémités noires et possède donc une case noire de plus que de case blanche. Ainsi, il y aurait deux cases noires de plus que de cases blanches, absurde.

D'après les deux résultats précédents, il faut qu'il y ait une des extrémités des chemins qui soit partagée entre les deux diagonales, ce qui signifie qu'elle est au centre de la grille.

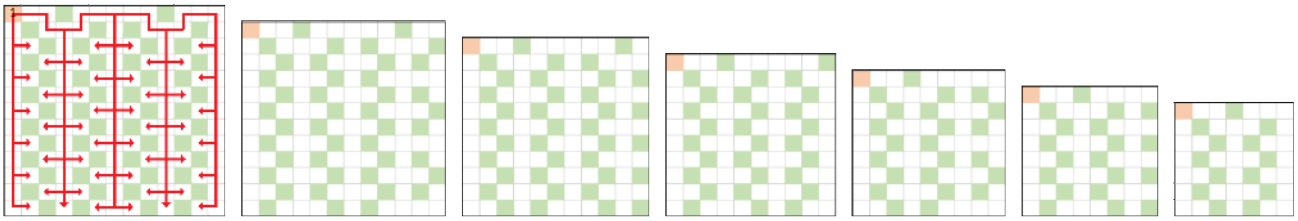
Solution de l'exercice 7

On considère deux cases adjacentes, qu'on note c et c' de sorte que le numéro sur c est strictement inférieur à celui sur c'. Dès lors, on remarque qu'il y a un chemin de randonnée qui termine par c puis c' : en effet, on peut le construire à l'envers depuis en c, en allant tant qu'on n'est pas sur une vallée, vers la case voisine avec le plus petit numéro. Tous les chemins de randonnée ainsi construits sont distincts, et il y en a $2n(n-1)$.
De plus, en considérant le chemin de randonnée qui ne fait que rester sur la case avec le numéro 1, on trouve un autre chemin de randonnée. Il y a donc toujours au moins $2n(n-1)+1 = 2n^2 - 2n + 1$ chemins de randonnée.

On dit qu'un sommet est une *plaine* si son numéro n'est pas supérieur à tous ses voisins. On cherche une numérotation telle que toutes les plaines ont exactement un voisin avec un numéro plus faible, à l'exception de la case avec le numéro 1. Alors, il y a seulement un chemin de randonnée réduit à un point, et pour deux cases adjacentes, il existe seulement un chemin de randonnée qui se termine par un passage entre ces deux cases. Ainsi, on a exactement $2n^2-2n+1$ chemins de randonnées : il reste donc à trouver une telle numérotation.

Supposons qu'on soit capable de colorier les cases d'une grille en bleu et rouge, de sorte à ce que les cases bleues forment un arbre et que deux cases rouges ne soient jamais adjacentes. Alors, on numérote les cases bleues à partir de 1, selon un ordre DFS préfixe depuis un sommet arbitraire. Puis, on numérote arbitrairement les sommets rouges avec les numéros restants. On vérifie alors que cette numérotation vérifie bien les contraintes fixées ci-dessus.

On peut alors s'appuyer sur ces exemples pour générer un coloriage qui convient :



Finalement, le plus petit nombre de chemins de randonnée que peut contenir un carré nordique est $2n^2 - 2n + 1$.

Solution de l'exercice 8

Voir le sixième problème de ce test.

6 Arithmétique : TD de niveau P1/P2 (Emilhan)

Exercices

Exercice 1 (ELMO 2025, P5)
Soit k un entier strictement positif. On définit une suite d'entiers $a_1, a_2, \ldots$ par $a_1 = 1$ puis, pour chaque entier $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = a_n + k^{a_n}.$$

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que, pour tout entier r, il existe un terme de la suite qui soit congru à r modulo p.

Exercice 2 (ISL 2019, N4)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ telles que $a + f(b)$ divise $a^2 + bf(a)$ pour tous $a, b > 0$ tels que $a + b > 2019$.

Exercice 3 (ELMO 2018, P2)
On dit qu'une suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs est *jolie* si elle satisfait $a_1 = 1$ et si, pour tous les entiers $n, k \geq 1$, on a

$$a_n \mid a_k + a_{k+1} + \ldots + a_{k+n-1}.$$

Soit $m \geq 1$ un entier. Parmi toutes les suites jolies, déterminer la valeur maximale que peut prendre a_{2m}.

Exercice 4
On dit qu'une suite d'entiers strictement positifs $(a_n)_{n>0}$ est *valide* si pour tous $m, n > 0$, on a

$$\gcd(a_m, a_n) \mid m^2 + n^2 \quad \text{et} \quad \gcd(m, n) \mid a_m^2 + a_n^2.$$

On dit qu'un naturel a est k-valide s'il existe une suite valide $(a_n)_n$ pour laquelle $a_k = a$. Existe-t-il un entier $k > 0$ tel qu'il existe exactement 2019 naturels qui sont k-valides ?

Exercices plus connus mais sympas

Exercice 5 (EGMO 2025, P1)
Pour tout entier N strictement positif, on pose $c_1 < c_2 < \ldots < c_m$ tous les entiers strictement positifs inférieurs à N et premiers avec N. Trouver tous les nombres $N \geqslant 3$ tels que

$$\gcd(N, c_i + c_{i+1}) \neq 1$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant m - 1$.

Exercice 6 (ISL 2023, N4)
Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ et r des entiers naturels strictement positifs tels que les $n + 1$ produits

$$\begin{aligned} p_0 &= a_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ p_1 &= b_1 \times a_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ p_2 &= b_1 \times b_2 \times a_3 \times \cdots \times a_n, \\ &\vdots \\ p_n &= b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_n \end{aligned}$$

satisfassent les égalités $p_1 - p_0 = p_2 - p_1 = \ldots = p_n - p_{n-1} = r$; autrement dit, $p_0, p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont les $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison $r \geqslant 1$.

Trouver, en fonction de n, la plus petite valeur de r possible.

Exercice 7 (EGMO 2026, P2)
Soit n un entier strictement positif. Marie joue à un jeu : elle commence avec le nombre 1 écrit au tableau. Elle peut, autant de fois qu'elle le souhaite, choisir un entier j tel que $1 \leqslant j \leqslant n$ et remplacer alors le nombre V au tableau par le nombre $j \cdot R(V/j)$. Ici, $R(x)$ désigne l'entier le plus proche de x ; si x est exactement à mi-chemin entre deux entiers consécutifs, il est arrondi vers le haut. Par exemple, $R(1,3) = 1$ et $R(1,5) = R(1,8) = 2$.

1. Prouver que pour chaque n, il existe un entier strictement positif B tel que Marie ne peut jamais obtenir un nombre plus grand que B au tableau.
2. Pour tout n donné, soit $f(n)$ le nombre maximum que l'on peut obtenir au tableau après un nombre fini de remplacements. Montrer qu'il existe un entier strictement positif N tel que pour tout $n \geqslant N$, le nombre 2026 divise $f(n)$.

Exercice 8 (ISL 2023, N5)
Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite d'entiers strictement positifs strictement croissante telle que pour tout $k \geqslant 1$,

$$a_{k+1} \mid 2(a_1 + \ldots + a_k).$$

On suppose que l'ensemble des nombres premiers divisant au moins un terme de la suite est infini. Montrer que tout entier strictement positif divise au moins un terme de la suite.

Indications

1. Essayer de faire en sorte que k^{a_n} soit constant modulo p. Abandonner l'idée de regarder a_n modulo $p-1$.
2. On pourra essayer d'utiliser Dirichlet.
3. Commencer par chercher la construction.
4. Réexprimer la condition de l'énoncé en une condition individuelle.
5. Trouver les solutions pour des petits cas, puis écrire explicitement ce à quoi ressemble N par rapport aux solutions précédemment trouvées.
6. Trouver une hypothèse arithmétique forte que l'on peut faire sur les a_i et b_i.
7. Réexprimer la condition définissant $f(n)$ avec des parties entières.
8. Introduire $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ et $b_k = 2s_k/a_{k+1}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Si $k = 1$, l'exercice est immédiat. Ce cas particulier peut cependant nous donner une idée plus générale : si l'on arrive à trouver une infinité de nombres premiers p pour lesquels la suite k^{a_n} soit constante et non nulle modulo p àpcr, la conclusion suivra.
On peut en fait même essayer de trouver p tel que $k^{a_n} \equiv 1 \pmod p$. L'idée clef est de remarquer que pour tout $m \geqslant 1$, la suite a_n est constante àpcr modulo k^m, puisque la suite a_n est clairement croissante et tend vers $+\infty$. En particulier, si l'on note L une telle constante, et si $p \mid k^{k^m} - 1$, alors pour tout n assez grand, on a

$$a_{n+1} - a_n = k^{a_n} \equiv k^L \pmod p,$$

donc un tel nombre premier p conviendrait puisque l'on aurait automatiquement $(p, k) = 1$.

Pour conclure, il suffit donc de trouver une infinité de nombres premiers p qui divisent un nombre de la forme $k^{k^m} - 1$. Cela découle du théorème de Zsigmondy. Il est également possible de donner une preuve plus élémentaire. Puisque $k^{k^m} - 1 \mid k^{k^{m+1}} - 1$ pour tout $m \geqslant 1$, il suffit de prouver qu'il existe toujours un diviseur premier de $x^k - 1$ qui ne divise pas $x - 1$, en notant $x = k^m$. Soit donc p un nombre premier qui divise $\frac{x^k-1}{x-1} = 1 + x + \cdots + x^{k-1}$. Si p divisait $x - 1$, alors p diviserait $1 + 1 + \cdots + 1 = k$. Mais cela n'est pas possible puisque $p \mid x^k - 1$, donc $(p, x) = (p, k) = 1$.

Solution de l'exercice 2
Par hypothèse, on sait que

$$f(b) + 1 \mid bf(1) + 1$$

pour tout $b > 2018$. Pour exploiter l'hypothèse de divisibilité, on peut essayer de faire en sorte que le membre de droite soit un nombre premier. Si c'était le cas, on aurait en fait une égalité car $f(b) + 1 > 1$.
Puisque $(1, f(1)) = 1$, on sait par le théorème de la progression arithmétique de Dirichlet qu'il existe une infinité de naturels n pour lesquels la quantité $nf(1) + 1$ est un nombre premier, donc tels que $f(n) = nf(1)$.

Soit $a > 0$ quelconque et $n > 2018$ fixé tel que $f(n) = nf(1)$. En prenant $b = n$, on trouve :

$$a + nf(1) \mid a^2 + nf(a),$$

et puisque $a + nf(1) \mid a^2 + anf(1)$, on trouve par soustraction :

$$a + nf(1) \mid n(f(a) - af(1)).$$

La présence du n dans le membre de droite nous embête, il faut donc plutôt l'annuler en écrivant :

$$a + nf(1) \mid f(1)(a^2 + nf(a)) - f(a)(a + nf(1)) = a(af(1) - f(a)).$$

Puisque cette relation est vérifiée pour des valeurs de n arbitrairement grandes, on en déduit que $f(a) = af(1)$.

Réciproquement, toutes les fonctions de la forme $a \mapsto K \cdot a$, avec $K \geqslant 1$, sont solutions.

Solution n°2 de l'exercice 2 (Analyse, par Vlad)
En prenant $a = 1$ et b assez grand, on obtient $1 + f(b) \leqslant 1 + bf(1)$, donc $f(x)/x$ est bornée sur

$\mathbb{Z}_{>0}$. En particulier (par le théorème de Weierstrass, qui se démontre par dichotomie et principe des tiroirs infinis), il existe une suite $(x_k)_k$ d'entiers tel que $x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x_k)/x_k \to \lambda$, pour un certain réel $\lambda \geqslant 0$. Soit $b \in \mathbb{Z}_{>0}$ et k assez grand (tel que $b + a_k > 2019$). On obtient alors

$$x_k + f(b) \mid x_k^2 + bf(x_k),$$

et par hypothèse on sait que

$$\frac{bf(x_k)}{x_k + f(b)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot b.$$

Ainsi, puisque

$$\frac{x_k^2}{x_k + f(b)} - x_k = \frac{-x_k f(b)}{x_k + f(b)} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -f(b),$$

on trouve

$$\frac{x_k^2 + bf(x_k)}{x_k + f(b)} - x_k \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \lambda \cdot b - f(b).$$

Le membre de gauche étant une suite bornée et convergente d'entiers, on en déduit qu'elle est constante égale au membre de droite àpcr.
En développant, on obtient, pour tout k assez grand,

Solution de l'exercice 3
Montrons que les valeurs recherchées sont $x_{2m} = 2^m - 1$.

Soit $(a_n)_n$ une jolie suite. Pour tout $k, n \geqslant 1$, on sait que $a_n \mid a_k + \ldots a_{k+n-1}$ et $a_n \mid a_{k+1} + \ldots + a_{k+n}$, donc par soustraction on obtient

$$(\star) \quad a_n \mid a_{k+n} - a_k.$$

En particulier, deux termes consécutifs de la suite sont toujours premiers entre eux.
Notons $S_m = a_1 + \ldots a_m$. On sait par hypothèse que pour tout $m \geqslant 1$, on a $a_m \mid S_m$.

On peut exhiber la construction suivante, qui atteint toutes les valeurs $a_{2m} = 2^m - 1$:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 2^{\frac{n}{2}} - 1 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}.$$

Afin de vérifier que cette suite est en effet jolie, il suffit de remarquer pour tout $n \geqslant 1$, on a

$$a_{2n} = 2^n - 1 \mid 2^{n+1} - 2 = S_{2n},$$

que $a_{2n} \mid a_{2k+1+2n} - a_{2k+1} = 0$ pour tout $k \geqslant 0$ et que $a_{2n} \mid a_{2k+2n} - a_{2k} = 2^k \cdot (2^n - 1)$ pour tout $k \geqslant 1$.

Réciproquement, soit $(a_n)_n$ une jolie suite. Afin de prouver que les bornes recherchées sont bien $x_{2m} = 2^m - 1$, montrons par récurrence que pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_{2n} \leqslant 2^{n+1} - 2$ et $a_{2n} \leqslant 2^n - 1$. Une telle récurrence double peut notamment être motivée par le fait que la suite périodique $1, 1, 2, 1, 1, 2, \ldots$ est jolie, et donc que notre construction ne maximise pas les valeurs de tous les termes à la fois.
L'initialisation est évidente : on a $a_2 \mid a_1 + a_2$, donc $a_2 = 1 = 2^1 - 1$ et $S_2 = 2 = 2^2 - 2$. Soit

$n \geqslant 1$ tel que $S_{2n} \leqslant 2^{n+1} - 2$ et $a_{2n} \leqslant 2^n - 1$. Remarquons que $a_{2n+1} \mid S_{2n+1} - a_{n+1} = S_{2n}$ et $a_{2n+2} \mid S_{2n+2} - a_{2n+2} = S_{2n+1}$. De plus, $a_{2n+1} \mid a_{2n+2} - a_1 = a_{2n+2} - 1$. Ainsi :

$$a_{2n+2} \mid a_{2n+1} \cdot \left(\frac{S_{2n}}{a_{2n+1}} + 1\right) \mid (a_{2n+2} - 1) \cdot \left(\frac{S_{2n}}{a_{2n+1}} + 1\right).$$

Puisque $(a_{2n+2}, a_{2n+2} - 1) = 1$, on en déduit que

$$a_{2n+2} \mid \left(\frac{S_{2n}}{a_{2n+1}} + 1\right),$$

donc

$$(a_{2n+2} - 1) \cdot a_{2n+1} \leqslant S_{2n}.$$

Par conséquent, $a_{2n+1} + a_{2n+2} - 1 \leqslant S_{2n} + 1$. L'hérédité est une conséquence directe de l'inégalité $a_{2n+1} \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 4

L'idée clef de l'exercice est de reformuler la condition compliquée de l'énoncé. Elle est en fait équivalente au fait que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout nombre premier p, on ait

$$(\star) \quad \frac{\nu_p(n)}{2} \leqslant \nu_p(a_n) \leqslant 2\nu_p(n).$$

Un sens est plus clair que l'autre : soit $(a_n)_{n>0}$ une suite d'entiers strictement positifs vérifiant $(\star)$. On a alors, pour tous $m, n > 0$ et p premier :

$$\nu_p(\gcd(m,n)) = \min\{\nu_p(m), \nu_p(n)\} \leqslant \min\{2\nu_p(a_m), 2\nu_p(a_n)\} \leqslant \nu_p(a_m^2 + a_n^2)$$

et

$$\nu_p(\gcd(a_m, a_n)) \leqslant \min\{\nu_p(a_m), \nu_p(a_n)\} \leqslant \min\{2\nu_p(m), 2\nu_p(n)\} \leqslant \nu_p(m^2 + n^2).$$

Réciproquement soit $(a_n)_{n>0}$ une suite valide. Commençons par montrer l'inégalité de gauche dans $(\star)$.

Pour tout $n > 0$, on sait que

$$n \mid a_n^2 + a_{2n}^2,$$
$$n \mid a_{2n}^2 + a_{3n}^2,$$
$$n \mid a_n^2 + a_{3n}^2.$$

Ainsi, $n \mid 2a_n^2$ en ajoutant les lignes 1 et 3 et soustrayant la deuxième. En particulier, si p est un nombre premier impair, on en déduit que $\nu_p(n) \leqslant 2 \cdot \nu_p(a_n)$. Si $p = 2$, il faut être un petit peu plus fin. Notons $t = \nu_2(n)$ et $M = 2^{t+1}$. Par ce qui précède, on sait que $2^{t+1} \mid 2 \cdot a_M^2$, donc $2^t \mid a_M^2$. De plus,

$$2^t = (2^{t+1}, n) \mid a_M^2 + a_n^2,$$

donc $2^t \mid a_n^2$ et par suite $\nu_2(n) \leqslant 2 \cdot \nu_2(a_n)$.

Montrons maintenant l'inégalité de droite dans $(\star)$. Posons $t = \nu_p(a_n)$ et $M = p^{2t+1}$. Par ce qui précède, $\nu_p(a_M) > t = \nu_p(a_n)$ et $\nu_p(n) \leqslant 2t < \nu_p(M)$. De plus,

$$(a_n, a_M) \mid n^2 + M^2,$$

donc $\nu_p(a_n) \leqslant 2 \cdot \nu_p(n)$.

Pour conclure, considérons un entier $k > 0$ dont la décomposition en facteurs premiers s'écrit sous la forme

$$k = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i},$$

où les p_i sont des nombres premiers et $e_i \geqslant 0$. Grâce à notre reformulation, on sait que le nombre d'entiers k-valides vaut

$$\prod_{i=1}^{r} \left(2e_i - \left\lceil \frac{e_i}{2} \right\rceil + 1\right).$$

Or, chacun de ces facteurs vaut $3x+1$ si $e_i = 2x$ et $3x+2$ si $e_i = 2x+1$, donc le nombre d'entiers k-valides ne peut pas être divisible par 3. Cela conclut l'exercice.

Solution de l'exercice 5

Réponse : Les entiers pairs et les puissances de 3.

Soit N un entier solution. Si N est pair, alors les c_i sont tous impairs, donc $c_i + c_{i+1}$ est pair et $\text{PGCD}(N, c_i + c_{i+1}) \geqslant 2$ pour tout indice i, donc $\boxed{\text{les entiers pairs sont solutions}}$.

Supposons désormais que N est impair. On a donc $c_1 = 1$ et $c_2 = 2$, d'où $\text{PGCD}(N, 3) \neq 1$ et $\boxed{3 \mid N}$. On écrit alors $N = 3^\alpha A$ avec $\alpha \geqslant 1$ et A impair premier avec 3. On suppose par l'absurde que N n'est pas une puissance de 3 et donc que $A > 1$ (ce qui implique que $A \geqslant 5$). On distingue alors plusieurs cas :

— Si $A \equiv 1 \mod 3$, alors les entiers A et $A-1$ ne sont pas premiers avec N mais les entiers $A-2$ et $A+1$ le sont (en effet, $3 \mid A-1$ mais pas $A-2$ et $A+1$, et on a bien $\text{PGCD}(A-2, A) = \text{PGCD}(A+1, A) = 1$). On déduit que $\text{PGCD}(N, A-2+A+1) = \text{PGCD}(N, 2A-1) \neq 1$. Or $2A - 1 \equiv 1 \mod 3$ n'est pas divisible par 3 et est premier avec A. On a donc une contradiction.

— Si $A \equiv 2 \mod 3$, alors les entiers A et $A+1$ ne sont pas premiers avec N mais les entiers $A-1$ et $A+2$ le sont. On déduit que $\text{PGCD}(N, 2A+1) \neq 1$. Or $2A+1$ n'est pas divisible par 3 et est premier avec A, d'où la contradiction.

On en déduit que $\boxed{A = 1}$ et que N est une puissance de 3.

Réciproquement, si N est une puissance de 3, les entiers premiers avec N sont les entiers congrus à 1 et 2 modulo 3. Pour tout indice i, l'un des entiers c_i et c_{i+1} est alors congru à 1 modulo 3 et l'autre à 2. Ainsi, $c_i + c_{i+1} \equiv 0 \mod 3$, donc on a bien $\text{PGCD}(N, c_i + c_{i+1}) \geqslant 3$ et N vérifie bien la condition.

Solution de l'exercice 6

Commençons par remarquer que l'on peut supposer que a_i et b_i sont premiers entre eux pour tout i. En effet, chacun des produits contient exactement l'un des deux nombres a_i ou b_i, donc les diviser par leur PGCD ne change pas la propriété de l'énoncé et diminue la valeur de r. La condition de l'énoncé se réécrit :

$$\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n-2\,, \quad p_k + p_{k+2} = 2p_{k+1},$$

ou encore :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n-1\,, \quad a_k a_{k+1} + b_k b_{k+1} = 2 \cdot b_k a_{k+1}.$$

Cette dernière équation implique que $a_{k+1} \mid b_k b_{k+1}$ et donc que $a_{k+1} \mid b_k$ grâce à notre hypothèse sur les PGCD. De même, on trouve que $b_k \mid a_k a_{k+1}$ puis que $b_k \mid a_{k+1}$.
Ainsi, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-1$, on a $b_k = a_{k+1}$. En réinjectant dans notre équation précédente, on obtient alors :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n-2\,, \quad a_k + a_{k+2} = 2a_{k+1},$$

donc les a_i sont en progression arithmétique. Puisque $r > 0$, on sait aussi que $b_k > a_k$, donc les a_i forment une suite strictement croissante. En particulier, $a_k \geqslant k$ pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, donc

$$r = a_2 a_3 \dots a_n (a_2 - a_1) \geqslant n!.$$

Réciproquement, si l'on pose $a_k = k$ et $b_k = k+1$ pour tout k, on constate bien que

$$p_k = (2 \times 3 \times \cdots \times k) \times (k \times (k+1) \times \cdots \times n) = k \times n!$$

est le $k^{\text{ème}}$ terme de la suite arithmétique de raison $n!$ et de premier terme $n!$.

En conclusion, la valeur recherchée est $n!$.

Solution n°2 de l'exercice 6
Pour tout k, on note δ_k la différence $b_k - a_k$. Nous allons maintenant démontrer que $a_k > (k-1)\delta_k$ pour tout $k \geqslant 1$.

Le résultat étant immédiat pour $k = 1$, on suppose désormais que $k \geqslant 2$ et que $a_\ell > (\ell-1)\delta_\ell$ pour tout $\ell \leqslant k-1$. Dans ces conditions, l'égalité $p_{k+1} - p_k = p_k - p_{k-1}$ se réécrit comme $a_k \delta_{k-1} = b_{k-1}\delta_k$, et cette dernière indique justement que

$$a_k \delta_{k-1} = (a_{k-1} + \delta_{k-1})\delta_k > (k-1)\delta_{k-1}\delta_k,$$

ce qui signifie comme souhaité que $a_k > (k-1)\delta_k$.

On en déduit en particulier que $a_k > k-1$, c'est-à-dire que $a_k \geqslant k$, et donc que

$$r = p_2 - p_1 = a_2 a_3 \cdots a_n \delta_1 \geqslant n! \delta_1 \geqslant n!.$$

Solution n°3 de l'exercice 6
Pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n$, on constate que

$$r = p_k - p_{k-1} = p_k \delta_k / b_k,$$

de sorte que $b_k r = p_k \delta_k \geqslant p_k \geqslant p_0 + kr > kr$, et donc que $b_k \geqslant k+1$. On en conclut que

$$r \geqslant p_k / b_k = b_1 b_2 \cdots b_{n-1} \geqslant n!.$$

Solution n°4 de l'exercice 6
Ci-dessous, on pose $p_{k,\ell} = b_1 b_2 \cdots b_k a_{k+1} a_{k+2} \cdots a_\ell$. L'entier ℓ étant fixé, la suite $p_{0,\ell}, p_{1,\ell}, \dots, p_{\ell,\ell}$ est arithmétique, et on note $r_\ell = p_{k+1,\ell} - p_{k,\ell}$ sa raison.

Démontrons maintenant par récurrence sur ℓ la propriété $\mathcal{P}(\ell)$ selon laquelle $p_{0,\ell} \geqslant \ell!$ et $r_\ell \geqslant \ell!$. La propriété $\mathcal{P}(1)$ est manifestement valide. Étant donné un entier $\ell \geqslant 1$ pour lequel $\mathcal{P}(\ell)$ est vraie, on entreprend donc de démontrer $\mathcal{P}(\ell+1)$.

En effet, dans ce cas, $b_1 b_2 \cdots b_\ell = p_{\ell,\ell} = p_{0,\ell} + \ell r_\ell \geqslant \ell! + \ell \times \ell! = (\ell+1)!$. En outre, $b_1 b_2 \cdots b_\ell$ divise $p_{\ell,\ell+1}$ et $p_{\ell+1,\ell+1}$, donc divise aussi le premier terme et la raison de la suite $p_{0,\ell+1}, p_{1,\ell+1}, \dots, p_{\ell+1,\ell+1}$, c'est-à-dire $p_{0,\ell+1}$ et $r_{\ell+1}$.

Puisque $p_{0,\ell+1}$ et $r_{\ell+1}$ sont non nuls, on en conclut que $p_{0,\ell+1}$ et $r_{\ell+1}$ valent au moins $b_1 b_2 \cdots b_\ell$, donc au moins $(\ell+1)!$. Ainsi, $\mathcal{P}(\ell+1)$ est vraie, ce qui conclut la récurrence.

Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc $r = r_n$ vaut au moins $n!$.

Solution de l'exercice 7

1. Montrons que $B = n!$ (ou tout autre multiple du ppcm des nombres entre 1 et n) convient par récurrence sur le nombre de remplacements.
   Initialement, le nombre 1 est écrit et est bien $\leqslant n!$. Ensuite, si à un moment le nombre $x \leqslant n!$ est écrit au tableau, et si Marie chosit le nombre j entre 1 et n, alors :
   $$jR(x/j) \leqslant jR(n!/j) = n!,$$
   ce qui conclut la récurrence.
2. Commençons par remarquer qu'un nombre V écrit au tableau ne peut pas être remplacé par un nombre strictement plus grand si et seulement si pour tout nombre j entre 1 et n, le reste de la division euclidienne de V par j est $< j/2$. Dans la suite, nous dirons qu'un tel nombre $V \geqslant 1$ est *spécial*.
   Lemme : Un nombre $V > 0$ est spécial si et seulement si pour tous $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\lfloor \frac{2V}{k} \rfloor = 2 \cdot \lfloor \frac{V}{k} \rfloor$.

   Démonstration. Il suffit de remarquer que si $1 \leqslant k \leqslant n$, le reste de V modulo k est $V - k \cdot \lfloor \frac{V}{k} \rfloor$, et
   $$\begin{aligned} & V - k \cdot \left\lfloor \frac{V}{k} \right\rfloor < \frac{k}{2} \\ \iff & 2k \cdot \left\lfloor \frac{V}{k} \right\rfloor \leqslant 2V < k + 2k \cdot \left\lfloor \frac{V}{k} \right\rfloor \\ \iff & \left\lfloor \frac{2V}{k} \right\rfloor = 2 \cdot \left\lfloor \frac{V}{k} \right\rfloor. \end{aligned}$$
   □

   Soit $v > 0$ tel que $2^v \geqslant 2026$, et $n \geqslant 2^{2v}$. Notons $f(n) = V$. Puisque V est spécial (sinon Marie pourrait remplacer V par un nombre plus grand), le lemme montre que pour tout $1 \leqslant j \leqslant v$, on a $\lfloor \frac{2V}{2^j} \rfloor = 2 \cdot \lfloor \frac{V}{2^j} \rfloor$. Une récurrence directe montre alors que
   $$V = \left\lfloor \frac{2V}{2} \right\rfloor = 2 \cdot \left\lfloor \frac{2V}{4} \right\rfloor = \cdots = 2^v \left\lfloor \frac{V}{2^v} \right\rfloor.$$

   De même, en appliquant le lemme à $2026 \cdot 2^j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant v$ (ces nombres sont bien $\leqslant n$ par construction), on trouve
   $$\left\lfloor \frac{V}{2026} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2V}{2 \cdot 2026} \right\rfloor = \cdots = 2^v \left\lfloor \frac{V}{2^v \cdot 2026} \right\rfloor.$$

   Ainsi, on a montré que $2^v \mid V$ et que $2^v \mid \lfloor \frac{V}{2026} \rfloor \mid 2026 \cdot \lfloor \frac{V}{2026} \rfloor$. Mais
   $$0 \leqslant V - 2026 \cdot \left\lfloor \frac{V}{2026} \right\rfloor < 2026 \leqslant 2^v,$$

donc ce multiple de 2^v est nécessairement nul. Nous avons donc montré que pour tout $n \geqslant 2^{2v}$, on a $2026 \mid f(n)$.

Solution de l'exercice 8

Pour tout $k \geqslant 0$, on pose $s_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ et $b_k = 2s_k/a_{k+1}$. Il s'agit là d'un entier lorsque $k \geqslant 1$, mais également lorsque $k = 0$, car $b_0 = 2s_0/a_1 = 0$. De la sorte, $s_{k+1} = s_k + a_{k+1} = s_k(1 + 2/b_k)$. L'inégalité $a_{k+2} > a_{k+1}$ se réécrit alors comme

$$\frac{2s_{k+1}}{b_{k+1}} = a_{k+2} > a_{k+1} = \frac{2s_k}{b_k} = \frac{2s_{k+1}}{b_k + 2},$$

de sorte que $b_{k+1} < b_k + 2$, c'est-à-dire $b_{k+1} \leqslant b_k + 1$.

Soit maintenant p un nombre premier impair, arbitrairement grand, qui divise un entier a_k. Il divise aussi $2s_{k-1}$, et même s_{k-1} ; on note ℓ le plus petit entier naturel non nul tel que p divise s_ℓ. Comme $b_{\ell-1}s_\ell = (b_{\ell-1}+2)s_{\ell-1}$, on en déduit que p divise $b_{\ell-1}+2$ donc que $b_{\ell-1} \geqslant p-2$. Ainsi, la suite $(b_k)_{k\geqslant 0}$ prend des valeurs arbitrairement grandes.

Soit alors n un entier naturel non nul, puis c un entier tel que $2cn \geqslant b_1 + 3$, et k le plus petit entier tel que $b_k \geqslant 2cn - 1$. Puisque $b_k \leqslant b_{k-1} + 1$, on sait que $b_{k-1} = 2cn - 2$. Ainsi, $2n$ divise $2cns_{k-1} = (b_{k-1} + 2)s_{k-1} = b_{k-1}s_k$. Comme $\mathsf{PGCD}(2n, b_{k-1})$ divise $2cn - b_{k-1} = 2$, on en déduit que n divise donc s_k. Mais alors n divise également $(b_k+2)s_k = b_k s_{k+1} = (2cn-1)s_{k+1}$, donc divise aussi s_{k+1}. On en conclut comme souhaité que n divise $s_{k+1} - s_k = a_k$.

7 Combinatoire : Problèmes à goût d'algèbre/d'arithmétique (Anatole)

Exercices

Exercice 1 (IMO 2013, A2)
Prouver que dans tout ensemble de 2000 réels distincts on peut en trouver 4 : a, b, c et d tels que $a > b$, $c > d$, $(a, b) \neq (c, d)$ et

$$\left|\frac{a-b}{c-d} - 1\right| \leq \frac{1}{100000}$$

Exercice 2 (RMM 2019, P1)
Melvil et Lilas jouent à un jeu. D'abord, Melvil choisit un entier strictement positif. Ensuite, les deux joueurs jouent chacun leur tour, en commençant par Lilas. À son tour, elle peut retirer un carré parfait au nombre actuel. Melvil, quant à lui, peut remplacer le nombre actuel par n'importe quelle puissance de ce nombre. Lilas gagne si elle parvient à écrire 0 après un nombre fini d'étapes, sinon Melvil gagne. Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 3 (IMO 2017, N2)
Soit $p \geqslant 2$ premier, Akin et Emilhan jouent au jeu suivant. Chacun leur tour, en commençant par Akin, ils choisissent un $i \in \{0, \ldots, p-1\}$ et un nombre a_i dans $\{0, \ldots, 9\}$. Akin gagne si et seulement si le nombre $a_0 + 10a_1 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$ est divisible par p. En fonction de p, qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 4 (IMO 2016, A2)
Trouver la plus petite constante C telle que, pour tous réels strictement positifs $x_1 \ldots, x_5$, on peut choisir 4 indices distincts i, j, k, l tels que

$$\left|\frac{x_i}{x_j} - \frac{x_k}{x_l}\right| \leq C$$

Exercice 5 (IMO 2014, P5)
Pour chaque entier $n > 0$, la Banque de Madagascar produit des pièces de valeur $\frac{1}{n}$ ariarys. Théo est un citoyen malgache, dont la fortune est inférieure ou égale à $99 + \frac{1}{2}$ ariarys. Montrer que Théo peut répartir ses pièces entre ses 100 amis, afin que chacun d'eux reçoive au plus 1 ariary.

Exercice 6 (BMO 2021, C3)
La Banque du Mozambique décide de produire des pièces prenant toutes les valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$, afin de concurrencer la banque de Madagascar. Rémi est un citoyen mozambicain dont la fortune est inférieure ou égale à 1000 meticais. Trouver la plus petite constante c telle que, quelles que soient les pièces de Rémi, il peut les répartir entre ses 100 amis afin que chacun d'eux reçoive au plus c meticais.

Exercice 7 (USAMO 2019, P5)
Deux rationnels $\frac{m}{n}$ et $\frac{n}{m}$ sont écrits au tableau, avec m et n deux entiers naturels premiers entre eux. Auguste peut, autant qu'il le souhaite, choisir deux nombres x et y écrits au tableau, et

écrire leur moyenne arithmétique $\frac{x+y}{2}$ ou leur moyenne harmonique $\frac{2xy}{x+y}$.
Trouver toutes les paires (m, n) telles qu'Auguste peut écrire 1 au tableau après un nombre fini d'opérations.

Exercice 8 (IMO 2021, P6)
Soit $m \geq 2$ un entier, A un ensemble d'entiers, $B_1, \dots B_m$ des sous-ensembles de A tels que, pour $k = 1, \dots, m$, la somme des éléments de B_k vaut m^k. Montrer que $|A| \geq \frac{m}{2}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Notons $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ les éléments de l'ensemble. Quitte à réaliser une homothétie et une translation, on peut supposer que $a_1 = 0$ et $a_n = 1$. On remarque que si on note S l'ensemble des différences de deux éléments de l'ensemble, il suffit de trouver $x, y \in S$ tels que $|\frac{x}{y} - 1| \leq \frac{1}{100000} = \varepsilon$.

Or S contient $N = \binom{2000}{2}$ éléments. Supposons par l'absurde que la condition de l'énoncé n'est pas vérifiée. Alors, si on note $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N = 1$ les éléments de S, on a, pour tout i, $\frac{x_{i+1}}{x_i} \geq 1 + \varepsilon$. On a alors

$$\frac{x_N}{x_1} \geq (1+\varepsilon)^{N-1} \geq ((1+\varepsilon)^{100000})^{19} \geq (1+10^5\varepsilon)^{19} \geq 2^{19} \geq 5 \cdot 10^5$$

.

Ainsi, $x_1 \leq \frac{1}{5 \cdot 10^5} = \frac{\varepsilon}{5}$.

Soit u, v dans l'ensemble tels que $u - v = x_1$. On distingue deux cas :

— $u, v \leq \frac{2}{3}$.
Dans ce cas, $1 - u \in S$, $1 - v \in S$. De plus,

$$1 \leq \frac{1-v}{1-u} = 1 + \frac{u-v}{1-u} \leq 1 + 3x_1 \leq 1 + \varepsilon$$

ce qui conclut.

— $u, v \geq \frac{1}{3}$.
Dans ce cas, $u, v \in S$ et

$$1 \leq \frac{u}{v} = 1 + \frac{u-v}{v} \leq 1 + 3x_1 \leq 1 + \varepsilon$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

L'enjeu est ici de trouver un invariant que peut faire décroître Lilas à chaque tour. Il s'agira de la "partie sans carré" du nombre écrit au tableau.

On décompose n l'entier écrit au tableau sous la forme $n = bA^2$, où b est la partie "sans carré" de n (i.e le plus grand diviseur de n sans facteur carré). On suppose que c'est à Melvil de jouer. S"il choisit un exposant pair $2k$, alors le nouvel entier n^{2k} écrit au tableau est un carré parfait et Lilas peut alors soustraire n^{2k} pour gagner. On suppose donc que Melvil choisit un exposant impair que l'on note $2k+1$. Le nouvel entier écrit au tableau devient

$$n^{2k+1} = b^{2k+1}A^{2(2k+1)} = b(b^kA^{2k+1})^2.$$

La partie sans carré demeure donc inchangée après le coup de Melvil. Posons $Q = b^kA^{2k+1}$. Lilas soustrait désormais Q^2. L'entier écrit au tableau après le tour de Lilas est

$$n^{2k+1} - Q^2 = (b-1)Q^2.$$

La partie sans carrée de $n^{2k+1} - Q^2$ est donc un diviseur de $b-1$ et est donc strictement plus petite que b. Ceci conclut que Lilas peut faire décroître strictement la partie sans carré de l'entier écrit au tableau pendant son tour.

Ainsi, si Lilas poursuit cette stratégie, au bout d'un certain nombre de tours, l'entier écrit au tableau sera un carré parfait (lorsque la partie sans carré sera égale à 1). Il sera encore un carré parfait m^2 après le tour de Melvil, ce qui permet à Lilas de gagner au tour suivant en soustrayant m^2.

Solution de l'exercice 3

Notons que si $p = 2$ ou 5, Alice peut remplacer a_0 par p au premier tour, faire n'importe quoi ensuite et gagner.

Sinon, notons w l'ordre de 10 modulo p, qui divise $p-1$ par petit Fermat. En fait, on peut "disloquer" un peu le nombre $a_0 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$ en $n := \frac{p-1}{w}$ nombres $a_0 + \cdots + 10^{w-1}a_{w-1}$, $a_w + \cdots + 10^{w-1}a_{2w-1}$, $\ldots$, $a_{(n-1)w} + \cdots + 10^{w-1}a_{nw-1}$, dont la somme vaut $a_0 + \cdots + 10^{p-1}a_{p-1}$ modulo p. Alice peut donc commencer par jouer $a_p = 0$ pour se simplifier la vie

Une première approche peut donc être d'essayer de faire gagner Alice sur chacun des sous-nombres : il suffit de trouver une stratégie pour que chaque sous-nombre vale 0 modulo p.

Typiquement, si w est pair, $(10^{w/2})^2 \equiv 1 \pmod p$ et $10^{w/2} \not\equiv 1 \pmod p$ par définition de l'ordre, donc $10^{w/2} \equiv -1 \pmod p$. Ainsi, si sur un des n nombres, Bob remplace la i-ième décimale par $x \in \{0, \ldots, 9\}$, si $i > w/2$, Alice remplace la $i - w/2$-ième décimale du même nombre par x, sinon elle remplace la $i + w/2$-ième décimale du nombre par x. Cette stratégie correspond juste à associer les (a_i) par paires internes à chaque nombre, pour deux puissances de 10 qui ont des restes opposés modulo p. Alice peut alors toujours jouer dans la paire formée puisqu'elle a groupé les décimales par paires. En particulier, à la fin le sous nombre sera de la forme $b_0 10^0 + b_1 10^1 \cdots + b_0 10^{w/2} + b_1 10^{w/2+1} = b_0(10^0 + 10^{w/2}) + \cdots + b_{w/2-1}(10^{w/2-1} + 10^{w-1})$ et vaut donc 0 mod p. Ainsi chaque sous-nombre vaut 0 modulo p, donc Alice a bien une stratégie gagnante.

Maintenant reste à voir ce qu'on peut dire si w est impair. Dans ce cas, il y a $(p-1)/w$ sous-nombres, donc un nombre pair de sous-nombres. Alice peut donc groupes les $(p-1)/w$ nombres en paires. Si Bob affecte la valeur a à la i-ième décimale d'un nombre, Alice affecte la valeur $9 - a$ à la i-ième décimale de l'autre nombre de la paire. Il est relativement clair qu'une telle stratégie est possible (on peut voir qu'en fait, la stratégie d'Alice consiste à faire des paires avec chacune des décimales, et toujours jouer sur le second élément de la paire). Cette stratégie n'assure pas que chaque sous-nombre sera divisible par p, mais par contre la somme de deux sous-nombres elle vaudra modulo p $9(10^0 + \cdots + 10^{w-1}) = 10^w - 1 \equiv 0 \pmod p$. Ainsi la somme des sous-nombres est bien divisible par p, donc Alice a une stratégie gagnante dans tous les cas.

Solution de l'exercice 4

On va montrer que la réponse est $\frac{1}{2}$.

Pour montrer que $\frac{1}{2}$ est optimal, considérons les cinq nombres suivants, avec $\epsilon > 0$: $\epsilon, 1, 2-\epsilon, 2, 2+\epsilon$. On remarque que chaque fraction entre deux des cinq nombres appartient

à l'un des intervalles suivants :

$$[\frac{\epsilon}{2+\epsilon}, \epsilon], [\frac{1}{2+\epsilon}, \frac{1}{2-\epsilon}], [\frac{2-\epsilon}{2+\epsilon}, \frac{2+\epsilon}{2-\epsilon}], [2-\epsilon, +\infty]$$

De plus, on remarque qu'on ne peut pas avoir $\frac{x_i}{x_j}$ et $\frac{x_k}{x_l}$ dans le même intervalle. Ainsi, ils sont dans deux intervalles différents. Fixons $\delta > 0$. En choisissant ϵ suffisamment petit, on peut alors forcer leur différence à être plus grande que $\frac{1}{2} - \delta$. Ceci est vrai pour tout $\delta > 0$, donc $C \geq \frac{1}{2}$.

Réciproquement, montrons qu'on peut toujours trouver i, j, k, l tels que $\left|\frac{x_i}{x_j} - \frac{x_k}{x_l}\right| \leq \frac{1}{2}$.
Supposons par l'absurde que c'est impossible.
Tout d'abord, si $\frac{x_2}{x_4} \leq \frac{1}{2}$, alors $\frac{x_1}{x_5} \leq \frac{1}{2}$ et on peut choisir $(i, j, k, l) = (2, 4, 1, 5)$. Ainsi, $\frac{x_2}{x_4} > \frac{1}{2}$, et donc $\frac{x_2}{x_3}, \frac{x_3}{x_4} > \frac{1}{2}$.
De plus, on ne peut pas avoir $\frac{x_1}{x_4} \leq \frac{1}{2}$ et $\frac{x_2}{x_5} \leq \frac{1}{2}$ (sinon, on pourrait choisir $1, 4, 2, 5$). Ainsi, l'un des deux est supérieur ou égal à $\frac{1}{2}$. Si c'est $\frac{x_1}{x_4}$, il suffit de choisir $i, j, k, l = 1, 4, 2, 3$. Sinon, on peut prendre $2, 5, 3, 4$.
Ainsi, il existe toujours i, j, k, l tels que $\left|\frac{x_i}{x_j} - \frac{x_k}{x_l}\right| \leq \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 5
On commence par une remarque qui s'impose : si plusieurs pièces ont pour somme 1, on peut les regrouper en un tas et donc se ramener au même problème en diminuant de 1 les paramètres. On généralise donc l'énoncé avec des pièces de valeur totale $k - \frac{1}{2}$ à répartir en k tas et on peut dès lors supposer que la somme de plusieurs pièces ne fait jamais 1. A fortiori, il y a au plus $n - 1$ pièces de valeur $\frac{1}{n}$. De même on peut regrouper 2 pièces de valeurs $\frac{1}{2n}$ en une pièce de valeur $\frac{1}{n}$, on peut donc supposer qu'il y a au plus une pièce de valeur $\frac{1}{2n}$ pour tout n.

Essayons un algorithme glouton. On veut placer les pièces dans l'ordre décroissant de valeurs dans les tas. Supposons que ce n'est plus possible au bout d'un moment. On veut placer une pièce de valeur $\frac{1}{a}$ mais tous les tas ont une valeur totale strictement supérieure à $1 - \frac{1}{a}$. La somme des valeurs des tas vaut alors au moins $k(1 - \frac{1}{a})$. Cette valeur est inférieure à $k - \frac{1}{2}$ donc $a < 2k$. Ça ne peut pas conclure directement, mais ça nous informe qu'il suffit de placer toutes les pièces de valeur au moins $\frac{1}{2k-1}$. En effet, si c'est fait, on place les autres pièces avec l'algorithme glouton et on sait alors que toutes les pièces peuvent être placées.

Pour placer les grosses pièces, il suffit de bidouiller un peu avec les remarques préliminaires : on met toutes les pièces de valeur $\frac{1}{2i-1}$ et $\frac{1}{2i}$ ensemble, pour tout $1 \leq i \leq k$. En effet, il y a au plus 1 pièce de valeur $\frac{1}{2i}$ et au plus $2i - 2$ de valeur $\frac{1}{2i-1}$, donc la valeur totale de chaque tas vaut au plus

$$\frac{2i-2}{2i-1} + \frac{1}{2i} < \frac{2i-2}{2i-1} + \frac{1}{2i-1} < 1$$

Donc on a gagné !

Solution de l'exercice 6
Pour trouver cette constante, on peut commencer par le cas où toutes les pièces ont la même valeur. On peut facilement comprendre que dans ce cas, il est optimal de prendre 1001 pièces de valeur $\frac{1000}{1001}$. Pour cet ensemble de pièces, par le principe des tiroirs un des amis aura au moins 11 pièces, et recevra donc au moins $11 \cdot \frac{1000}{1001} = \frac{1000}{91}$ meticais. Montrons que cette valeur est optimale.

On va répartir les pièces avec un algorithme glouton : on trie les pièces par ordre décroissant de valeur $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_k$. On va ensuite les répartir dans 100 tas de la façon suivante : à chaque opération, on prend la pièce de valeur la plus élevée restante et on la met dans le tas de plus petite valeur totale.
Supposons par l'absurde qu'après la i-ème opération l'un des tas ait une valeur totale strictement supérieure à $\frac{1000}{91}$. Alors avant cette opération tous les tas ont une valeur supérieure à $\frac{1000}{91} - a_i$. Ainsi,

$$1000 > 100(\frac{1000}{91} - a_i) + a_i$$

On en déduit

$$a_i > \frac{1000}{1001}$$

Or, avant la i-ème opération chaque tas a une valeur totale strictement supérieure à 9 : $\frac{1000}{91} - a_i > 10 - 1 = 9$. Ainsi, chaque tas contient au moins 10 pièces, donc $i \geq 1001$.
On a alors

$$1000 \geq a_1 + \cdots + a_i \geq i \cdot a_i > 1001 \cdot \frac{1000}{1001} = 1000$$

absurde, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7
On va montrer que c'est possible si et seulement si $m + n$ est une puissance de 2.

Supposons déjà que c'est le cas. On remarque qu'on peut arriver à écrire au tableau les moyennes pondérées suivantes, pour tout k et $a \in [\![0, 2^k]\!]$:

$$\frac{a}{2^k} \cdot \frac{m}{n} + (1 - \frac{a}{2^k}) \cdot \frac{n}{m}$$

Ceci se montre aisément par récurrence sur k.
Il suffit alors, si $m + n = 2^l$, de prendre $k = l$ et $a = n$ pour obtenir 1.

Supposons maintenant que $m + n$ n'est pas une puissance de 2. $m + n$ admet alors un diviseur premier impair p. Ceci nous amène naturellement à l'invariant : on va montrer que si Auguste peut écrire $\frac{r}{s}$ au tableau avec r et s premiers entre eux, alors on a toujours $p|r + s$.
Supposons que tous les nombres écrits au tableau vérifient cette propriété après k étapes. Soit $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ les deux nombres choisis par Auguste à la $k + 1$-ième étape.

— S'il prend leur moyenne arithmétique, il écrira $\frac{ad+bc}{2bd}$. On a $p|a + b$ et $p|c + d$ donc p est premier avec a, b, c, d et en particulier avec $2bd$. Ainsi, il suffit de montrer que $p|ad + bc + 2bd$. En effet, le pgcd du numérateur et du dénominateur est premier avec p, donc si p

divise leur somme, il divise aussi la somme du numérateur et du dénominateur de la fraction irréductible associée.
Or, $a \equiv -b[p]$ et $c \equiv -d[p]$ donc $ad + bc + 2bd \equiv -bd - bd + 2bd \equiv 0[p]$, ce qui conclut.

— S'il prend leur moyenne harmonique, il écrira $\frac{2ac}{ad+bc}$. Comme précédemment, il suffit de vérifier que $p|2ac + ad + bc$, ce qui est bien vrai.

Ainsi, l'invariant est toujours vérifié. Cependant, 1 ne vérifie pas cet invariant (p ne divise pas 2), donc Auguste ne pourra jamais écrire 1.

Solution de l'exercice 8

Notons $A = \{a_1, a_2 \dots a_n\}$.
En prenant l'écriture en base m, chaque entier d de 0 à $m^m - 1$ s'écrit de façon unique $c_1 + c_2 m + \dots + c_m m^{m-1}$.
On a alors

$$\begin{aligned} dm &= c_1 m + c_2 m^2 + \dots + c_m m^m \\ &= \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{x \in B_i} x \cdot c_i \Big) \\ &= \sum_{a \in A} a \cdot \Big(\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ a \in B_i}} c_i \Big) \end{aligned}$$

Notons $d_k = \sum_{\substack{1 \leq i \leqslant n \\ a_k \in B_i}} c_i$. On remarque que $d_k \in [\![0, m(m-1)]\!]$.
Ainsi, pour tout $d \in [\![0, m^m - 1]\!]$, on peut écrire

$$md = \sum_{k=1}^{n} d_k a_k$$

où $0 \leq d_k \leq m(m-1)$.

Il y a $(m^2 - m + 1)^n$ choix pour $d_1, d_2 \dots, d_n$ et m^m choix pour d. On en déduit que

$$(m^2 - m + 1)^n \geq m^m$$

Ainsi, $m^{2n} \geq m^m$ donc $2n \geq m$, ce qui conclut.

8 Nombres Complexes (Akin)

Le but de cette séance est de se familiariser avec les raisonnements typiques que l'on rencontre avec les nombres complexes en résolvant des exercices d'olympiades plutôt difficiles.

Rappels/Résultats utiles

On présente ici quelques résultats qu'il est bon de garder à l'esprit. On se réfère au magnifique cours d'Emilhan donné cette même année au groupe D pour des notions de cours élémentaires et à l'intemporel cours de Raphaël donné en 2024 au groupe E pour des notions plus poussées.

Théorème 1 (D'alembert Gauss)**.**
Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine complexe.

Corollaire 2.
Tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ s'écrit de manière unique (à permutation des facteurs près) comme produit de polynômes unitaires de degré 1.

Proposition 3 (Filtre des racines de l'unité)**.**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ et $n \in \mathbb{N}_0$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-èmes de l'unité. Ecrivons $P(X) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$. On a

$$\frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega) = a_0 + a_n + a_{2n} + \dots.$$

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les nombres complexes a, b tels que $|a| = |b| = 1$ et $a + b + a\bar{b} \in \mathbb{R}$.

Exercice 2
Soit $n \geq 2$ un entier. Déterminer tous les complexes z tels que

$$|z^{n+1} - z^n| \geq |z^{n+1} - 1| + |z^{n+1} - z|.$$

Exercice 3
Soit $z_1, z_2, \dots, z_{2026}$ des nombres complexes tels que $|z_i| \leq 1$ pour $i = 1, 2, \dots, 2026$. Montrer qu'il existe $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{2026} \in \{-1, 0, 1\}$, non tous nuls, tels que

$$|\varepsilon_1 z_1 + \varepsilon_2 z_2 + \cdots + \varepsilon_{2026} z_{2026}| \leq 2^{-1000}.$$

Exercice 4 (USA TSTST 2020/7)
Trouver tous les polynômes non constants $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que toutes les racines de P et toutes les racines de $P - 1$ soient de module 1.

Exercice 5 (USAMO 2014/1)
Soit a, b, c, d des réels tels que $b - d \geq 5$ et tels que les racines x_1, x_2, x_3, et x_4 du polynôme $P(X) = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ soient réelles. Trouver la plus petite valeur que peut prendre le produit $(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)(x_4^2 + 1)$.

Exercice 6 (Putnam 2019 A3)
Given real numbers $b_0, b_1, \ldots, b_{2019}$ with $b_{2019} \neq 0$, let $z_1, z_2, \ldots, z_{2019}$ be the roots in the complex plane of the polynomial

$$P(z) = \sum_{k=0}^{2019} b_k z^k.$$

Let $\mu = (|z_1| + \cdots + |z_{2019}|)/2019$ be the average of the distances from $z_1, z_2, \ldots, z_{2019}$ to the origin. Determine the largest constant M such that $\mu \geqslant M$ for all choices of $b_0, b_1, \ldots, b_{2019}$ that satisfy

$$1 \leqslant b_0 < b_1 < b_2 < \cdots < b_{2019} \leqslant 2019.$$

Exercice 7 (USA TSTST 2023/5)
Soit a, b, et c trois complexes vérifiant $abc = 1$. On suppose qu'aucun des 3 n'est réel ou n'est de module 1. On définit

$$p = (a + b + c) + \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \quad \text{et} \quad q = \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}.$$

Trouver toutes les paires possibles (p, q) sachant que p et q sont réels.

Exercice 8 (USEMO 2021/5)
Pour un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, notons $S(P)$ la somme des carrés de ses coefficients. Soit $f, g, h \in \mathbb{R}[X]$ trois polynômes tels que $fg = h^2$. Montrer que

$$S(f) \times S(g) \geq S(h)^2.$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Le fait que $a+b+a\bar{b} \in \mathbb{R}$ se réécrit $a+b+a\bar{b} = \overline{a+b+a\bar{b}}$, ou encore

$$a+b+\frac{a}{b} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{b}{a}$$

en utilisant les propriétés des complexes unitaires. En multipliant cette égalité par ab il vient $a^2b+ab^2+a^2 = b+a+b^2$, ou encore

$$0 = (a+b)(ab-1+a-b) = (a+b)(a-1)(b+1).$$

Cela nous donne les solutions $a=-b$, $a=1$ et b quelconque, $b=-1$ et a quelconque. On vérifie qu'elles fonctionnent toutes. Cela conclut.

Solution de l'exercice 2
Soit z un tel complexe. L'énoncé invite à appliquer des inégalités triangulaires bien choisies. Tout d'abord, on a

$$|z^{n+1}-1|+|z^{n+1}-z| \leq |z^{n+1}-z^n| \leq |z^{n+1}-1|+|z^n-1|,$$

d'où l'on tire $|z^{n+1}-z| = z|z^n-1| \leq |z^n-1|$. Ainsi, on a soit $z^n=1$ soit $|z| \leq 1$. Dans tous les cas, $|z| \leq 1$. Dès lors, on a

$$|z^{n+1}-1|+|z^{n+1}-z| \leq |z^{n+1}-z^n| = |z|^n|z-1| \leq |z-1| \leq |z^{n+1}-1|+|z^{n+1}-z|,$$

où la dernière inégalité est une autre application de l'inégalité triangulaire. Nous devons donc avoir égalité dans toutes nos inégalités. Pour avoir égalité dans la deuxième, il faut avoir $|z|=1$ ou bien $z=1$. Dans tous les cas, on a $|z|=1$. La troisième inégalité s'écrit alors

$$|z-1| \leq |z^{n+1}-1|+|z^n-1|.$$

Le cas d'égalité de cette inégalité triangulaire se produit lorsque z^n-1 et $z^{n+1}-1$ sont colinéaires. Si ces deux complexes sont non nuls, alors $\frac{z^n-1}{z^{n+1}-1} \in \mathbb{R}$. On a donc

$$\frac{z^n-1}{z^{n+1}-1} = \overline{\left(\frac{z^n-1}{z^{n+1}-1}\right)} = \frac{\frac{1}{z^n}-1}{\frac{1}{z^{n+1}}-1} = z\frac{z^n-1}{z^{n+1}-1},$$

c'est-à-dire $z=1$. Dans tous les cas, on a $z^n=1$ ou $z^{n+1}=1$.
Réciproquement, si $z^n=1$ ou $z^{n+1}=1$, alors l'inégalité de l'énoncé est une égalité et est donc vérifiée. Cela conclut.

Solution de l'exercice 3
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un tel polynôme, de degré $n \geq 1$. On écrit

$$P(X) = c\prod_{k=1}^{n}(X-r_k) \quad \text{et} \quad P(X)-1 = c\prod_{k=1}^{n}(X-t_k),$$

avec $|r_k| = |t_k| = 1$ pour chaque k et $c \neq 0$. Pour $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, on notera par la suite $\sigma_i(a_k)$ le i-ème polynôme symétrique élémentaire de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, càd

$$\sigma_i(a_k) = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_i \leq n} a_{j_1}a_{j_2}\ldots a_{j_i}.$$

Soit $i \in [\![1, n-1]\!]$. D'après les formules de Viète, étant donné que les coefficients en X^i de P et $P-1$ sont égaux, nous avons $\sigma_{n-i}(r_k) = \sigma_{n-i}(t_k)$. De même, en considérant les coefficients en X^{n-i} des deux polynômes, on obtient $\sigma_i(r_k) = \sigma_i(t_k)$. Cependant, on a également

$$\frac{\sigma_i(r_k)}{\sigma_n(r_k)} = \sigma_{n-i}\left(\frac{1}{r_k}\right) = \sigma_{n-i}(\overline{r_k}) = \overline{\sigma_{n-i}(r_k)} = \overline{\sigma_{n-i}(t_k)} = \frac{\sigma_i(t_k)}{\sigma_n(t_k)}. \ (*)$$

Puisque $\frac{1}{c}P(0) \neq \frac{1}{c}(P(0)-1)$, nous avons $\sigma_n(r_k) \neq \sigma_n(t_k)$. Il en découle, d'après $(*)$, que $\sigma_i(r_k) = \sigma_i(t_k) = 0$.
Cette égalité est vraie pour chaque $i \in [\![1, n-1]\!]$. Ainsi, toujours d'après les formules de Viète, nous savons que P s'écrit sous la forme $cX^n + p$, avec $p \in \mathbb{C}$. À présent, pour que P vérifie la condition de l'énoncé, on doit avoir

$$\left|\frac{p}{c}\right| = \left|\frac{p-1}{c}\right| = 1,$$

càd qu'il suffit d'avoir $|p| = |c|$ et $|p| = |p-1|$, ou encore $|p| = |c|$ et $\mathrm{Re}(p) = \frac{1}{2}$.

Solution de l'exercice 4
Considérons les 2^{2026} complexes de la forme $a_1z_1 + a_2z_2 + \ldots + a_{2026}z_{2026}$, où $(a_1, \ldots, a_{2026}) \in \{0,1\}^{2026}$. Si deux d'entre eux sont distants d'au plus 2^{-1000}, disons qu'ils correspondent aux 2026-uplets $(b_1, \ldots, b_{2026})$ et $(c_1, \ldots, c_{2026})$, alors choisir $\varepsilon_i = c_i - b_i$ convient.
Sinon, deux d'entre eux sont toujours distants de plus de 2^{-1000}. Dans le plan complexe, on peut donc tracer 2^{2026} cercles de rayons 2^{-1001} et centrés en les 2^{2026} points. Ces cercles sont deux à deux disjoints. En particulier, l'aire totale de la région occupée par ces disques vaut $2^{2026} \times \pi \times (2^{-1001})^2 = 2^{24}\pi$.
Cependant, par inégalité triangulaire, les 2^{2026} complexes sont de norme ≤ 2026. Ainsi, chaque disque est inclus dans le cercle de centre 0 et de rayon $r = 2026 + 2^{-1001}$. Il en découle que l'aire totale occupée par les disques est inférieure à $\pi r^2 < \pi(2048)^2 < 2^{24}\pi$, ce qui est absurde.
Ainsi, on est forcément dans le premier cas. Cela conclut.

Solution de l'exercice 5
On a $(x_k^2+1) = (x_k+i)(x_k-i)$ pour chaque k. Ainsi,

$$\begin{aligned}(x_1^2+1)(x_2^2+1)(x_3^2+1)(x_4^2+1) &= P(i) \times P(-i) \\ &= (1-b+d+i(c-a))(1-b+d+i(a-c)) \\ &= (1-b+d)^2 + (c-a)^2 \\ &\geq 16.\end{aligned}$$

Cette valeur est atteignable en prenant par exemple le polynôme $(X-1)^4$, pour lequel $b=6$ et $d=1$. Ainsi, la valeur minimale recherchée est 16.

Solution de l'exercice 6
Soit $b_0, b_1, \ldots, b_{2019} \in \mathbb{R}$ un choix de réels pour lequel $1 \leq b_0 < b_1 < \ldots < b_{2019} \leq 2019$. D'après l'IAG puis les formules de Viète, on a

$$\mu = \frac{|z_1| + \cdots + |z_{2019}|}{2019} \geq (|z_1||z_2|\ldots|z_{2019}|)^{1/2019} = \left(\frac{b_0}{b_{2019}}\right)^{1/2019} \geq \left(\frac{1}{2019}\right)^{1/2019}.$$

Montrons que la constante $c = \left(\frac{1}{2019}\right)^{1/2019}$ est optimale. Posons $b_i = c^{-i}$ pour chaque $i \in [\![0, 2019]\!]$, de sorte que

$$P(z) = \sum_{k=0}^{2019} \left(\frac{z}{c}\right)^k.$$

Chaque z_i est racine de P, donc aussi de $P \times \left(\frac{X}{c} - 1\right) = \left(\frac{X}{c}\right)^{2020} - 1$. Sous cette forme, il apparaît que tous les z_i sont de module c, et donc $\mu = c$. Finalement, nous avons montré que $M = c = \left(\frac{1}{2019}\right)^{1/2019}$.

Solution de l'exercice 7

Au vu de la condition $abc = 1$, nous savons qu'il existe des complexes $x, y, z \in \mathbb{C}^*$ tels que $a = \frac{x}{y},\ b = \frac{y}{z},\ c = \frac{z}{x}$, de sorte que

$$p = \sum_{sym} \frac{x}{y} = \frac{x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y}{xyz} \quad \text{et} \quad q = \sum_{sym} \frac{xz}{y^2} = \frac{(xy)^3 + (yz)^3 + (zx)^3}{(xyz)^2}.$$

On remarque alors que

$$\mathbb{R} \ni p + 3 = \frac{x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 3xyz}{xyz} = \frac{(x + y + z)(xy + yz + zx)}{xyz} \quad (1),$$

puis

$$\mathbb{R} \ni q + p = \frac{\sum_{sym}(xy)^3 + xyz \sum_{sym} x^2y}{(xyz)^2} = \frac{(xy + yz + zx)((xy)^2 + (yz)^2 + (zx)^2)}{(xyz)^2},$$

et enfin

$$\mathbb{R} \ni 3p + q + 6 = q + p + 2(p + 3) = \frac{(xy + yz + zx)^3}{(xyz)^2} \quad (2).$$

Remarquons déjà que si $xy + yz + zx = 0$, on obtient $(p, q) = (-3, 3)$ grâce aux équations (1) et (2). Supposons maintenant que $xy + yz + zx \neq 0$. Quitte à mutiplier x, y et z par une même constante $\lambda \in \mathbb{C}^*$ (ce qui ne change pas les valeurs de a, b et c), on suppose que $xy + yz + zx = xyz$. Dans ce cas, les équations (1) et (3) se résument en

$$\mathbb{R} \ni p + 3 = x + y + z \quad \text{et} \quad \mathbb{R} \ni 3p + q + 6 = xy + yz + zx = xyz.$$

Notons $P(X) = (X - x)(X - y)(X - z)$ le polynôme dont les racines sont x, y et z. D'après les formules de Viète, P est un polynôme à coefficients réels. En particulier, il possède une ou 3 racines réelles.

Si toutes ses racines sont réelles, alors $a = \frac{x}{y}$ est réel à son tour, ce qui est contraire aux hypothèses.

Si maintenant une seule racine est réelle, disons x, alors y et z sont complexes conjugués. En particulier, ils ont la même norme et donc $b = \frac{y}{z}$ est de norme 1, ce qui est de nouveau contraire aux hypothèses.

Finalement, nous avons montré que l'on devait forcément avoir $xy + yz + zx = 0$ et $(p, q) = (-3, 3)$. Ce couple est bel et bien atteignable pour les valeurs $a = \frac{3}{4i}$, $b = -\frac{4i}{3+4i}$, $c = -\frac{3+4i}{3}$.

Solution de l'exercice 8
Commençons par démontrer le fait suivant :
Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ et tout entier $n > \deg P$, on a

$$S(P) = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |P(\omega)|^2.$$

En effet, on remarque tout d'abord que

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |P(\omega)|^2 = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)\overline{P(\omega)} = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)P(\overline{\omega}) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)P\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Sous cette forme, on reconnaît une sorte de filtre des racines de l'unité. Plus précisément, si l'on pose $Q(X) = X^n P(X)P(\frac{1}{X}) \in \mathbb{R}[X]$, on remarque que les seuls monômes non-nuls de Q sont ceux de degré $k \in [\![n - \deg P, n + \deg P]\!]$. En particulier, puisque le seul multiple de n dans cet intervalle est n, on a

$$\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} P(\omega)P\left(\frac{1}{\omega}\right) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega^n P(\omega)P\left(\frac{1}{\omega}\right) = \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} Q(\omega) = [X^n](Q).$$

On vérifie enfin aisément que $[X^n](Q) = S(P)$, d'où le résultat.

Cette observation nous permet essentiellement de conclure. Soit $n > \deg f, \deg g, \deg h$ un entier. D'après ce que l'on a montré plus haut et par Cauchy-Schwarz, on a

$$S(f)S(g) = \left(\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |f(\omega)|^2\right)\left(\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |g(\omega)|^2\right) \geq \left(\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |f(\omega)||g(\omega)|\right)^2 = \left(\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} |h(\omega)|^2\right)^2 = S(h)^2,$$

comme attendu.

2 Entraînement de mi-parcours

Exercices

Exercice 1
Soit n un entier strictement positif. Aline souhaite colorier les entiers de 1 à n de sorte à ce que si a et b sont deux entiers vérifiant $1 \leqslant a, b \leqslant n$ et $a+b \leqslant n$, alors $a, b, a+b$ n'aient jamais trois couleurs différentes. Déterminer, en fonction de n, le nombre maximal de couleurs qu'Aline pourra utiliser.

Exercice 2
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que, pour tous a et b entiers strictement positifs, on ait

$$f^{(2f(b))}(2a) = f(f(a+b)) + a + b$$

où si x et k sont deux entiers strictement positifs, $f^{(k)}(x)$ désigne l'image de x après avoir appliqué k fois la fonction f.

Exercice 3
Soit $p > 3$ un nombre premier. Antoine place $p+1$ boules $b_0, b_1, \ldots, b_p$ dans p boîtes $B_0, B_1, \ldots, B_{p-1}$. Chaque minute, celui-ci bouge chacune des $p+1$ boules de la manière suivante : si la boule b_i est dans la boîte B_j, on l'enlève de sa boîte et on la place dans la boîte $B_{r(i+j)}$, où $r(i+j)$ désigne le reste de $i+j$ modulo p. Montrer qu'après un nombre fini d'étapes, au moins une des boîtes contiendra au moins 3 boules.

Exercices

Solution de l'exercice 1
Notons $f(n)$ le nombre maximal de couleurs pouvant être utilisées. On va montrer que $f(n) = \lfloor \log(n) \rfloor + 1$ en procédant par double inégalité.

Commençons par fournir une construction. On va simplement colorier l'entier a de la couleur i si $v_2(a) = i$, où $v_2(a)$ est la valuation 2-adique de a. Montrons que cette construction convient.
Soit $1 \leqslant a, b \leqslant n$ tels que $a + b \leqslant n$. Soit a et b sont de même couleur et la contrainte de l'énoncé est vérifiée. Soit $v_2(a) \neq v_2(b)$, et dans ce cas $v_2(a + b) = \min(v_2(a), v_2(b))$, donc $a + b$ est de la couleur de a ou b. Ainsi le coloriage convient, et il utilise $k + 1$ couleurs où k est l'unique entier tel que $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ (car la couleur i apparaît si et seulement si $2^i \leqslant n$, et les couleurs sont numérotées à partir de 0), i.e. $k \leqslant \log(n) < k + 1$, donc $k = \lfloor \log(n) \rfloor$. Ainsi $f(n) \geqslant \lfloor \log(n) \rfloor + 1$

Montrons maintenant qu'on ne peut pas utiliser strictement plus de couleurs. On remarque que si les nombres pairs sont coloriés de manière vérifiant l'énoncé, en divisant chacun par 2 on obtient un coloriage de $\{1, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Ainsi pour colorier les nombres pairs, il faut au moins $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ couleurs. Supposons que les nombres impairs utilisent deux couleurs supplémentaires au moins. Soit alors $1 \leqslant a < b \leqslant n$ deux nombres impairs utilisant deux couleurs différentes de toutes les couleurs utilisées pour les nombres pairs. Alors $a, b, b - a$ utilisent trois couleurs différentes, absurde.Ainsi, les nombres impairs utilisent au plus une couleur supplémentaire, donc

$$f(n) \leqslant f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) + 1$$

On sait de plus que $f(1) = 1$. On montre alors facilement par récurrence que $f(n) \leqslant \lfloor \log(n) \rfloor + 1$: en effet, si l'inégalité est vrai pour $n/2$,

$$f(n) \leqslant \lfloor \log(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor) \rfloor + 2 \leqslant \lfloor \log(\frac{n}{2}) \rfloor + 2 = \lfloor \log(n) - 1 \rfloor + 2 = \lfloor \log(n) \rfloor + 1.$$

Solution n°2 de l'exercice 1
On utilise la même construction que dans la solution 1.

Cette preuve utilise la même idée que la précédente, mais en utilisant une autre séparation que pairs-impairs.
Soit $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Alors au plus $f(m)$ couleurs apparaissent parmi les nombres de 1 à m. Comme précédemment, on montre qu'on peut utiliser au plus une couleur supplémentaire pour les nombres restants. Supposons en effet avoir $m + 1 \leqslant a < b \leqslant n$ coloriés de deux couleurs supplémentaires différentes, et différentes également de toutes les couleurs utilisées pour colorier les nombres de 1 à m. Alors $a, b, b - a$ sont coloriées de trois couleurs différentes : en effet, $b - a \leqslant n - \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \leqslant n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2}$, donc $b - a$ est colorié avec une couleur utilisée par un entier entre 1 à m. On a donc bien une contradiction.
Ainsi, $f(n) \leqslant f(m) + 1$, et on conclut comme précédemment.

Solution n°3 de l'exercice 1
On utilise la même construction que dans la solution 1.

Considérons un coloriage vérifiant la condition de l'énoncé. Soit a_i le plus petit nombre colorié avec la couleur i. Supposons sans perte de généralité que $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, si k couleurs sont utilisées.
Alors a_i, a_{i+1} et $a_{i+1} - a_i$ ne sont pas coloriés de trois couleurs différentes. Ainsi, $a_{i+1} - a_i$ est colorié de la couleur i ou $i+1$, donc $a_{i+1} - a_i \geqslant a_i$.
On a montré que pour tout i, $a_{i+1} \geqslant 2a_i$. On en déduit que $2^{k-1} \leqslant a_k \leqslant n$, ce qui se réécrit $k \leqslant \lfloor \log(n) \rfloor + 1$

Barème :

Les items de la partie A ne sont pas cumulables entre eux, ceux de la partie B non plus. La note d'une copie est la somme de ses notes sur les parties A et B.

Z.1 Affirmer qu'on peut utiliser au plus $\lfloor \log(n) \rfloor + 1$ couleurs ..... 0 pt

Z.2 Dessiner une construction pour des valeurs précises de n sans proposer de généralisation ..... 0 pt

Partie A : La construction ..... 2 **pts**

A.1 Fournir la construction proposée dans la solution officielle ..... 1 pt

A.2 Fournir une autre construction qui convient ..... 1 pt

A.3 Mentionner que si $a + b = c$, alors la valuation 2-adique minimale apparaît au moins deux fois OU montrer que si $a + b = c$, deux nombres parmi les trois ont la même valuation 2-adique ..... 1 pt

A.4 Avoir $A.1$ et $A.3$, ou $A.2$ et une preuve correcte que la construction convient ..... 2 pts

♠ Si la construction est correcte mais que le nombre de couleurs est mal compté, aucun point n'est déduit.

♠ Une construction facilement rectifiable mais fausse rapporte exactement 1 pt.

Partie B : La preuve de la maximalité ..... 5 **pts**

B.1 Remarquer que pour colorier les nombres pairs, on peut utiliser au plus $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ couleurs 2 pts

B.2 Avoir l'item précédent et montrer qu'on ne peut pas utiliser strictement plus d'une couleur supplémentaire pour les impairs ..... 4 pts

B.3 Remarquer que pour colorier les nombres de 1 à $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, il faut au plus $f(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)$ couleurs . 2 pts

B.4 Avoir l'item précédent et montrer qu'on ne peut pas utiliser strictement plus d'une couleur supplémentaire pour les nombres restants ..... 4 pts

B.5 Avoir soit $B.1$ et $B.2$, soit $B.3$ et $B.4$, et conclure ..... 5 pts

♠ Une fois qu'une formule de récurrence simple est obtenue, on ne demande pas d'expliciter la récurrence.

♠ Si l'élève ne traite qu'une seule parité de n, 1 point est automatiquement déduit, et de plus l'item $A.5$ ne peut pas être obtenu. Sa note sur cette partie est donc majorée par 3.

B.6 Définir le plus petit nombre colorié de chaque couleur ..... 1 pt

B.7 Avec les notations de $A.6$, montrer que $a_i \geqslant 2a_{i-1}$ (ou montrer que si une nouvelle couleur apparaît pour x, aucune autre couleur n'apparaît entre $x+1$ et $2x-1$) ... 4 pts

B.8 Avoir $A.6$ et $A.7$, et conclure ..... 5 pt

♠ On ne demande pas de montrer que $2^{k-1} \leqslant n$ implique $k \leqslant \lfloor \log(n) \rfloor + 1$

Solution de l'exercice 2
On commence par montrer que la fonction f est injective. Pour cela, on remarque que si $f(b) = f(b')$, $b < b'$, alors pour tout a $f^{2f(b)}(2a) = f^{2f(b')}(2a)$ d'où $f^2(a+b) + a + b = f^2(a+b') + a + b'$. On a donc $f^2(x+d) + x + d = f^2(x) + x$ pour tout $x > b$, avec $d = b' - b$. Par récurrence, on obtient aisément $f^2(x+nd) + x + nd = f^2(x) + x$ pour tout $x > b$ et $n \in \mathbb{N}$. On a donc, en fixant $x > b$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x + nd < f^2(x) + x$, absurde en prenant n assez grand. Donc f est injective.

On montre un lemme qui nous sera utile plus tard.

Lemme 1.
Pour tout entier strictement positif a, il n'existe pas de n tel que $f^n(2a) = 2a$.

Démonstration. En effet, sinon $f^{2f(b)}(2a)$ prend au plus n valeurs lorsque b décrit $\mathbb{N}^*$ (en fonction du reste dans la division euclidienne de $f(b)$ par n), alors que c'est égal à $f^2(a+b) + a + b$ qui clairement ne peut pas prendre qu'un nombre fini de valeurs, puisque ça tend vers $+\infty$ lorsque b tend vers $+\infty$. □

En particulier, si $2a'$, $a' \neq a$, est dans l'orbite de $2a$, $2a$ ne peut pas être dans l'orbite de $2a'$, sinon $2a$ est dans sa propre orbite de façon non triviale, absurde d'après le lemme.

On remarque que le membre de droite est symétrique en a et b, donc le membre de gauche doit l'être aussi. Mais en fait on a beaucoup plus : le membre de droite ne dépend que de $a + b$, donc ça doit être le cas du membre de gauche aussi. On a donc, dès que $a + b = a' + b'$, $f^{2f(b)}(2a) = f^{2f(b')}(2a')$. Si jamais $f(b) > f(b')$, en utilisant l'injectivité de f, on obtient $f^{2(f(b)-f(b'))}(2a) = 2a' = 2(a+b-b')$. Cela va nous conduire à essayer de montrer que $f(b) - f(b')$ ne dépend que de $b - b'$ (ce qui permettra ensuite de montrer que f est affine).

Ainsi on a pour tous $a, b > 1$, $f^{2f(b+1)}(2a) = f^{2f(b)}(2(a+1))$. Dans ce cas $2f(b+1) - 2f(b)$ désigne, s'il est positif, la position de $2(a+1)$ dans l'orbite de $2a$, s'il est négatif, l'opposé de la position de $2a$ dans l'orbite de $2(a+1)$. Notons que ces deux cas ne sont pas compatibles, donc forcément la valeur de $2f(b+1) - 2f(b)$ ne dépend pas de b. En particulier pour tout b, $f(b+1) - f(b) = f(2) - f(1)$, ce qui en sommant implique que f est affine : posons A et B tels que $f(n) = An + B$ pour tout n. Notons que A est positif par hypothèse, et même strictement positif par injectivité.

En réinjectant dans l'équation avec $b = 1$, le terme de droite est affine de coefficient dominant $A^2 + 1$, le terme de gauche est affine de coefficient dominant $2A^{2f(1)} \geqslant 2A^2 \geqslant A^2 + 1$. En particulier, comme on a égalité dans l'inégalité précédente, $A = 1$. En réinjectant dans l'équation, on obtient que

$$2a + B(2f(b)) = (a + b + 2B) + a + b.$$

Ceci est équivalent à $2b + 2B = 2Bf(b) = 2Bb + 2B^2$, en regardant le coefficient dominant on obtient $B = 1$ qui réciproquement vérifie bien l'égalité voulue.

Solution n°2 de l'exercice 2
Comme dans la solution précédente, on montre que f est injective.

De plus, on remarque qu'étant donné deux pairs, l'un est dans l'orbite de l'autre. En effet, comme dans la solution précédente, on remarque que le membre de droite ne dépend que de $a + b$, donc celui de gauche aussi, donc pour tous $k > m, n$, $f^{2f(k-m)}(2m) = f^{2f(k-n)}(2n)$.

Donc si spdg $f(k-m) \geqslant f(k-n)$, on a $f^{2(f(k-m)-2f(k-n))}(2m) = 2n$ par injectivité de f. En particulier, l'orbite d'un pair selon f ne peut pas être un cycle, puisqu'elle contient une infinité d'éléments.

On affine un peu le résultat du paragraphe précédent : si $2n < 2m$, il existe $t > 0$ tel que $f^t(2n) = 2m$. S'il existe $k > m$ tel que $f(k-n) \geqslant f(k-m)$, on a fini car $f^{2(f(k-n)-f(k-m))}(2n) = 2m$ par injectivité de f. On doit donc montrer qu'on ne peut pas avoir $f(k-n) < f(k-m)$ pour tout $k > m$. Dans ce cas-là, en posant $d = m - n > 0$, on a pour tout x, $f(x) > f(x+d)$, donc $f(x) \geqslant f(x+d) + 1$. Par récurrence, pour tout $x, n \in \mathbb{N}^*$, $f(x) \geqslant f(x+nd) + n$. On fixe x et on fait tendre n vers $+\infty$, on aboutit à une contradiction.

Mais en fait, ce raisonnement permet de montrer que f est strictement croissante : prenons $k > m > n$, montrons $f(k-m) < f(k-n)$. Si jamais $f(k-m) > f(k-n)$, alors $f^{2(f(k-m)-f(k-n))}(2m) = 2n$, donc d'après le paragraphe précédent on a l'existence de $t, t' > 0$ tels que $f^t(2n) = 2m$, et $f^{t'}(2m) = 2n$. Mais alors $f^{t+t'}(2n) = 2n$, mais donc l'orbite de $2n$ selon f est un cycle, absurde. Donc pour tous $k > m > n$, $f(k-n) > f(k-m)$. On prend $m = n+1$, $k = 2n+1$, on a $f(n+1) > f(n)$ pour tout n, ce qui permet bien de montrer la stricte croissance de f.

Maintenant, on montre par récurrence $f(a) \geqslant a+1$. Montrons $f(1) \neq 1$. Si $f(1) = 1$, en prenant $a = b = 1$, on a $f^2(2) = f^2(2) + 2$, absurde. On a donc bien $f(1) \geqslant 2$. Ensuite, par stricte croissance de f une récurrence facile montre $f(a) \geqslant a+1$ pour tout a. On a donc $f^n(a) \geqslant a+n$ pour tous $a, n > 0$ par récurrence.

Prenons $a = b$. Alors $f^{2f(a)}(2a) = f^{2(f(a)-1)}(f^2(2a)) \geqslant f^2(2a) + 2(f(a)-1) \geqslant f^2(2a) + 2a$. Or on a égalité, on a donc égalité dans l'inégalité $f(a) \geqslant a+1$. Donc $f(a) = a+1$ pour tout a, et réciproquement cette fonction est bien solution.

Solution n°3 de l'exercice 2
Comme dans la première solution, on montre que f est injective et qu'il n'existe pas de $n, a > 0$ tels que $f^n(2a) = 2a$. On a donc pour tous a, x, y, si $f^x(2a) = f^y(2a)$ alors $x = y$.

Montrons que f envoie les pairs sur les impairs. Supposons qu'il existe a tel que $f(2a)$ soit pair, et posons $c = \frac{f(2a)}{2}$. On a $f^{2f(c)}(2a) = f^{2f(a)}(2c) = f^{2f(a)+1}(2a)$, et donc $2f(c) = 2f(a) + 1$, absurde.

De plus, il existe a tel que $f^2(2a)$ soit pair. Si f prend deux valeurs consécutives, disons $f(b) = f(a) + 1$, alors $f^{2f(b)}(2a) = f^{2f(a)}(2b)$ et donc $f^2(2a) = f^{2(f(b)-f(a))}(2a) = 2b$ par injectivité de f. On suppose donc que f ne prend jamais deux valeurs consécutives. Or f prend toutes les valeurs paires sauf au plus une : à part si $f(b)$ est le min de f, on peut trouver a tel que $f(a) < f(b)$, et comme $f^{2f(b)}(2a) = f^{2f(a)}(2b)$, on a $f^{2(f(b)-f(a))}(2a) = 2b$ d'où que $2b$ est dans l'image de f. Par injectivité, il y a au plus un entier b tel que $f(b)$ est le minimum de l'image de f, et donc au plus une valeur paire n'est pas prise par f. Comme f envoie les pairs sur les impairs, $f(2) - 1$ et $f(2) + 1$ sont deux pairs, et donc l'un des deux est une valeur prise par f, absurde car f ne prend pas deux valeurs consécutives (on a un problème si $f(2) = 1$, mais dans ce cas-là on peut remplacer $f(2)$ par $f(4)$ qui cette fois-ci ne vaut pas 1 par injectivité).

On fixe a tel que $f^2(2a)$ soit pair, et on pose $f^2(2a) = 2a+2c$. Pour tout $b > N = \frac{f^2(2a)}{2} - a = c$, on a $f^{2f(a+b-\frac{f^2(2a)}{2})}(2\frac{f^2(2a)}{2}) = f^2(a+b) + a + b = f^{2f(b)}(2a)$, et donc $f^{2f(a+b-\frac{f^2(2a)}{2})+2}(2a) = f^{2f(b)}(2a)$, et donc $2f(a+b-\frac{f^2(2a)}{2}) + 2 = 2f(b)$, donc $f(b-c)+1 = f(b)$.

On montre que c est positif. Si c est négatif, par récurrence $f(b-nc)+n = f(b)$ pour tout $b > N$, $n > 0$, et on obtient une contradiction en fixant b et en faisant tendre n vers $+\infty$.

Montrons que $c = 1$. Clairement $c \neq 0$. Puisque $f(b+c) = f(b)+1$ pour tout b, l'image de l'ensemble des multiples de c c'est l'ensemble des entiers supérieurs à $f(c)$. Donc l'image de son complémentaire est inclus dans $\{1, \dots, f(c-1)\}$ par injectivité de f, et donc pas rinjectivité de f le complémentaire de l'ensemble des multiples de c est fini. On a donc clairement $c = 1$. D'où $f(n) = n + k$ pour un certain $k \geqslant 0$, par récurrence triviale à partir de $f(b+1) = f(b)+1$.

f envoie les pairs sur les impairs, donc k est impair. f prend toutes les valeurs paires sauf une, donc $k \leqslant 3$. Donc $k \in \{1, 3\}$. Si $k = 3$, le membre de gauche vaut $2a + 6b + 18$, celui de droite vaut $2(a+b)+6$. On a donc $k = 1$, et comme dans la solution 1 on vérifie que cette fonction est bien solution.

Barème :

Si l'élève n'affirme pas que c'est la seule solution, il a -1. Par contre, affirmer que c'est la seule solution ne rapporte aucun point. **Solution 1 :** ..... 7 **pts**

A.1 f injective (1pt si dit f²+id périodique ou l'écrit avec des x et des d/des a-b) ..... 2 pts.

A.2 dire qu'on a symétrie en a et b, dire qu'on a dépendance en $a+b$ seulement ..... 0 pts

A.3 $f^n(2a) \neq a$ ..... 1 pts.

A.4 $f(b+1) - f(b)$ ne dépend pas de b ..... 3 pts.

♠ Un point est obtenu si, éventuellement avec une hypothèse sur b et b' (b et $b+1$, ou $2a$ avant $2(a+1)$ dans l'orbite, $2(f(b) - f(b'))$ c'est la position orientée de $2a'$ dans l'orbite de $2a$

A.5 Conclure ..... 1 pts.

♠ Ce point n'est obtenu que si les points précédents sont obtenus modulo petite erreur

Solution 2 : ..... 7 **pts**

A.1 f injective ..... 2 pts.

A.2 f strictement croissante (1pt pour le lemme boosté, 1 pour dire qu'il existe k tq f(k-n)>f(k-m), 1 pour dire que c vrai pour tout k) ..... 3 pts.

A.3 $f(a) \geqslant a+1$ ..... 1 pts.

A.4 Conclure ..... 1 pts.

♠ Les deux points précédents ne sont obtenables que si les points avant sont obtenus modulo petite erreur.

(Facultative) **Solution 3 :** ..... 7 **pts**

A.1 f injective ..... 2 pts.

A.2 $f^x(2a) = f^y(2a) \implies x = y$ ..... 1 pts.

A.3 f envoie les pairs sur les impairs ..... 0 pts.
A.4 Existence de a tq $2 \mid f^2(2a)$ ..... 1 pts.
A.5 Existence de c tq $f(b+c) = f(b) + 1$ (pour tout b grand) ..... 2 pts.
A.6 Montrer $c = 1$ (Rq : Si l'élève oublie de traiter $c \leqslant 0$ il a pas le point) ..... 1 pts
A.7 Conclure+Vérifier ..... 0 pts

Solution de l'exercice 3
Pour $i \in [\![0, p]\!]$ on note $c_i \in \{0, 1, \ldots, p\}$ l'emplacement initial modulo p de la boule b_i.
On remarque tout d'abord que le problème est invariant par translation et dilatation des c_i : on peut supposer sans perte de généralité que $c_0 = 0$ et que $c_p = 1$ puisque si $c_p = 0$ le problème est d'ores et déjà terminé car la boule b_1 passera par la case 0.
On note désormais $a_i \equiv \frac{c_i}{i} \mod p$ pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, ce qui nous permet d'introduire le lemme crucial suivant, sur lequel repose le problème.

Lemme 1. Pour $i, j \in \{1, \ldots, p-1\}$ deux entiers distincts, les boules b_i et b_j se croisent exactement une fois tous les p tours, à la position $\frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}}$ modulo p.

Démonstration. Déjà, il est clair que la position de la boule b_i à la k-ème minute vaut $c_i + ki$ modulo p. Les boules b_i et b_j se rencontrent donc quand

$$c_i + ki \equiv c_j + kj \mod p \Longrightarrow k \equiv \frac{c_i - c_j}{j - i} \mod p.$$

En outre, on a alors $c_i + ki \equiv c_i + \frac{c_i - c_j}{j-i} i \equiv \frac{jc_i - ic_j}{j-i} \equiv \frac{\frac{c_i}{i} - \frac{c_j}{j}}{i^{-1} - j^{-1}} \equiv \frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}} \mod p$, d'où le lemme.
□

Supposons maintenant que le problème soit faux.

Lemme 2.
Pour i fixé, les entiers $\frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}}$ parcourent exactement l'ensemble $[\![2, p-1]\!]$ modulo p quand j parcourt $[\![1, p-1]\!] \setminus \{i\}$.

Démonstration. En effet, d'une part si pour $j \neq k$ on a

$$x := \frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}} \equiv \frac{a_i - a_k}{i^{-1} - k^{-1}} \mod p,$$

alors b_i et b_j se rencontrent en x dans les p premières minutes et b_i et b_k aussi et puisque b_i passe par la case x exactement une fois tous les p tours, il vient donc que b_i, b_j et b_k sont sur x en même temps et le problème est résolu. Ainsi on a bien l'injectivité des rapports. En outre, on ne peut pour des raisons similaires avoir

$$\frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}} \in \{0, 1\} \mod p,$$

puisque dans ce cas les boules b_i, b_j et b_0 ou b_p seraient sur la même case en même temps à un moment donné. On a donc notre deuxième lemme.
□

On peut dès maintenant conclure ! Puisque $\frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}} \not\equiv 0 \mod p$ pour $i, j \in [\![1, p-1]\!]$ distincts, les a_i sont en particuliers tous distincts pour $i \in [\![1, p-1]\!]$. Notons dès lors c l'unique reste modulo p qu'ils ne couvrent pas. On sait d'une part par notre lemme que pour $i \in [\![1, p-1]\!]$ fixé :

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p-1} \frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}} \equiv \prod_{i=2}^{p-1} i \equiv -1 \mod p.$$

D'un autre côté, le numérateur (resp. dénominateur) du membre de gauche parcourt toutes les valeurs de $[\![1, p-1]\!]$ sauf $a_i - c$ (resp. i^{-1}) modulo p. On en déduit que :

$$\frac{1}{i(a_i - c)} \equiv \frac{\frac{(p-1)!}{a_i - c}}{\frac{(p-1)!}{i^{-1}}} \equiv \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{p-1} \frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}} \equiv -1 \mod p,$$

et donc que

$$\forall i \in [\![1, p-1]\!], \quad a_i \equiv i^{-1} + c \mod p.$$

Dès lors en réinjectant :

$$\forall i \neq j \in [\![1, p-1]\!], \quad \frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}} \equiv 1 \mod p,$$

ce qui, si $p > 3$, contredit directement l'injectivité qu'on avait prouvée !

Solution n°2 de l'exercice 3
On appelera par la suite *cycle* une liste de p états consécutifs des boîtes. Cette terminologie découle du fait que toutes les p minutes, les balles retournent à leur position initiale.
On dira aussi que deux balles *se rencontrent* si elles sont dans la même boite à un instant donné. Supposons donc maintenant que trois balles ne se rencontrent jamais. On introduit le lemme suivant, autour duquel gravite l'idée de cette nouvelle preuve.

Lemme 3.
Il existe au plus deux positions temporelles et spatiales dans le cycle où une balle est seule dans sa boîte.

Démonstration. Remarquons en effet que pour $i \in [\![1, p-1]\!]$, la balle b_i rencontre chaque balle exactement une fois par cycle. Elle a p balles à rencontrer, et peut en rencontrer au plus une à chaque minute, donc elle ne peut jamais être seule. En outre pour $i \in \{0, p\}$, balle b_i doit rencontrer $p-1$ autres balles et par le même argument, peut être seule au plus une fois par cycle. □

Représentons maintenant les positions futures et passées de la balle b_1, en associant à chacun de ses $p-1$ autres états intriqués un cousin fantôme, avançant lui aussi chaque minute. A nouveau, chaque cousin fantôme f doit rencontrer la balle b_i pour $i \neq 1$ exactement une fois par cycle. Puisque p est impair, et que f peut rencontrer au plus deux balles à chaque état, il s'ensuit que f doit rencontrer une balle seule au moins une fois par cycle.
D'un autre côté, b_1 a exactement $p-1$ cousins fantômes qui évoluent dans des boîtes différentes. Puisque chacun doit rencontrer une balle seule à un moment dans le cycle, et que $p - 1 > 2$, on obtient une contradiction avec notre lemme, ce qui conclut !

Barème :
Partie Z : Ce qui vaut 0 ou est non cumulable avec tout le reste : ..... 0 **pt**

Z.1 : Calculer le moment de rencontre des boules b_i et b_j ..... 0 pts.

Z.2 : Se placer dans le cas $c_0 \neq c_p$ ..... 0 pts

Z.3 Se placer dans le cas $c_0 = 0$ ou $c_p = 0$ ..... 0 pts

Z.4 Enoncer le lemme 2 ..... 1 pts

La note sur cette partie est le maximum de la note obtenue sur le barème de la solution 1 et sur le barème de la solution 2.

Solution 1 : ..... 7 **pts**

A.1 Calculer le lieu de rencontre des boules b_i et b_j ..... 1 pts.

A.2 A i fixé, montrer que les fractions $\frac{a_i-a_j}{i^{-1}-j^{-1}}$ sont différentes ..... 1 pts.

A.3 Se placer dans le cas $c_0 \neq c_p$ et montrer que à i fixé, les fractions $\frac{a_i-a_j}{i^{-1}-j^{-1}}$ parcourent $\mathbb{F}_p \setminus \{c_0, c_p\}$ ..... 1 pts.

A.4 Se ramener au cas où tous les a_i (ou quantité analogue) sont deux-à-deux distincts ... 1 pts.

♠ Il ne suffit pas de dire qu'on peut imposer sans perte de généralité que $c_0 = 0$ ou $c_p = 0$. Il faut mentionner explicitement que les a_i sont alors deux-à-deux distincts.

A.5 Faire le produit en ayant A3 et A4 ..... 1 pts.

♠ On demande donc d'écrire explicitement que à i fixé :

$$\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{p-1} \frac{a_i - a_j}{i^{-1} - j^{-1}} \equiv \prod_{k\in\mathbb{F}_p\setminus\{c_0,c_p\}} k \mod p,$$

ou analogue.

A.6 Calculer le produit et conclure ..... 2 pts

Solution 2 : ..... 7 **pts**

B.1 Montrer le lemme 3 ..... 1 pts.

B.2 Introduire un cousin fantôme de b_i ..... 1 pts

B.3 Montrer qu'un cousin fantôme de b_i doit rencontrer une balle seule au moins une fois dans le cycle ..... 4 pts.

B.4 Avoir une solution complète ..... 1 pts.

3 Deuxième partie

1 Combinatoire : Séries génératrices (Théo)

À venir, début octobre au plus tard !

2 Géométrie : TD de niveau P1/P2 (Gaëtan)

Sont corrigés les exercices abordés durant la séance. Pour le reste, je vous invite à vous rendre sur aops où sont disponibles tous les énoncés ainsi que des solutions données par les utilisateurs de la plateforme.

Exercices

Exercice 1 (G1 2021)
Soit $ABCD$ un parallélogramme avec $AC = BC$. Soit P sur (AB) tel que B soit entre A et P. Le cercle circonscrit à ACD recoupe le segment $[PD]$ en Q. Le cercle circonscrit à APQ recoupe le segment $[PC]$ en R. Montrer que $(CD), (AQ)$ et (BR) sont concourantes.

Exercice 2 (G3 2020)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $\widehat{ABC} > 90$, $\widehat{CDA} > 90$ et $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$. Soient E et F les symétriques de A par (BC) et (CD) respectivement. On suppose que les segments $[AE]$ et $[AF]$ coupent (BD) en des points K et L respectivement. Montrer que les cercles circonscrits à BEK et DFL sont tangents.

Exercice 3 (G2 2016)
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ, dont on note I le centre du cercle inscrit et M le milieu de $[BC]$. Les points D, E, F sont choisis sur $[BC], [AB], [AC]$ respectivement, de sorte à ce que $(ID) \perp (BC)$, $(IE) \perp (AI)$ et $(IF) \perp (AI)$. Soit X la deuxième intersection de Γ avec le cercle circonscrit à (AEF). Montrer que (XD) et (AM) s'intersectent sur Γ.

Exercice 4 (G3 2017)
Soit O le centre du cercle circonscrit d'un triangle acutangle ABC, et H son orthocentre. La droite (OA) intersecte les hauteurs issues de B et C en P et Q respectivement. Montrer que le centre du cercle circonscrit à PQH est sur une médiane de ABC.

Exercice 5 (G4 2021)
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Ω. Soient E et F les points d'intersection de la tangente à Ω en D avec les droites (BA) et (BC) respectivement. Un point T est choisi à l'intérieur du triangle ABC tel que (TE) est parallèle à (CD) et (TF) est parallèle à (AD). Soit $K \neq D$ un point sur le segment $[DF]$ vérifiant $TD = TK$. Montrer que les droites $(AC), (DT)$ et (BK) sont concourantes.

Exercice 6 (G5 2015)
Soit ABC un triangle avec $CA \neq CB$. Soient D, F, G les milieux des côtés $[AB], [AC], [BC]$ respectivement. Un cercle Γ passant par C et tangeant à (AB) en D coupe les segments $[AF]$ et $[BG]$ en H et I respectivement. Le symétrique de H (resp I) par rapport à F (resp G) est noté H' (resp I'). La droite $(H'I')$ coupe les droites (CD) et (FG) en Q et M respectivement. La droite (CM) recoupe Γ en P. Montrer que $CQ = QP$.

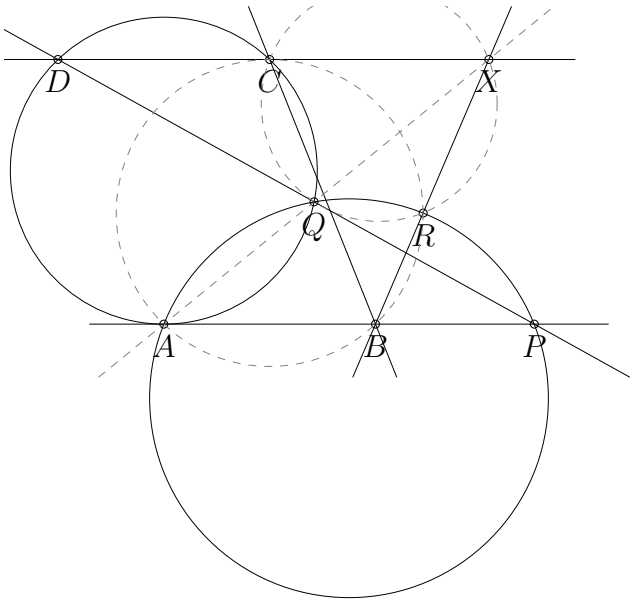
Exercice 7 (G5 2019)
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe avec $CD = DE$ et $\widehat{EDC} \neq 2 \cdot \widehat{ADB}$. Soit P un point à l'intérieur du pentagone tel que $AP = AE$ et $BP = BC$. Montrer que P est sur (CE) si et seulement si $[BCD] + [ADE] = [ABD] + [ABP]$ où $[XYZ]$ désigne l'aire d'un triangle XYZ.

Exercice 8 (G3 2022 sans le cercle inutile)
Soit $ABCD$ un quadrilatère. Soient P, Q tels que Q, A, B, P sont collinéaires dans cet ordre, que (AC) est tangente à (ADQ), et (BD) tangente à (BCP). Soient M et N les milieux de $[BC]$ et $[AD]$ respectivement. Montrer que les droites suivantes sont concourantes : (CD), la tangente à (ANQ) en A, et la tangente à (BMP) en B.

Solutions

Solution de l'exercice 1

On procède par chasse aux angles. Tout d'abord, on constate que $(RA, RC) = (RA, RP) = (QA, QP) = (QA, QD) = (CA, CD) = (AC, AB) = (BA, BC)$, ce qui signifie que les points A, B, C et R sont cocycliques : cela permet d'accéder à de nouveaux angles non triviaux et résoudre l'exercice avec. De même, si l'on note X le point d'intersection des droites (AQ) et (CD), on constate que $(QR, QX) = (QR, QA) = (PR, PA) = (CR, CX)$, ce qui signifie que les points C, Q, R et X sont cocycliques. On en conclut que $(RC, RX) = (QC, QX) = (QC, QA) = (DC, DA) = (BA, BC) = (AC, AB) = (RC, RB)$ (parallèles/antiparallèles), ce qui signifie que, comme annoncé, les points B, R et X sont alignés.



Solution de l'exercice 2

On introduit A' le symmétrique de A par rapport à (BD) : cela traduit l'hypothèse d'angle de l'énoncé en $BDA'C$ cyclique (et nous permet par ailleurs de tracer la figure).

Le point tangence est très souvent un point connu qui a des propriétés géométriques intéressantes (autres qu'être le point de tangence). Ici, surtout avec une belle figure, A' semble être le candidat idéal.

Par symétries on a $\widehat{BEA} = \widehat{BAE} = \widehat{BAK} = \widehat{BA'K}$ donc A' est sur le cercle (KEB).
De même A' est sur le cercle (LFD).

Pour montrer la tangence, on se ramène comme traditionnellement à une condition angulaire.

Si l est une tangente commune à (KEB) et (LFD) alors $((A'D), (A'B)) = ((A'D), l) + (l, (A'B)) = ((LD), (LA')) + ((KA'), (KB))$. Réciproquement si on a bien égalité entre le membre de droite et de gauche (modulo π), alors la droite l passant par A' qui vérifie $((A'D), l) = ((LD), (LA'))$ vérifie aussi $(l, (A'B)) = ((KA'), (KB))$ et est donc une tangente commune.

Il suffit donc de montrer la relation angulaire annoncée.

On a

$$((LD),(LA')) + ((KA'),(KB))$$

$$= ((LA),(LD)) + ((KB),(KA))$$

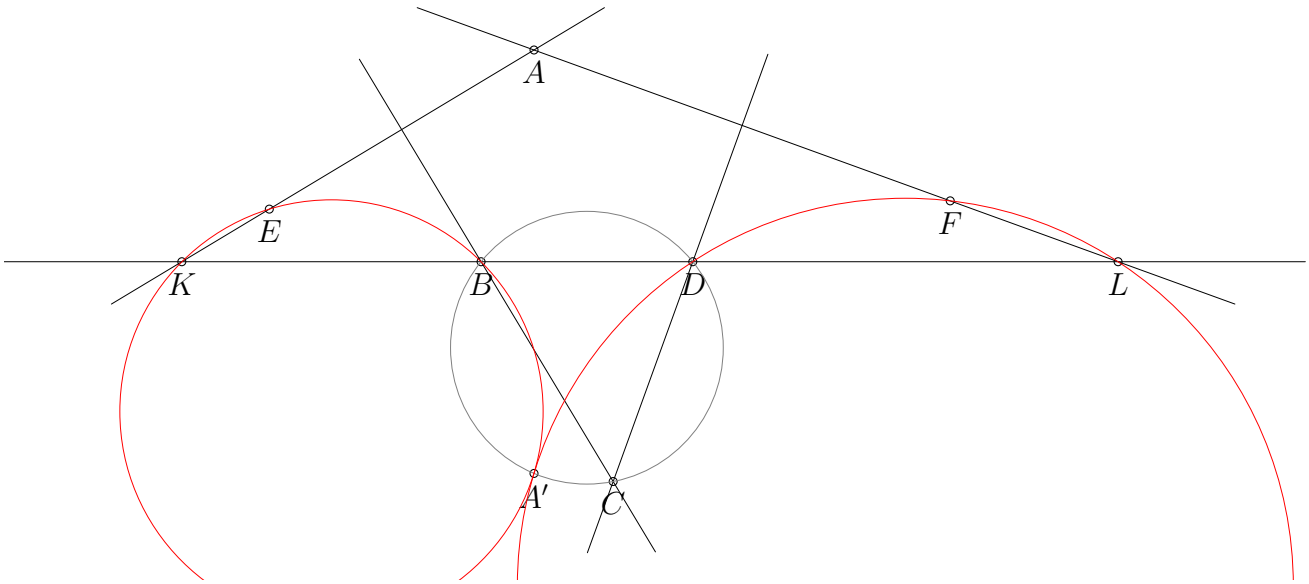
$$= \pi/2 + ((DC),(BD)) + \pi/2 + ((BD),(BC))$$

$$= ((DC),(BC))$$

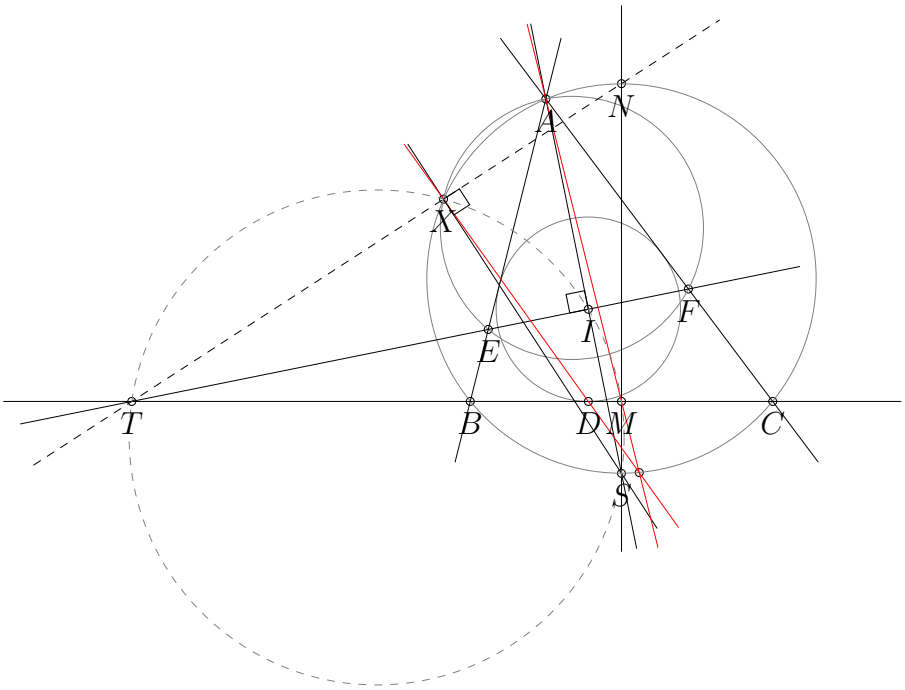
$$= ((A'D),(A'B))$$

par symétries puis angle inscrit dans $(BDCA')$.

Cela conclut.



Solution de l'exercice 3



X étant un point de Miquel, on a une similitude directe de centre X qui envoie $E \longrightarrow B$ et $F \longrightarrow C$.

Essayons d'en apprendre plus sur cette similitude. Comme I est le milieu de $[EF]$ et M celui de $[BC]$ on a $I \longrightarrow M$. Clairement A est le pôle nord de XEF donc $A \longrightarrow N$ où N est le pôle nord de ABC.

Comment traduire les informations données par l'action d'une similitude en informations plus concrètes ? Une façon de faire et d'utiliser Miquel pour trouver des quadrilatères cycliques intéressants. Nombreux sont les quadrilatères cycliques qu'on peut obtenir dans ce genre de configurations. Un cercle intéressant en est un qui passe par des points particulièrement intéressants ou par plus de quatre points. Ici par exemple :

Soit T l'intersection de (EI) et (BD). Alors par Miquel $XEIM$ est cyclique. Or par Miquel on a aussi que $(AI) \cap (NM) = S$ le pôle sud est sur le cercle (XIM). Donc X, I, M, S, T sont sur un même cercle, qu'on voit facilement être le cercle de diamètre $[ST]$.

Ainsi $\widehat{SXT} = 90 = \widehat{SXN}$ (car $[SN]$ est un diamètre de (ABC)) et donc T, X, N sont alignés.

Nous allons maintenant recourir à une technique très puissante présentée dans ce poly qui sert beaucoup dans ce genre d'exercices et dans bien d'autres encore : la technique de la fonction f.

Soit donc f la fonction $f(Y) = \dfrac{YB}{YC}$ si Y est au dessus de la droite (BC) et $f(Y) = -\dfrac{YB}{YC}$ si Y est strictement en dessous.

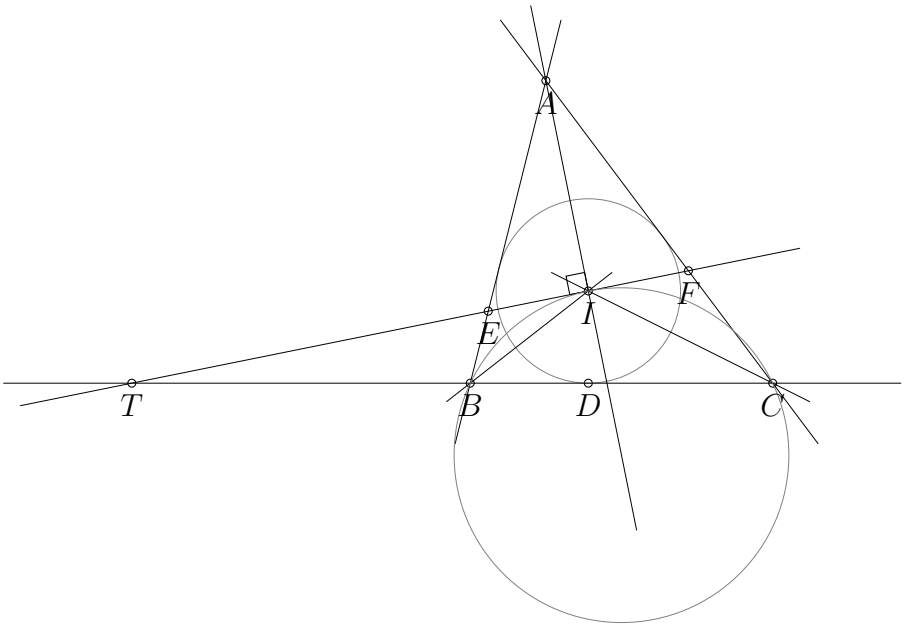
D'après le "cool ratio lemma" du poly cité plus haut on a $f(X) = f(X)f(N) = f(T)$. De plus il suffit de montrer $f(D)/f(X) = f(M)/f(A) = 1/f(A)$ car alors l'intersection de (XD) avec le cercle sera aussi sur (AM) par réciproque du "cool ratio lemma".

Ainsi il suffit de montrer $f(D)f(A) = f(T)$, ce qui permet de supprimer beaucoup de points de la figure.

Comme le centre du cercle antarctique (BIC) est sur la bissectrice, (TI) est tangente à (BIC). Ainsi on a aussi $f(I)^2 = f(T)$ et il suffit de montrer $f(I)^2 = f(A)f(D)$.

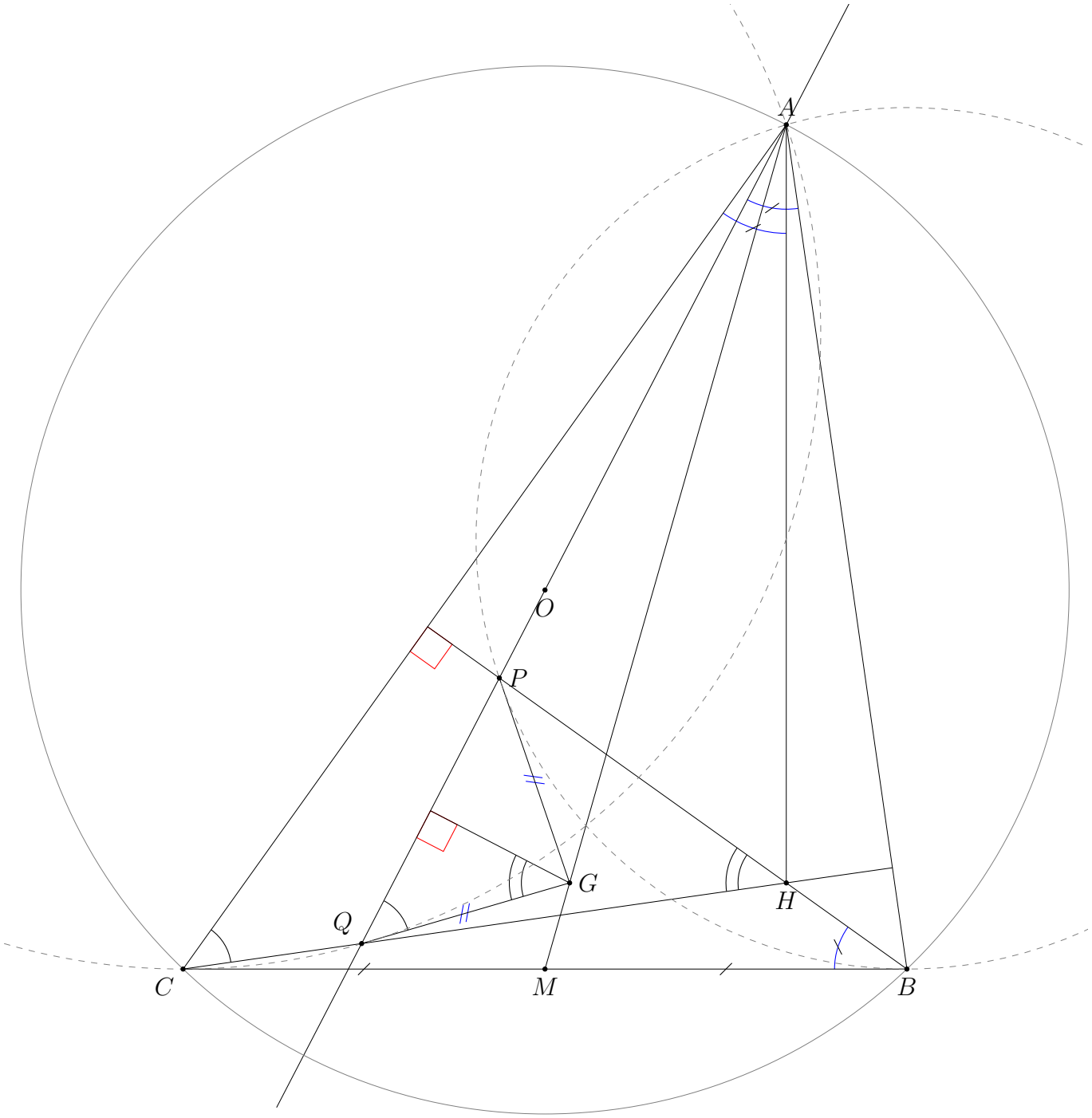
À ce stade tous les chemins mènent à Rome, mais par exemple $f(I) = \dfrac{IB}{IC} = \dfrac{DB \cdot \cos(\beta/2)}{DC \cdot \cos(\gamma/2)} = f(D) \cdot \dfrac{\cos(\beta/2)}{\cos(\gamma/2)}$, et d'autre part par loi des sinus dans AIB et AIC : $f(A) = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{IB\frac{\sin(90+\gamma/2)}{\sin(\alpha/2)}}{IC\frac{\sin(90+\beta/2)}{\sin(\alpha/2)}} = f(I)\dfrac{\sin(90+\gamma/2)}{\sin(90+\beta/2)} = f(I)\dfrac{\cos(\gamma/2)}{\cos(\beta/2)}$.

D'où $f(A)f(D) = f(I)^2$ ce qui conclut.



Remarque : on pouvait aussi s'épargner toute histoire de similitudes en remarquant que $f(X) = \dfrac{EB}{FC}$ puis se débrouiller pour montrer nos égalités de rapports avec le peu de points qu'il restait, quitte à mettre un peu les mains dans le cambouis.

Solution de l'exercice 4



On rappelle que les points H et O sont conjugués isogonaux. La présence des points O et H nous encourage à commencer par effectuer une chasse aux angles. Observons que

$$\widehat{PBC} = \widehat{HBC} = \widehat{HAC} = \widehat{OAB} = \widehat{PAB}$$

Donc la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABP au point B. De même la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit au triangle AQC au point C. L'axe radical de ces deux cercles coupe donc le segment $[BC]$ en son milieu par le lemme des axes radicaux.

Donc cet axe radical est la médiane issue de A dans le triangle ABC. Il suffit donc de montrer que le centre (que l'on appelle G) du cercle circonscrit au triangle PQH est sur l'axe radical des deux cercles. Or :

$$\widehat{CQG} = \widehat{HQG} = 90 - \widehat{HPQ} = 90 - (\widehat{PBA} + \widehat{PAB}) = \widehat{BAC} - \widehat{QAB} = \widehat{BAC} = \widehat{QAC}$$

Donc la droite (GQ) est tangente au cercle circonscrit au triangle AQC au point Q et donc la puissance du point G par rapport à ce cercle est GQ^2. Exactement de la même façon, la droite (GP) est tangente au cercle circonscrit au triangle PBA au point P et donc la puissance du point G par rapport à ce cercle est GP^2. Comme G est le centre du cercle circonscrit au triangle QHP, on a $GP = GQ$. La puissance du point G par rapport aux deux cercles est donc la même, G est donc sur l'axe radical des deux cercles, c'est à dire sur la médiane issue du sommet A.

3 Arithmétique : Équations fonctionnelles dans $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ (Antoine D)

À part quelques exceptions, ce TD ainsi que ses corrections sont allègrement copiées du poly de Martin Rakovsky. Si vous recherchez une partie cours sur le sujet, je ne saurai être plus concis et détaillé que ce qu'il a fait, je vous laisse donc vous y référer également.

Exercices

Exercice 1
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $n > 0$,

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) \mid 1 + 2 + \cdots + n.$$

Exercice 2 (IMO SL 2013 N1)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

pour tous $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que

$$f(f(n)) = n + 2025$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que pour tout nombre premier p, $p \mid f(a)^{f(p)} - f(b)^p$ si et seulement si $p \mid a - b$.

Exercice 5 (BMO SL 2017 N2)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que $xf(x) + f(y)^2 + 2xf(y)$ est un carré parfait pour tous $x, y \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 6 (ELMO SL 2014 N4)
Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est dite *jolie* si

$$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les entiers m tels que $f^{2025}(m) = m$ pour toute fonction f jolie.

Exercice 7
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que

$$xf(x) + yf(y) \mid (x^2 + y^2)^{2022}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{N}^\star$.

Exercice 8 (IMO 2010 P3)
Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que

$$(g(m) + n)(g(n) + m)$$

est un carré parfait pour toute paire (m, n) d'entiers strictement positifs.

Solutions

Solution de l'exercice 1

On commence par regarder ce qu'il se passe pour $n = 1$: $f(1) \mid 1$. Comme $f(1) > 0$, on en déduit $f(1) = 1$. À présent, pour $n = 2$ on a $f(2) + 1 \mid 3$. On a $f(2) + 1 \geqslant 1 + 1 = 2$, donc $f(2)+1 = 3$ et $f(2) = 2$. En essayant les valeurs suivantes, on se rend compte qu'on a toujours $f(n) = n$, du fait que la somme des $n - 1$ premiers termes est trop grande pour qu'une autre valeur de $f(n)$ soit possible. Plus précisément, montrons par récurrence forte que $f(n) = n$. Pour $n = 1, 2$ c'est déjà fait. Supposons donc qu'on ait un $n \geq 2$ tel que pour tout $k \leq n$, $f(n) = n$. Alors la relation de l'énoncé pour $n + 1$ donne

$$\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1) \mid \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

La fin de la preuve vient alors de l'observation suivante : si $a, b > 0$ vérifient $a \mid b$, alors $a = b$ ou $a \leq b/2$; cela vient simplement des cas $k = 1$ ou $k \geq 2$ dans la relation $b = ka$.

Ici on a

$$\frac{n(n+1)}{2} \geq \frac{(n+2)(n+1)}{4} \iff 2n \geq n + 2,$$

ce qui est vrai puisque $n \geq 2$. Ainsi

$$\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1) > \frac{(n+1)(n+2)}{4},$$

ce qui force

$$\frac{n(n+1)}{2} + f(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

ou encore $f(n + 1) = n + 1$. Notre hérédité tient, et on a donc fini.

Solution de l'exercice 2

Réponse : L'identité est la seule solution.

En posant $m = n$, on obtient que

$$f(n) \mid f(n)(f(n) + 1) = (f(n))^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n.$$

On déduit que $f(n) \mid n$. En particulier, $\boxed{f(n) \leqslant n}$ pour tout n et $f(1) \mid 1$ donc $f(1) = 1$.

En posant $n = 1$, on trouver que

$$m^2 + 1 \mid mf(m) + 1 \quad \Longrightarrow m^2 + 1 \leqslant mf(m) + 1 \quad \Longrightarrow m \leqslant f(m).$$

En combinant les deux inégalités, on déduit que $m = f(m)$ pour tout entier $m \geqslant 1$.

Réciproquement, l'identité est bien solution du problème.

Solution de l'exercice 3

Premièrement, en posant $n = f(n)$ et en composant par f des deux côtés de l'équation, on obtient $f(n + 2025) = f(n) + 2025$, et $f(n + 2025k) = f(n) + 2025k$ par récurrence. Ainsi, f est définie comme une fonction de $\mathbb{Z}/2025\mathbb{Z}$ dans lui-même, où elle devient une involution. Une involution a ses orbites de cardinal 1 ou 2 et 2025 étant impair, il n'est pas possible d'avoir que des orbites de cardinal 2, autrement dit, f a un point fixe modulo 2025.

Soit donc x un entier tel que x soit un point fixe de f modulo 2025, autrement dit, $f(x) = x + 2025k$ pour un certain k. Mais alors en composant par f des deux côtés, on obtient

$$f(f(x)) = f(x + 2025k) = f(x) + 2025k = x + 2025k + 2025k = x + 2025 \times 2k.$$

Cependant, $f(f(x)) = x+2025$, et en comparant les deux côtés on a $2k = 1$, une contradiction. Il n'y a donc pas de solutions.

Solution de l'exercice 4

Réponse : La seule solution est l'identité .

En posant $b = a$ dans la divisibilité, on a pour tout nombre premier que $p \mid a - a$, donc d'après le petit théorème de Fermat,

$$0 \equiv f(a)^{f(p)} - f(a)^p \equiv f(a)^{f(p)} - f(a) \mod p.$$

Ainsi, pour tout a et tout nombre premier p, $f(a)^{f(p)} \equiv f(a) \mod p$. On déduit que, à nouveau à l'aide du petit théorème de Fermat , pour tout a, b, $f(a)^{f(p)} - f(b)^p \equiv f(a) - f(b) \mod p$. On a donc l'équivalence

$$p \mid a - b \iff p \mid f(a) - f(b).$$

Montrons à partir de là que $|f(n + 1) - f(n)| = 1$. Soit $n \geqslant 1$ un entier et p un éventuel diviseur premier de $f(n + 1) - f(n)$. D'après l'équivalence ci-dessus, cela implique que $p \mid (n+1) - n = 1$, ce qui est absurde. Le nombre $f(n+1) - f(n)$ n'a donc aucun facteur premier, d'où $\boxed{|f(n + 1) - f(n)| = 1}$.

D'autre part, si on avait $f(n + 2) = f(n)$ pour un certain entier n, on aurait que $3 \mid f(n + 2) - f(n)$ donc $3 \mid (n + 2) - n = 2$, ce qui est absurde. La quantité $f(n + 1) - f(n)$ ne change donc jamais de signe. On a donc soit $f(n+1) - f(n) = 1$ pour tout n, soit $f(n+1) - f(n) = -1$ pour tout n.

Dans le second cas, on déduit que $g(n) = -n + g(1) + 1$, pour tout n, par récurrence immédiate, ce qui est absurde car f ne peut pas prendre de valeurs négatives.

Dans le premier cas, on déduit par récurrence que $\boxed{f(n) = n + f(1) - 1 \text{ pour tout } n}$ par récurrence immédiate. Réciproquement, si f est de la forme $f(n) = n + c$, avec $c \geqslant 0$, alors on a pour tout nombre premier p et tout entier a,

$$0 \equiv f(a)^{f(p)} - f(a) = (a + c)^{p+c} - (a + c) \equiv (a + c)^c - (a + c) \mod p.$$

On déduit que la polynôme $X^{c+1} - X$ admet au moins p racines modulo p, ce qui implique que $c = 0$ ou que $c + 1 \geqslant p$. Comme la deuxième inégalité ne peut pas être vraie pour tout nombre premier p, on déduit que $c = 0$, donc f est forcément l'identité. L'identité est bien solution puisque $a^p - b^p \equiv a - b \mod p$ pour tout nombre premier p d'après le petit théorème de Fermat.

Solution de l'exercice 5

Réponse : La seule solution est l'identité.

Pour tout x et y, on réécrit on note $A_{x,y}$ l'entier tel que $xf(x) + f(y)^2 + 2xf(y) = A_{x,y}^2$. L'égalité se réécrit

$$(f(y) + x)^2 + x(f(x) - x) = A_{x,y}^2.$$

On distingue alors deux cas :

- Si f est non bornée : dans ce cas, pour tout n, il existe un entier y_n tel que $f(y_n) \geqslant n$. Soit $x \in \mathbb{N}^\star$ un entier quelconque. Pour n tel que $2(x+n) > x|f(x)-x|$ (qui se produit lorsque n est suffisamment grand), on a en particulier $2(x+f(y_n)) > x|f(x)-x|$ et donc l'encadrement suivant

$$(x+f(y_n)-1)^2 < (x+f(y_n))^2 + x(f(x)-x) < (x+f(y_n)+1)^2.$$

  Cet encadrement implique que $(f(y_n)+x)^2 + x(f(x)-x) = (f(y_n)+x)^2$, soit $\boxed{f(x)=x}$. Réciproquement, l'identité est bien solution, en vertu de l'identité

$$x^2+y^2+2xy = (x+y)^2.$$

- Si f est bornée : Soit p un nombre premier, on prend $x = y = p$, et on obtient que $f(p)(3p+f(p))$ est un carré. $f(p)$ et $3p+f(p)$ n'ont pas beaucoup de facteurs en commun, donc on n'est pas loin de pouvoir les forcer à être tous deux des carrés. Plus précisément, si p est suffisamment grand on doit avoir $1 \leq f(p) < p$, donc $f(p)$ et p sont premiers entre eux. On distingue alors deux cas : $f(p)$ est divisible par 3 ou non. Si $f(p)$ n'est pas divisible par 3, $f(p) = a^2$ et $3p+f(p) = b^2$ sont des carrés, et $3p = b^2-a^2 = (b-a)(b+a)$. Seulement, a est borné et b ne l'est pas, donc pour p suffisamment grand cette équation n'a pas de solutions.

  La conclusion est la même si $f(p)$ est divisible par 3, car alors on peut diviser par 9 et obtenir que $f(p)/3(p+f(p)/3)$ est un carré avec $f(p)/3$ et $p+f(p)/3$ premiers entre eux, et aboutir à une contradiction très similaire.

Solution de l'exercice 6

On se fixe une fonction jolie, et on essaye de montrer des choses qui sont toujours vraies sur de telles fonctions. Tout d'abord, f est bijective : en effet, on sait qu'après un certain nombre d'itérations (plus grandes que 1) on retombe sur n. Le graphe où on relie n à $f(n)$ se décompose donc en cycles disjoints, tous finis. En particulier, f est bijective.

Étudions ce qui se passe pour un seul de ces cycles, mettons $\{x_1, \ldots, x_p\}$ avec $f(x_i) = x_{i+1}$ et p la période de chacun des éléments du cycle. Notons que pour tout n, la période $\omega(n)$ de n divise $f^{f(n)}$; dans notre cas ça revient à dire que pour tout i,

$$p \mid f^{f(x_i)}(x_i) = f^{x_{i+1}}(x_i) = x_{i+x_{i+1}}$$

(où les indices sont bien sûr pris modulo p). En particulier, il existe un indice j (par exemple $j = 1+x_2$) tel que $p \mid x_j$. En reprenant la relation $p \mid x_{i+x_{i+1}}$ avec $i = j-1$, on obtient $p \mid x_{j-1+x_j} = x_{j-1}$. Par récurrence, on a $p \mid x_i$ pour tout i. Ce raisonnement tient pour n'importe quelle orbite de f, on a donc montré que pour tout n, $\omega(n) \mid n$.

Ainsi, si $m \mid 2025$, alors pour toute fonction f jolie, la période de m divisera m et donc également 2025, si bien que $f^{2025}(m) = m$.

Pour montrer que réciproquement il s'agit bien des seuls nombres avec cette propriété, il faut construire des fonctions jolies. Pour cela, on commence par remarquer que la propriété que la période d'un nombre divise ce nombre est en fait équivalente à la jolité de f. En effet,

la période de n est également celle de $f(n)$, et elle divise donc chacun de n et $f(n)$. Ainsi, $f^{f(n)}(n) = n$, et

$$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = f^n(n) = n.$$

Soit donc $m \in \mathbb{N}$ avec $m \nmid 2025$, et construisons une fonction jolie avec $f^{2025}(m) \neq m$. On pose

$$f(n) = \begin{cases} n+m \text{ si } n \in \{m, 2m, \ldots, (m-1)m\} \\ m \text{ si } n = m^2 \\ n \text{ sinon.} \end{cases}$$

On a un cycle entre les multiples de m plus petits que m^2, et celui-ci est de longueur exactement m, donc la longueur du cycle divise chacun de ses éléments. Les autres cycles sont de longueur 1, donc f est bien jolie. De plus, $f^{2025}(m) = m$ si et seulement si $\omega(m) \mid 2025$, ce qui n'est pas le cas ici puisque $\omega(m) = m$.

Solution de l'exercice 7
Réponse : La seule solution est l'identité.

Il faut essayer de manipuler des p divisant le membre de droite et des p divisnat le membre de gauche. Ce sont ces derniers p qui vont nous intéresser.

Soit p un diviseur premier éventuel de 1. En prenant $x = p$, on a $p \mid pf(p)+f(1) \mid (p^2+1)^{2022}$, ce qui est manifestement absurde. Donc $f(1)$ n'a pas de diviseurs premiers et $\boxed{f(1) = 1}$.

En prenant $x = y = p$ un nombre premier impair, on trouve que $2pf(p) \mid 2^{2022}p^{4044}$. Supposons un instant que $2 \mid f(p)$. Alors $2 \mid 2f(2) + pf(p) \mid (2^2 + p^2)^{2022}$, ce qui est manifestement absurde. Donc 2 ne divise pas $f(p)$ et on déduit que $\boxed{f(p) \text{ est une puissance de } p}$.

Supposons que $f(p) = p^\alpha$ avec $\alpha > 1$. En prenant $x = 1$ et $y = p$, on a $1 + p^{\alpha+1} \mid (1+p^2)^{2022}$. Mais comme $p > 2$, d'après le théorème de Zsigmondy, le nombre $p^{\alpha+1} + 1$ admet un diviseur premier ne divisant pas $1+p^2$, ce qui est une contradiction. Donc $\alpha = 1$ et $\boxed{f(p) = p}$ pour tout nombre premier p impair.

en prenant x quelconque et p premier, on a

$$0 \equiv (x^2 + p^2)^{2022} \equiv (x^2 - xf(x))^{2022} \mod xf(x) + p^2.$$

En faisant varier p, le nombre $(x^2 - xf(x))^{2022}$ admet donc une infinité de diviseurs, il est donc nul et $\boxed{f(x) = x}$ pour tout entier $x \geqslant 1$.

Réciproquement, la fonction identité est bien solution.

Solution de l'exercice 8
Réponse : les fonction solutions sont toutes les fonctions de la forme $f(n) = n + c$ pour tout entier n, avec $c \geqslant 0$ un entier.

Commençons par montrer que $|g(k+1) - g(k)| = 1$ pour tout entier k. Soit $k \geqslant 1$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas et prenons p un diviseur premier de $g(k+1) - g(k)$. Montrons qu'il existe un entier m tel que $v_p(g(k) + m)$ et $v_p(g(k+1) + m)$ sont impairs.

Si $g(k+1) = g(k)$, il suffit de prendre $m = p^{2\ell+1} - g(k)$, où ℓ est assez grand pour que $p^{2\ell+1} > g(k)$. Sinon, on écrit $g(k+1) - g(k) = p^\ell A$, avec $\ell \geqslant 1$ et A est premier avec p. On distingue alors deux cas :

- Si ℓ est impair : prenons r un entier suffisamment grand pour que $p^{\ell+2r} \geqslant g(k)$. On pose alors $m = p^{\ell+2r} - g(k)$. On vérifie alors que $m + g(k+1) = p^{\ell+2r} + p^\ell A = p^\ell(p^{2r} + A)$, si bien que $v_p(m + g(k)) = \ell + 2r$ et $v_p(m + g(k+1)) = \ell$ sont impairs.
- Si ℓ est pair : prenons $r \geqslant \ell$ un entier suffisamment grand pour que $p^{\ell-1} + p^r \geqslant g(k)$. On pose alors $m = p^{\ell-1} + p^r - g(k)$. On vérifie alors que $m + g(k+1) = p^{\ell-1} + p^r + p^\ell A = p^{\ell-1}(1 + pA + p^{r-\ell+1})$, si bien que $v_p(m + g(k)) = v_p(m + g(k+1)) = \ell - 1$ qui est bien impair.

Une fois cet entier m construit, revenons à l'équation. D'après l'énoncé, puisque le nombre $(m+g(k))(k+g(m))$ est un carré parfait, sa valuation $p-$adique est paire. Comme $v_p(m+g(k))$ est impair, on déduit que $v_p(k + g(m))$ est également impair et en particulier, $p \mid k + g(m)$. De la même manière, $p \mid k + 1 + g(m)$. Mais alors $p \mid k + 1 + g(m) - (k + g(m)) = 1$, ce qui est absurde.

On déduit que $g(k+1) - g(k)$ n'a pas de diviseur premier, ce qui implique que $|g(k+1) - g(k)| = 1$.

Remarquons ensuite qu'on ne peut pas avoir $g(n) = g(n+2)$: En effet, si c'était le cas, en posant $a = g(n)$, on aurait que le nombre $(g(n) + n + 2)(g(n+2) + n) = (a+n)(a+n+2)$ est un carré parfait. Or, on a l'encadrement $(a+n)^2 < (a+n)(a+n+2) < (a+n+1)^2$. On déduit que $\boxed{g(n) \neq g(n+2) \text{ pour tout entier } n}$.

En conséquence, les deux nombres $g(n+2) - g(n+1)$ et $g(n+1) - g(n)$ ne peuvent jamais être opposés, sinon on aurait $g(n+2) - g(n+1) = -(g(n+1) - g(n))$ et donc $g(n+2) = g(n)$. On a donc soit $g(n+1) - g(n) = 1$ pour tout n, soit $g(n+1) - g(n) = -1$ pour tout n.

Dans le premier cas, on déduit par récurrence que $\boxed{g(n) = n + g(1) - 1 \text{ pour tout } n}$ par récurrence immédiate. Réciproquement, la fonction définie par $g(n) = n + c$, avec $c \geqslant 0$, est bien solution.

Dans le second cas, on déduit que $g(n) = -n + g(1) + 1$, pour tout n, ce qui est absurde car g ne peut pas prendre de valeurs négatives.

Ceci conclut que les fonction annoncées sont les seules solutions.

4 Combinatoire : TD de niveau P1/P2 (Arthur)

Exercices

Exercice 1 (C2, 2016)
Trouver tous les entiers n pour lesquels on peut mettre tous les diviseurs de n dans une grille rectangulaire telle que :

— Chaque case de la grille contient un diviseur distinct de n.
— Les sommes des lignes de la grille sont toutes égales.
— Les sommes des colonnes de la grille sont toutes égales.

Exercice 2 (C2, 2019)
On nous donne un ensemble X de n nombres $\geqslant 1$, dont la somme est $2n$. Montrer que pour chaque nombre réel r dans $[0, 2n-2]$, il est possible de choisir un sous-ensemble S de X dont la somme des éléments est dans $[r, r+2]$.

Exercice 3 (C1, 2014)
On nous donne n points à l'intérieur d'un rectangle R, de telle sorte que deux points ne soient jamais sur une droite parallèle à un côté de R. On partitionne le rectangle R en morceaux rectangulaires (dont les côtés sont parallèles à ceux de R) de telle sorte qu'aucun morceau ne contienne de point strictement à l'intérieur. Montrer que le nombre de morceaux est au moins $n+1$.

Exercice 4 (C3, 2016)
Soit n un entier qui n'est divisible ni par 2 ni par 3. On colorie les sommets d'un n-gone régulier en utilisant 3 couleurs, de telle manière que chaque couleur est utilisée un nombre impair de fois. Montrer qu'il existe un triangle isocèle dont les trois sommets sont de couleurs différentes.

Exercice 5 (C4, 2014)
Considérons un ensemble fini P de cases d'un échiquier infini, tel que les cases de P peuvent être pavées par des tétraminos en S. Montrer que quelle que soit la manière de paver P par des tétraminos S et Z, le nombre de tétraminos Z utilisés est pair.

Exercice 6 (P4, USAMO 2019)
Soit n un entier positif. Trouver le nombre de manières de choisir $(n+1)^2$ sous-ensembles $S_{i,j}$ de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ pour $0 \leqslant i, j \leqslant n$, de telle sorte que :

— Pour chaque $0 \leqslant i, j \leqslant n$, le sous-ensemble $S_{i,j}$ contient exactement $i+j$ éléments.
— $S_{i,j} \subseteq S_{k,l}$ pour tous $0 \leqslant i \leqslant k \leqslant n$ et $0 \leqslant j \leqslant l \leqslant n$.

Exercice 7 (C4, 2013)
Soit n un entier positif, et A un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}$. Une A-partition de n en k parties est une représentation de n comme une somme $n = a_1 + \cdots + a_k$, où les parties $a_1, \ldots, a_k$ sont des éléments de A, et ne sont pas nécessairement distinctes. Le nombre de parties **différentes** dans une telle partition est le nombre d'éléments distincts de l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_k\}$. On dit qu'une A-partition de n en k parties est **optimale** s'il n'existe pas de A-partition de n en r parties avec $r < k$. Montrer que le nombre de parties différentes d'une A-partition optimale de n est d'au plus $\sqrt[3]{6n}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Seul $n = 1$ fonctionne. En effet, notons L le nombre de lignes et C le nombre de colonnes de la grille. Par symétrie, supposons $L \geqslant C$.

Si $C = 1$, le seul cas qui fonctionne est $L = 1$ (tous les diviseurs doivent être égaux...).

Sinon, on a $C \geqslant 2$. Trions les lignes par maximum décroissant. Alors la première ligne contient n, la deuxième ligne contient des valeurs $\leqslant \frac{n}{2}$, la troisième ligne contient des valeurs $\leqslant \frac{n}{3}$, ..., la L-ème ligne contient des valeurs $\leqslant \frac{n}{L}$.

Ainsi, la somme S_L de la dernière ligne vaut au plus $C\frac{n}{L} \leqslant n$, alors que la somme S_1 de la première ligne est $> n$. Ce cas est donc impossible.

Solution de l'exercice 2

Soient $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ les nombres donnés, et supposons $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

Pour $i = 0, \ldots, n$, notons $\Sigma_i := \{\sum S, S \subseteq \{x_1, \ldots, x_i\}\}$. On montre par récurrence que l'écart entre deux sommes consécutives de Σ_i est au plus 2. La propriété est triviale pour $i = 0$. Supposons que la propriété est vraie pour $i-1$, et considérons Σ_i. On a $\Sigma_i = \Sigma_{i-1} \cup (\Sigma_{i-1} + x_i)$. Il faut donc montrer que l'écart entre la somme maximale de Σ_{i-1} et la somme minimale de $\Sigma_{i-1} + x_i$ est au plus 2, c'est à dire :

$$x_i - \sum_{j=1}^{i-1} x_j \leqslant 2.$$

On le montre par l'absurde : supposons que $x_i > 2 + \sum_{j=1}^{i-1} x_j$. Notons $\alpha = \sum_{j=1}^{i-1} x_j$. Alors :

$$2n = \sum_{j=1}^{n} x_j \geqslant \alpha + (n - i + 1)(\alpha + 2)$$

D'où :

$$2(i-1) \geqslant \alpha(n - i + 2)$$

Qui est la contradiction recherchée car $\alpha \geqslant i - 1$ (tous les nombres sont $\geqslant 1$).

Ainsi, l'écart entre deux sommes consécutives de Σ_i est au plus 2, et finalement, l'écart entre deux sommes consécutives de Σ_n est au plus 2.

En choisissant la somme miminimale de Σ_n qui est $\geqslant r$, on obtient un sous-ensemble S de X dont la somme est dans $[r, r + 2]$.

Solution de l'exercice 3

Notons k le nombre de morceaux rectangulaires. Considérons les I intersections possibles entre segments :

— Il y a les 4 coins de R.

— Il y a I_3 intersections de degré 3.

— Il y a I_4 intersections de degré 4.

Ainsi $I = 4 + I_3 + I_4$, et comme chaque morceau rectangulaire a 4 coins, on a

$$4k = 4 + 2I_3 + 4I_4$$

Considérons un point P donné, et étudions le côté sur lequel il est placé. Étendons ce côté dans chaque sens à travers les intersections de degré 4 jusqu'à recontrer une intersection de

côté 3. On associe ces deux intersections de degré 3 à P. Chaque intersection est associée à au plus un point car on a supposé que deux points ne sont jamais sur une droite parallèle. Ainsi, on doit avoir $I_3 \geqslant 2n$, et donc

$$4k \geqslant 4 + 4n \implies k \geqslant n + 1.$$

Solution de l'exercice 4

Notons r, g et b le nombre de sommets rouges, verts et bleus.

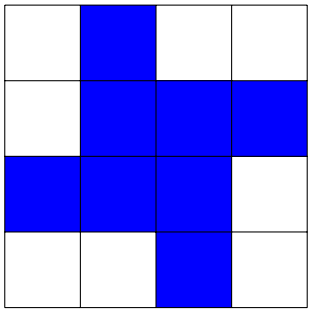
Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ bases de triangles isocèles possibles, chacune correspondant à exactement un triangle. En effet, comme n est impair, il n'y a qu'un sommet compatible avec chaque base, et comme n n'est pas divisible par 3, il n'y a pas de triangle équilatéral, donc chaque triangle correspond à une unique base.

Supposons par l'absurde qu'il n'y a pas de triangle trichromatique, on trouve une contradiction en double-comptant le nombre X de triangles qui ont une base bichromatique. En comptant par la base, on trouve $X = rg + gb + br$, qui est impair. Pour chaque sommet u, on vérifie maintenant qu'il y a un nombre pair de bases bichromatiques qui lui sont associées. Ainsi X est également pair, ce qui est la contradiction recherchée.

Supposons par symétrie que u est rouge. Comme il n'y pas de triangle trichromatique, chaque base bichromatique associée à u est soit rouge-vert, soit rouge-bleu. Notons $n_=$ le nombre de bases rouge-rouge associées à u, et $n_\neq$ le nombre de bases rouge-vert ou rouge-bleu associées à u. Alors $r - 1 = 2 \times n_= + n_\neq$, donc $n_\neq$ est pair.

Solution de l'exercice 5

On considère le pavage en "shurikens", de motif :



On vérifie que chaque tétramino en S utilisé couvre un nombre pair de cases bleues. En utilisant la configuration initiale, on sait que le nombre de cases bleues de P est pair. Comme chaque tétramino en Z couvre un nombre impair de cases bleues, le nombre de tétraminos Z utilisés est pair dans la configuration finale.

Solution de l'exercice 6

On compte le nombre de manières de choisir $S_{0,0}, S_{1,0}, \ldots, S_{n,0}, S_{n,1}, \ldots, S_{n,n}$. À chaque étape, on doit ajouter un élément à l'ensemble précédent pour obtenir l'ensemble suivant qui n'a pas été choisi auparavant. Ainsi, le nombre de manières de choisir ces ensembles est exactement $(2n)!$.

Une fois que ces ensembles ont été choisis, on compte le nombre de manières de choisir les autres ensembles. On choisit les ensembles $S_{i,j}$ par i décroissant, puis par j croissant. À chaque étape, il suffit de choisir $S_{i,j}$ qui vérifie $S_{i,j-1} \subseteq S_{i,j} \subseteq S_{i+1,j}$. Il faut donc ajouter l'un des deux éléments de $S_{i+1,j} \setminus S_{i,j-1}$ à $S_{i,j-1}$ pour obtenir $S_{i,j}$, il y a exactement 2 manières possibles.

Le nombre total de manières de choisir tous les ensembles est donc $(2n)! \cdot 2^{n^2}$.

Solution de l'exercice 7

Soient $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, les parties distinctes d'une partition optimale, et supposons $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$.

Si S et S' sont deux sous-ensembles distincts de $\{x_1, \ldots, x_k\}$, tels que $\sum S = \sum S'$, alors $|S| = |S'|$, sinon on pourrait remplacer S par S' (ou réciproquement) dans la partition optimale pour obtenir une partition avec moins de parties.

Notons n_i le nombre de sommes différentes que l'on peut obtenir avec exactement i éléments distincts de X. Par le raisonnement ci-dessus, on doit avoir $\sum_{i=1}^{k} n_i \leqslant n$.

Montrons que $n_i \geqslant i(k-i)+1$. On va construire explicitement $i(k-i)+1$ sommes différentes avec exactement i éléments distincts de X. On commence avec la somme minimale $x_1 + x_2 + \cdots + x_i$, puis on remplace itérativement un élément x_j par x_{j+1} pour un j tel que x_{j+1} n'est pas déjà dans la somme, jusqu'à ce que l'on obtienne la somme maximale $x_{k-i+1} + x_{k-i+2} + \cdots + x_k$. Chaque somme obtenue ainsi est différente (car la somme augmente strictement à chaque étape). Le nombre total de sommes obtenues de cette manière est exactement $i(k-i)+1$.

Alors :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k} n_i &\geqslant \sum_{i=1}^{k} (i(k-i)+1) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (ik - i^2 + 1) \\
&= k\frac{k(k+1)}{2} - \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + k \\
&= \frac{k^3 + 5k}{6} \\
&\geqslant \frac{k^3}{6}
\end{aligned}$$

D'où $\frac{k^3}{6} \leqslant n$, et donc $k \leqslant \sqrt[3]{6n}$.

5 Géométrie : Petites idées simples (David)

Le but de ce TD est de s'entraîner à manier les outils les plus basiques de la géométrie pour résoudre des problèmes non-triviaux.

Entrée

Exercice 1
Soit ABC un triangle, et K, L deux points en son intérieur tels que $BKLC$ soit cyclique. Soit $D \in [AB]$. Montrer que si $\widehat{AKD} = \widehat{KCB}$ et $\widehat{ALD} = \widehat{LCB}$, alors $AK = AL$.

Exercice 2
Les points I, J, D sont le centre du cercle inscrit, le centre du cercle A-exinscrit et le pied de la hauteur issue de A du triangle ABC respectivement. Prouver que si J' est le symétrique de J par rapport à BC, alors D, I, J' sont alignés.

Plat

Exercice 3
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dont les diagonales AC et BD s'intersectent en E. Les extensions des côtés AD et BC au-delà de A et B se rencontrent F. Soit G le point tel que $ECGD$ soit un parallélogramme, et soit H l'image de E par la symétrie d'axe (AD). Prouver que D, H, F, G sont cocycliques.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, X un point sur $[BC]$. Les points E et F se situent sur $[AB]$ et $[AC]$ tels que $AEXC$ et $AFXB$ soient cycliques. On note O le centre du cercle circonscrit AEF. prouver que $OX \perp BC$.

Exercice 5
Soit ABC un triangle de centre de gravité G. Soient R et S deux points sur les segments $[GB]$ et $[GC]$ respectivement satisfaisant

$$\widehat{ABS} = \widehat{ACR} = 180^\circ - \widehat{BGC}$$

Montrer que $\widehat{RAS} + \widehat{BGC} = \widehat{BGC}$.

Exercice 6
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle ω d'orthocentre H et de centre du cercle d'Euler N. (AH) recoupe ω en D et les tangentes en B et D à ω s'intersectent en T. Prouver que $(HT) \perp (CN)$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle acutangle dans lequel $BC < AB$ et $BC < CA$. Soient P sur $[AB]$ et Q sur $[AC]$ tel que $P \neq B$, $Q \neq C$ et $BQ = BC = CP$. Soient T le centre du cercle circonsrit à APQ, H l'orthocentre de ABC, puis S l'intersection de (BQ) et (CP). Prouve que T, H, et S sont alignés.

Exercice 8
Un triangle acutangle ABC est inscrit dans un cercle de centre O. Les symétriques de O par rapport aux hauteurs issues de A, B, C sont U, V, W respectivement. Soit ℓ_A une droite passant par A parallèle à (VW). On définit ℓ_B, ℓ_C similairement. Prouver que ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C sont concourantes.

Exercice 9
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AC = BD$ et tel que les côtés AB et CD ne sont pas parallèles. Soit P le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD). Soient E et F des points respectivement sur les segments $[BP]$ et $[AP]$ tels que $PC = PE$ et $PD = PF$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle formé par les droits $(AB), (EF), (CD)$ est tangent au cercle circonscrit à ABP.

Exercice 10
Soit ABC un triangle rectangle en C, H le pied de la hauteur issue de C. Un point D est choisi à l'intérieur de CBH de sorte que (CH) passe par le milieu de $[AD]$. Soit P l'intersection de (BD) avec (CH). On note ω le demi-cercle de diamètre BD coupant $[CB]$ en un point intérieur. Une droite passant par P est tangente à ω en Q. Montrer que (CQ) et (AD) se coupent sur ω.

Dessert

Exercice 11
Soit ABC un triangle. Les points B, D, E, et C se situent dans cet ordre tels que $BD = DE = EC$. Soient M et N les milieux de $[AD]$ et $[AE]$, respectivement. On suppose que ADE est acutangle , et soit H sont orthocentre. Soient P et Q sur (BM) et (CN), respectivement tels que D, H, M, et P sont cocycliques et deux-à-deux distincts, puis E, H, N, et Q sont cocycliques et deux-à-deux distincts. Montrer que P, Q, N, et M sont cocycliques.

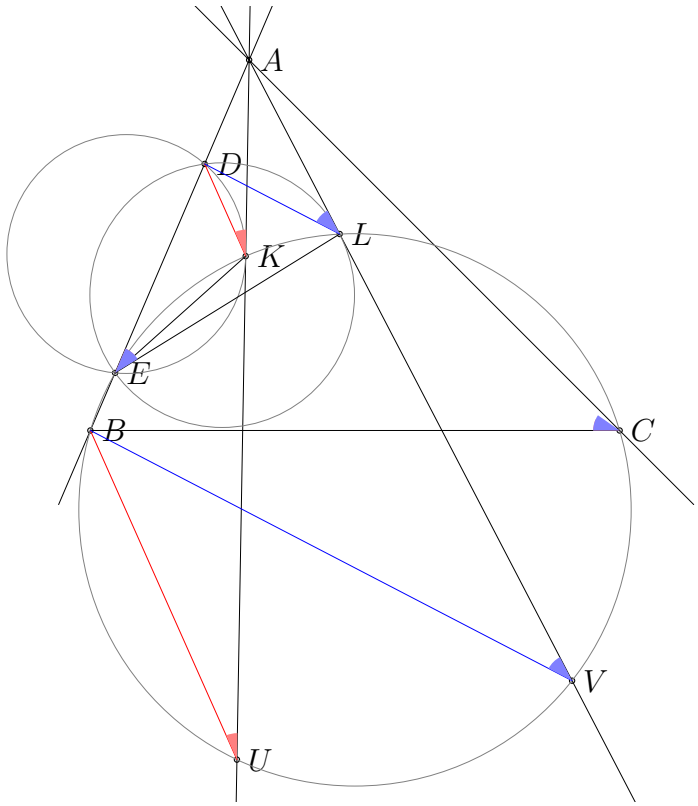
Exercice 12
Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$ inscrit dans un cercle ω_1 de centre O. On note H l'orthocentre de ABC et M le milieu de $[BC]$. Soit ω_2 le cercle circonscrit à BHC, la droite (OH) recoupe ω_2 en $K \neq H$, et la droite (MK) recoupe ω_2 en $P \neq K$. Prouver que la tangente en A à ω_1 et la tangente en P à ω_2 se recoupe en un point du cercle circonscrit à APK.

Exercice 13
Soit ABC un triangle et I_a le centre de son cercle A-exinscrit. Un cercle passant par I_a et A intersecte les extensions des segments $[AB]$ et $[AC]$ en X, Y respectivement. Soient S, T des points sur $[BI_a], [CI_a]$ respectivement tels que $\widehat{BTI_a} = \widehat{BXI_a}$ et $\widehat{CSI_a} = \widehat{CYI_a}$. On note K l'intersection de $[SC]$ et $[TB]$ et Z l'intersection de (KI_a) et (ST). Montrer que les points X, Y, Z sont alignés.

Exercice 14
Soit $ABCD$ un quadrilatère avec (AB) parallèle à (CD) et $AB < CD$. (AD) et (BC) s'intersectent en P. Soient X distinct de C sur le cercle circonscrit à ABC tel que $PC = PX$, et Y distinct de D sur le cercle circonscrit à ABD tel que $PD = PY$. Les droites AX et BY s'intersectent en Q. Prouver que (PQ) est parallèle à (AB).

Solutions

Solution de l'exercice 1

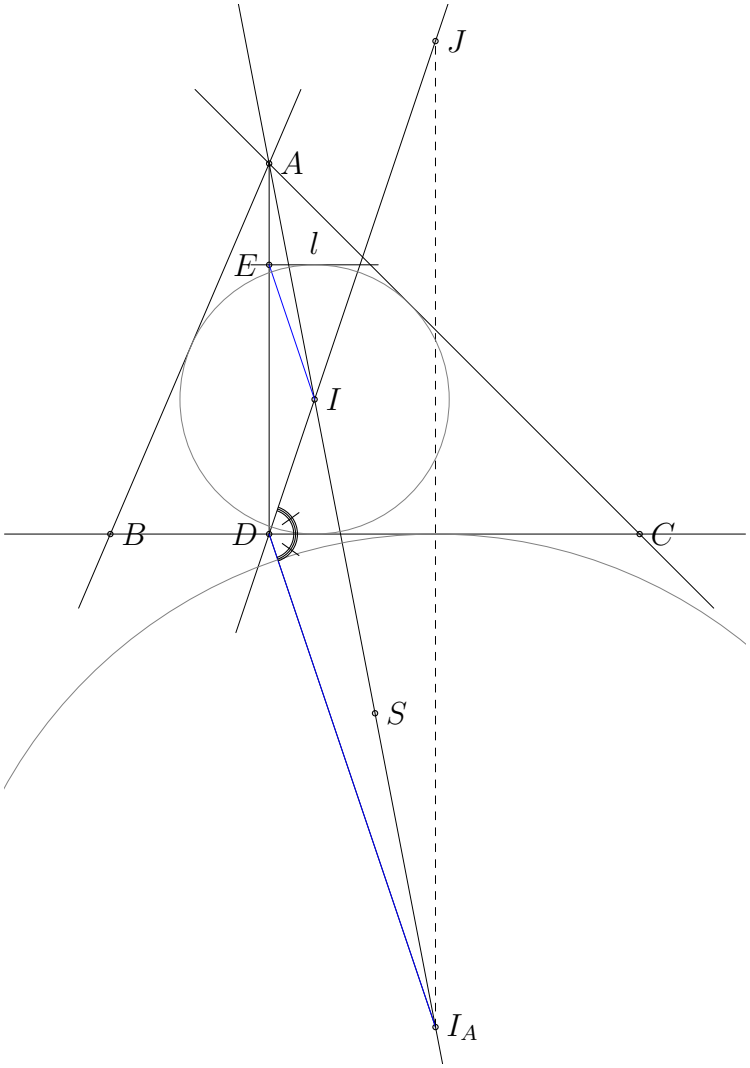


Les conditions sur les angles nous incite à réfléchir à comment tracer la figure. Déjà, lorsqu'on est en présence d'une condition d'égalité d'angle, il est fortement recommandé de tracer les cercles circonscrits au triangle décrivant l'angle. On trace donc le cercle circonscrit à $BKLC$, ce qui était suggéré par l'énoncé.
On pose E l'intersection de ce cercle avec AB et on se rend compte que les égalités d'angle impliquent alors que (DEK) et (DEL) sont tangents à AK et AL respectivement. Ainsi, $AK^2 = AD \cdot AE = AL^2$, ce qui donne la conclusion voulue.

Solution n°2 de l'exercice 1

On peut également introduire U et V, les intersections respectives de (AK) et (AL) avec $(BKLC)$. On a alors $\widehat{AKD} = \widehat{KCB} = \widehat{KUB}$, donc $(DK)//(BU)$ et de même $(DL)//(BV)$. D'où l'homothétie de centre A de rapport $\frac{AD}{AB}$ envoie K sur U et L sur V. Ainsi, $KULV$ est un quadrilatère cyclique tel que $(KL)//(UV)$: c'est donc un trapèze isocèle, et par conséquent, $KA = KL$ comme désiré.

Solution de l'exercice 2

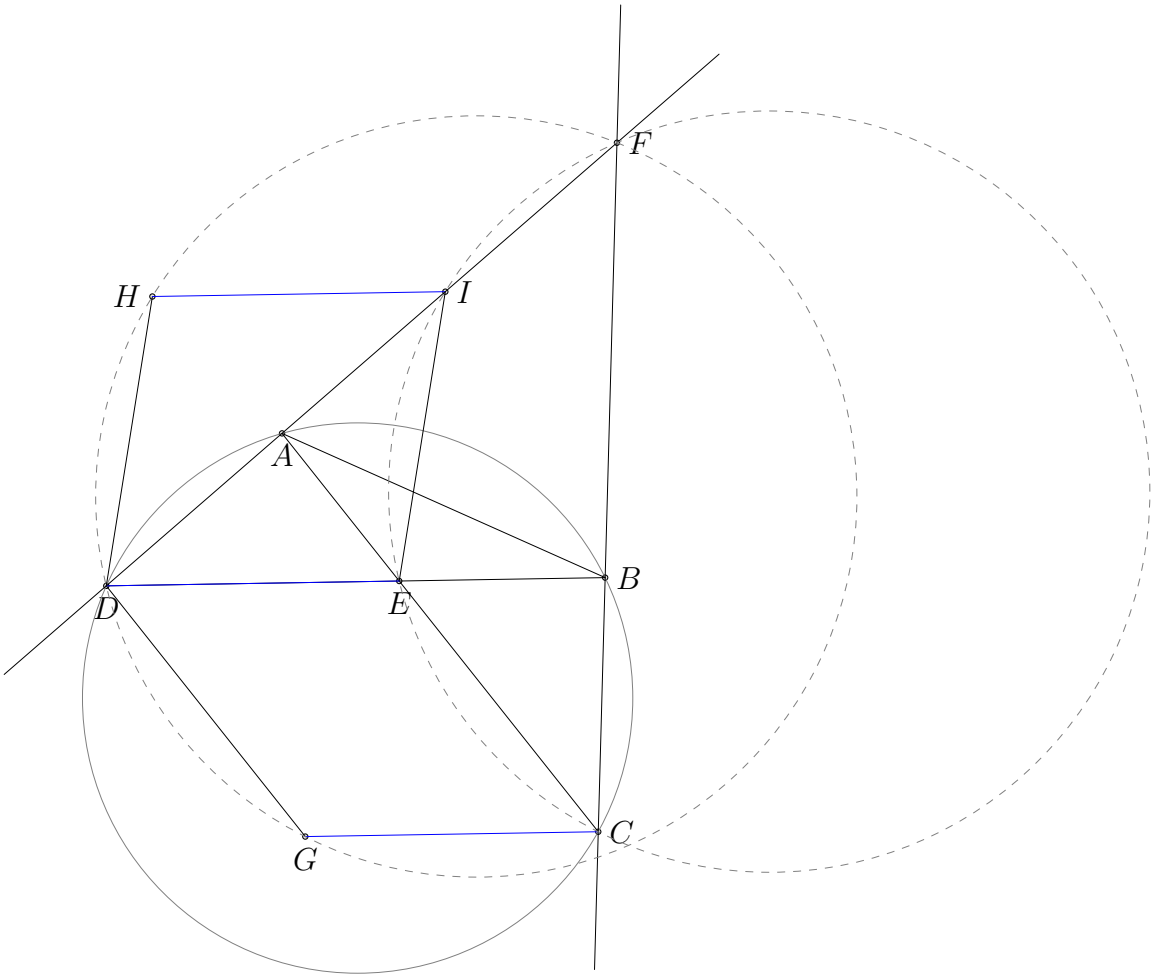


L'énoncé revient à montrer que BC ou AD est une bissectrice de $\widehat{IDJ}$. On montre que AD en est la bissectrice extérieure.
Soit l, la seconde tangente au cercle inscrit parallèle à BC, E le point d'intersection de l avec AD.
On considère l'homothétie qui envoie le cercle inscrit sur le cercle A-exinscrit. Celle-ci doit envoyer I sur J, et l sur BC en tant que tangentes aux cercles parallèles entre elles et situées au-dessus du cercle auquel elles sont tangentes. Par conséquent, cette homothétie envoie E sur D. On en déduit :

$$\frac{AI}{AJ} = \frac{EI}{DJ} = \frac{DI}{DJ}$$

, car I est située sur la médiatrice de $[DE]$ en remarquant que la symétrie d'axe la parallèle à BC passant par I échange E et D. Cette égalité de rapport montre que AD est la bissectrice extérieure de $\widehat{IDJ}$.

Solution de l'exercice 3



L'énoncé nous donne des conditions de symétries et un parallélogramme. Ceci incite à créer d'autres parallélogrammes, pour pouvoir mieux exploiter les conditions d'angles.
On fait même mieux : on introduit le point I tel que $IHDE$ soit un losange. I se situe donc sur AD et on a :

$$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GC}$$

et

$$\widehat{ECF} = \widehat{ADE} = \widehat{DIE}$$

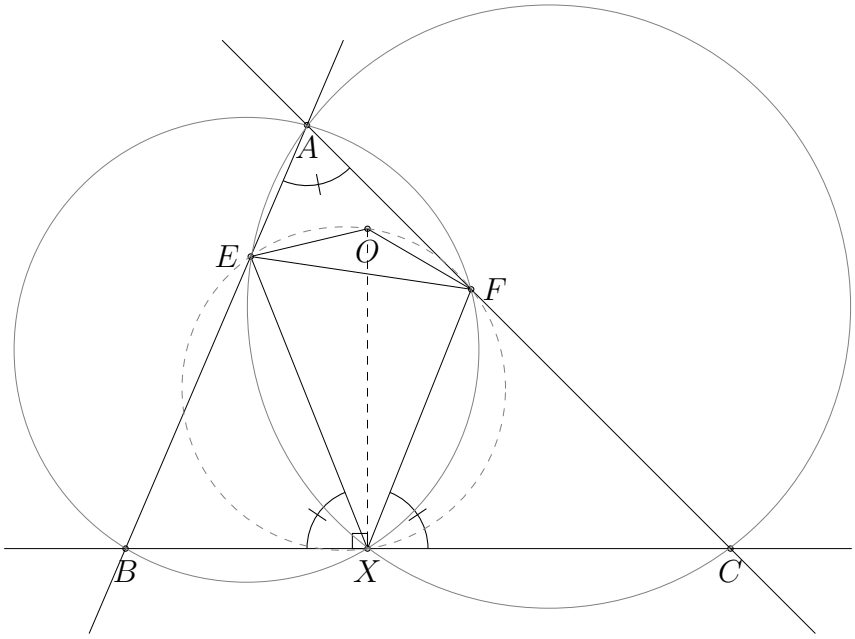
, d'où HDG et IEC sont isométriques et $IFEC$ est cyclique. Il en découle (en angles orientés) :

$$\widehat{HFD} = \widehat{IFE} = \widehat{ICE} = \widehat{HGD}$$

, donc F, G, H, D sont bien cocycliques.

Remarque 1.
pour les plus aguerris en géométrie, certains ont peut-être reconnu la configuration du premier lemme d'isogonalité (first isogonality lemma en anglais), et l'exercice pouvait effectivement se résoudre en l'utilisant : une simple chasse aux angles permet alors de finir.

Solution de l'exercice 4



Une figure bien tracée indique que les points O, X, E, F sont cocycliques. On entreprend de le démontrer : par angle au centre et angles inscrits on a

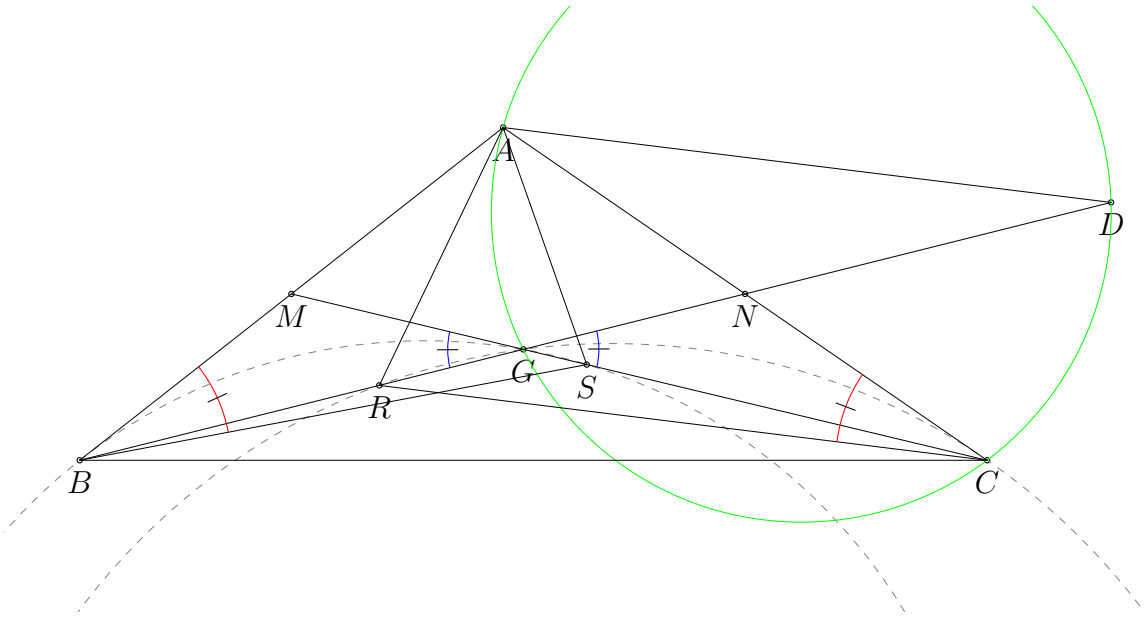
$$\widehat{EOF} = 2\widehat{EAF} = \widehat{BAC} + \widehat{BAC} = \widehat{CXF} + \widehat{EXB} = 180 - \widehat{EXF}$$

comme voulu. Le reste n'est plus que chasse aux angles : par angles inscrits dans notre nouveau quadrilatère cyclique,

$$\widehat{EXO} = \widehat{EFO} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{EOF} = 90° - \widehat{EAF} = 90 \circ -\widehat{EXB}$$

, en utilisant que EOF est isocèle en O. ce qui montre $OX \perp BC$.

Solution de l'exercice 5



On cherche à comprendre la signification des points R et S.
L'apparition du centre de gravité et de la condition d'angle incite à prolonger les médianes issues de B et de C. On note donc M, N les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, et on peut traduire les conditions d'angles : on a

$$\widehat{MBS} = 180° - \widehat{BGC} = \widehat{MGB}$$

, donc par angle tangentiel, (BGS) est tangent à AB. On en déduit $MA^2 = MB^2 = MG \cdot MS$, d'où (AGS) est également tangente à AB. De même, (AGR) est tangente à AC.
Le reste est purement technique, par angle tangentiel et angles dans un quadrilatère, on obtient :

$$\widehat{RAS} = 360° - \widehat{ARG} - \widehat{ASG} - (360° - \widehat{RGS}) = \widehat{BGC} - \widehat{BAG} - \widehat{CAG} = \widehat{BGC} - \widehat{BAC}$$

ce qui conclut.

Solution n°2 de l'exercice 5
Solution alternative :
On peut également penser qu'au vu des conditions d'angle, introduire un quadrilatère cyclique ou un parallélogramme peut permettre d'avancer.
Soit D l'intersection de la parallèle à CR passant par A avec BG. Alors $ADCR$ est un parallélogramme, et

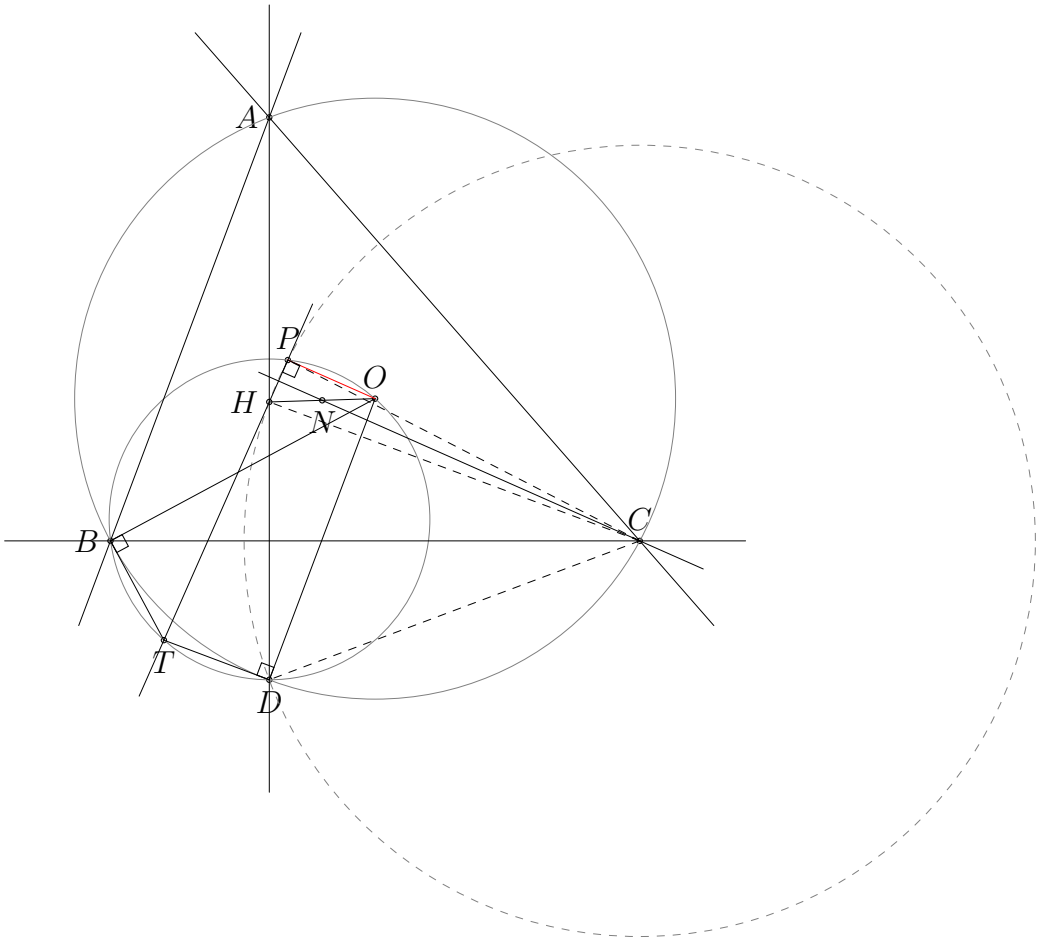
$$\widehat{CAD} = \widehat{ACR} = \widehat{CGD}$$

, donc $ACDG$ est cyclique. Ainsi, $\widehat{RAC} = \widehat{ACD} = \widehat{AGD} = 180° - \widehat{AGB}$. De même, $\widehat{SAB} = 180° - \widehat{AGC}$, d'où :

$$\widehat{RAS} + \widehat{BAC} = \widehat{RAC} + \widehat{SAB} = 360° - \widehat{AGB} - \widehat{AGC} = \widehat{BGC}$$

comme désiré.

Solution de l'exercice 6

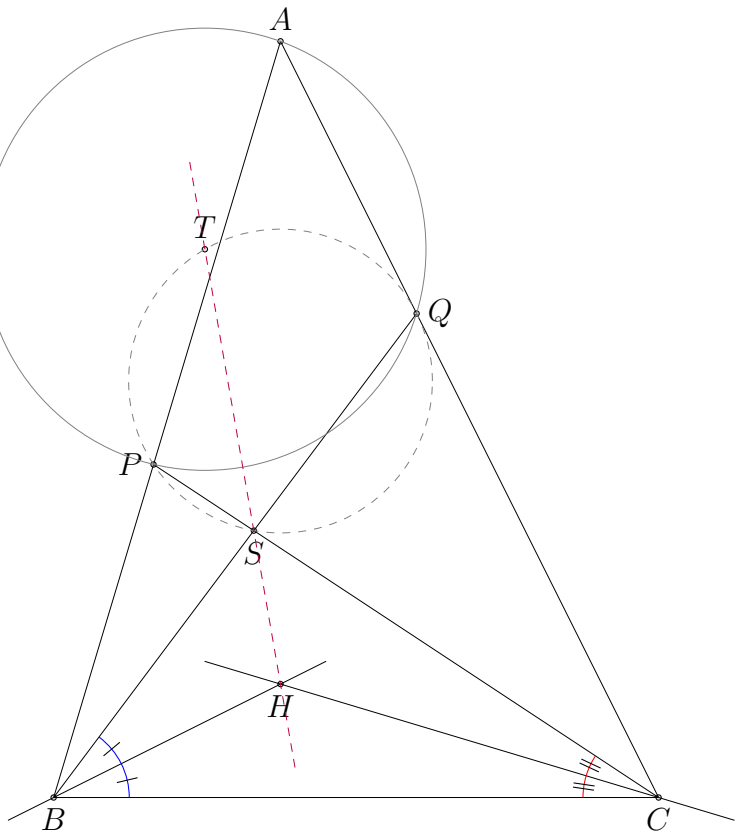


Les tangentes, l'orthocentre, et le centre du cercle d'Euler doivent inciter à introduire le centre du circonscrit au vu des liens qui les relient chacun à ce dernier.
Soit donc O le centre du cercle circonscrit de ABC, P le projeté de O sur (HT). On a par les angles droits B, D, T, O, P cocycliques. Ainsi par angles inscrits,

$$\widehat{HPD} = \widehat{TBD} = \widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{HCD}$$

. Puisqu'on a déjà $CH = CD$ (propriété connue de l'orthocentre), il ceci implique que C est le centre du cercle circonscrit à HDP. En particulier, $CH = CT$.
N étant le milieu de $[OH]$, et HPO étant rectangle en P, on trouve également $NH = NP$.
Finalement, CN est la médiatrice de $[HP]$, d'où $CN \perp HP = HT$, comme voulu.

Solution de l'exercice 7

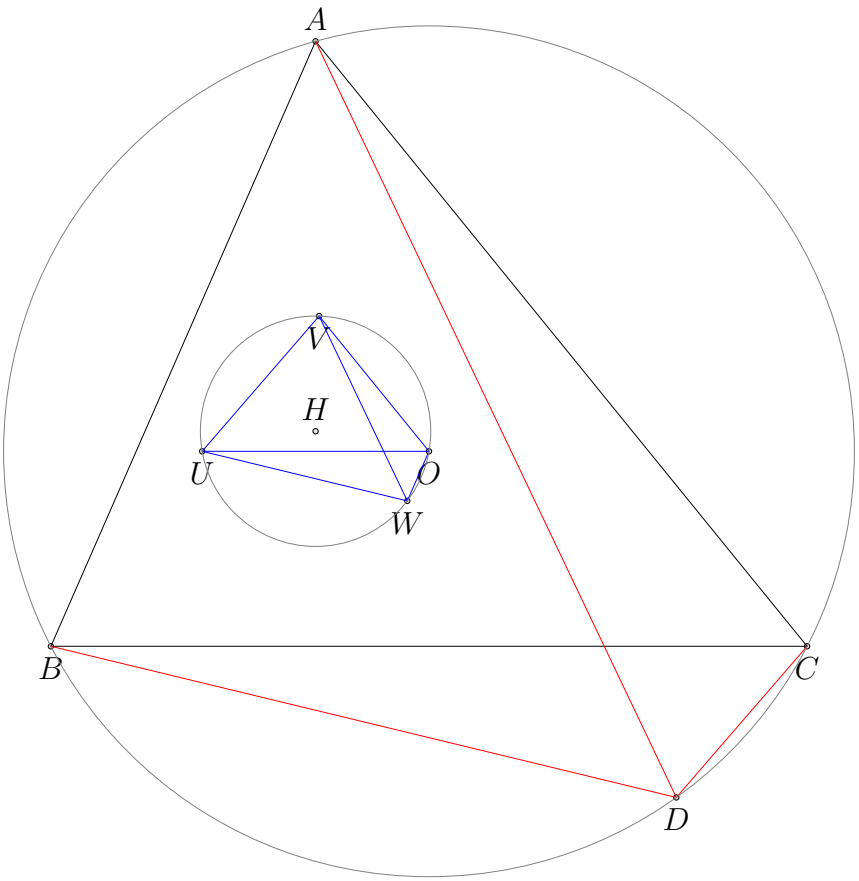


Notons tout d'abord que (BQ) et (CP) sont les symétriques respectifs de (BC) par rapport à (BH) et (CH). Donc $(BH), (CH)$ sont les bissectrices de $\widehat{QBC}$ et $\widehat{PCB}$ respectivement, ce qui montre que H est le cercle inscrit de SBC. En particulier, H se situe sur la bissectrice intérieure de $\widehat{BSC}$.
Ensuite, montrons que T, P, Q, S sont cocycliques. Par angle au centre et les propriétés de l'orthocentre, on a :

$$\widehat{PSQ} = \widehat{BSC} = 180° - \widehat{SBC} - \widehat{SCB} = 180° - 2(\widehat{HBC} + \widehat{HCB}) = 180° - 2(180° - \widehat{BHC}) = 180° - 2\widehat{BAC} = 18$$

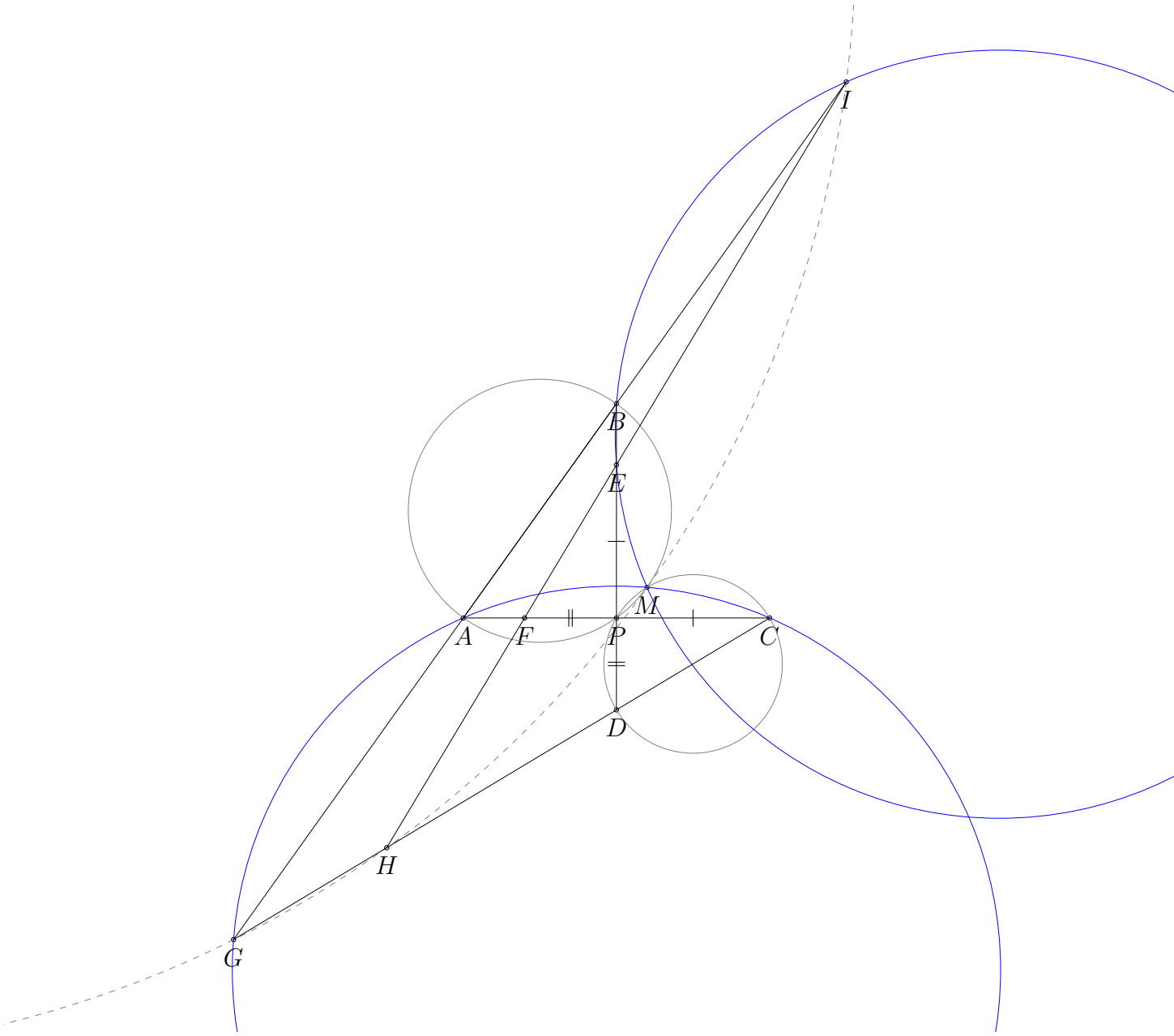
Donc T, S, Q, P sont cocycliques. Or, $TP = TQ$, donc T est le pôle Sud issue de S dans le triangle SPQ, et se situe alors également sur la bissectrice intérieure de $\widehat{PSQ}$, ce qui montre l'alignement voulu.

Solution de l'exercice 8



On note rapidement que $OU//BC, OV//CA, OW//AB$ et que $OUVW$ est cyclique, par exemple en voyant qu'ils sont à équidistance de H par les symétries.
De plus, $\widehat{VUW} = \widehat{VOW} = \widehat{BAC}$ par angles inscrits et parallélisme, et similairement, $\widehat{UVW} = \widehat{ABC}$, ce qui montre que $UVW \sim ABC$.
Une fois ces rems faites, on cherche le point d'intersection en question. Soit D l'intersection de ℓ_A et ℓ_B. Alors l'angle $\widehat{ADB}$ est l'angle entre les droites VW et UW, ou encore celui entre les droites AC et BC, il vaut donc $\widehat{ACB}$, donc $D \in (ABC)$. Un argument similaire montre que D' l'intersection entre ℓ_A et ℓ_C se situe sur (ABC) : nécessairement, l'intersection entre (ABC) et ℓ_A autre que A étant unique, D est le point de concourance de ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C ,ce qui finit.

Solution de l'exercice 9



De nombreuses égalités de longueurs sont présentes. De plus, on ne se situe pas dans la géométrie du triangle (dont les plus aguerris en connaissent les riches propriétés), mais en géométrie du quadrilatère. Ces observations motivent à faire parler les similitudes.
C'est pourquoi on introduit M le point de Miquel (pour ceux qui ne connaissent pas, voir le poly de géométrie avancée des cours de la pofm), du quadrilatère $ABCD$ correspondant au centre de la similitude envoyant A, C sur B, D respectivement. Plus simplement, c'est l'intersection des cercles circonscrits à PCD et PAB.
A retenir : souvent dans les exercices où il s'agit de démontrer que deux cercles sont tangents entre eux, le point de tangence sera un point de Miquel. C'est le cas dans cet exercice.

La similitude en question est en fait une rotation, car $AC = BD$ et qu'elle doit préserver les rapports de longueur. De plus,

$$CF = CP + PF = PE + PD = ED$$

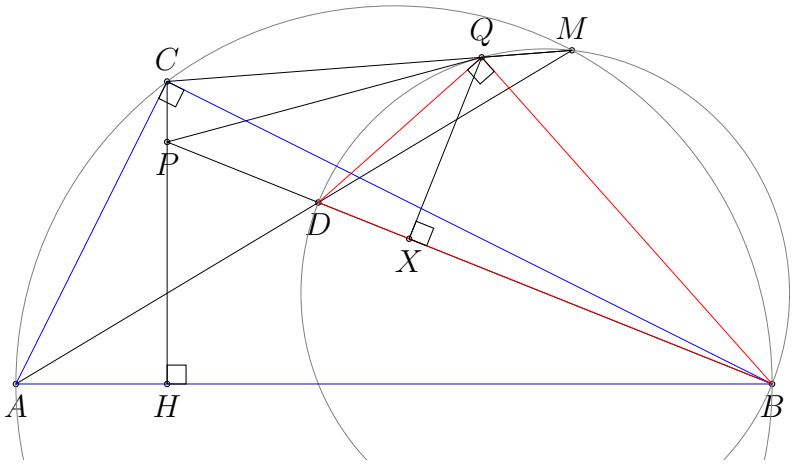
donc cette rotation envoie également F sur E. Il en résulte que $FMA \simeq EMB$, donc $FME \sim AMB$.
Notons $G = AB \cap CD$, $H = EF \cap CD$ et $I = AB \cap EF$. M étant le point de Miquel à la fois de $ABDC$ et de $ABEF$, on sait qu'il se situe à la fois sur (BEI) et (ACG). En outre, les triangles FPE et DPC vérifient que $FP = DP$, $EP = CP$ et $\widehat{FPE} = \widehat{DPC}$, ils sont donc isométriques. Ainsi,

$$\widehat{BMI} = \widehat{BEI} = \widehat{PEF} = \widehat{DCP} = \widehat{GCA} = \widehat{AMG}$$

Montrons que cette condition d'angle implique la tangence en M (c'est un lemme à savoir démontrer rapidement) : on note X, Y les intersections de MA, MB avec (GMI) respectivement. Alors $\widehat{GMX} = \widehat{YMI}$, donc les arcs GX et YI interceptent les mêmes angles, d'où $GX = YI$ et donc $GXYI$ est un trapèze isocèle. En particulier, il existe alors une homothétie de centre M envoyant (MAB) sur $(MXY) = (MGI)$, ce qui démontre la tangence en M.

Remarque 2.
Pour la dernière étape, une simple chasse aux angles complémentaires était également possible (néanmoins, moins instructives).

Solution de l'exercice 10



A l'aide d'une figure on se rend compte que le point d'intersection M doit être l'intersection entre ω et le cercle de diamètre $[AB]$. Ceci pouvait également se deviner en observant que $\widehat{AMB} = \widehat{DMB} = 90°$. Par ailleurs, on notera que la définition de Q est impropre, dans le sens où si l'on traçait le cercle de diamètre $[BD]$, alors il existerait deux points Q dessus pour lesquels PQ est tangente à ce cercle, qui sont "algébriquement indistinguables". Or un seul de ces points doit vérifier l'énoncé, on peut donc vouloir redéfinir Q.

Ainsi, on pose M le point d'intersection de ω et du cercle circonscrit à ABC, et on redéfinit Q comme le point d'intersection de CM avec ω. Il s'agit de montrer que PQ est tangente à ω. Par angles inscrits, on trouve :

$$\widehat{DBQ} = \widehat{DMQ} = \widehat{AMC} = \widehat{ABC}$$

et

$$\widehat{DQB} = 90° = \widehat{ACB}$$

, donc $ABC \sim DBQ$.
Cette similitude entre triangles pousse à introduire X, le projeté orthogonal de Q sur BD. On introduit également E, le projeté de D sur AB pour traiter la condition de milieu, qui donne $AH = HE$.
Par une chasse au rapport :

$$\frac{PD}{PB} = \frac{HE}{HB} = \frac{AH}{HB} = \frac{DX}{XB}$$

et cette égalité de rapport caractérise en fait que PQ est tangente à ω : en effet, si $P' \in BD$ est tel que $P'Q$ est tangente à ω, alors $P'DQ \sim P'QB$, et puisque $DXQ \sim QXB \sim DQB$, on trouve :

$$\frac{P'D}{P'B} = \frac{P'D}{P'Q}\frac{P'Q}{P'B} = (\frac{QD}{QB})^2$$

et

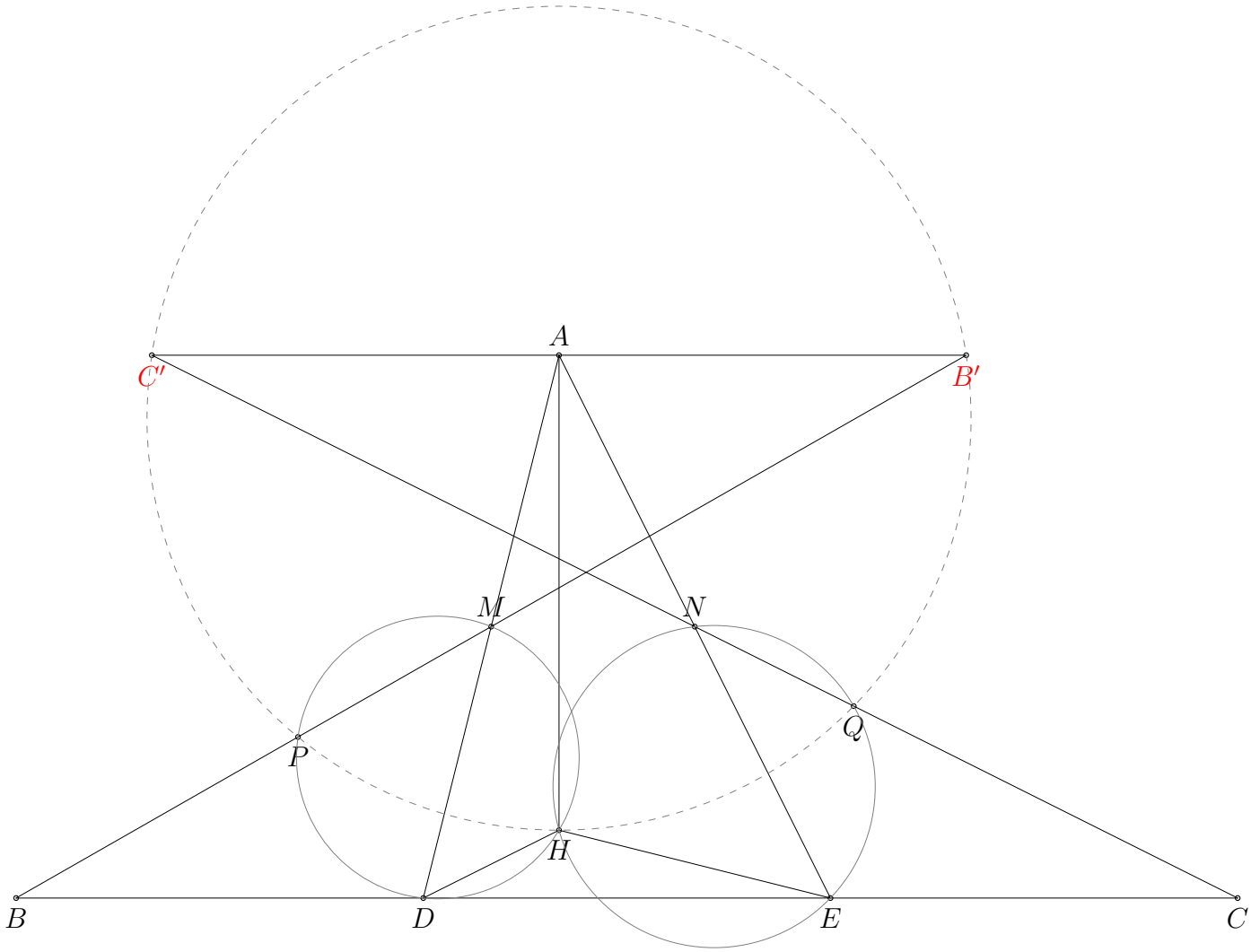
$$\frac{DX}{XB} = \frac{DX}{XQ}\frac{XQ}{XB} = (\frac{QD}{QB})^2$$

, ce qui donne l'égalité de rapport de comme voulu.

Remarque 3.
Dans un triangle ABC quelconque, la tangente en A à (ABC) recoupe BC en un point X tel que $\frac{XB}{XC} = (\frac{AB}{AC})^2$. Ainsi, dans un exercice, si on doit démontrer ou utiliser une tangence, il peut être utile de penser à ce résultat.

Remarque 4.
L'égalité de rapport fait très fortement penser à une égalité de birapport. En effet, nous venons de démontrer que P est le point tel que $(P, X; , D, B) = -1$. Ceci pouvait également se faire sans passer par les rapports. En voici une solution alternative : Si T est le point sur AB tel que TP est parallèle à AD, alors on sait que $-1 = (A, D; N, \infty_{AD})$ par la condition de milieu, ce qui donne en projetant à travers P sur AB : $(A, B; H, T) = -1$, ce qui montre que T est le point tel que TC soit tangente à (ABC). Or, $\frac{TA}{TB} = \frac{PD}{PB}$, donc les quadrilatères $PDQB$ et $TACB$ (on avait déjà $AMC \sim DBQ$), d'où PQ est tangente à ω.

Solution de l'exercice 11



On cherche à traiter les nombreuses égalités de longueurs données. Une manière de le faire est de passer par les parallélogrammes.
On pose B' et C' les symétriques de B et C par rapport à M et N respectivement. Les quadrilatères $AB'DB$ et $AC'EC$ sont alors des parallélogrammes, et en particulier C', A, B' sont alignés sur la droite passant par A parallèle à (DE). De plus, $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{DE}$, donc $AB'ED$ et $C'AED$ sont également des parallélogrammes.
Ainsi,

$$\widehat{AB'E} = \widehat{EDA} = 180° - \widehat{AHE}$$

, donc A, H, E, B' sont cocycliques. De même, A, H, D, C' sont cocycliques.
Il en découle que

$$\widehat{HC'B'} = \widehat{HC'A} = \widehat{HDA} = \widehat{HDM} = \widehat{HPM} = \widehat{HPB'}$$

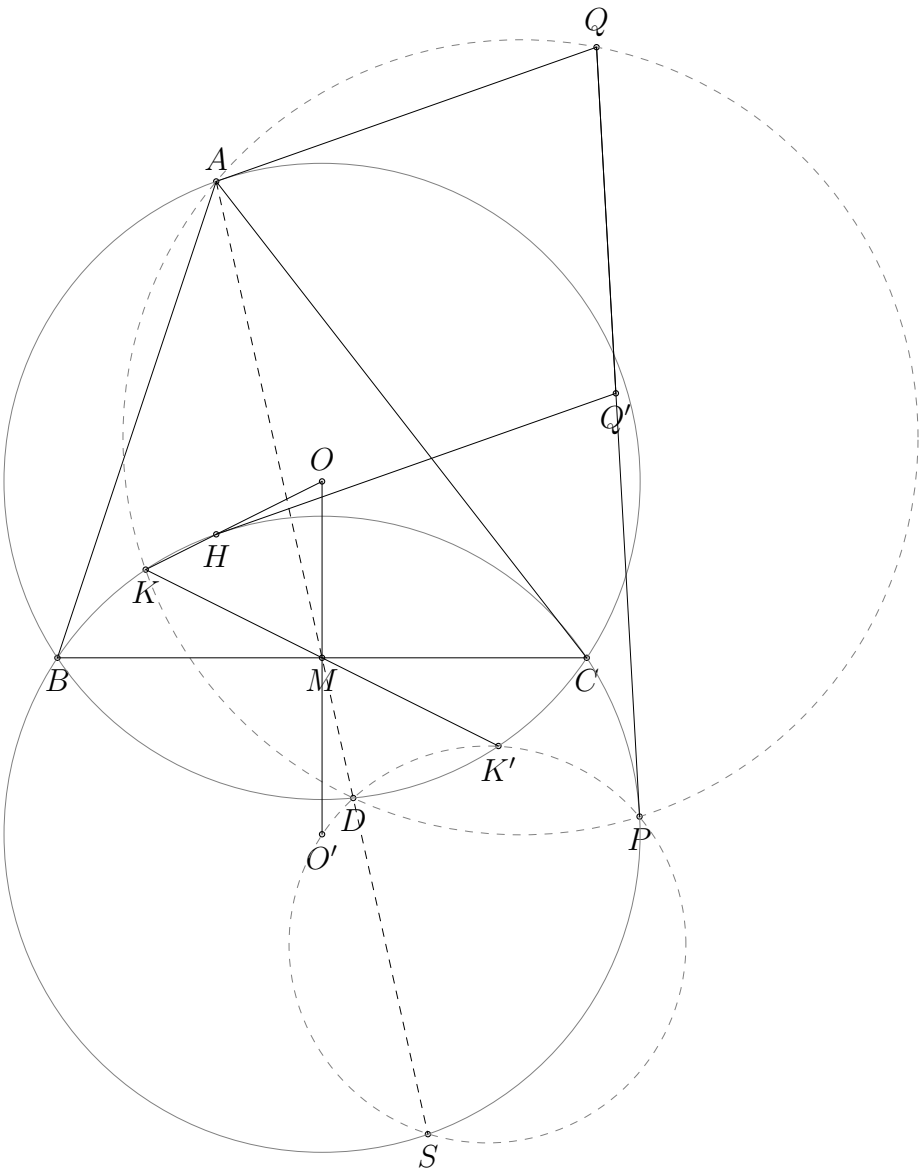
par angle inscrits, donc P est sur le cercle circonscrit à $HB'C'$. De même pour Q.
On en déduit par parallélisme et angle inscrit que :

$$\widehat{QNM} = 180° - \widehat{QC'B'} = 180° - \widehat{QPB'} = 180° - \widehat{QPM}$$

Donc P, Q, N, M sont bien cocycliques.

Remarque 5.
L'idée essentielle du problème est qu'il faut montrer que (PQ) et une anti-parallèle à (MN), donc à toute droite lui étant parallèle. C'est le choix de cette droite qui est importante.

Solution de l'exercice 12



On introduit Q, le point d'intersection des deux tangentes en question, ainsi que Q', le point d'intersection des tangentes en H et P à ω_2.
Il est bon de savoir que $AHOO'$ est un parallélogramme, où O' est le symétrique de O par rapport à BC. En particulier, $AO//HO'$ et puisque $AO \perp AQ$, $HQ' \perp HO'$, on a $AQ//HO'$.
Ainsi, par parallélisme, $\widehat{AQP} = \widehat{HQ'P}$.
Posons D, la seconde intersection de AM avec ω_1. Alors par puissance d'un point,

$$KM \cdot PM = MB \cdot MC = AM \cdot DM$$

, donc $AKDM$ est cyclique. Il suffit ainsi de montrer que $180° - \widehat{HO'P}(= \widehat{HQ'P} = \widehat{AQP}) = 180° - \widehat{ADP}$, soit $\widehat{HO'P} = \widehat{ADP}$.
Ceci incite à poser S l'intersection de AM avec HO'. Il s'avère que S est le symétrique de A par rapport à M et se situe alors sur ω_2 : en effet, en le définissant de telle sorte, S vérifie alors A, M, S alignés et $\widehat{HBS} = \widehat{HCS} = 90°$, donc H est le point diamétralement opposé à S dans ω_2, ce qui montre également que H, O', S sont alignés.

Il ne reste plus qu'à montrer que $O'DSP$ est cyclique. A cette fin, introduisons K', le symétrique de K par rapport à M, qui se situe également sur ω_1, et montrons que $DSPK'$, puis que $O'DK'P$ sont cycliques.
Pour la première cocyclicité, par puissance d'un point :

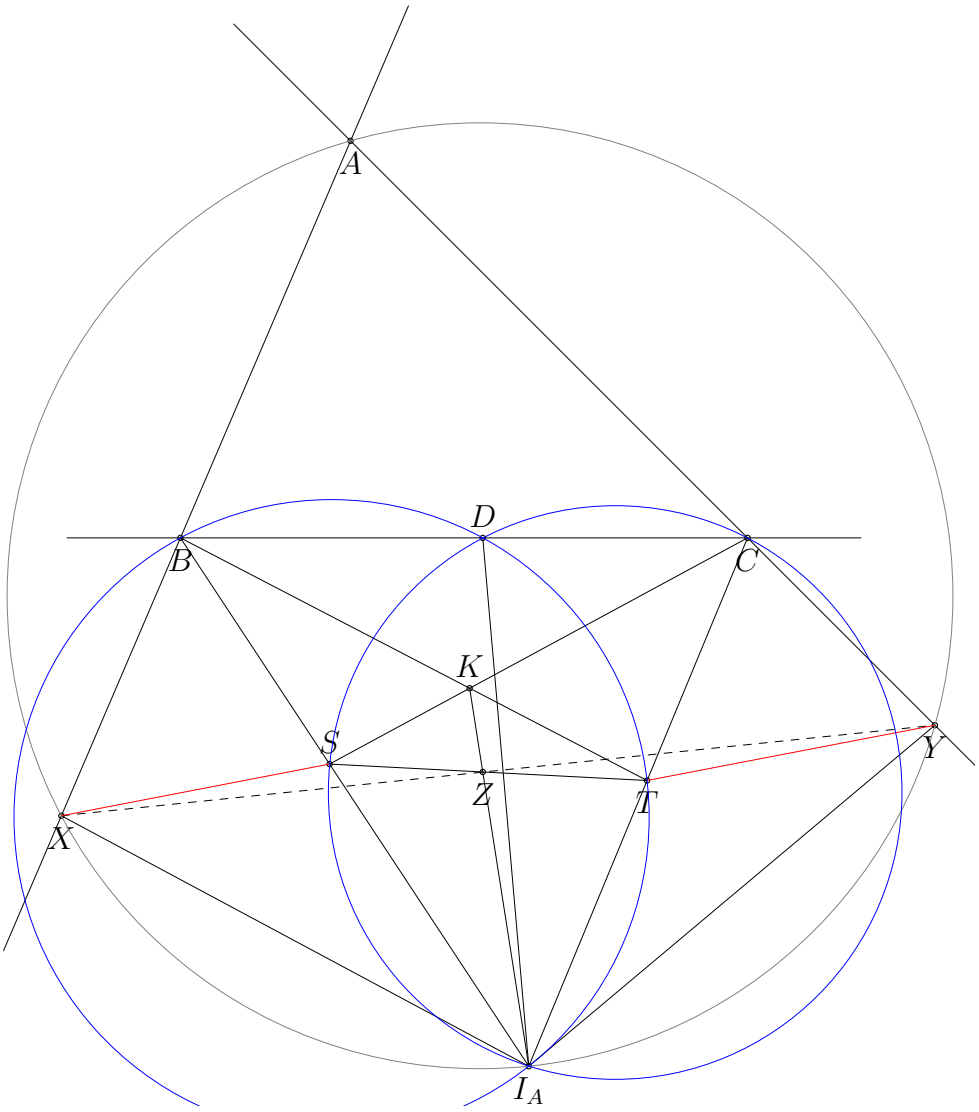
$$MD \cdot MS = MD \cdot MA = MK' \cdot MP = MK' \cdot MP$$

, ce qui montre $DSPK'$ cyclique.
Pour la seconde, il faut ruser. On cherche encore à utiliser la condition d'alignement de K, H, O. On pose donc A', le symétrique de H par rapport à M,qui est le point diamétralement opposé à A dans ω_1. Alors par symétrie, K', A', O' sont alignés. Ainsi, on a

$$\widehat{O'SD} = \widehat{OAD} = \widehat{A'AD} = \widehat{A'KD} = \widehat{O'KD}$$

, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13



Notons que par lemme du pôle Sud $I_AX = I_AY$. De plus, vu les conditions d'angles, il est intéressant de s'intéresser aux cercles circonscrits à BTI_a et CSI_a. De fait, en notant D leur intersection, alors par angle inscrit et les conditions :

$$\widehat{BDI_a} = \widehat{BTI_a} = \widehat{I_aXB} = 180° - \widehat{I_aYA} = 180° - \widehat{CSI_A} = 180° - \widehat{CDI_a}$$

donc B, D, C sont alignés. De plus, BI_a est une bissectrice de $\widehat{XBD}$, d'où $I_aX = I_aD$, et de même $I_aY = I_aD$, ce qui signifie que D, X sont symétrique par rapport à BI_a, et D, Y sont symétriques par rapport à CI_a.

A partir de ces observations, on peut montrer que XS et YT sont parallèles. En effet,

$$\begin{aligned}
\widehat{XST} &= \widehat{XSI_a} + \widehat{I_aST} = \widehat{I_aSD} + \widehat{I_aST} && \text{(VII.1)}\\
&= 180^\circ - \widehat{BCI_a} + 180^\circ - \widehat{I_aTS} - \widehat{SI_aT} && \text{(VII.2)}\\
&= \widehat{CBI_a} + 180^\circ - \widehat{I_aTS} && \text{(VII.3)}\\
&= \widehat{CTD} + \widehat{CTS} && \text{(VII.4)}\\
&= \widehat{CTY} + \widehat{CTS} && \text{(VII.5)}\\
&= \widehat{STY} && \text{(VII.6)}
\end{aligned}$$

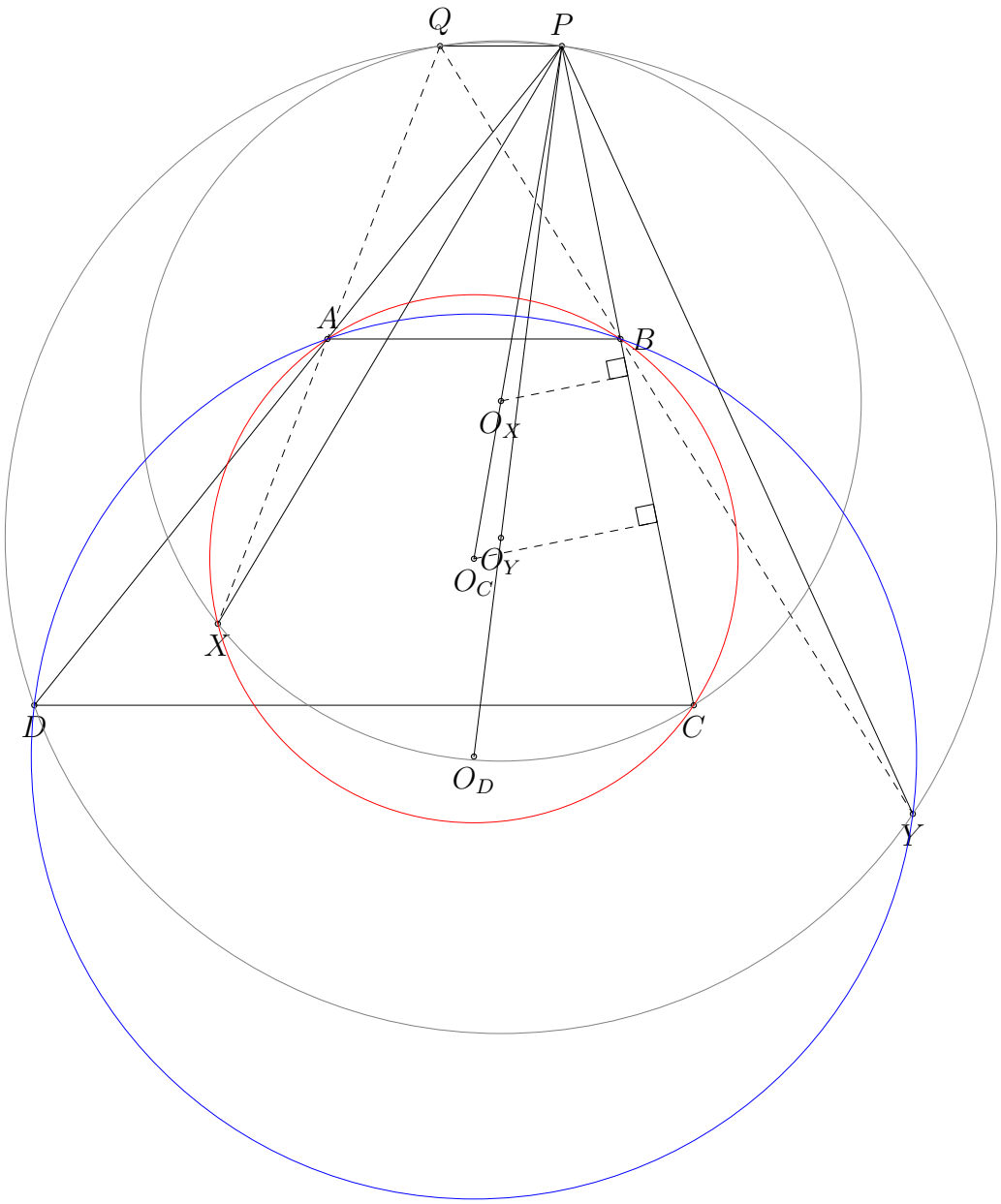
d'où le résultat.
Il suffit de montrer que $\frac{SX}{SZ} = \frac{TY}{TZ}$, ou par symétrie que $\frac{DS}{ZS} = \frac{DT}{ZT}$. Notons que $\widehat{KTI_a} + \widehat{KSI_a} = \widehat{BDI_a} + \widehat{CDI_a} = 180^\circ$, donc $KSTI_a$ est cyclique. En remarquant que D est un point de Miquel, obtient de nombreux triangles semblables, ce qui donne :

$$\frac{DS}{DT} = \frac{DS}{DI_a}\frac{DI_a}{DT} = \frac{KS}{TI_a}\frac{SI_a}{KT} = \frac{ZS}{ZI_a}\frac{ZI_a}{ZT} = \frac{ZS}{ZT}$$

en utilisant $DSK \sim SI_aT, DKT \sim DSI_a, KSZ \sim TI_aZ, KTZ \sim SI_aZ$. Ceci conclut.

Remarque 6.
La dernière étape est en fait un résultat bien connu sur le point de Miquel d'un quadrilatère cyclique.

Solution de l'exercice 14



Après avoir tracé une figure propre, une première observation est que Q devrait se situer sur les cercles circonscrits à PXC et PYD. Vu les conditions $PX = PC$, $PD = PY$ et les cercles passant par P, (C, X) et (D, Y), on peut chercher à utiliser ses cercles en utilisant leur centres, dont on connaît alors plusieurs propriétés.
Notons O_C, O_D, O_X, O_Y les centres des cercles circonscrits à ACB, ABD, PCX, PDY respectivement. On sait que P, O_C, O_X sont alignés sur la médiatrice de $[CX]$, et de même, P, O_D, O_Y sont alignés sur la médiatrice de $[DY]$. On désire montrer que (PQ) est parallèle à (AB), et on remarque que $(O_C O_D) \perp (AB)$ et $(O_X O_Y) \perp (PQ)$ dans ces conditions. Ainsi, on peut chercher à prouver que $(O_C O_D)$ et $(O_X O_Y)$ sont parallèles, ce que l'on entreprend de faire (redéfinir alors Q comme intersection entre les cercles (PCX) et (PDY) devient alors naturel).

Soient M_{PC} le milieu de $[PC]$ et M_{BC} le milieu de $[BC]$. Alors par Thalès :

$$\frac{PO_X}{PO_C} = \frac{PM_{PC}}{PM_{BC}} = \frac{PC}{2PB + BC} = \frac{PC}{PB + PC}$$

et de même, $\frac{PO_Y}{PO_D} = \frac{PD}{PA+PD}$.
Ainsi pour montrer le parallélisme, il suffit d'avoir

$$\frac{PD}{PA+PD} = \frac{PC}{PB+PC} \text{ c'est-à-dire : } PD \cdot PB = PA \cdot PC$$

Ce qui est vrai par Thalès en passant aux rapports. Finalement, en redéfinissant Q comme la seconde intersection de (PCX) avec (PDY), on a $(PQ) \perp (O_XO_Y)//(O_CO_D) \perp (AB)$, donc $(PQ)//(AB)$.
Pour conclure, il faut montrer que Q, A, X et Q, B, Y sont alignés. Si Q' est l'intersection de (AX) avec la parallèle à (AB) passant par P, alors Q' vérifie également que $\widehat{PQ'X} = \widehat{BAX} = 180° - \widehat{PCX}$, donc Q' est également la seconde intersection de de (PCX) avec la parallèle à (AB) passant par P, ce qui montre que $Q' \equiv Q$, c'est-à-dire que Q, A, X sont alignés. De même, Q, B, Y sont alignés ce qui conclut.

6 Arithmétiques : Puissances (Maxime et Solal)

Il y a plusieurs choses à considérer lorsqu'on s'attaque à des problèmes de puissance.

Tout d'abord, lorsque l'on regarde modulo p, il y a une double périodicité, ie tout ce qui va être polynomial en n va être p-périodique, tandis que par exemple 2^n va être $p-1$-périodique.

Evidemment, le LTE est très important. Rappelons son énoncé : si p est un premier impair, et qu'on a deux entiers a, b tels que $p \nmid a, b$ mais que $p \mid a-b$, $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$. Si n est impair, et que $p \nmid a, b$ et $p \mid a+b$, $v_p(a^n + b^n) = v_p(a+b) + v_p(n)$.

Enfin, les théorèmes de Zsigmondy et Dirichlet peuvent s'avérer très utiles.

Le TD est découpé en deux parties. La première (l'entrée) met en avant une sélection restreinte d'exercices "type", qu'il est important de savoir faire. La deuxième (le plat) propose une plus grande sélection d'exercices, tous très sympas ! Les exercices du TD ne sont d'ailleurs pas clairement triés par ordre de difficulté.

Exercices

Entrée

Exercice 1 (APMO 2016 P2)
Un entier strictement positif est dit *théorique* si il peut s'exprimer sous la forme

$$2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_{100}},$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ sont des entiers positifs non nécessairement distincts.
Quel est le plus petit entier positif n tel qu'aucun de ses multiples ne soit théorique ?

Exercice 2 (ELMO 2016 P4)
Le grand Théo dispose d'un polynôme P à coefficients entiers tels que $n \mid P(2^n)$ pour tout entier n positif. Montrer que le polynôme du grand Théo est le polynôme nul.

Exercice 3
Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait

$$u_n \mid 2^{u_{n+1}} - 1.$$

Exercice 4 (PAMO 2026 P3)
Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que

— $P(n) \geqslant 0$ pour tout entier n positif ;

— Pour tous les entiers strictement positifs n et k et les premiers p tels que $p \mid 3^n - 2^n$ on a

$$p^k \mid 3^n - 2^n \iff p^k \mid 3^{P(n)} - 2^{P(n)}.$$

Exercice 5 (USEMO 2021 P2)
Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ tels que $2^n - 1$ a exactement n diviseurs positifs.

Exercice 6 (IMO 2000 P5)
Existe-t-il un entier strictement positif n tel que n a exactement 2000 diviseurs premiers distincts et n divise $2^n + 1$.

Exercice 7 (N6 2011)
Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers, tels qu'aucun polynôme non constant à coefficients rationnels ne les divise tous les deux. On suppose que pour tout entier positif n, les entiers $P(n)$ et $Q(n)$ sont positifs et $2^{Q(n)} - 1$ divise $3^{P(n)} - 1$. Montrer que Q est un polynôme constant.

Exercice 8 (RMM 2025 P2)
On se donne une suite infinie d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots$ telle que $a_1 > 1$ et $(2^{a_n} - 1)a_{n+1}$ soit un carré parfait pour tous les entiers $n \geqslant 1$. Est-il possible que deux termes d'une telle suite soient égaux ?

Exercice 9 (Qiao Zhang)
Trouver tous les entiers n tels que la suite $v_2(3^0 - n)$, $v_2(3^1 - n)$, $v_2(3^2 - n)$, $\ldots$ ne soit pas bornée.

Exercice 10 (CHN TST 2017 P4)
Soit m et $d \geqslant 2$ deux entiers naturels. Montrer qu'il existe $k > l \geqslant 0$ tels que

$$\gcd(2^{2^k} + d, 2^{2^l} + d) \geqslant m.$$

Exercice 11 (P3 2025)
Une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ est dite *bonza* si

$$f(a) \quad \text{divise} \quad b^a - f(b)^{f(a)},$$

pour tous les entiers strictement positifs a et b.
Déterminer la plus petite constante c telle que $f(n) \leqslant cn$ pour toutes les fonctions bonza f et les entiers positifs n.

Plat

Exercice 12 (2024 RMM P4)
Soit a et b des entiers strictement plus grands que 1. Pour tout entier naturel n, on note r_n le reste positif de b^n modulo a^n. On suppose qu'il existe un entier N tel que $r_n < \frac{2^n}{n}$ pour tout entier $n \geqslant N$. Montrer alors que a divise b.

Exercice 13 (N1 2025)
Soit n un entier positif et $n < k < 2n$. On se donne $a_1, \ldots, a_k$ tels que

$$2^n - 1 \mid 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k}.$$

Montrer que parmi $a_1, \ldots, a_{k-1}$ et a_k, au moins 3 donnent le même reste après division euclidienne par n.

Exercice 14 (2013 ELMOSL N4)
Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (a, b, c) tels que la propriété suivante est vrai : si $n \geqslant 1$ est un entier non divisible par un premier plus petit que 2013, alors $n + c$ divise $a^n + b^n + n$.

Exercice 15
Trouver tous les n tels que la fonction $x \mapsto x^x \pmod n$ est surjective de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Exercice 16
Maxime et Marguerite jouent à un jeu. D'abord, Maxime choisit un nombre premier $p > 2$, puis Marguerite choisit un entier strictement positif n_0. Maxime choisit alors un entier $n_1 > n_0$ et calcule $s_1 = n_0^{n_1} + n_1^{n_0}$; puis Marguerite choisit un entier $n_2 > n_1$ et calcule $s_2 = n_1^{n_2} + n_2^{n_1}$. Les joueurs continuent de jouer chacun à leur tour, en choisissant au tour k un entier $n_k > n_{k-1}$ et en calculant $s_k = n_{k-1}^{n_k} + n_k^{n_{k-1}}$. Le premier joueur à choisir un entier n_k tel que p divise $s_k(s_1 + 2s_2 + \ldots + ks_k)$ gagne le jeu. Déterminer lequel de Maxime et Marguerite possède une stratégie gagnante.

Exercice 17
Soit $p \neq q$ deux nombres premiers. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$N(m) = (q-1)(q^2-1)\ldots(q^m-1).$$

Montrer qu'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que $v_p(N(m)) \leqslant Cm$ pour tout $m \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18 (N5 1998)
Déterminer tous les entiers $n > 0$ pour lesquels il existe un entier m tel que $2^n - 1$ divise $m^2 + 9$.

Exercice 19 (N4 2005)
Trouver tous les entiers strictement positifs n pour lesquels il existe un unique entier a tel que $0 \leqslant a < n!$ et

$$n! \mid a^n + 1.$$

Exercice 20 (N6 2005 généralisé)
Soit a et b deux entiers strictement positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$a^n + P(n) = 0 \text{ ou } a^n + P(n) \mid b^n + P(n).$$

Montrer que $a = b$.

Exercice 21 (USEMO 2019 P4)
Prouver que pour tout premier p, il existe un entier n tel que

$$1^n + 2^{n-1} + 3^{n-2} + \cdots + n^1 \equiv 2020 \pmod p.$$

Exercice 22 (BMO 2024 P3)
Soit a et b deux entiers entiers strictement positifs disjoints tels que $3^a + 2$ soit divisible par $3^b + 2$. Montrer que $a > b^2$.

Exercice 23 (2013 USA TSTST P8)
On définit une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ en posant $f(1) = 1$ et $f(n+1) = f(n) + 2^{f(n)}$ pour $n \geqslant 1$. Montrer que les nombres $f(1), f(2), \ldots, f(3^{2026})$ donnent des restes distincts modulo 3^{2026}.

Exercice 24 (P2 2024)
Trouver toutes les paires (a, b) d'entiers strictement positifs tels qu'il existe des entiers g et N tels que l'égalité

$$\gcd(a^n + b, b^n + a) = g$$

soit vérifiée pour tout entier $n \geqslant N$.

Exercice 25 (N6 2012)
Soit x et y deux entiers strictement positifs tels que $x^{2^n} - 1$ est divisible par $2^n y + 1$ pour tout entier n. Montrer que $x = 1$.

Exercice 26 (USA TSTST 2018 P8)
Pour quels entiers strictement positifs $b > 2$ existe-t-il une infinité d'entiers strictement positifs n tel que n^2 divise $b^n + 1$?

Exercice 27 (N5 2022)
Pour $1 \leqslant i \leqslant 9$ et $T \in \mathbb{N}$, on définit $d_i(T)$ comme le nombre total de fois que le chiffre i apparait quand tous les multiples de 1829 entre 1 et T inclus sont écrits en base 10.
Montrer qu'on peut trouver une infinité de $T \in \mathbb{N}$ tels qu'il y ait exactement deux valeurs distinctes parmi $d_1(T), d_2(T), \ldots, d_9(T)$.

Exercice 28 (RMM N1 2018)
Trouver tous les polynômes f à coefficents entiers tels que $f(p)$ divise $2^p - 2$ pour tout p premier impair.

Exercice 29 (ELMOSL 2014 N8)
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que :

— les entiers $f(1), f(2), \ldots$ sont premiers entre-eux dans leur ensemble ;
— Il existe $N \geqslant 1$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $f(n) \neq 1$ et pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$,

$$f(a)^n \mid f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}.$$

Exercice 30 (Olympiade Nationale Brézilienne 2023 P6)
Pour tout entier $k \geqslant 1$ on note $\rho(k)$ le plus petit nombre premier ne divisant pas k. Soit (a_n) une suite telle $a_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geqslant 0$, a_{n+1} est le plus petit entier strictement positif différent de $a_0, \ldots, a_n$ tel que $a_n^{a_{n+1}}$ est divisible par $\rho(a_n)$.
Démontrer que tout entier strictement positif apparait une unique fois dans la suite (a_n).

Exercice 31 (N6 2025)
Pour des entiers positifs n et k, on note $r_k(n)$ le reste de n modulo $2^k - 1$. Un entier positif est dit *stylax* si

$$f_1(n) \leqslant f_2(n) \leqslant f_3(n) \leqslant f_4(n) \leqslant \ldots$$

— Prouver qu'il existe une infinité d'entiers stylax.

— Montrer qu'il existe N tel que pour tout entier $M \geqslant N$, il y a au plus $\frac{M}{2025}$ entiers stylax plus petit que M.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Montrons que le nombre recherché est $2^{101}-1$.

D'une part, si n a au plus 100 bits égaux à 1 dans sa décomposition binaire alors on dispose d'une écriture de la forme $n=\sum_{i=1}^{k} 2^{b_i}$ avec $k \leqslant 100$. Pour se ramener à une écriture avec $k=100$, on multiplie n par une puissance de 2 suffisamment grande et puis on écrit artificiellement que $2^x = 2^{x-1}+2^{x-1}$ autant de fois que nécessaire.
En particulier cela règle la question des nombres plus petits que $2^{100}-1$. Par ailleurs un nombre entre 2^{100} et $2^{101}-1$ a au plus 101 bits donc le seul qui ait strictement plus que 100 bits égaux à 1 est bien $2^{101}-1$.

Réciproquement, on va montrer que $2^{101}-1$ n'a pas de multiple fancy. L'observation clef ici est que

$$2^m \equiv 2^{r_{101}(m)} \mod 2^{101}-1,$$

où $r_{101}(m)$ est le reste de m modulo 101. Dès lors pour $a_1,\dots,a_{100} \in \mathbb{N}$ on peut écrire que

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_{100}} \equiv 2^{r_{101}(a_1)}+2^{r_{101}(a_2)}+\cdots+2^{r_{101}(a_{100})} \mod 2^{101}-1.$$

On va essayer de travailler encore un peu l'expression précédente pour se ramener à une écriture binaire. Ainsi si à un moment donné on a deux termes de la forme 2^r dans la somme on les remplace par le terme $2^{r_{101}(r+1)}$, ce qui ne change rien modulo $2^{101}-1$.
Ce processus s'arrête à un moment donné, donc on dispose d'entiers $0 \leqslant b_0 < b_1 < \cdots < b_k \leqslant 100$ avec $k \leqslant 100$ tels que

$$2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n} \equiv 2^{b_0}+2^{b_1}+\cdots+2^{b_k} \mod 2^{101}-1.$$

Or le nombre de gauche vaut au plus $2+\cdots+2^{100}=2^{101}-2$ donc n'est pas divisible par $2^{101}-1$, ce qui montre bien que $2^{101}-1$ ne divise aucun nombre fancy.

Remarque 1.
On a en fait démontré un lemme plus général qui affirme que pour $b \geqslant 2$ et $k \in \mathbb{N}$, tout multiple de b^k-1 a au moins k chiffres non nuls en base b.

Solution de l'exercice 2
On va montrer que P s'annule sur toutes les puissances de 2, ce qui suffira pour conclure. En effet, soit $i \in \mathbb{N}$ et $p > |P(2^i)|$ un premier. On sait que $\text{pgcd}(p-1, p) = 1$ donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \equiv i \pmod{p-1}$ et $n \equiv 0 \pmod{n}$

$$p \mid n \mid P(2^n),$$

ainsi que, par Petit Fermat,

$$p - 1 \mid 2^n - 2^i \mid P(2^n) - P(2^i).$$

On en déduit donc en sommant que $p \mid P(2^i)$ ce qui implique $P(2^i) = 0$ car $p > |P(2^i)|$.

Solution de l'exercice 3
Soit (u_n) une suite solution. On remarque déjà que tous les u_i sont impairs : en effet si $2 \mid u_n$ alors $2 \mid 2^{u_{n+1}} - 1$ et donc $2 \mid 1$ car $u_{n+1} \geqslant 1$, ce qui est absurde.

Si la suite u_i n'est pas constante égale à 1, on peut considérer p le plus petit diviseur premier d'un des u_i. Dès lors, si p divise u_n alors $2^{u_{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$, de sorte que l'ordre de 2 modulo p divise u_{n+1}. Or ce dernier est différent de 1 et divise aussi $p-1$: il possède donc un diviseur premier plus petit que p, ce qui est absurde.

La seule suite potentiellement solution est donc celle constante égale à 1, qui vérifie bien l'énoncé !

Solution de l'exercice 4

Montrons que les solutions sont de la forme $2^i \cdot 3^j \cdot x$ avec $i, j \in \mathbb{N}$. Soit P un polynôme solution.

Lemme 2. Il existe $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = xQ(x)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, la deuxième hypothèse nous apprend déjà que

$$3^n - 2^n \mid 3^{P(n)} - 2^{P(n)}.$$

On reconnait ici deux expressions de la forme $a^k - b^k$ à a et b fixés premiers entre eux donc il est connu que

$$\gcd(3^n - 2^n, 3^{P(n)} - 2^{P(n)}) = 3^{\gcd(n,P(n))} - 2^{\gcd(n,P(n))}.$$

Rappelons en rapidement la preuve. Pour $m \geqslant n$ et d un diviseur de $a^n - b^n$ on a

$$a^m - b^m = a^{m-n} \times a^n - b^{m-n} \times b^n \equiv a^n \times (a^{m-n} - b^{m-n}) \mod d,$$

de sorte que $d \mid a^m - b^m$ si et seulement si $d \mid a^{m-n} - b^{m-n}$ car $\gcd(d, a) = 1$. On retombe ainsi sur une équation de récurrence de la forme $\gcd(a^m - b^m, a^n - b^n) = \gcd(a^{m-n} - b^{m-n}, a^n - b^n)$ où on effectue un algorithme d'Euclide sur les puissances, d'où la conclusion.

Dès lors, pour $p > |P(0)|$ premier on a $\gcd(p, P(p)) \in \{1, p\}$, donc $\gcd(p, P(p)) = p$ car $3^n - 2^n$ est strictement plus grand que 1 pour $n \geqslant 2$. On a en outre $p \mid P(p) - P(0)$ donc $p \mid P(0)$ ce qui donne bien $P(0) = 0$ car $p > |P(0)|$.

On réinjecte maintenant cette nouvelle égalité dans l'énoncé en écrivant que

$$3^{P(n)} - 2^{P(n)} = (3^n)^{Q(n)} - (2^n)^{Q(n)}.$$

Cela rappelle clairement le LTE ! Effectivement, si jamais le polynôme Q n'est pas constant alors d'après le théorème de Schur on peut trouver un premier $p \notin \{2, 3\}$ et un entier n tel que $p \mid Q(n)$. En outre d'après le théorème des restes chinois on peut trouver un entier m positif tel que $m \equiv n \mod p$ et $m \equiv 0 \mod p - 1$. On a alors $p \mid 3^m - 2^m$ donc

$$v_p((3^m)^{Q(m)} - (2^m)^{Q(m)}) = v_p(3^m - 2^m) + v_p(Q(m)) \geqslant v_p(3^m - 2^m) + 1,$$

ce qui contredit la deuxième hypothèse de l'énoncé et permet de conclure !

Réciproquement on a en fait montré plus généralement que l'ensemble des diviseurs premiers de Q est $\{2, 3\}$, donc si Q est constant alors $Q = 2^i \cdot 3^j$ car P est positif sur $\mathbb{N}^*$, et le P obtenu fonctionne alors clairement par notre même argument de LTE.

Solution de l'exercice 5
On commence par une remarque : si $n > 1$, $2^n - 1 \equiv 3 \pmod 4$ ne peut pas être un carré parfait, et a donc un nombre pair de diviseurs (il a une v_p impaire). Donc n est pair. On a donc la factorisation $2^n - 1 = (2^{n/2} - 1)(2^{n/2} + 1)$, qui semble intéressante. On a alors $n = d(2^n - 1) = d(2^{n/2} - 1)d(2^{n/2} + 1)$, car $2^{n/2} - 1$ et $2^{n/2} + 1$ sont premiers entre eux (où d est évidemment la fonction nombre de diviseurs).

Cela va nous conduire à identifier les n tels que $d(2^n - 1) \mid n$.

On va montrer par récurrence forte sur n que si $d(2^n - 1) \mid n$, alors $n = 6$ ou n est une puissance de 2.

Initialisation : $n = 1$ est bien une puissance de 2

Hérédité : on suppose que pour tout $k < n$, si $d(2^k - 1) \mid k$ alors $k = 6$ ou k est une puissance de 2, et on montre la même propriété sur n. Supposons donc $d(2^n - 1) \mid n$. $n > 1$, donc $2^n - 1 \equiv 3 \pmod 4$ n'est pas un carré parfait, et donc $2 \mid d(2^n - 1) \mid n$. Donc $2^n - 1 = (2^{n/2} - 1)(2^{n/2} + 1)$. On a donc $d(2^{n/2} + 1)d(2^{n/2} - 1) = d(2^n - 1) \mid n$, car les deux facteurs sont premiers entre eux.

On va montrer que $d(2^{n/2} - 1) \mid \frac{n}{2}$. Il suffit pour cela de montrer $2 \mid d(2^{n/2} + 1)$, soit que $2^{n/2} + 1$ n'est pas un carré parfait. Or si $2^{n/2} + 1 = k^2$, $2^n = (k - 1)(k + 1)$, et donc $k - 1$ et $k + 1$ sont deux puissances de deux, éloignées de 2, et donc valent 2 et 4 ce qui donnc $\frac{n}{2} = 3$ donc $n = 6$. Donc à part si $n = 6$, on a bien $d(2^{n/2} - 1) \mid \frac{n}{2}$, et par hypothèse de récurrence on a que $\frac{n}{2}$ est une puissance de 2 ou vaut 6, donc n est une puissance de 2 ou vaut 12.

Il nous reste donc simplement à vérifier que 12 ne fonctionne pas. On a, comme tous ces facteurs à l'intérieur de d sont premiers entre eux, $d(2^{12} - 1) = d(2^3 - 1)d(2^3 + 1)d(2^6 + 1) = 2 \cdot 3 \cdot d(2^6 + 1)$. $2^6 + 1$ n'est pas premier (c'est divisible par 5), donc $d(2^6 + 1) > 2$ et $d(2^{12} - 1) > 12$. Ce qui achève la récurrence.

Si $d(2^n - 1) = n$, on a évidemment $d(2^n - 1) \mid n$ et d'après la récurrence $n = 6$ ou bien n est une puissance de 2. Si $n = 6$, $2^6 - 1 = 63 = 2^2 \cdot 7$ a bien 6 diviseurs. Si n est une puissance de 2, disons $n = 2^\alpha$, on a $2^n - 1 = 2^{2^\alpha} - 1 = (2^{2^0} + 1)(2^{2^1} + 1)(2^{2^2} + 1) \dots (2^{2^{\alpha-1}} + 1) = F_0 \dots F_{\alpha-1}$, où les F_i sont les nombres de Fermat. Ils sont 2 à 2 premiers entre eux, donc $d(2^n - 1) = d(F_0) \dots d(F_{\alpha-1}) \geqslant 2^\alpha$, puisque chaque nombre de Fermat est plus grand que 1 strictement. Si n est solution, on a donc égalité dans cette inégalité, et donc pour tout $0 \leqslant i \leqslant \alpha$, $d(F_i) = 2$ ie F_i est premier. Il est connu que F_5 n'est pas premier, donc $\alpha - 1 < 5$ et donc $\alpha \geqslant 5$. Réciproquement si $\alpha \leqslant 5$ chaque F_i, $i < \alpha$, est premier, donc on a bien $d(2^n - 1) = 2^\alpha$ dans ce cas. On a donc comme solutions $1, 2, 4, 6, 8, 16, 32$.

Solution n°2 de l'exercice 5
Soit $v = v_2(n)$ et k tel que $n = 2^v k$. On a la factorisation

$$2^n - 1 = (2^k - 1) \cdot \prod_{i=0}^{v-1} (2^{2^i k} + 1).$$

Clairement $2^k - 1$ est premier avec $2^{2^i k} + 1$ pour $i \in [\![0, v - 1]\!]$ et $\operatorname{pgcd}(2^{2^i k} + 1, 2^{2^j k} + 1) = 1$ lorsque $i \neq j$. Par ailleurs, si n n'est pas un carré alors $d(n)$ est pair ; et justement $2^x - 1$ est un carré si et seulement $x \in \{0, 1\}$ et $2^x + 1$ en est un si et seulement si $x = 3$. Cette petite analyse faite, on peut maintenant conclure :

- Si $k \geqslant 4$ alors
$$n = d(2^n - 1) = d(2^k - 1)d(2^k + 1) \dots d(2^{2^{v-1} v +} + 1).$$
Ainsi $v_2(n) \geqslant 1 + v > v_2(n)$, ce qui est absurde.

- Si $k = 3$ alors soit $n \in \{3, 6\}$ et seul 6 fonctionne, soit $n \geqslant 9$ et dans ce cas 4 divise $d(2^6+1)$ donc aucun autre n ne fonctionne en utilisant le même argument que précédemment.
- Si $k = 1$ alors n est solution si et seulement si $d(2^{2^i} + 1)$ est premier (et ait donc exactement 2 diviseurs) pour $i \in [\![0, v - 1]\!]$. Il est connu que $2^{32} + 1$ est le premier nombre de Fermat non premier donc $n \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$.

On en déduit à nouveau que les solutions sont exactement les $n \in \{1, 2, 4, 6, 8, 16, 32\}$.

Solution de l'exercice 6
Montrons que la réponse est oui. On va exhiber un algorithme qui construit des entiers n avec un nombre arbitraire de diviseurs premiers, tels que n divise $2^n + 1$.

— Initialement on prend $n = 3$, qui vérifie $3 \mid 2^3 + 1$ et a un seul diviseur premier.

— Pour $k \geqslant 1$, supposons disposer d'un entier impair n comportant exactement k diviseurs premiers distincts, que l'on note $p_1 < \cdots < p_k$.
On peut considérer un diviseur premier q du nombre $2^{p_k} + 1$. On vérifie alors que :

- D'une part, $q \mid 2^{p_k} + 1$ donc $o_q(2) = p_k$ et ainsi $q > p_k$: q est strictement plus grand que tous les p_i,
- D'autre part, q divise $2^{p_k} + 1$, qui divise lui-même $2^n + 1$ car n est impair.

Posons maintenant $m = qn$. Puisque q est impair, on a toujours

$$n \mid 2^{qn} + 1 = (2^n)^q + 1,$$

tandis que par construction de q on a aussi

$$q \mid 2^{qn} + 1 = (2^n)^q + 1.$$

On en déduit que $m \mid 2^m + 1$ et puisque m a exactement $k + 1$ diviseurs premiers, cela permet de conclure.

Remarque 3.
On aurait aussi pu définir q comme un diviseur primitif de $2^n + 1$ pour avoir $q > p_k$ mais il aurait fallu justifier qu'on ne tombe pas dans un cas particulier de Zsygmondy.

Solution de l'exercice 7
On sait que les polynômes P et Q sont premiers entre eux donc on peut trouver $c \in \mathbb{N}^*$ ainsi que deux polynômes A et B à coefficients entiers tels que $AP + BQ = c$. En particulier, si $d \mid P(n)$ et $d \mid Q(n)$ alors $d \mid c$. On a donc montré que la quantité $\gcd(P(n), Q(n))$ est majorée par c.

Ecrivons maintenant que pour $k \in \mathbb{Z}$, $Q(n) \mid Q(n + kQ(n))$ donc

$$2^{Q(n)} - 1 \mid 2^{Q(n+kQ(n))} \mid 3^{P(n+kQ(n))} - 1.$$

De la formule $\gcd(3^a - 1, 3^b - 1) = 3^{\gcd(a,b)} - 1$ on en tire ainsi que

$$2^{Q(n)} - 1 \mid 3^{\gcd(P(n),P(n+Q(n)),\dots)} - 1.$$

Si Q n'est pas constant, le membre de droite va croitre exponentiellement vite. Il suffit donc de montrer que dans ce cas celui de gauche est parfois petit pour conclure.

En l'occurrence, prenons $p > \max(c, \deg P + 1)$ un premier. On sait que p ne divise pas $Q(n)$ car $p > c$ donc $(p, Q(n)) = 1$. Maintenant, si $p \mid \gcd(P(n), P(n + Q(n)), \dots)$ alors la suite des $kQ(n)$ va prendre exactement toutes les valeurs modulo p donc en utilisant que $P(m + p) \equiv P(m) \mod p$ on peut dire que $p \mid P(i)$ pour $0 \leqslant i \leqslant p - 1$. D'un autre côté le polynôme P peut s'interpréter comme un polynôme de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de degré strictement plus petit que p et a donc au plus $\deg P < p - 1$ racines modulo p, ce qui est absurde.

Reste à traiter le cas des "petits" premiers. Pour ça notons $p_1, \dots, p_k$ les premiers plus petits que c. On va simplement dire qu'on peut trouver $m \in \mathbb{Z}$ tel que $P(m) \neq 0$ et donc tel que $v = \max_{i \in [\![1,k]\!]} v_{p_i}(P(m))$ soit bien défini. Dès lors si on pose $N = (p_1 \dots p_k)^{v+1}$ on sait que pour $\ell \in \mathbb{N}$ on a $v_{p_i}(P(m + \ell N)) \leqslant v$ car $P(m + \ell N) \equiv P(m) \not\equiv 0 \mod p_i^{v+1}$. Ainsi on a des entiers n arbitrairement grands tels que $v_{p_i}(P(n)) \leqslant v$ pour tout i et pour ces entiers là on aura ainsi

$$\gcd(P(n), P(n + Q(n)), \dots) \leqslant \prod_{p \leqslant c} p^{v_p(P(n))} \leqslant N,$$

ce qui permet de conclure !

Remarque 4.
L'hypothèse $\deg P \leqslant p - 1$ pour dire que le polynôme P n'est pas toujours divisible par p est cruciale ! On a sinon le contre-exemple (parmi d'autres) $P = X^{p-1} - 1$.

Solution de l'exercice 8
En testant de petits cas pour a_1 et en essayant de voir si on peut avoir $a_1 = a_2$ ou $a_1 = a_3$ on a comme l'impression que la réponse à la question est négative, et c'est ce que l'on va montrer. Pour montrer qu'une suite ne peut pas prendre deux fois la même valeur, on a envie d'associer à chaque terme de la suite un monovariant strictement croissant.
Or, $2^{a_n} - 1$ a la bonne idée de ne jamais être un carré parfait (mod 4!) donc a_{n+1} devra être divisible par un premier p qui divise $2^{a_n} - 1$. En plus la théorie de l'ordre suggère qu'on peut avoir $o_p(2) = a_n$ et donc que potentiellement $a_n \mid p - 1$, ce qui donnerait $p > a_n$! Ainsi on soupçonne que a_{n+1} va être divisible par des premiers très grands par rapport à a_n, ce qui motive le lemme suivant qui conclura le problème.

Lemme 5.
Si pour $n \in \mathbb{N}^*$ on note p_n le plus grand diviseur premier de a_n, alors la suite des p_n est strictement croissante.

Pour $n \in \mathbb{N}$, il suffit de montrer que $p_{n+1} > p_n$. On écrit pour cela que

$$2^{a_n} - 1 = (2^{p_n})^b - 1,$$

pour un certain entier b. On remarque alors que $2^{p_n} - 1$ n'est pas un carré parfait car $2^{p_n} - 1 \equiv 3 \mod 4$ puisque $p_n \geqslant 2$ donc on peut se donner un premier q tel que $v_q(2^{p_n} - 1)$ soit impair et en particulier cela force $o_q(2) = p_n$ donc $q > p_n$. Dès lors le LTE nous permet d'écrire que

$$v_q(2^{a_n} - 1) = v_q(2^{p_n} - 1) + v_q(b) = v_q(2^{p_n} - 1),$$

puis $q > p_n$ et donc q est strictement plus grand que tous les premiers divisant b.
Ainsi $v_q(2^{a_n} - 1)$ est impair donc q doit diviser a_{n+1} : $p_{n+1} \geqslant q > p_n$, ce qui conclut !

Solution de l'exercice 9
On va montrer qu'il s'agit exactement des entiers n congrus à 1 ou à 3 modulo 8. On peut commencer par écarter les cas qui ne marchent clairement pas :

— Si n est pair alors $3^k - n$ est un nombre impair pour tout entier naturel k donc la suite des v_2 est majorée par 0.

— Si n est congru à 5 ou à 7 modulo 8 alors les puissances de 3 valent 1 ou 3 modulo 8 donc la suite des v_2 est majorée par 2.

Il reste donc à traiter le cas plus technique où n vaut 1 ou 3 modulo 8, qui demande le lemme suivant.

Lemme 6. Pour $k \geqslant 3$ un entier naturel, le nombre 3 est presque un générateur modulo 2^k, dans le sens où les puissances de trois prennent exactement 2^{k-2} restes distincts modulo 2^k.

Démonstration. Il s'agit en fait de calculer l'ordre ω de 3 modulo 2^k. Déjà il est clair que ω doit être pair puisque 4 divise $3^\omega - 1$. On écrit donc $\omega = 2\omega'$ de sorte que le LTE nous donne

$$v_2(3^\omega - 1) = v_2(9^{\omega'} - 1) = 3 + v_2(\omega').$$

On a donc $v_2(\omega') \geqslant k-3$, donc $\omega \geqslant 2^{k-2}$ et ce dernier fonctionne bien. Dès lors puisque l'ordre de 3 modulo 2^k vaut 2^{k-2}, on trouve bien le résultat voulu. □

On peut maintenant conclure en spécifiant le lemme. Effectivement, pour $k \geqslant 3$ il y a exactement 2^{k-2} restes distincts modulo 2^k qui sont congrus à 1 ou à 3 modulo 8. Ainsi, les puissances de 3 recouvrent exactement ces valeurs modulo 2^k, ce qui permet bien de montrer que si n est congru à 1 ou à 3 modulo la 8, la suite des v_2 n'est pas bornée !

Remarque 7.
Plus généralement, on peut montrer que pour $n \geqslant 3$, tout entier naturel k impair est congru à un unique nombre de la forme $\pm 3^i$ modulo 2^k, avec $i \in [\![0, 2^{k-2} - 1]\!]$. Ce constat généralise l'existence de générateurs modulo un nombre premier, et en langage savant montre que

$$(\mathbb{Z}/2^n\mathbb{Z})^* \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2^{n-2}\mathbb{Z}.$$

Solution de l'exercice 10

Soit l un entier, et p un premier tel que $p^\alpha \mid 2^{2^l}+d$ et $p^\alpha \geqslant m$ (on suppose pour l'instant qu'un tel p existe). On cherche $k > l$ tel que p^α divise $2^{2^k}+d$, soit tel que p^α divise $2^{2^k}-2^{2^l}$. Si $p^{\alpha-1}(p-1) \mid 2^k - 2^l$, par Fermat alors k convient. Or si $v_2(p-1) \leqslant l$, alors on peut prendre $k = l + \phi(\frac{p^{\alpha-1}(p-1)}{2^{v_2(p-1)}})$ qui convient par Euler. Donc s'il existe l tel que $2^{2^l}+d$ admet un diviseur de la forme p^α supérieur à m et tel que $l \geqslant v_2(p-1)$, alors on a fini. On suppose donc que pour tout l, si $p^\alpha \mid 2^{2^l}+d$ et $p^\alpha \geqslant m$ alors $p \equiv 1 \pmod{2^{l+1}}$. On peut donc écrire, pour tout l, $2^{2^l}+d = \prod_{p\equiv 1 \pmod{2^{l+1}}} p^{v_p(2^{2^l}+d)} \cdot \prod_{p\not\equiv 1 \pmod{2^{l+1}}} p^{v_p(2^{2^l}+d)}$ (dans ce produit, on n'écrit que les premiers apparaissant effectivement dans la décomposition en produit de facteurs premiers de $2^{2^l}+d$). Il y a au plus m termes dans le membre de droite, chacun inférieur à m, car si $p^\alpha \mid 2^{2^l}+d$ et que $p \not\equiv 1 \pmod{2^{l+1}}$, alors $p^\alpha < m$. Ce produit de droite est donc inférieur à m^m. De plus, chaque facteur du produit de gauche est congru à 1 modulo 2^{l+1}, donc $\prod_{p\not\equiv 1 \pmod{2^{l+1}}} p^{v_p(2^{2^l}+d)} \equiv 2^{2^l}+d \pmod{2^{l+1}}$ car $2^l \geqslant l+1$ par Bernoulli. En prenant l tel que $2^{l+1} > d, m^m$, on a donc $\prod_{p\not\equiv 1 \pmod{2^{l+1}}} p^{v_p(2^{2^l}+d)} = d$: ce produit est congru à d modulo 2^{l+1} et est strictement compris entre $0 > d - 2^{l+1}$ et $m^m < 2^{l+1}+d$. En particulier, on a donc $d \mid 2^{2^l}+d$, donc $d \mid 2^{2^l}$ et donc d est une puissance de 2. On écrit $d = 2^\alpha$, avec $\alpha \geqslant 0$ et donc pour tout l suffisamment grand ($2^l \geqslant \alpha$, disons $l \geqslant N$), on a $2^{2^l}+d = 2^\alpha(2^{2^l-\alpha}+1)$. On va montrer qu'il existe $N \leqslant l < k$ tel que $\gcd(2^{2^l-\alpha}+1, 2^{2^k-\alpha}+1) \geqslant m$. Fixons un $l \geqslant N$, et supposons que $2^{2^l-\alpha}+1$ ait un diviseur de la forme $p^\beta \geqslant m$. On cherche $k > l$ tel que $p^\beta \mid 2^{2^k-\alpha}+1$. Mais cette fois-ci on va être un peu plus intelligent que la fois précédente, on va juste chercher k tel que $2^k - \alpha \equiv 2^l - \alpha \pmod{\omega_{p^\beta}(2)}$, soit $2^k \equiv 2^l \pmod{\omega_{p^\beta}(2)}$. Comme précédemment, c'est bon si $l \geqslant v_2(\omega_{p^\beta}(2))$. Or comme $p^\beta \mid 2^{2^l-\alpha}+1$, $p^\beta \mid 2^{2^{l+1}-2\alpha}-1$ et donc $\omega_{p^\beta}(2) \mid 2^{l+1}-2\alpha$. Donc en prenant l suffisamment grand, $v_2(\omega_{p^\beta}(2)) \leqslant 1 + v_2(\alpha)$, et donc si l est assez grand, $2^{2^l-\alpha}+1$ admet un diviseur qui est une puissance de premier supérieur à m (car il y a un nombre fini de puissances de premiers inférieures à m et donc leur produit est majoré), et de plus $l \geqslant 1+v_2(\alpha) \geqslant v_2(\omega_{p^\beta}(2))$, donc on a bien dans ce cas-là $\gcd(2^{2^k-\alpha}+1, 2^{2^l-\alpha}+1) \geqslant p^\beta \geqslant m$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 11
Le plus petit réel est $c = 4$.

L'énoncé doit éveiller deux choses : d'abord, on peut s'attendre à ce qu'on ne puisse pas caractériser toutes les fonctions vérifiant la divisibilité. Il y aura probablement des entiers n pour lesquels on ne pourra rien dire de $f(n)$. Il faut donc se focaliser sur les entiers n sur lesquels on peut espérer récupérer de l'information. La deuxième chose, c'est qu'il faudra probablement construire des fonctions "inhabituelles" solutions de la divisibilité et qui permettront de réaliser la borne ou de l'approcher. Ce style d'équation fonctionnelle est récent mais à la mode (on pourra notamment voir les A7 2019, A6 2021 et A2 2022), il convient de développer des stratégies.

Soit f une fonction vérifiant la propriété (auquel cas on a alors $f(n) \leqslant 4n$)) mais telle que f n'est pas l'identité. Il existe donc un entier x tel que $f(x) \neq x$.

En posant $a = b$ dans la relation, on trouve $f(a) \mid a^a - f(a)^{f(a)}$, donc $f(a) \mid a^a$. En particulier, si p est un nombre premier, on déduit que $\boxed{f(p) \text{ est une puissance de } p}$.

Pour tout p tel que $v_p(f(p)) \geqslant 1$, en posant $a = p$ et $b = x$ dans la relation de l'énoncé, on trouve avec le petit théorème de Fermat :

$$0 \equiv x^p - f(x)^{f(p)} = x^p - f(x)^{p^{v_p(f(p))}} \equiv x - f(x) \mod p.$$

Comme $x - f(x)$ est non nul, il admet un nombre fini de diviseurs premiers. on déduit qu'il existe un nombre fini de nombre premiers p tels que $v_p(f(p)) \geqslant 1$. Autrement dit, il existe $M \geqslant 1$ tel que $\boxed{\text{pour tout } p \geqslant M,\ f(p) = 1}$.

Soit p un nombre premier impair et $q \geqslant M$ un nombre premier. En posant $(a, b) = (p, q)$ dans la relation, on trouve que $f(p) \mid q^p - f(q)^{f(p)} = q^p - 1$. Si $v_p(f(p)) \geqslant 1$, alors d'après le petit théorème de Fermat, on aurait $0 \equiv q^p - 1 \equiv q - 1 \mod p$, soit $p \mid q - 1$. Or, d'après le théorème de Dirichlet, il existe une infinité de nombres premiers q tels que $q \equiv -1 \mod p$. Comme p est impair, les deux congruences $q \equiv 1$ et $q \equiv -1$ sont incompatibles. Cette contradiction implique que $\boxed{f(p) = 1 \text{ pour tout } p \text{ premier impair}}$.

Soit n un entier quelconque. Si p est un diviseur premier de $f(n)$, alors $p \mid f(n) \mid n^n$, dont p divise n. En remplaçant $(a, b) = (n, p)$ dans la relation, on trouve $p \mid f(n) \mid p^n - f(p)^{f(n)}$. Dès que p est impair, cela implique que $p \mid p^n - 1$, ce qui est absurde. Ainsi, $f(n)$ n'admet aucun facteur impair, il s'agit d'une puissance de 2. En particulier, puisque $f(n) \mid n^n$, on déduit que $\boxed{f(n) = 1 \text{ pour tout } n \text{ impair}}$.

Lorsque $n = 2^\alpha\beta$ et $f(n) = 2^\gamma$, la dernière étape est d'estimer γ en fonction de α. En posant $a = n$ dans la relation, on trouve $2^\gamma \mid b^{2^\alpha\beta} - 1$. Il reste à choisir b pour que $v_2(b^{2^\alpha\beta} - 1)$ soit petit.

Soit $n = 2^\alpha\beta$ un entier pair. Soit γ un entier tel que $f(n) = 2^\gamma$. En prenant $(a, b) = (n, 3)$, on trouve

$$2^\gamma = f(n) \mid 3^n - f(3)^{f(n)} = 3^{2^\alpha\beta} - 1.$$

D'après le lemme LTE,

$$v_2(3^{2^\alpha\beta}-1) = v_2(3+1)+v_2(3-1)+v_2(2^\alpha\beta)-1 = 2+\alpha \quad \Longrightarrow \quad \gamma \leqslant \alpha+2.$$

On déduit que, pour tout entier n pair, $f(n) \leqslant 2^{v_2(n)+2} \leqslant 4n$. En particulier, en combinant les valeurs de f sur les entiers impairs et sur les entiers impairs, on déduit que $\boxed{f(n) \leqslant 4n}$ pour tout entier n. Comme en plus la fonction identité, que l'on avait exclue de notre raisonnement, vérifie également l'inégalité, on trouve que $\boxed{c \leqslant 4}$.

Trouvons désormais f australienne telle que, pour au moins un entier n, $f(n) = 4n$. Ceci montrera que $c \geqslant 4$ et donc que $c = 4$. Beaucoup de construction sont possibles, présentons la suivante : soit f définie par

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 16 & \text{si } n = 4 \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Vérifions que f est autralienne :

— Si a est impair, $f(a) = 1$ donc la divisibilité est vérifiée pour tout b.

— Si $a = 4$, alors pour tout b pair, on a $2 \mid b$ et $2 \mid f(b)$, donc $16 \mid b^4 - f(b)^{16}$. Lorsque b est impair, on peut vérifier à la main que $b^4 \equiv 1 \mod 16$, de sorte que $16 \mid b^4 - f(b)^{16}$.

— Si $a \neq 4$ est pair, les nombres b^a et $f(b)^{f(a)}$ étant toujours de même parité, on a toujours $f(a) = 2 \mid b^a - f(b)^{f(a)}$.

f est donc australienne, ce qui conclut le problème.

Solution de l'exercice 12
L'idée clef ici est d'essayer de relier les r_i entre eux. On remarque en effet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$r_{n+1} \equiv b^{n+1} \equiv b \times b^n \equiv br_n \mod a^n.$$

Ainsi soit $r_{n+1} = br_n$, soit $r_{n+1} \geqslant br_n + a^n$. Puisque $a \geqslant 2$ et que $r_{n+1} < \frac{2^{n+1}}{n+1} \leqslant 2^n - 1$ pour $n \geqslant N+1$, on en déduit que $r_{n+1} = br_n$ dès que $n \geqslant N+1$. Une récurrence immédiate montre alors que pour $k \geqslant 0$ on a

$$\frac{2^{N+1+k}}{N+1+k} \geqslant r_{N+1+k} = b^k r_{N+1} \geqslant 2^k r_{N+1},$$

ce qui est contradictoire pour k assez grand sauf si $r_{N+1} = 0$, et dans ce cas on a bien que a divise b.

Solution de l'exercice 13
On va procéder comme dans l'exercice 1 : l'idée ici est donc à nouveau de réduire tous les a_i modulo n. Pour cela, étant donné un entier k, on va noter $r_n(k)$ son reste modulo n. On peut donc déjà dire que :

$$0 \equiv 2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_k} \equiv 2^{r_n(a_1)} + 2^{r_n(a_2)} + \cdots + 2^{r_n(a_k)} \mod 2^n - 1.$$

Maintenant, on suppose par l'absurde que l'exercice est faux. Puisque $k < 2n$, on peut donc écrire que

$$2^{r_n(a_1)} + 2^{r_n(a_2)} + \cdots + 2^{r_n(a_k)} \leqslant 2 \times (2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2) + 1 < 2 \times (2^n - 1).$$

D'un autre côté cette dernière somme est aussi strictement positive car $k > n$, donc on doit avoir :

$$2^{r_n(a_1)} + 2^{r_n(a_2)} + \cdots + 2^{r_n(a_k)} = 2^n - 1.$$

A nouveau, l'idée va être de fusionner nos puissances de 2 tant que c'est possible afin de se ramener à une décomposition en base 2 à droite. Pour cela on les fusionne de bas en haut : on commence donc, si c'est possible, par fusionner deux "1" en un "2", et on itère.
On se retrouve à la fin avec une écriture de la forme

$$2^{r_n(a_1)} + 2^{r_n(a_2)} + \cdots + 2^{r_n(a_k)} = 2^{b_1} + 2^{b_2} + \cdots + 2^{b_\ell},$$

où tous les b_i sont distincts. Maintenant, si à un instant donné minimal on a fusionné deux "2^i" ensemble, cela signifie qu'il y avait exactement deux "2^i" à cet instant et donc qu'il n'en restera plus dans la somme finale. On distingue donc deux cas :

- Si dans notre processus de réduction on a fusionné deux "2^i" ensemble à un instant minimal, alors i n'appartient pas à l'ensemble $b_1, \ldots, b_\ell$, ce qui contredit l'unicité de l'écriture binaire

$$2^{b_1} + 2^{b_2} + \ldots 2^{b_\ell} = 2^n - 1 = 1 + 2 + \cdots + 2^{n-1}.$$

- Autrement, tous les $r_n(a_i)$ sont distincts, ce qui contredit l'hypothèse $k > n$.

On conclut donc dans tous les cas à une absurdité !

Solution de l'exercice 14
Montrons que le seul triplet solution est $(a, b, c) = (1, 1, 2)$, qui convient bien car on a toujours

$$n + 2 \mid 1^n + 1^n + n.$$

On commence par remarquer que l'énoncé implique que $n + c$ divise $a^n + b^n - c$ dès que n n'est divisible par aucun premier plus petit que 2013. C'est très étrange, puisqu'on a des n en "bas", et en exposant, alors qu'on sait que les deux sont assez décorrélés.
On va avancer pas-à-pas dans le problème.

- Si on prend $n \equiv 1 \pmod{2013!}$ et $n \equiv -c \pmod{p}$ avec un premier $p > 2013$, alors $p \mid n + c \mid a^n + b^n - c$.
- Si on impose même $n \equiv 1 \mod (p-1)2013!$ alors on a en plus $a^n \equiv a \mod p$ et $b^n \equiv b \mod p$ donc $p \mid a + b - c$. En prenant p assez grand on obtient donc $a + b = c$.
- Si on prend $p, q > 2013$ deux premiers distincts et $n \equiv q \pmod{(p-1)2013!}$ ainsi que $n \equiv -c \pmod{p}$ alors p divise toujours $a^n + b^n - c$. D'un autre côté on a $a^n \equiv a^q \mod p$ et $b^n \equiv b^q \mod p$ donc $p \mid a^q + b^q - c$. En prenant p assez grand (à q fixé), on a donc $a^q + b^q = c = a + b$, ce qui implique clairement $a = b = 1$ en prenant q assez grand.

On a donc bien $(a, b, c) = (1, 1, 2)$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 15
On va montrer que c'est le cas si et seulement si n et $\phi(n)$ sont premiers entre eux. On va distinguer les deux cas :

- Si n et $\varphi(n)$ sont premiers entre eux, alors pour a un entier relatif on peut avoir $x^x \equiv a \mod n$ en prenant x solution du système

$$\begin{cases} x \equiv a \mod n \\ x \equiv 1 \mod \varphi(n). \end{cases}$$

  Dans ce cas, la fonction $x \mapsto x^x$ est donc bien surjective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

- Si n et $\varphi(n)$ ne sont pas premiers entre eux, on a à nouveau deux cas à considérer :
  — Soit il existe un premier p tel que p^2 divise n. Dans ce cas on ne peut pas trouver $x \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^x \equiv p \mod n$ puisque un tel x serait divisible par p et donc x^x serait au moins divisible par p^2.
  — Autrement, il existe deux premiers p et q divisant n tels que p divise $q-1$.
  On considère g une racine primitive modulo q. Si notre fonction était surjective, il existerait $x \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^x \equiv 0 \mod p$ et $x^x \equiv b \mod q$. Ainsi p doit diviser x, mais x doit aussi être premier avec q. Dès lors on a

$$(x^x)^{(q-1)/p} \equiv x^{(q-1)x/p} \equiv 1 \mod q,$$

  et donc $g^{(q-1)/p} \equiv 1 \mod q$, ce qui contredit la définition de g.

Solution de l'exercice 16
Nous allons montrer que Marguerite a une stratégie gagnante. Notons que Maxime va choisir les n_{2k+1} et Marguerite va choisir les n_{2k}. On fait d'abord quelques remarques.

- Remarque 1 : Remarquons d'abord que si l'un des joueurs choisit $n_k \equiv 0 \mod p$ et ne gagne pas à cette étape, alors le joueur suivant gagne en choisissant $n_{k+1} \equiv 0 \mod p$, car alors $s_{k+1} \equiv 0 \mod p$, et en particulier p divise $s_{k+1}(s_1+2s_2+\cdots+ks_k+(k+1)s_{k+1})$.
- Remarque 2 : Pour $a \not\equiv 0 \mod p$, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Ainsi si $a, b \geqslant 1$ sont deux entiers tels que a soit divisible par $p-1$ et congru à 1 modulo p et b n'est pas divisible par p, alors $a^b + b^a \equiv 1^b + 1 \equiv 2 \mod p$. On va donc chercher une stratégie de ce côté-là.

Stratégie : On va montrer que la stratégie suivante fonctionne : pour $k \geqslant 0$, Marguerite va distinguer deux cas.

- Si $k = 0$ ou n_{2k-1} n'est pas divisible par p, alors Marguerite choisit $n_{2k} > n_{2k-1}$ (resp. $n_0 > 0$) de telle sorte que $n_{2k} \equiv 0 \mod p-1$ et $n_{2k} \equiv 1 \mod p$.
- Si n_{2k-1} est divisible par p, alors Marguerite choisit $n_{2k} > n_{2k-1}$ divisible par p.

Par la première remarque, dans le second cas si Maxime n'avait pas gagné, alors Marguerite gagne à cet instant. Dans le premier cas, si n_{2k-1} n'est pas divisible par p, alors $s_{2k} \equiv 2 \pmod p$. Donc si Marguerite ne gagne pas à un instant donné, alors il a obtenu $s_{2k} \equiv 2 \pmod p$. On s'intéresse alors aux valeurs prises par s_{2k+1}. On distingue deux cas :

— D'abord si à chaque étape, Maxime choisit n_{2k+1} non divisible par p. Alors d'après la deuxième remarque, il obtient $s_{2k+1} \equiv 2 \mod p$. Autrement dit, $s_k \equiv 2 \mod p$ pour tout k, et donc $1 + 2s_2 + \cdots + ks_k \equiv k(k+1) \mod p$ et donc le premier k tel que cette quantité est divisible par p est $k = p-1$, or $p-1$ est pair donc c'est Marguerite qui vient de choisir, et c'est donc celui-ci qui gagne.

— Maintenant, si à un moment Maxime choisit n_{2k+1} divisible par p, (on considère que c'est la première fois que Quentin choisit un tel nombre), en particulier $2k+1 < p-1$ sinon on a vu au-dessus que Marguerite gagne. Alors pour $m \leqslant 2k$, on a $s_m \equiv 2 \mod p$, et $s_{2k+1} \equiv 1 \mod p$. Alors

$$s_1 + 2s_2 + \cdots + (2k+1)s_{2k+1} \equiv 2k(2k+1) + (2k+1) = (2k+1)^2 \not\equiv 0 \mod p,$$

donc Quentin ne gagne pas à cette étape. Mais alors, comme évoqué précédemment, en choisissant n_{2k+2} divisible par p, on a $s_{2k+2} \equiv 0 \mod p$ donc Marguerite gagne.

Dans tous les cas, avec cette stratégie, Marguerite va gagner, donc c'est Marguerite qui a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 17
Notons $d < p$ l'ordre de q modulo p, de sorte que p divise $q^m - 1$ si et seulement si d divise m. Par le LTE, on sait en outre que pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$v_p(q^{dn} - 1) = v_p(q^d - 1) + v_p(n) \leqslant q^p + v_p(n).$$

Ainsi, on peut écrire que :

$$\begin{aligned} v_p(N(m)) &= \sum_{\substack{k=1 \\ d|n}}^{m} v_p(q^k - 1) \\ &\leqslant \sum_{1 \leqslant n \leqslant \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor} (q^p + v_p(n)) \\ &\leqslant \frac{m \cdot q^p}{d} + v_p\left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor !\right). \end{aligned}$$

Maintenant par le théorème de Legendre, pour un entier naturel a on peut écrire que

$$v_p(a!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{a}{p^i} \right\rfloor \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{a}{p^i} = \frac{a}{p-1}.$$

Ainsi, en réinjectant on en déduit que :

$$\frac{m \cdot q^p}{d} + v_p\left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor !\right) \leqslant \frac{m \cdot q^p}{d} + \frac{m}{d(p-1)} = \left(\frac{q^p}{d} + \frac{1}{q(p-1)}\right) \cdot m,$$

ce qui permet de conclure.

Remarque 8.
Si on note $s_p(n)$ la somme des chiffres de n lorsque ce dernier est écrit en base p, on peut montrer plus généralement l'identité

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1}.$$

Solution de l'exercice 18
Le problème est sur mathraining !

Solution de l'exercice 19

Clairement 1 est solution, supposons donc $n \geqslant 2$ pour la suite. On va montrer que les premiers sont solution. Écrivons $n! = 2^\alpha \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, avec $\alpha_i > 0$ pour tout i et $\alpha > 0$. Notons pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, r_i le nombre d'entiers $0 \leqslant x < p_i^{\alpha_i}$ tels que $p_i^{\alpha_i} \mid x^n + 1$, et de même r_0 le nombre d'entiers $0 \leqslant x < 2^\alpha$ tel que $2^\alpha \mid x^n + 1$. Par lemme chinois, le nombre d'entiers $0 \leqslant x < n!$ tels que $n! \mid a^n + 1$ vaut $r_0 \cdot r_1 \cdot \ldots \cdot r_k$. Donc n est solution si et seulement si $r_0 \cdot r_1 \cdot \ldots \cdot r_k = 1$, soit $r_0 = r_1 = \ldots = r_k = 1$. Soit $i \geqslant 1$. On note g un générateur modulo $p_i^{\alpha_i}$, on pose $x = g^\beta$. Alors x est solution si et seulement si $n \cdot \beta \equiv \frac{p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)}{2} \pmod{p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 1)}$. Si $p_i \mid n$ et $\alpha_i \geqslant 2$, alors si β vérifie cette congruence $\beta + p_i^{\alpha_i - 2}(p_i - 1)$ aussi, donc r_i vaut 0 ou est supérieur à 2, et dans tous les cas ne vaut pas 1. Donc si n admet un diviseur premier impair p, $p^2 \not| n!$, et donc clairement $n < 2p$. Alors on a $n = p$, et n est bien premier. Si n n'admet pas de diviseur premier impair, comme $n \geqslant 1$ n est pair, et donc si on note a l'unique solution, $n! - a$ est solution aussi (car 0 n'est pas solution). Donc $n! - a = a$, et donc $a = \frac{n!}{2}$. Donc $n! \mid (\frac{n!}{2})^2 + 1$, ce qui implique clairement que $n!$ et $\frac{n!}{2}$ sont premiers entre eux. On a donc $n! = 2$, et donc $n = 2$ et n est bien premier.

Montrons que réciproquement n est premier alors n est solution. Clairement 2 est solution, on suppose donc n impair par la suite. Si $n! \mid a^n + 1$, $n! \mid a^{2n} - 1$. Donc l'ordre de a modulo $n!$ divise $2n$. De plus par Euler il divise $\phi(n!)$. Or n et $\phi(n!)$ sont premiers entre eux : $\phi(n!)$ est un produit de puissances de premiers strictement inférieurs à p, et de $q - 1$, avec $q \leqslant p$. Donc cet ordre divise 2. Donc $n! \mid a^2 - 1$. Ecrivons $n! = 2^\alpha N$, avec N impair. Si $p \leqslant n$ impair divise $a - 1$, $p \mid a^n - 1$ et donc $p \nmid a^n + 1$. Donc N est premier avec $a - 1$ et divise donc $a + 1$. $2^\alpha \mid a^n + 1 = (a + 1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots - 1)$. Clairement, le facteur de droite est impair, car n est impair. Donc $2^\alpha \mid a + 1$. Donc $n! = 2^\alpha N \mid a + 1$, donc $a = n! - 1$ est la seule potentielle solution. Réciproquement, elle convient trivialement, donc n est bien solution.

Solution de l'exercice 20

On reprend la solution de Vincent Jugé.

Par le lemme de Schur, il existe un entier $n \geqslant 0$ et un nombre premier $p > |b-a|$ tels que p divise $P(n)+a$. Soit ensuite k un entier naturel tel que $k+n \equiv 1 \mod p-1$, et soit $m = n+kp$, puis $\ell = (m-1)/(p-1)$. Puisque $m \equiv n+k \equiv 1 \mod p-1$, on sait que ℓ est un entier. En outre, on a bien sûr $P(n) \equiv P(m) \mod p$.

On constate alors que $a^m \equiv a^{1+\ell(p-1)} \equiv a \mod p$ et, de même, que $b^m \equiv b \mod p$. Ainsi, $a^m + P(m) \equiv a + P(n) \equiv 0 \mod p$, donc p divise $a^m + P(m)$, et divise aussi $b^m + P(m)$. Ainsi, p divise $b + P(n)$ et $a + P(n)$, donc divise $b-a$. Comme $p > |b-a|$, on en conclut que $b = a$.

Et si jamais, par malchance, on était tombé sur un cas où $a^m + P(m) = 0$, il suffit de remplacer m par un nombre de la forme $m + kp(p-1)$, avec k arbitrairement grand.

Solution de l'exercice 21
L'idée ici est que la fonction $*^k$ est p-périodique modulo p, tandis que la fonction k^* est essentiellement $p-1$-périodique modulo p. On s'attend donc à avoir, d'une façon ou d'une autre, une notion de $p(p-1)$-périodicité que l'on va pouvoir utiliser pour simplifier et découper par paquets de taille $p(p-1)$ la somme totale, dans certains cas. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on va donc noter

$$f(n) = 1^n + 2^{n-1} + \dots n^1.$$

On introduit le lemme suivant, sur lequel repose le problème.

Lemme 9. Pour tout entier naturel n, on a $f(n+p(p-1)) \equiv f(n) - 1 \mod p$.

Démonstration. On calcule directement :

$$\begin{aligned} f(n+p(p-1)) &\equiv \sum_{i=1}^{n+p(p-1)} i^{n-i+p(p-1)} \mod p \\ &\equiv \sum_{\substack{i=1 \\ p\nmid i}}^{n+p(p-1)} i^{n-i+p(p-1)} \mod p \\ &\equiv \sum_{\substack{i=1 \\ p\nmid i}}^{n} i^{n-i} \mod p \\ &\equiv f(n) + \sum_{\substack{i=n+1 \\ p\nmid i}}^{n+p(p-1)} i^{n-i} \mod p. \end{aligned}$$

Il nous reste encore à expliciter le membre de gauche. Pour ça on remarque que quand i parcourt $[\![n+1, n+p(p-1)]\!]$, le couple $(i, n-i)$ parcourt exactement $[\![0, p-1]\!] \times [\![0, p-2]\!]$ (modulo p et $p-1$). On en déduit que :

$$\sum_{i=n+1}^{n+p(p-1)} i^{n-i} \equiv \sum_{k=0}^{p-2} \sum_{i=0}^{p-1} i^k \equiv -1 \mod p,$$

puisqu'il est connu que p divise $1^k + 2^k + \dots + (p-1)^k$ si $1 \leqslant k \leqslant p-2$! □
Finalement le lemme rend clair que f est surjective modulo p, et atteint donc le reste 2020, ce qui conclut !

Solution de l'exercice 22

Posons $a = bq + r$ la division euclidienne de a par b. On peut commencer par montrer que $q \geqslant b$, ce qui est très proche du résultat. La division de l'énoncé implique que $a \geqslant b$ et donc que $q \geqslant 1$. On a ensuite que

$$0 \equiv 3^a + 2 = (3^b)^q \cdot 3^r + 2 \equiv (-2)^q 3^r + 2 \equiv (-2)^q 3^r - 3^b \mod 3^b + 2.$$

Puisque $b > 0$, $3^b + 2$ est premier avec 3^r, on peut donc simplifier la divisibilité :

$$3^b + 2 \mid (-2)^q 3^r - 3^b \quad \Longrightarrow 3^b + 2 \mid (-2)^q - 3^{b-r}.$$

A partir de là, on distingue deux cas :

— Si $r \neq 0$, alors on montre que $q \geqslant b$, cela conduit bien à $a > b^2$. En effet, si $q \leqslant b - 1$, alors, comme $r \geqslant 1$, on déduit de la divisibilité ci-dessus que

$$3^b + 2 \leqslant |(-2)^q - 3^{b-r}| \leqslant 2^{b-1} + 3^{b-r} \leqslant 3^{b-1} + 3^{b-1},$$

ce qui est absurde.

— Si $r = 0$, alors on montre que $q > b$. Tout d'abord, $q \neq 1$ car a et b sont distincts. Le nombre $(-2)^q + 2$ est alors non nul. Si $q \leqslant b$, on a dans la congruence ci-dessus $3^b + 2 \mid (-2)^q 3^0 + 2 = (-2)^q + 2$, d'où

$$3^b + 2 \leqslant |(-2)^q + 2| \leqslant 2^q + 2 < 3^q + 2 \leqslant 3^b + 2,$$

ce qui est absurde.

Dans les deux cas, on trouve que $a > b^2$.

Solution de l'exercice 23

On va montrer le résultat dans un contexte un peu plus général : on va montrer que les images de 3^k entiers naturels consécutifs prennent des valeurs différentes modulo 3^k. On procède pour cela par récurrence sur k.

— **Initialisation :** C'est effectivement clair si $k = 0$.

— **Hérédité :** Soit k un entier naturel pour lequel notre propriété est vérifiée. Un premier objectif est de comprendre pourquoi $f(n+3^k)$ et $f(n)$ ne sont pas congrus modulo 3^{k+1}. On télescope pour cela l'égalité de récurrence en écrivant que :

$$f(n+3^k) - f(n) = 2^{f(n)} + 2^{f(n+1)} + \cdots + 2^{f(n+3^k-1)}.$$

Pour calculer la somme de gauche modulo 3^{k+1}, il s'agit de remarquer que l'ordre de 2 modulo 3^{k+1} vaut exactement 2×3^k par LTE. Il suffit donc de connaître les $f(n+i)$ modulo 2×3^k pour espérer expliciter la somme. Heureusement pour nous, ils sont tous impairs donc on les connaît modulo 2, et on les connaît modulo 3^k par hypothèse de récurrence. On peut donc dire que :

$$\begin{aligned} 2^{f(n)} + 2^{f(n+1)} + \cdots + 2^{f(n+3^k-1)} &\equiv 2^1 + 2^3 + \cdots + 2^{2\times 3^k - 1} \mod 3^{k+1} \\ &= \underbrace{2 \times \frac{4^{3^k}-1}{3}}_{:=C} \mod 3^{k+1}. \end{aligned}$$

Maintenant par LTE on sait que $v_3(C) = 3^k$, de sorte que C n'est pas nul modulo 3^{k+1}. Cela permet de conclure puisque pour tout entier naturel n, les nombres $f(n)$, $f(n+3^k)$ et $f(n+2\times 3^k)$ prennent les trois résidus distincts modulo 3^{k+1} qui sont congrus à $f(n)$ modulo 3^k !

Il ne reste alors plus qu'à prendre $k = 2026$ et $n = 1$ pour retrouver l'énoncé !

Solution de l'exercice 24
Réponse : Le seul couple (a, b) solution est $(1, 1)$.

Soit (a, b) un couple solution. Prenons k un entier strictement positif et $n = k\varphi(ab+1) - 1$. Notons que les nombres a et $ab + 1$ sont premiers entre eux. Ainsi, en notant a^{-1} l'inverse de a modulo $ab + 1$ et en utilisant le théorème d'Euler,

$$a^n + b = a^{k\varphi(ab+1)}a^{-1} + b \equiv a^{-1} + b = a^{-1}(1 + ab) \equiv 0 \mod ab + 1.$$

De la même façon, $ab + 1 \mid b^n + a$. Ainsi, il existe une infinité d'entiers n tels que $ab + 1 \mid \text{PGCD}(a^n + b, b^n + a)$. En particulier, $ab + 1$ divise g. Pour un entier n suffisamment grand, on déduit que $ab + 1$ divise $a^n + b$ et $a^{n+1} + b$. On a donc

$$ab + 1 \mid a^{n+1} + b - (a^n + b) = a^n(a - 1).$$

Puisque $ab+1$ est premier avec a^n, on déduit que $ab+1$ divise $a-1$. Or, $ab+1 > a-1 \geqslant 0$. On déduit que $a = 1$. De la même façon, on prouve que $b = 1$.

Réciproquement, on vérifie que pour $a = 1$ et $b = 1$, on a $a^n + b = b^n + a = 2$, de sorte que le couple $(1, 1)$ est bien solution du problème.

Solution de l'exercice 25

On suppose $x > 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. On va montrer que l'ensemble des $p \not\equiv 1 \pmod{2^\alpha}$ divisant un des termes de la suite $(2^n y + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est fini. Soit p un tel nombre premier. Si p divise $2^n y + 1$, p divise $x^{2^n} - 1$, donc l'ordre de x modulo p divise 2^n, et est donc de la forme 2^β, $\beta \leqslant n$. De plus, par Fermat $2^\beta \mid p - 1$, et comme $p \not\equiv 1 \pmod{2^\alpha}$, $\beta < \alpha$. Donc l'ordre de x modulo p divise $2^{\alpha-1}$, et donc p divise $x^{2^{\alpha-1}} - 1$. Il y a alors clairement un nombre fini de tels p.

Prenons $\alpha = v_2(y) + 1$, et notons E l'ensemble fini des premiers non congrus à 1 modulo 2^α divisant un des termes de la suite $2^n y + 1$. Ecrivons $y + 1 = \prod_{p\in E} p^{v_p(y+1))} \cdot N$, avec chaque diviseur premier de N congru à 1 modulo 2^α. Posons $m = \prod_{p\in E} \phi(p^{v_p(y+1)+1})$. Alors pour tout $p \in E$, $p^{v_p(y+1)}$ divise $2^m y+1$ par Euler, mais $p^{v_p(y+1)+1}$ ne divise pas $2^m y+1$ sinon ça diviserait $y + 1$ par Euler, absurde. On peut donc écrire $2^m y + 1 = \prod_{p\in E} p^{v_p(y+1)} \cdot N'$, avec chaque diviseur premier de N' congru à 1 modulo 2^α. Clairement $N \equiv N' \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$, et donc $y+1 \equiv 2^m y+1 \pmod{2^\alpha}$. Or $2^m y + 1 \equiv 1 \pmod{2^\alpha}$ puisque $m > 0$, et donc $2^\alpha \mid y + 1 - 1 = y$, absurde car $\alpha > v_2(y)$. C'est absurde, donc on a bien $x = 1$.

Solution de l'exercice 26

On va montrer que tous les b recherchés sont ceux tels que $b+1$ n'est pas une puissance de 2.

D'abord, soit b tel que $b+1$ n'est pas une puissance de 2.

Clairement 1 est solution. Ensuite, si n est solution, on peut prendre p un facteur premier primitif impair de b^n+1.

Ce facteur premier primitif existe d'après le théorème de Zsigmondy ($b>2$, donc pas de problème avec les exceptions), et si $2 \mid b^n+1$, $2 \mid b+1$, donc 2 n'est pas primitif sauf si $n=1$, auquel cas on peut trouver un autre facteur primitif puisque $b+1$ n'est pas une puissance de 2.

Alors np est aussi solution. En effet, $n^2 \mid b^n+1 \mid b^{np}+1$, car p est impair, et $p \mid b^n+1$ donc par LTE $p \mid b^{np}+1$. Comme p et n sont premiers entre eux (c'est une propriété connue des facteurs premiers primitifs que $p \equiv 1 \pmod{n}$, on montre facilement que l'ordre de b modulo p vaut $2n$), on a bien $(np)^2 \mid 2^{np}+1$.

Donc on a bien une infinité de tels n dans ce cas, et b est solution.

Maintenant, si $b+1$ est une puissance de 2, supposons qu'on ait un tel n différent de 1. Notons p son plus petit facteur premier. Alors $p \mid n^2 \mid b^n+1 \mid b^{2n}-1$, donc l'ordre de b modulo p divise $2n$, mais comme il divise aussi $p-1$, par minimalité de p il est premier avec n. Donc cet ordre divise 2, il vaut 1 ou 2.

S'il vaut 1, $b \equiv 1 \pmod{2}$, et donc $p \mid b^n+1$ implique $p \mid 2$ et donc $p=2$. S'il vaut 2, $p \mid b+1$ et donc $p=2$ puisque $b+1$ est une puissance de 2.

Dans tous les cas $p=2$, donc $4 \mid n^2 \mid b^n+1$. Or n est pair, donc b^n est un carré et est congru à 0 ou 1 modulo 4, absurde. Donc dans ce cas b n'est pas solution.

Solution de l'exercice 27
Soit k un multiple de $\varphi(2023)$, soit $\ell = (10^k - 1)/2023$. Nous allons démontrer que ℓ est une solution. Pour ce faire, on introduit l'ensemble

$$\Omega = \{2023n \colon 1 \leqslant n \leqslant \ell\}.$$

Les éléments de Ω décrivent précisément l'ensemble des résidus modulo $10^k - 1$ qui sont des multiples de 2023, chaque résidu étant obtenu exactement une fois. Par conséquent, l'application $\phi \colon x \mapsto 10x$, qui définit une permutation de $\mathbb{Z}/(10^k - 1)\mathbb{Z}$, définit aussi une permutation de l'ensemble des résidus qui sont des multiples de 2023, et induit donc une permutation de Ω lui-même. Concrètement, si l'on écrit les éléments de Ω en base 10 avec k chiffres (quitte à laisser des 0 en apparence inutiles sur la gauche), ϕ envoie $\overline{a_{k-1}a_{k-2}\dots a_1a_0}^{10}$ sur $\overline{a_{k-2}a_{k-3}\dots a_1a_0a_{k-1}}^{10}$.

Pour tout chiffre c et tout entier i tel que $0 \leqslant i \leqslant k-1$, on note $\Omega(c,i)$ l'ensemble des éléments de Ω dont le chiffre a_i, de poids 10^i, est égal à c ; on pose abusivement $\Omega(c,k) = \Omega(c,0)$. Lorsque $0 \leqslant i \leqslant k-1$, la bijection ϕ induit une bijection de $\Omega(c,i)$ vers $\Omega(c,i+1)$. Ainsi, les ensembles $\Omega(c,0), \Omega(c,1), \dots, \Omega(c,k-1)$ sont tous de même cardinal, et

$$\mathsf{d}_c(\ell) = |\Omega(c,0)| + |\Omega(c,1)| + \dots + |\Omega(c,k-1)| = k\,|\Omega(c,0)|.$$

Or, $\Omega(c,0)$ est formé des nombres $2023n$ pour lesquels $1 \leqslant n \leqslant \ell$ et $c \equiv 3n \pmod{10}$. Puisque $\ell \equiv -1/3 \equiv 3 \pmod{10}$, on en déduit que $|\Omega(c,0)|$ vaut $(\ell+7)/10$ si c vaut 3, 6 ou 9, et vaut $(\ell-3)/10$ sinon. Cela signifie que les cardinaux $|\Omega(c,0)|$ prennent exactement deux valeurs lorsque c varie de 1 à 9, et donc que les entiers $\mathsf{d}_c(\ell)$ prennent eux aussi deux valeurs.

Solution de l'exercice 28

Soit f un tel polynôme. On écrit $f = X^\alpha Q$, avec $Q(0) \neq 0$. Montrons que Q est constant. D'après le lemme de Schur, il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ et $q > |P(0)|$ premier supérieur à 5 tel que $q \mid Q(\alpha)$. $q \nmid \alpha$, sinon on aurait $q \mid Q(0)$ et donc $Q(0) = 0$ ou $q \leqslant |Q(0)|$, absurde. Prenons $p \equiv -1 \pmod{q-1}$, $p \equiv \alpha \pmod{q}$, ce qui est possible par lemme chinois et Dirichlet. Alors $q \mid Q(p) \mid f(p) \mid 2^p - 2 = 2(2^{p-1} - 1)$, et donc $q \mid 2^{p-1} - 1$ car q impair. Donc l'ordre de 2 modulo q divise $p-1$ et $q-1$, et donc leur pgcd. Or $p-1$ est congru à -2 modulo $q-1$, donc le pgcd de $p-1$ et $q-1$ divise 2. Donc l'ordre de 2 modulo q divise 2, et donc $q \mid 2^2 - 1 = 3$, absurde car $q \geqslant 5$. Donc Q est constant. De plus $\alpha \leqslant 1$, puisque $3^\alpha \mid f(2) \mid 2^3 - 2 = 6$. Si $\alpha = 1$, $3Q(3) = f(3) \mid 6$, donc $Q(3) \mid 2$ et donc Q est constant égal à ± 1 ou ± 2. Si $\alpha = 0$, $Q(3) = f(3) \mid 6$, donc Q est constant égal à ± 1 ou ± 2 ou ± 3 ou ± 6. On a donc 12 solutions potentielles : $\{\pm X, \pm 2X, \pm 1, \pm 2 \pm 3 \pm 6\}$. Pour tout premier impair, $2 \mid 2^p - 2$, et $3 \mid 2^p - 2$, donc ces 8 constantes conviennent bien. Par Fermat $p \mid 2^{p-1} - 1$ pour tout premier impair, et $2 \mid 2$, donc les 4 polynômes linéaires conviennent aussi. Donc réciproquement ces 12 polynômes sont bien solutions.

Solution de l'exercice 29

Soit f une solution. Comme les valeurs de f sont premières entre elles dans leur ensemble, si f est constante, elle est égale à 1, ce qui est exclu.

Avec $a = 1$, on voit que $f(1)^n \mid f(b+1) - f(b)$ pour tout $b \geqslant 1$ et tout n assez grand. Comme f est non constante, il existe b tel que $f(b+1) \neq f(b)$. Il s'ensuit que $f(1) = 1$.

Pour $a \geqslant 2$, il existe un $t \geqslant 0$ tel que $f(1 + (t+1)a) \neq f(1 + ta)$ (car, pour tout t assez grand, $f(1+ta) \neq 1 = f(1)$). Ainsi si $b = 1 + ta$, pour tout $n \geqslant 1$ assez grand, $f(a)^n$ divise $f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}$.

Soit p un nombre premier divisant $f(a)$. Alors il existe un $l \geqslant 1$ tel que $p \mid f(a+b)^{a^l} - f(b)^{a^l}$. Pour $n > l$, par LTE, la valuation p-adique de $f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}$ vaut $v_p(a^{n-1-l}) + C$ pour une certaine constante C qui ne dépend que de f, a, b et l (et donc pas de n).

Donc pour $n > l$ assez grand, $v_p(a^{n-1-l}) + C \geqslant v_p(f(a)^n)$ donc $(n-1-l)v_p(a) \geqslant nv_p(f(a))$, d'où $v_p(f(a)) \leqslant v_p(a)$.
Par conséquent, pour tout $a \geqslant 1$ on a $f(a) \mid a$.
En particulier, si a est premier, $f(a)$ vaut 1 ou a, et est égal à a sauf pour un nombre fini de nombres premiers.

Soit a un nombre premier tel que $f(a) = a$: pour tout $b \geqslant 1$ et tout n assez grand, $a^n \mid f(a+b)^{a^{n-1}} - f(b)^{a^{n-1}}$. En particulier, $f(a+b) \equiv f(b) \mod a$: ainsi, la classe de congruence de $f(b)$ modulo a ne dépend que de b modulo a.

On va montrer que f est l'identité. Soit $u \geqslant 2$, ainsi que $\mathcal{P}$ l'ensemble fini des nombres premiers p tels que $p \leqslant u$ ou $f(p) = 1$. Supposons qu'il existe un nombre premier $q \notin \mathcal{P}$ et un entier n tels que $q \mid n - u$ et $f(n) = n$.

Alors $q \mid f(n) - f(u)$, et donc $q \mid n - f(u)$, d'où $q \mid u - f(u)$. Comme $\leqslant u - f(u) \leqslant u < q$, on en déduit que $f(u) = u$.
On propose trois méthodes, de la plus élémentaire à la moins élémentaire, d'exhiber un tel couple (q, n).

Première méthode (complètement élémentaire) : Soit Π le produit des nombres premiers de $\mathcal{P}$, et soit $N \geqslant 1$ tel que pour tout $p \in \mathcal{P}$, p^N ne divise pas $u - 1$.

Supposons que $n < \Pi^N + u$ soit congru à 1 modulo Π^N et tel que $f(n) = n$. Alors, si $p \in \mathcal{P}$, $v_p(n-u) < N$ et $n - u > \Pi^N$, de sorte que $n - u$ possède un diviseur premier $q \notin \mathcal{P}$ et on a gagné.

Soit n un produit de nombres premiers deux à deux distincts, tous hors de $\mathcal{P}$. Alors, si $p \mid n$ est un diviseur premier, on a$n \equiv p \mod p$ et $f(p) = p$, donc $p \mid f(n) - f(p)$, d'où $p \mid f(n)$. Comme $f(n) \mid n$, on en déduit finalement que $f(n) = n$.

Comme il existe une infinité de nombres premiers, il existe une progression arithmétique C de raison Π^N et de premier terme premier à Π et contenant une infinité de nombres premiers. En prenant pour n le produit de $\varphi(\Pi^N)$ premiers $q \in C$ tels que $q > \Pi^N + u$, n convient.

Deuxième méthode (quelques prérequis) : On reprend les notations et le raisonnement de ce qui précède : on cherche à construire un entier $n > \Pi^N + u$ congru à 1 modulo Π^N tel que $f(n) = n$.

Il est connu (du moins, classique et relativement élémentaire) que si ϕ_{Π^N} est le Π^N-ème polynôme cyclotomique, il existe une infinité de nombres premiers n divisant une valeur de

ϕ_{Π^N}, et ceux qui ne sont pas dans $\mathcal{P}$ sont congrus à 1 modulo Π^N et vérifient $f(n) = n$. On peut donc en choisir un qui est strictement supérieur à $\Pi^N = U$.

Troisième méthode (Dirichlet) : Pour $q \notin \mathcal{P}$ un premier, on a $f(q) = q$. D'après le théorème de Dirichlet, il existe un nombre premier $p > u + q$ congru à u modulo q tel que $f(p) = p$. Alors le couple (q, p) convient.

Ainsi l'identité est la seule solution potentielle. Réciproquement, l'identité vérifie la première condition et si $a, b \geqslant 1$ et $n \geqslant 2$, alors par LTE, pour tout nombre premier p divisant a on a $v_p((a+b)^{a^{n-1}} - b^{a^{n-1}}) \geqslant v_p(a) + v_p(a^{n-1}) = v_p(a^n)$, donc $a^n \mid (a+b)^{a^{n-1}} + b^{a^{n-1}}$ et donc l'identité est solution.

Solution de l'exercice 30

Déjà notons que la suite est bien définie : si $a_1, \dots, a_n$ sont construits, comme a_n est premier avec $\rho(a_n)$, il existe une infinité d'entiers k tels que $a_k^n \equiv 1 \pmod{\rho(a_n)}$ qui sont tous les multiples de l'ordre de a_n modulo $\rho(a_n)$. En particulier, il existe au moins un de ces entiers n'apparaissant pas parmi $a_1, \dots, a_n$, donc a_{n+1} existe bien.

Notons que chaque entier apparaissant au plus une fois dans la suite par construction. Il faut donc montrer que tous apparaissent au moins une fois. Supposons qu'il existe un entier N n'apparaissant pas dans la suite (a_n), on prend alors N minimal. On note N_0 un entier tel que si $n \geqslant N_0$, $a_n \geqslant N$.

Montrons que pour tout premier q, il existe un nombre fini de n tels que $\rho(a_n) = q$. Supposons que ce n'est pas le cas, et fixons q un nombre premier tel que $\rho(a_n) = q$ pour une infinité de n. On se donne alors $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $\rho(a_{\phi(n)}) = q$. Notons alors que tout multiple de $q-1$ apparaît : en effet si on fixe M un multiple de $q-1$, alors comme les $a_{\phi(n)} + 1$ sont deux à deux distincts, il existe n tel que $a_{\phi(n)+1} > M$. Or comme $q-1$ divise M, $a_{\phi(n)}^M \equiv 1 \pmod{q-1}$ par petit Fermat, ce qui contredit la définition de $a_{\phi(n)+1}$ si M n'apparaît pas dans la suite.

Ainsi tous les multiples de $q-1$ apparaissent. On note $p_1 < \cdots < p_k$ les nombres premiers strictement inférieurs à q. On sait que pour tout $j \geqslant 1$, $(p_1 \dots p_k)^{j(q-1)}$ est congru à 1 modulo q, divisible par $q-1$ pour j assez grand (car tous les facteurs de $q-1$ sont parmi $p_1, \dots, p_k$) donc apparaît dans la suite, et vérifie $\rho((p_1 \dots p_k)^{j(q-1)}) = q$. Comme il y a une infinité de tels termes, il existe $N_1 > N_0$ tel que $a_{N_1} = (p_1 \dots p_k)^{j(q-1)}$ pour j assez grand, ainsi $a_{N_1}^N \equiv 1 \pmod{q}$, ce qui contredit le fait que $a_{N_1+1} > N$.

Ainsi on a bien prouvé que pour tout premier q, il existe un nombre fini de n tels que $\rho(a_n) = q$. En particulier, pour tout $M \in \mathbb{N}$, comme la suite $(\rho(a_n))$ prend un nombre fini de fois chaque valeurs entrer1 et M, à partir d'un certain rang $\rho(a_n) > M$, donc $(\rho(a_n))$ tend vers $+\infty$

En particulier, pour tout k, à partir d'un certain rang $p_1, \dots, _k$ divisent a_n. Soit k et m tels que $p_1, \dots, p_k$ divise a_m, p_{k+1} ne divise pas a_m, et p_{k+1} divise a_{m+1}. On pose $a_{m+1} = p_1 \dots p_{k+1}^b \ell$ avec $b \geqslant 1$ et ℓ premier avec p_{k+1}. On a alors $\rho(a_m) = p_{k+1}$ et $a_n^{p_1 \dots p_k p_{k+1}^b \ell} \equiv 1 \pmod{p)_{k+1}}$. Or par petit Fermat, $a_n^{p_1 \dots p_k p_{k+1}^b \ell} \equiv a^{p_1 \dots p_k \ell} \pmod{p)_{k+1}}$, donc pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant p_k - 1$ on a $a^{ip_1 \dots p_k \ell} \pmod{p_{k+1}}$. Ainsi pour tout $1 \leqslant i \leqslant p_k - 1$, le nombre $ip_1 \dots p_k \ell$ apparaît dans la suite (a_n). En prenant i un inverse de $p_1 \dots p_k \ell$ modulo $p_{k+1} - 1$ dans $\{1, \dots, p_{k+1} - 1\}$, on a alors que $(ip_1 \dots, p_k \ell)N \equiv N \pmod{p_{k+1}}$, donc si $a_n \equiv ip_1 \dots p_k$, alors $a_{n+1} < N$, donc $n \leqslant N_0$. Ainsi si de tels k et m existent alors p_k divise $a_1 \dots a_{N_0+1}$ donc k est borné. Or pour tout $K \in \mathbb{N}$, on peut trouver $k \geqslant K$ et m tels que $p_1 \dots p_k$ divise a_m et p_{k+1} ne divise pas a_m et $p_1 \dots p_{k+1}$ divise a_n pour tout $n \geqslant m+1$ (donc aussi a_{m+1}). En effet, notons pour tout $k \geqslant 1$ r_k le premier rang à partir duquel $p_1 \dots p_k$ divise a_n. La suite (r_j) est croissante et ne peut eêtre stationnaire sinon un a_n serait divisible par tous les nombres premiers. Donc elle tend vers $+\infty$, pour tout K, il existe $k \geqslant K$ tel que $r_{k+1} > r_k$. Ainsi $a_{r_k+1} - 1$ est divisible par $p_1 \dots p_k$ car $r_{k+1} - 1 \geqslant r_k$ et pas par p_{k+1}.

Mais tous les termes après r_{k+1} sont divisibles par $p_1 \dots p_{k+1}$ donc $m = r_{k+1} - 1$ convient. On a donc bien obtenu que pour tout $K \in \mathbb{N}$, on peut trouver $k \geqslant K$ et m tels que $p_1 \dots p_k$ divise a_m, p_{k+1} ne divise pas a_m et $p_1 \dots p_{k+1}$ divise a_n pour tout $n \geqslant m+1$, donc on a abouti à une contradiction. Ainsi chaque entier apparaît une unique fois dans la suite.

Solution de l'exercice 31

(a) En regardant les petits cas à la main (par exemple $k \leqslant 5$ et $n \leqslant 40$), on peut en venir à formuler les hypothèses suivantes, que l'on s'empressera ensuite de vérifier.

Super heuristique :
Disons qu'un entier n est (a,b)-*ascendant* lorsque $f_a(n) \leqslant f_{a+1}(n) \leqslant \cdots \leqslant f_b(n)$. On peut espérer trouver des entiers n et k tels que $n \leqslant 2^{k+1}-2$ et pour lesquels n est $(1,k)$-ascendant ; on aura ensuite $f_i(n) \leqslant f_{i+1}(n) = n$ pour tout $i \geqslant k$, et n sera bien ascendant.

Pour trouver des entiers (a,b)-ascendants, on peut soit commencer par regarder les entiers $(a,a+1)$-ascendants, puis identifier parmi eux les entiers $(a,a+2)$-ascendants, etc. Ou alors partir des entiers $(b-1,b)$-ascendants, puis identifier les entiers $(b-2,b)$-ascendants, etc.

En suivant cette seconde approche, on constate empiriquement que l'intervalle $\{2^b - 1, \ldots, 2^{b+1}-2\}$ contient 2^a-1 entiers (a,b)-ascendants consécutifs, dont le premier est un multiple de 2^a-1. Le résultat souhaité correspond à cette propriété pour $a=1$. En essayant de démontrer cette propriété par récurrence descendante sur a, et en notant x_a le plus petit élément de cette suite de 2^a-1 entiers consécutifs, on aboutit au raisonnement suivant.

On fixe un entier $k \geqslant 1$ et on construit la suite $x_k \leqslant x_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1$ de la façon suivante : $x_k = 2^k - 1$ et, pour tout indice $i \leqslant k$, x_i est le plus petit entier supérieur ou égal à x_{i+1} et divisible par $2^{i+1}-1$. Montrons que l'entier $n = x_1$ obtenu est ascendant.

Pour tout i, on note m_i l'entier tel que $x_i = (2^i-1)m_i$, de sorte que, puisque $x_k \leqslant x_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant x_1$,

$$(2^k-1)m_k \leqslant (2^{k-1}-1)m_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant m_1 = x_1.$$

D'autre part, l'hypothèse de minimalité sur x_i implique que $x_i \leqslant x_{i+1} + 2^i - 2$. Par télescopage, on trouve que, pour tout indice $i \geqslant 1$,

$$x_1 \leqslant x_i + (2^1-2) + (2^2-2) + \ldots + (2^{i-1}-2) = x_i + 2^i - 2i < (2^i-1)(m_i+1).$$

En résumé, pour tout indice i, x_1 satisfait l'encadrement $x_i = (2^i-1)m_i \leqslant x_1 < (2^i-1)(m_i+1)$, ce qui implique que $\boxed{f_i(n) = x_1 - x_i}$. Puisque la suite des x_i est croissante, la suite des $f_i(n)$ est croissante, comme voulu.

Enfin, si $\ell > k$, on trouve que $x_1 < (2^k-1)(m_k+1) = 2(2^k-1) < 2^\ell - 1$, ce qui implique que $\boxed{f_\ell(n) = n}$. On a donc $f_1(n) \leqslant \ldots \leqslant f_k(n) \leqslant f_{k+1}(n) = f_{k+2}(n) = \ldots$, ce qui implique bien que n est ascendant.

Comme ce processus, initialisé à $x_k = 2^k - 1$ donne un entier ascendant inférieur à $2^{k+1}-1$ quel que soit l'entier k, on obtient ainsi une infinité d'entiers ascendants.

(b) L'affirmation clé, que l'on peut deviner en observant la répartition des entiers ascendants parmi les premiers entiers (chercher à travailler en base 2 peut ici être utile), est la suivante :

Lemme : Soit $k \geqslant 1$ et $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$ un entier ascendant. Alors $n \geqslant 2^{k+1} - 3 \cdot 2^{k/2}$.

Dans la pratique, une fois que l'on a conjecturé une borne de ce type, on peut commencer par regarder si elle permet de conclure le problème. Supposons ici le lemme démontré et montrons l'exercice.

Soit $M = 2^{b+1}$. D'après le lemme, pour tout entier $k \leqslant b$, le nombre d'entiers ascendants compris entre 2^k et $2^{k+1}-1$ est inférieur à $2^{k/2}$. Ainsi, le nombre total de nombres ascendants inférieurs ou égaux à M est inférieur à

$$3\sum_{k=0}^{b} 2^{k/2} = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}^{b+1}-1}{\sqrt{2}-1} < \frac{3}{\sqrt{2}-1} 2^{\frac{b+1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}-1}\sqrt{M}.$$

Lorsque M est suffisamment grand, on a $\dfrac{3}{\sqrt{2}-1}\sqrt{M} < \dfrac{M}{2025^{2025}}$, de sorte que le nombre d'entiers ascendants inférieurs à M est bien plus petit que $\dfrac{M}{2025^{2025}}$.

On passe à la preuve du lemme :

Preuve du lemme : Notons $x_k, x_{k-1}, \ldots, x_1$ la suite définie dans la question (a) et prenons n un entier ascendant. L'idée est d'une part de montrer que $x_i \leqslant n - f_i(n)$ et d'autre part de montrer que x_i est grand lorsque $i \geqslant k/2$, ce qui permet de conclure.

Prouvons par récurrence descendante sur i que $x_i \leqslant n - f_i(n)$ pour tout $i \leqslant k$.

Initialisation : Puisque $n > 2^k - 1$, on a que $n \geqslant 2^k - 1 + f_k(n)$, donc $n - f_k(n) \geqslant 2^k - 1 = x_k$.

Hérédité : Supposons avoir démontré que $n - f_{i+1}(n) \geqslant x_{i+1}$ pour un certain $i < k$. Par ascendance de n, $n - f_i(n) \geqslant n - f_{i+1}(n) \geqslant x_{i+1}$. Donc $n - f_i(n)$ est un multiple de $2^i - 1$ qui est supérieur à x_{i+1}. Par minimalité de x_i pour cette propriété, on trouve $n - f_i(n) \geqslant x_i$, ce qui achève la récurrence.

On a donc bien $\boxed{x_i \leqslant n - f_i(n) \text{ pour tout } i \leqslant k}$.

Montrons à présent que $x_i = (2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1)$ pour tout $k/2 \leqslant i \leqslant k$. On procède également par récurrence descendante sur k.

Initialisation : On a $x_k = (2^k - 1)(2^1 - 1)$.

Hérédité : Supposons avoir montré que $x_{i+1} = (2^{i+1} - 1)(2^{k-i} - 1)$ pour un certain $i < k$. On observe que

$$(2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1) - x_{i+1} = (2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1) - (2^{i+1} - 1)(2^{k-i} - 1) = 2^i - 2^{k-i}.$$

Puisque $k/2 \leqslant i$, $0 \leqslant 2^i - 2^{k-i} < 2^i - 1$, ce qui signifie que $(2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1)$ est le plus petit multiple de $2^i - 1$ supérieur à x_{i+1}, d'où $\boxed{x_i = (2^i - 1)(2^{k+1-i} - 1)}$, ce qui achève la récurrence.

Ainsi, pour $i = \lceil k/2 \rceil$, on trouve

$$n \geqslant n - f_{\lceil k/2 \rceil} \geqslant x_{\lceil k/2 \rceil} = (2^{\lceil k/2 \rceil} - 1)(2^{k+1-\lceil k/2 \rceil} - 1).$$

Après développement, pour montrer que $n \geqslant 2^{k+1} - 3 \cdot 2^{k/2}$, il suffit de montrer que $2^{\lceil k/2 \rceil} + 2^{k+1-\lceil k/2 \rceil} \leqslant 3 \cdot 2^{k/2}$. Lorsque k est pair, on a en fait égalité. Lorsque $k = 2\ell + 1$ est impair, on a bien $2^{\ell+1} + 2^{\ell+1} = 2\sqrt{2} \cdot 2^{\ell+1/2}$. L'inégalité annoncée est donc vraie, ce qui conclut le lemme. □

Solution n°2 de l'exercice 31

On propose une seconde preuve de la partie (b), basée sur l'heuristique suivante.

Super heuristique :
Supposons naïvement que les restes $f_i(n)$ d'un entier n pris « au hasard » soient indépendants. Dès lors, n a une probabilité environ $1/4$ de satisfaire l'inégalité $f_i(n) > f_{i+1}(n)$. En effet, il faut tout d'abord que $f_{i+1}(n) < 2^i - 1$, et ensuite que, les entiers $f_i(n)$ et $f_{i+1}(n)$ étant pris au hasard parmi $0, 1, \ldots, 2^i - 2$, le premier soit plus grand que le second. Plus généralement, et pour les mêmes raisons, n a une probabilité environ $1/2^{k+1}$ de satisfaire l'inégalité $f_i(n) > f_{i+k}(n)$.

Dès lors, il s'agit simplement de donner un sens à cette notion de hasard, puis à évaluer précisément les probabilités concernées. Ici, il s'agit de s'assurer que les entiers $a_i = 2^i - 1$ et $b_i = 2^{i+k} - 1$ considérés sont premiers entre eux, ce qui permettra d'utiliser le théorème des restes Chinois ; choisir un entier « au hasard » reviendra à choisir ses restes modulo a_i et b_i indépendamment, c'est-à-dire à choisir n modulo le produit des entiers a_i et b_i.

Mettons maintenant en œuvre l'heuristique ci-dessus. On dit qu'un reste $0 \leqslant r \leqslant d - 1$ est *bloquant modulo* d si aucun entier ascendant n ne vérifie $n \equiv r \mod d$, et qu'il n'est pas bloquant sinon.

Lemme : Soient $a < b$ deux entiers premiers entre eux. Il y a au moins $\binom{2^a-1}{2}$ restes bloquants modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$.

Preuve du lemme : Il est classique que $\mathrm{PGCD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{PGCD}(a,b)} - 1$, ce qui ici implique que $\mathrm{PGCD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 1$.

Soient $0 \leqslant j < i \leqslant 2^a - 2$ deux entiers. Si n est ascendant, il ne peut donc vérifier $n \equiv i \mod 2^a - 1$ et $n \equiv j \mod 2^b - 1$. D'après le théorème des restes chinois, il existe un unique entier r modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$ tel que $r \equiv i \mod 2^a - 1$ et $r \equiv j \mod 2^b - 1$, et cet entier est donc bloquant.

Ainsi, puisqu'à toute paire ordonnée (i, j) d'entiers de $[\![0, 2^a - 2]\!]$, on peut associer de façon injective un reste bloquant modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$, il y a au moins $\binom{2^a-1}{2}$ restes bloquants modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$. □

Notons que le lemme implique que si a et b sont premiers entre eux, la proportions de restes non bloquants modulo $(2^a - 1)(2^b - 1)$ est au plus

$$1 - \frac{\frac{(2^a-1)(2^a-2)}{2}}{(2^a - 1)(2^b - 1)} = 1 - \frac{2^{a-1} - 1}{2^b - 1}.$$

Il faut désormais choisir $d_i = (2^{a_i} - 1)(2^{b_i} - 1)$ pour $i = 1, \ldots, \ell$, de sorte que a_i et b_i soient premiers entre eux et proches et de sorte que les d_i soient premiers entre eux deux à deux. On propose pour cela la construction suviante.

On choisit $(a_i, b_i) = (2k_i - 1, 2k_i + 1)$ (a_i et b_i sont donc premiers entre eux) et pour que les d_i soient premiers entre eux, on choisit $k_1 = 2$ et, pour tout indice $i \geqslant 2$, l'entier k_i comme

$$k_i = (2k_1 - 1)(2k_1 + 1) \ldots (2k_{i-1} - 1)(2k_{i-1} + 1),$$

de sorte que si $j < i$, $2k_j \pm 1$ est premier avec $2k_i \pm 1$. Toujours puisque $\mathrm{PGCD}(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{\mathrm{PGCD}(a,b)} - 1$, on déduit que les $2^{2k_i \pm 1} - 1$ sont premiers entre eux deux à deux, ce qui implique que les d_i sont également premiers entre eux deux à deux.

On pose donc

$$M = d_1 \ldots d_\ell = (2^{2k_1 - 1} - 1)(2^{2k_1 + 1} - 1) \ldots (2^{2k_\ell - 1} - 1)(2^{2k_\ell + 1} - 1),$$

et on observe que, pour tout i, la proportion de restes non bloquants modulo d_i vaut au plus

$$1 - \frac{2^{2k_i-2}-1}{2^{2k_i+1}-1} = 1 - \frac{1}{8 + \frac{7}{4^{k_1-1}-1}} \leqslant \frac{28}{31}.$$

D'après le théorème des restes chinois, la proportion de restes non bloquants modulo M est alors inférieure ou égale à $\left(\frac{28}{31}\right)^\ell$. Lorsque ℓ est suffisamment grand pour vérifier $\left(\frac{28}{31}\right)^\ell < 2025^{-2025}$, on déduit qu'il y a au plus $M/2025^{2025}$ restes non bloquants modulo M et donc au plus $M/2025^{2025}$ entiers ascendants inférieurs à M.

Solution n°3 de l'exercice 31
Voilà une autre approche pour la partie b.

Lemme 10.
Dans la décomposition d'un entier stylax en base 2, il y a au plus un bit nul dans la deuxième moitié de ses bits.

On considère donc N un entier stylax assez grand et l'on écrit

$$N = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_0}^2,$$

avec $a_n = 1$. On note de plus $k \leqslant n$ le plus grand entier tel que $a_k = 0$ et on pose $N' = \overline{a_{k-1} \dots a_0}^2$.
Si $k \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ il n'y a rien à prouver, on peut donc supposer que k est plus grand que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Une première remarque est que $r_k(N) = N' + 2^{n-k} - 1$ car $N' \leqslant 2^{k-1}$ puisque $a_k = 0$.
D'un autre côté on sait aussi $r_{k-1}(N) \equiv N' + 2^{n-k+1} - 2 \mod 2^{k-1} - 1$, mais puisque $2^{n-k+1} - 2 > 2^{n-k} - 2$ cela signifie par hypothèse qu'on ne peut pas avoir égalité. Il faut donc que

$$N' + 2^{n-k+1} - 2 \geqslant 2^{k-1}.$$

Or, cette inégalité signifie que les bits $a_{k-1}, \dots, a_{n-k+2}$ de N' doivent tous valoir 1 ! Effectivement autrement on aurait pour $k - 1 \geqslant j \geqslant n - k + 2$

$$N' + 2^{n-k+1} - 2 \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} 2^i + 2^{n-k+1} - 2 - 2^j \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} 2^i - 2 = 2^{k-1} - 3.$$

Ainsi dans la partie gauche de l'écriture binaire on a donc un zéro immiscé parmi un nuage d'au moins $n - k + (k-1) - (n-k+1) = k - 2 \geqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 2$ bits égaux à 1, ce qui conclut !

On peut maintenant conclure cette question en comptant le nombre d'entiers potentiellement stylax entre $2^{n-1}+1$ et 2^n. Effectivement, si l'on se fixe un bit dans la partie droite de l'écriture binaire de $m \in [\![2^{n-1}+1, 2^n]\!]$ alors la première moitié de ses bits est automatiquement fixée et il reste $2^{\lceil n/2 \rceil}$ choix à faire pour décider de la deuxième moitié. On a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2$ façons de fixer (ou de ne pas fixer) un 0 dans cette première moitié donc on a finalement au plus

$$\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\right) 2^{\lceil n/2 \rceil} \leqslant 10 \times 2^{n/2}$$

entiers stylax entre $2^{n-1}+1$ et 2^n. En sommant on a donc au plus

$$10 \times \sum_{k=0}^{n} 2^{i/2} \leqslant 20 \times 2^{n/2}$$

entiers stylax entre 1 et 2^n, ce qui permet de conclure !

7 Algèbre : TD de niveau P1/P2 (Erik et Anatole)

Exercices

Exercice 1 (P4 2023)
Soit $x_1, \ldots, x_{2023}$ des réels strictement positifs distincts. On suppose que pour tout n,

$$a_n = \sqrt{(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}\right)}$$

est un entier. Montrer que $a_{2023} \geq 3034$.

Exercice 2 (IMO 2021, A1)
Soit A un sous-ensemble de $\{0, \ldots, 5^n\}$ de cardinal $4n+2$. Montrer qu'il existe $a < b < c$ dans A tels que $c + 2a > 3b$.

Exercice 3 (APMO 2020, P2)
Trouver le plus grand réel r tel que, si une suite d'entiers (a_n) vérifie que, pour tout n,

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

alors la suite est 2-périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 4 (A3 2019)
Soit $n \geq 3$ et $0 \leq x_1 < \ldots < x_n$ des réels de somme 2. Soit $X \subset [\![1, n]\!]$ qui minimise $|1 - \sum_{i \in X} a_i|$. Montrer qu'il existe $0 \leq y_1 < \ldots < y_n$ de somme 2 tels que $\sum_{i \in X} y_i = 1$.

Exercice 5 (IMO 2015, A1 (et P5 original))
Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout k,

$$a_{k+1} \geqslant \frac{k a_k}{a_k^2 + k - 1}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$.

Exercice 6 (IMO 2012, P2)
Soit $n \geqslant 3$ un entier, $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 \ldots a_n = 1$. Montrer que

$$(1 + a_1)(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \geq n^n$$

Exercice 7 (Iran TST 2018 P5)
Soient $2n - 1$ réels strictement positifs de somme S. Montrer qu'il existe au moins $\binom{2n-2}{n-1}$ manières d'en choisir n tels que la somme de ces n soit strictement supérieure à $\frac{S}{2}$.

Exercice 8 (RMM 2023, P5)
Soit P, Q, R, S quatre polynômes réels non constants tels que pour tout x réel, $P(Q(x)) = R(S(x))$. On suppose de plus que le degré de R divise celui de P. Montrer qu'il existe un polynôme T à coefficients réels tel que pour tout réel x, $P(x) = R(T(x))$

Solutions

Exercice 1 (P4 2023)
Soit $x_1, \ldots, x_{2023}$ des réels strictement positifs distincts. On suppose que pour tout n,

$$a_n = \sqrt{(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots \frac{1}{x_n}\right)}$$

est un entier. Montrer que $a_{2023} \geq 3034$.

Solution de l'exercice 1
On propose deux solutions, une plus rapide, une moins astucieuse. Dans tous les cas on note $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ et $h_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ pour tout entier n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 2023$. On a alors $a_n = \sqrt{s_n h_n}$.

Calculons $a_{n+2}^2 - a_n^2$ pour n un entier quelconque vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 2021$.
On a

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 - a_n^2 &= (s_n + x_{n+1} + x_{n+2})\left(h_n + \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) - s_n h_n \\ &= (x_{n+1} + x_{n+2})h_n + \left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) s_n + (x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) \\ &\geqslant 2\sqrt{(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)}\sqrt{s_n h_n} + (x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient d'une IAG.
Or par l'inégalité arithmético harmonique (ou mauvais élèves ou Cauchy-Schwarz),

$$(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) \geqslant 4$$

On ne peut pas avoir égalité : si on a égalité, alors $x_{n+1} = x_{n+2}$ ce qui contredit l'énoncé. Ainsi on a

$$a_{n+2}^2 > a_n^2 + 2\sqrt{4}a_n + 4 = (a_n + 2)^2$$

Comme la suite ne prend quedes valeurs entières, $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. On en déduit par récurrence que $a_{1+2k} \geqslant a_1 + 3k \geqslant 3k + 1$ tant que $2k + 1 \leqslant 2023$. Pour $k = 1011$, $a_{2023} \geqslant 3034$ ce qui conclut.

Solution n°2 de l'exercice 1
On calcule $a_{n+1}^2 - a_n^2$.

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a_n^2 &= (s_n + x_{n+1})\left(h_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - s_n h_n \\ &= x_{n+1}h_n + \frac{1}{x_{n+1}}s_n + 1 \\ &\geqslant 2\sqrt{s_n h_n} + 1 \\ &\geqslant 2a_n + 1 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai par IAG. On a donc $a_{n+1}^2 \geqslant a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n+1)^2$, donc $a_{n+1} \geqslant a_n + 1$. L'égalité vient si $x_{n+1}h_n = \frac{s_n}{x_{n+1}}$ i.e. $x_{n+1} = \sqrt{\frac{s_n}{h_n}}$

On va montrer que $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. Pour l'instant, on sait juste que $a_{n+2} \geqslant a_{n+1} + 1 \geqslant a_n + 2$, et donc que sauf si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$, on a $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$ vu que la suite prend des valeurs entières. Il suffit donc de montrer que si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$ on a une contradiction.

Si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$, alors

$$x_{n+2}^2 = \frac{s_{n+1}}{h_{n+1}} = \frac{s_n + \sqrt{\frac{s_n}{h_n}}}{h_n + \sqrt{\frac{h_n}{s_n}}} = \frac{s_n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{s_n h_n}}\right)}{h_n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{h_n s_n}}\right)} = \frac{s_n}{h_n} = x_{n+1}^2$$

On a donc une contradiction, ainsi $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. On conclut de même que dans l'autre solution.

Exercice 2 (IMO 2021, A1)
Soit A un sous-ensemble de $\{0, \ldots, 5^n\}$ de cardinal $4n+2$. Montrer qu'il existe $a < b < c$ dans A tels que $c + 2a > 3b$.

Solution de l'exercice 2
On énumère $x_1 < \cdots < x_{4n+2}$ les éléments de S. S'il existe $a < b < c$ dans S tels que $c+2a > 3b$, posons $c = x_k, b = x_j$ et $a = x_i$ avec $i < j < k$.

En particulier $2x_i + x_k > 3x_j$. Or $2x_i + x_{4n+2} \leqslant 2x_{j-1} + x_k$, donc $x_{4n+2} + x_{j-1} > 3x_j$. Ainsi le plus intéressant semble être de prendre $i = j - 1$ et $k = 4n + 2$.

Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de a, b, c vérifiant l'énoncé. Alors $2x_i + x_{4n+2} \leqslant 3x_{i+1}$ pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant 4n$.

L'inégalité précédente se réécrit $2(x_i - x_{4n+2}) \leqslant 3(x_{i+1} - x_{4n+2}$. En posant $b_i = x_{4n+2} - x_i$ pour tout i vérifiant $1 \leqslant i \leqslant 4n$, on a $2b_i \geqslant 3b_{i+1}$.

En particulier, par récurrence immédiate, pour tout entier k vérifiant $1 \leqslant k \leqslant 4n+1$, $b_k \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} b_1$. Pour $k = 4n+1$, on a que

$$1 \leqslant b_{4n+1} \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{4n} b_1 \leqslant \left(\frac{2^4 \times 5}{3^4}\right)^n = \left(\frac{80}{81}\right)^n < 1$$

ce qui est absurde, d'où le résultat.

Exercice 3 (APMO 2020, P2)
Trouver le plus grand réel r tel que, si une suite d'entiers positifs (a_n) vérifie que, pour tout n,

$$a_n \leq a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$$

alors la suite est 2-périodique à partir d'un certain rang.

Solution de l'exercice 3
On va montrer que la réponse est $r = 2$.

Pour $r \leq 2$, l'inégalité donne $a_{n+2} \leq \max(a_n, a_{n+1})$, ce qui montre que la suite est bornée. Comme chaque sous-suite paire et impaire est croissante, elles sont toutes les deux stationnaires, ce qui conclut.

Pour $r > 2$, on va construire une suite non bornée (donc non 2-périodique) qui vérifie les inégalités voulues à partir d'un certain rang, quitte à tronquer le début de la suite. On prend $a_1 = a_2 = 1, a_3 = a_4 = 2, a_5 = a_6 = 3 \ldots$ L'inégalité de gauche est vérifiée. Pour celle de droite, elle revient à $k^2 \leq (k-1)^2 + r(k-1)$ ou $k^2 \leq (k-1)^2 + r \cdot k$ en fonction de la parité de n. Le premier cas est plus contraignant et se réécrit $r - 1 \leq (r-2)k$ ce qui est vrai pour k assez grand.

Exercice 4 (A3 2019)
Soit $n \geq 3$ et $0 \leq x_1 < \ldots < x_n$ des réels de somme 2. Soit $X \subset [\![1, n]\!]$ qui minimise $|1 - \sum_{i \in X} a_i|$. Montrer qu'il existe $0 \leq y_1 < \ldots < y_n$ de somme 2 tels que $\sum_{i \in X} y_i = 1$.

Solution de l'exercice 4
Ici, il s'agit de perturber un peu la suite originale pour parvenir à nos fins.

Quitte à prendre le complémentaire de X, on peut supposer que $\sum_{i \in X} x_i \geq 1$ et noter ε la différence entre les deux.

Il s'agit alors d'exploiter l'hypothèse de minimalité. On remarque que si $i \in X$ et $i-1 \notin X$, le fait que prendre $i-1$ à la place de i éloigne la somme de 1 signifie que $x_{i-1} \leq x_i - 2\varepsilon$. Si on a un tel i, on voudrait donc ajouter ε à x_{i-1} et retirer ε à x_i. Cela coince juste dans le cas où l'écart entre les deux vaut pile 2ε. Dans ce cas, on va utiliser le fait que $n > 2$: si j est encore un autre indice, on peut faire varier x_j de $\pm\eta$ sans causer de problème si η est assez petit. Si $j \in X$, on peut donc ajouter ε à x_{i-1}, retirer $\varepsilon - \eta$ à x_i et retirer η à x_j. Et si $j \notin X$, on peut donc ajouter $\varepsilon - \eta$ à x_{i-1}, retirer ε à x_i et ajouter η à x_j.

Il nous reste un dernier cas à traiter : si $X = [\![1, k]\!]$, on n'a pas de telle valeur de i. Mais on remarque alors que si on retire x_1 de X, l'hypothèse de minimalité donne que $x_1 \geq 2\varepsilon$. On peut donc retirer ε à x_1 et ajouter ε à x_n.

Exercice 5 (IMO 2015, A1 (et P5 original))
Soit $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout k,

$$a_{k+1} \geqslant \frac{k a_k}{a_k^2 + k - 1}$$

Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$.

Solution de l'exercice 5
Un exercice plus difficile qu'il n'y paraît. Il faut bien entendu commencer par regarder l'énoncé pour des petites valeurs.

Pour $n = 2$, on a $a_2 \geqslant \dfrac{1}{a_1}$, si bien que par IAG la somme est bien $\geqslant 2$.

Pour $n = 3$, cela se complique. Une observation facile est que si $a_3 \geqslant 1$, alors $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 2 + a_3 \geqslant 3$ comme voulu. Cette remarque nous encourage à procéder par récurrence.

Ainsi, pour l'hérédité, si $a_n \geqslant 1$, on a déjà gagné. Dans le cas contraire, il est désormais nécessaire de mettre se salir les mains. En passant la relation à l'inverse, on a

$$\frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \leqslant a_k$$

En sommant et en télescopant (c'est magnifique !) et en utilisant que $\frac{1}{a_n} \geqslant 1.$:

$$a_1 + \ldots + a_n \geqslant \frac{n-1}{a_n} + a_n \geqslant n - 2 + \frac{1}{a_n} + a_n \geqslant n$$

ce qui achève la récurrence.

Exercice 6 (IMO 2012, P2)
Soit $n \geqslant 3$ un entier, $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs tels que $a_1 \ldots a_n = 1$. Montrer que

$$(1 + a_1)(1 + a_2)^2(1 + a_3)^3 \ldots (1 + a_n)^n \geq n^n$$

Solution de l'exercice 6
Par IAG, pour $i \in [\![2, n]\!]$ on a :

$$(1 + a_i)^i = \left(\frac{1}{i-1} + \ldots + \frac{1}{i-1} + a_i\right)^i \geq \frac{i^i}{(i-1)^{i-1}} \cdot a_i$$

et en utilisant que $1 + a_1 \geq a_1$, on obtient le résultat voulu par télescopage.

Exercice 7 (Iran TST 2018 P5)
Soient $2n - 1$ réels strictement positifs de somme S. Montrer qu'il existe au moins $\binom{2n-2}{n-1}$ manières d'en choisir n tels que la somme de ces n soit strictement supérieure à $\frac{S}{2}$.

Solution de l'exercice 7
Considérons une permutation quelconque $a_0, \ldots, a_{2n-2}$ des $n - 1$ nombres, et considérons les indices modulo $2n - 1$. Choisissons n réels consécutifs parmi ceux-ci, disons $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+n}$. Remarquons que si la somme de ces n réels est inférieure ou égale à $\frac{S}{2}$, il ne peut pas en être de même de la somme de $a_{k+n+1}, a_{k+n+2}, \ldots, a_{k+2n}$ car ces deux sommes

combinées valent $S + a_{k+1} > S$. Ainsi, si part de $k = 0$ et que l'on translate les indices de n à chaque fois, il ne peut jamais y avoir deux n-uplets de somme inférieure ou égale à $\frac{S}{2}$ à la suite. Comme n et $2n-1$ sont premiers entre eux, en translatant par n comme ceci, on trouve $2n-1$ différents n-uplets, dont au moins la moitié, c'est-à-dire au moins n, ont une somme strictement supérieure à $\frac{S}{2}$.

On peut par exemple faire un raisonnement probabiliste à présent. Si on choisit une permutation aléatoire des $2n-1$ réels, puis que l'on en choisit n à la suite uniformément, on a une probabilité supérieure ou égale à $\frac{n}{2n-1}$ de trouver un n-uplet de somme strictement supérieure à S. Ainsi, le nombre de façons de choisir n des réels dont la somme est strictement supérieure à $\frac{S}{2}$ est au moins

$$\frac{n}{2n-1}\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-2}{n-1}.$$

Exercice 8 (RMM 2023, P5)
Soit P, Q, R, S quatre polynômes réels non constants tels que pour tout x réel, $P(Q(x)) = R(S(x))$. On suppose de plus que le degré de R divise celui de P. Montrer qu'il existe un polynôme T à coefficients réels tel que pour tout réel x, $P(x) = R(T(x))$

Solution de l'exercice 8
On remarque tout d'abord que l'énoncé est équivalent à montrer qu'on peut écrire $S = T \circ Q$. Cet énoncé est plus amical car on peut exprimer bien plus facilement $T \circ Q$ en fonction de T que $R \circ T$.

On va donc essayer d'écrire S comme un presque-polynôme en Q, ceci via des divisions euclidiennes successives : on peut écrire $S = S_1 Q + B_0$, puis $S_1 = S_2 Q + B_1$, ... avec, pour tout i, $\deg B_i < \deg Q = q$. On obtient l'écriture

$$S = B_0 + B_1 Q + \cdots + B_k Q^k$$

et l'enjeu est maintenant de montrer que tous les B_i sont des polynômes constants.

Considérons pour cela le plus grand indice i tel que B_i n'est pas constant. $i < k$ car, le degré de Q divisant celui de S, B_k est constant. On peut alors écrire $S = U_1 + U_2$, avec

$$U_1 = \sum_{j=i+1}^{k} B_j Q^j, \quad U_2 = \sum_{j=0}^{i} B_j Q^j$$

où U_1 est un polynôme en Q de degré d_1 multiple de q. U_2 est de degré $d_2 = iq + \deg B_i$ qui n'est pas multiple de q.

On a alors

$$R(U_1 + U_2) - R \circ U_1 = P \circ Q - R \circ U_1$$

qui est un polynôme en Q, donc de degré multiple de celui de Q.
D'un autre côté, si on écrit $R = \sum_{j=0}^{m} r_j X^j$, on obtient

$$\begin{aligned} & R(U_1 + U_2) - R \circ U_1 \\ = & \sum_{j=0}^{m} r_j \left[(U_1 + U_2)^j - U_1^j \right] \\ = & \sum_{j=0}^{m} r_j \left[jU_1^{j-1}U_2 + \cdots + jU_1U_2^{j-1} + U_2^j \right] \end{aligned}$$

Or, le j-ième terme de cette somme est de degré $(j-1)d_1 + d_2$. La somme est donc de degré $(m-1)d_1 + d_2$, qui n'est pas multiple du degré de Q, absurde.
Ainsi, tous les B_i sont des polynômes constants, donc $T = B_0 + \cdot + B_k X^k$ convient.

8 Géométrie : Inversions (Serge)

Pour un cours sur les inversions, voir le td de Quentin dans polycopié du stage de Valbonne 2023 page 411, ici.

Exercices

Exercice 1 ("A Beautiful Journey Through Olympiad Geometry", Stefan Lozanovski)
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en A et B. La tangente à Γ_2 en A intersecte Γ_1 en C. La tangente à Γ_1 en A intersecte Γ_2 en D. Soit E le symétrique de A par rapport à B. Montrer que A, C, D, E sont cocycliques.

Exercice 2 (P2 USAMO 1993)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires et s'intersectent en E. Montrer que les symétriques de E par rapport aux côtés du quadrilatère sont cocycliques.

Exercice 3 (France TST Novembre 2020 P3)
Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus), et soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. Soient X et Y les deux points du cercle circonscrit à ABC tels que $AX = AY = AD$, et tels que B et X se trouvent du même côté de la droite (AD). Soit E le point d'intersection des droites (BX) et (CY). Enfin, soit F le point d'intersection, autre que E, entre la droite (DE) et le cercle circonscrit à EXY. Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles EXY et BCF sont tangents.

Exercice 4 (Brazil National Olympiad 2009 P5)
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Les droites (AB) et (AC) réintersectent le cercle circonscrit à OBC en $B_1 \neq B$ et $C_1 \neq C$. Les droites (BA) et (BC) réintersectent le cercle circonscrit à OAC en $A_2 \neq A$ et $C_2 \neq C$. Les droites (CA) et (CB) réintersectent le cercle circonscrit à OAB en $A_3 \neq A$ et en $B_3 \neq B$. Montrer que les droites $(A_2A_3), (B_1B_3)$ et (C_1C_2) sont concourantes.

Exercice 5
Soit ABC un triangle dont le centre du cercle inscrit est I et le centre du cercle circonscrit est O. Soit D, E et F les points de contact du cercle inscrit dans ABC avec les côtés BC, CA et AB. Montrer que l'orthocentre du triangle DEF est sur la ligne (IO).

Exercice 6 (Russia 1995)
Soit $A, B; C, D$ 4 points sur un cercle dans cet ordre avec AB comme diamètre et O le milieu de AB. Soit K l'intersection des cercles circonscrits à AOC et BOD. Les lignes AB et CD s'intersectent en M. Montrer que $\widehat{OKM} = 90$.

Exercice 7 (Japan TST 2022 P6)
Soit Γ un cercle de diamètre MN et A un point à l'intérieur Γ. Le cercle de centre N, passant par A, rencontre Γ en B et C. Soit $P, Q \in (BC)$ tels que $\widehat{BAP} = \widehat{QAC}$. Les lignes $(NP), (NQ)$ rencontrent Γ en X, Y respectivement. Prouver que $(AM), (PY)$ et (QX) sont concourantes.

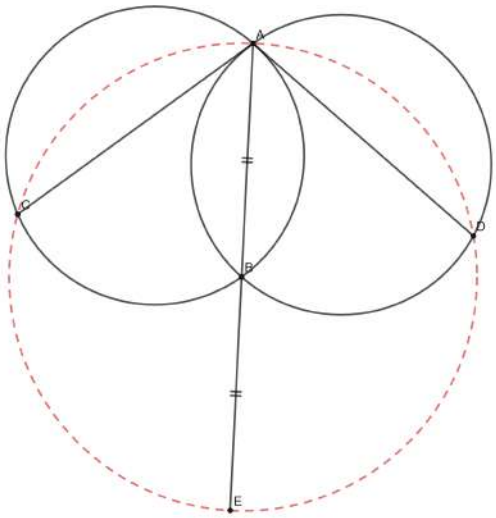
Exercice 8 (IMO SL 2014 G4)
Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC. Soit $\lambda \in]0,1[$. Pour P un point variant sur Γ différent de A, B et C, soit M le point sur le segment CP tel que $CM = \lambda \cdot CP$. Soit Q le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AMP et BMC. Montrer que, lorsque P varie, Q reste sur un cercle fixe.

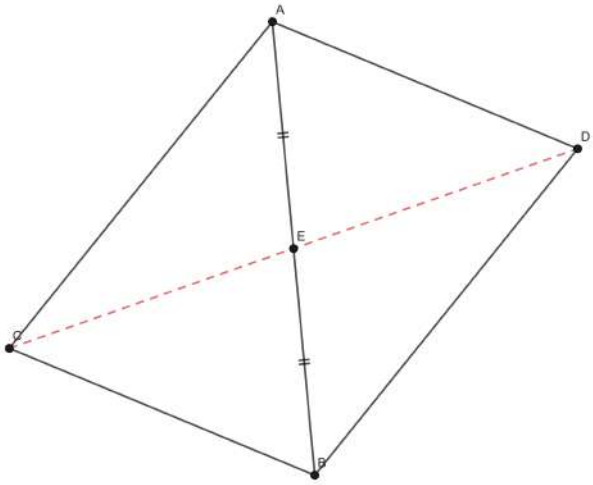
Exercice 9 (France TST 2023 P3)
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Ω. Soit P un point dans ABC. Soit A', B' et C' les centres respectifs des cercles circonscrits à APB, BPC et CPA. Soit X, Y les points d'intersection de Ω avec le cercle circonscrit à $A'B'C'$. Soit Q le symétrique de P par rapport à (XY). Montrer que $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

Le point par lequel passent le plus de cercle est A et il est donc raisonnable de tracer la figure

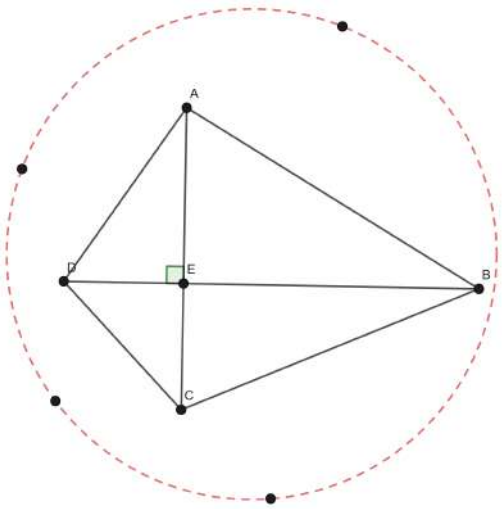


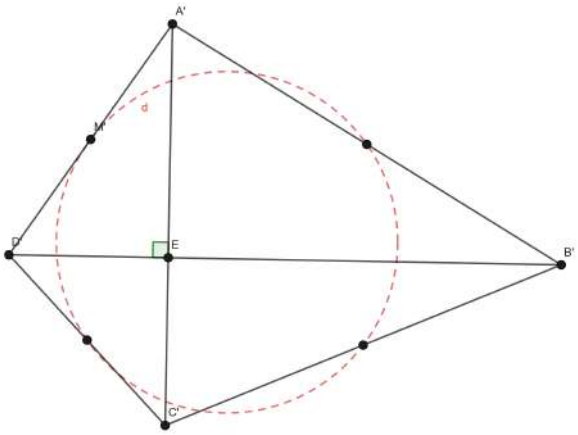


après inversion de centre A. Alors $A^*C^*B^*D^*$ est un parallèlogramme dont E^* est le milieu de $[AB]$. Les diagonales d'un parallèlogramme s'intersectant en leur milieu, $C*$, $E*$ et $D*$ sont alignés. Donc, avant inversion, les points A, C, E, D sont cocycliques, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

Les symétriques de E par rapport aux côtés d'un triangle se maitrisent mal. La clé de l'exercice est de remarquer qu'après inversion de centre E, ces points sont envoyés sur les milieux des côtés du quadrilatère ! Cela implique que ces milieux forment un rectangle et donc qu'il sont cocycliques. Ces points sont donc aussi cocycliques avant inversion, ce qui conclut.

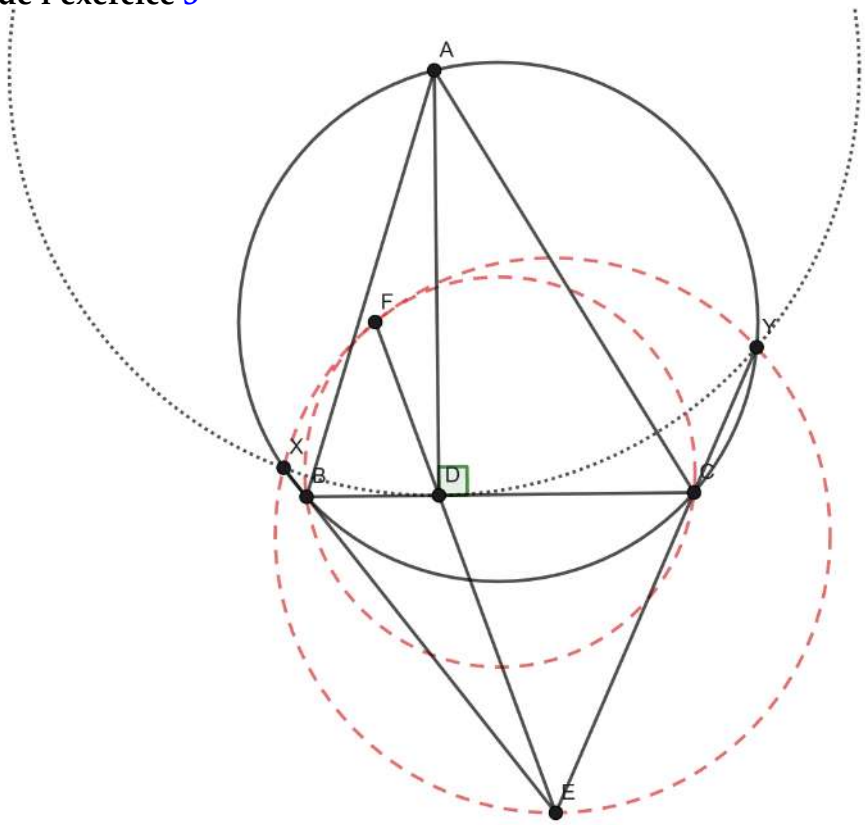




Montrons maintenant le résultat admis précedemment. Cela peut se faire par chasse aux angles. Notons M le symétrique de E par rapport à AB. Alors $\widehat{A^*M^*E} = \widehat{MAE} = 2\widehat{BAE} = 2\widehat{A^*B^*E}$. De même $\widehat{B^*M^*E} = 2\widehat{BAE}$. Donc $M*$ est le centre de (A^*EB^*), c'est-à-dire le centre de AB.

Une manière plus concecptuelle de montrer ce lemme est de voir que l'orthogonalité entre objets géométriques (cercles et droites) est conservée par inversion. Or (ME) est orthogonal à (AB). Donc (M^*E) est orthogonale à(A^*B^*E), ce qui signifie que (ME) passe par un diamètre de (A^*B^*E). De plus, comme EM est le double de la distance de E à (AB), EM^* est la moitié de la distance entre E et l'intersection de (EM^*) avec (EA^*B^*) et donc M^* est le centre de ce cercle.

Solution de l'exercice 3



Une inversion de centre E échange pratiquement tous les points de la figure !
En effet elle échange :

— $X \leftrightarrow B$

— $Y \leftrightarrow C$

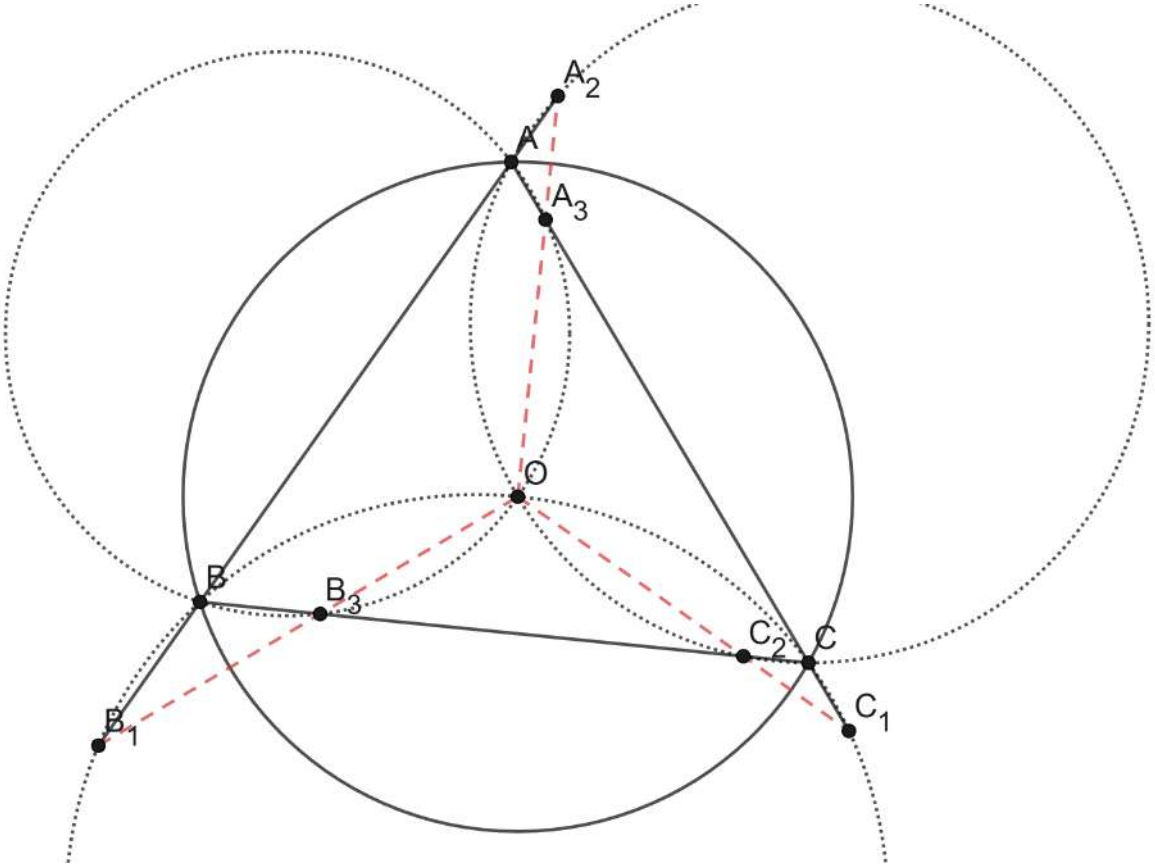
— $(EXY) \leftrightarrow (BC)$

— $(ED) \leftrightarrow (ED)$

— $F = (ED) \cap (EXY) \leftrightarrow D = (ED) \cap (BC)$

La condition de tangence en F à démontrer se réécrit (XDY) tangent à (BC) en D, ce qui découle des hyptohèses de l'énoncé.

Solution de l'exercice 4



Il suffit d'écrire quels objets sont échangés par l'inversion de centre O qui fixe (ABC) :

— $A \leftrightarrow A$

— $B \leftrightarrow B$

— $C \leftrightarrow C$

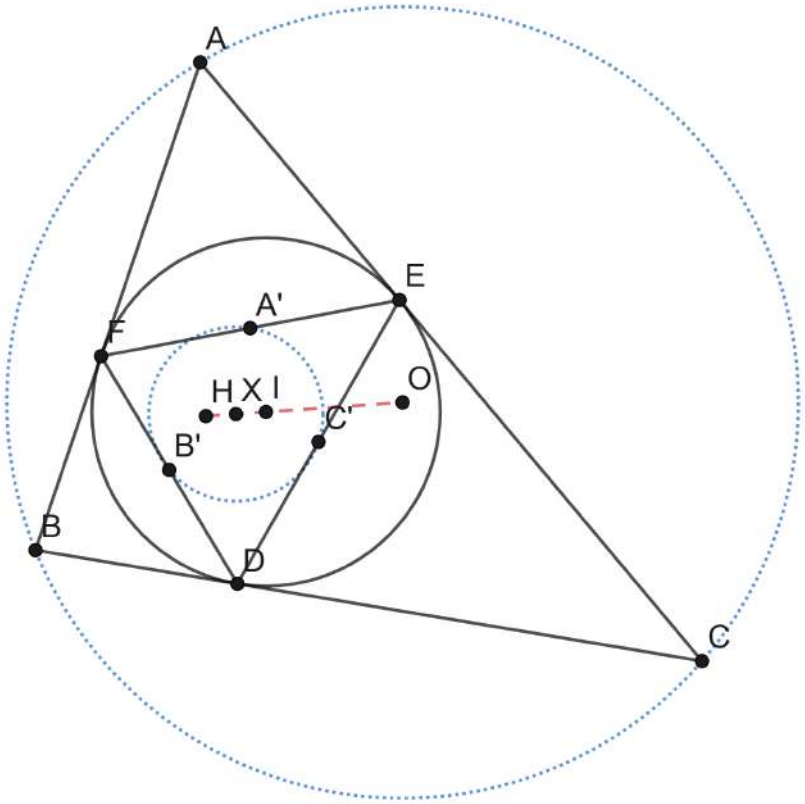
— $(BC) \leftrightarrow (BOC)$

— $(BOA) \leftrightarrow (BA)$

— $B_3 = (BOA) \cap (BC) \leftrightarrow B_1 = (BA) \cap (BOC)$

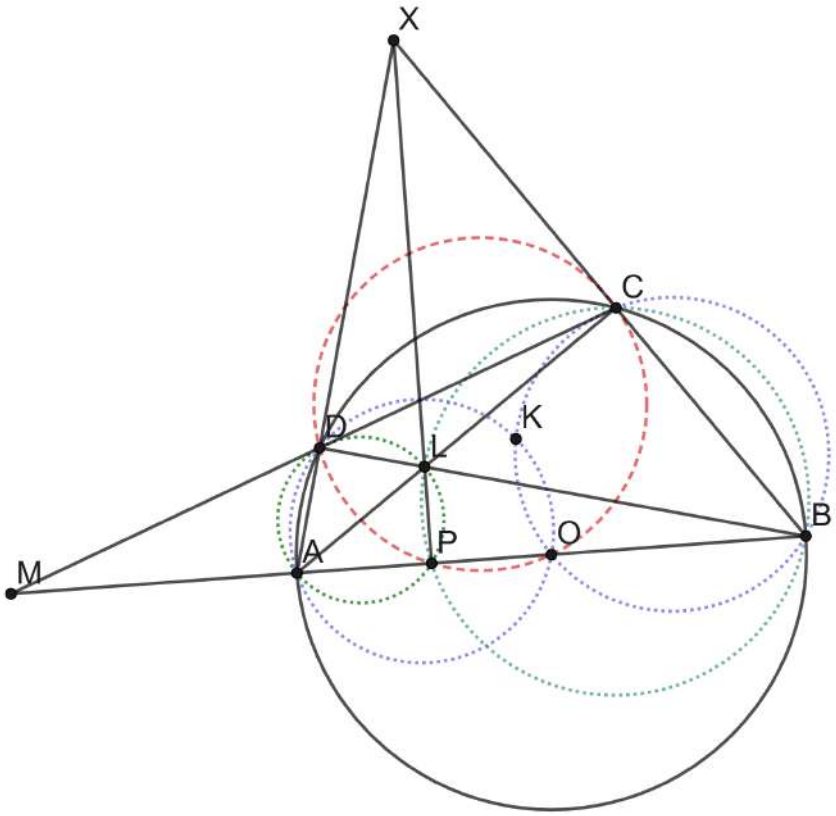
Donc O, B_1, B_3 sont alignés. Donc les trois droites sont concourantes en O !

Solution de l'exercice 5



On commence en inversant autour du cercle inscrit à ABC. Alors D, E et F sont fixés. On vérifie que A est envoyé sur le milieu A^* de BC. De même pour B et C. Cela nous pousse à nous intéresser à la droite d'Euler du trangle DEF, qui contient entre autre le centre de (DEF), qui est I, sont orthocentre, que l'on note H, et le centre du cercle d'Euler de DEF, que l'on note X.
X est le centre du cercle circonscrit à $A^*B^*C^*$. Or (ABC) est échangé avec $(A^*B^*C^*)$. Donc I est aligné avec les centres de cercles O et X (qui ne sont néanmoins pas échangés). Cela conclut.

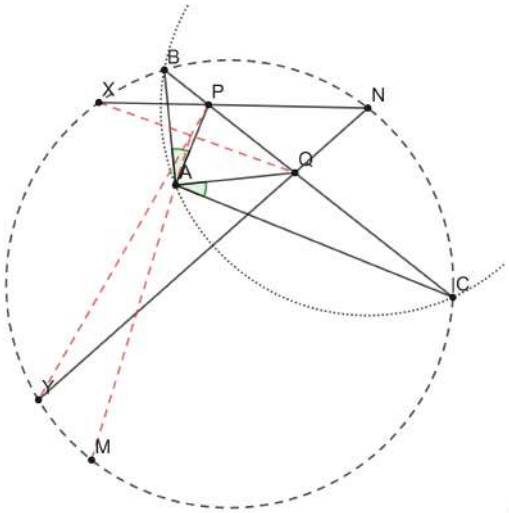
Solution de l'exercice 6

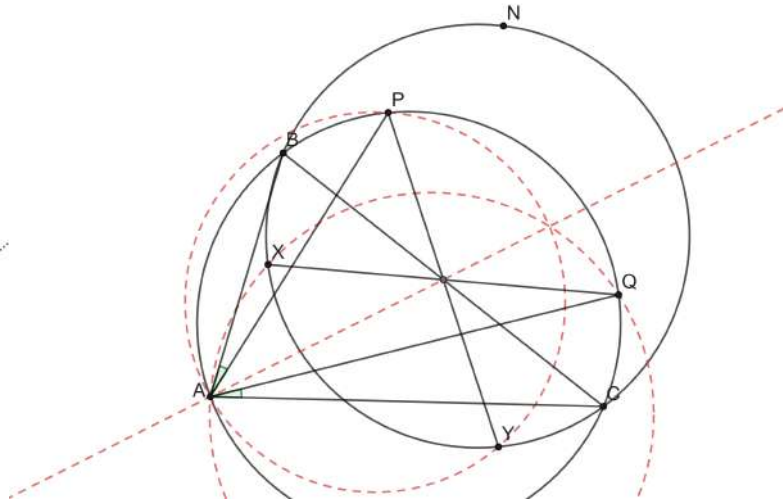


En inversant depuis M, le problème devient équivalent au problème suivant :
Soit $ABCD$ 4 points inscrits dans cet ordre dans un cercle de diamètre AB et de centre de cercle circonscrit O. Soit $P = (AB) \cap (DOC)$. Soit $L = (ADP) \cap (BCP)$. Montrer que $(PL) \perp (AB)$. Pour cela, on définit $L' = (AC) \cap (BD)$ et $X = (AD) \cap (BC)$. Comme $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 90$, L' est l'orthocentre de ABX. De plus, (COD) est le cercle d'Euler de ABX, et donc P est le pied de la hauteur issue de X dans ABX. Donc $ADL'P$ et $CBL'P$ sont cocycliques. Donc $L = L'$ et on a bien $(LP) \perp (AB)$.

Solution de l'exercice 7

Le seul point raisonnable pour inverser est A, car c'est le seul point qui permet d'exploiter la condition d'angle. La seule difficulté sera de placer le point M. Sauf que ce qui nous intéresse, c'est seulement la droite (AM). Or (AM) est la A-symédiane dans ABC (des rappels sur ce qu'est une symédiane sont donnés en fin de solution). En effet, comme $\widehat{MBN} = \widehat{MCN} = 90$, (MB) et (MC) sont tangents à (ABC). L'énoncé après inversion est le suivant :
Soit ABC un triangle et N le symétrique de A par rapport à (BC) (voir exercice 2 pour la justification). P et Q sont choisis sur (ABC) tels que $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$. Soit $X = (APN) \cap (NBC)$ et $Y = (AQN) \cap (NBC)$. Il suffit de montrer que $(APY) \cap (AQX)$ est sur la médiane issue de A dans ABC. Cela signifie qu'il faut montrer que cette médiane est l'axe radical de (AXQ) et de (AYP).
Or on remarque que la figure après inversion a de nombreuses symétries autour de (BC) : A et N, P et X, Q et Y. De plus, la condition d'angle impose que $PQCB$ est un trapèze isocèle avec $(PQ) \parallel (BC)$. Donc $PQXY$ est un recctangle dont les diagonales se coupent en le milieu de (BC). Or ce milieu a même puissance par rapport à (AXQ) et (AYP). Donc il est sur l'axe radical des deux cercles. De plus, A est aussi sur cet axe radical. Donc la médiane est bien

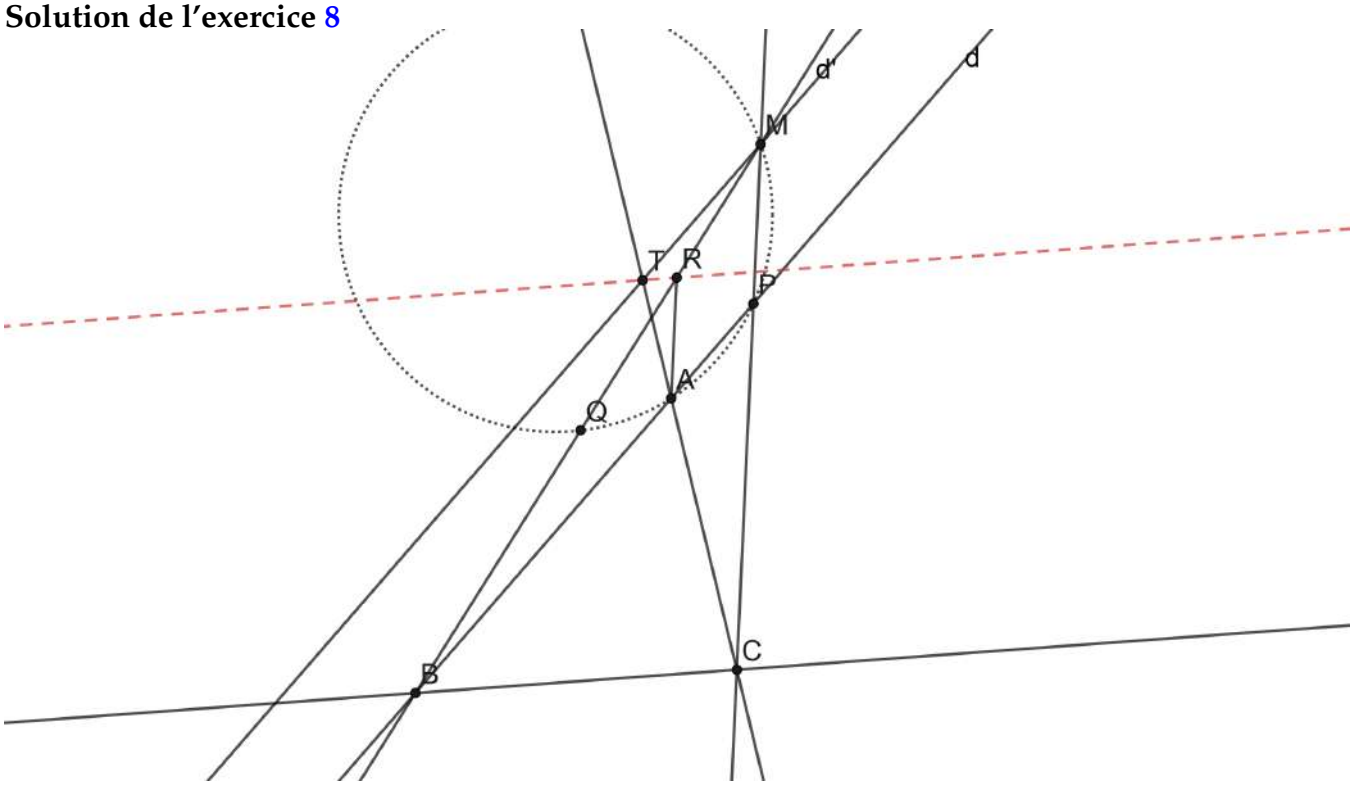




l'axe radical de ces deux cercles. □

Rappel : Dans un triangle ABC, la A-symédiane est le symétrique de la A-médiane par rapport à la bissectrice issue de A.
De la même manière on définit la A-syhauteur comme symétrique de la A-hauteur par rapport à la A-bissectrice dans ABC. On vérifie par une chasse aux angles que la syhauteur est en fait la droite (AO), où O est le centre de (ABC).
Ces objets sont intéressants dans le cadre des inversions car on vérifie qu'une inversion de centre A échange la A-médiane de ABC avec la A-symédiane de AB^*C^* (résultat d'une chasse aux angles). De même avec les hauteurs et syhauteurs. On obtient ainsi la caractérisation suivante de la symédiane : la A-symédiane est la droite (AT) où T est l'intersection des tangentes en B et en C à (ABC). Ce résultat se montre en utilisant que que (AU) est la A-médiane de ABC où U est l'intersection du cercle passant par A et B et tangent à (BC) en B et de celui passant par A et C et tangent à (BC) en C (résultat s'obtenant par axes radicaux) puis en inversant depuis A.
Ces résultats précédents motivent une transformation géométrique qui est souvent préférée à l'inversion, car ressemblant plus à la figure initiale : l'involution. C'est tout simplement la composition d'une inversion avec un symétrie axiale. Le lecteur pourra en particulier s'intéresser aux points échangés dans un triangle ABC par l'involution de centre A, de rayon $\sqrt{AB \cdot AC}$, et d'axe de symétrie la bissectrice de $\widehat{BAC}$.

Solution de l'exercice 8



Commençons par réécrire l'énoncé après inversion depuis C. On se donne un point C et 2 droites parallèles (d) et (d') avec A et B sur D. Soit P un point variant sur (d). Soit M l'intersection de (CP) avec (d'). Soit Q l'intersection de (APM) avec (BM). Montrer que Q bouge sur une droite ou sur un cercle quand P varie sur (d).
Pour avoir une idée de l'objet sur lequel bouge Q, il faut tester des positions praticulières pour P. Par exemple, pour $P = B$, on a $Q = B$. Cela motive à inverser une seconde fois depuis B! Plus précisément, il suffit en fait de montrer que si R est l'inverse de Q par inversion de centre B, alors R varie sur une droite quand P varie. En fait, on se contente d'introduire R le point sur la demi-droite $[BQ)$ tel que $BA^2 = BQ \cdot BR$. Définir R ainsi revient à définir R comme étant le point de (BM) tel que $(AR) \parallel (PM)$.Alors, pour $P = A$, on a $R = M = T$ où $T = (AC) \cap (d')$. Pour $P = B$, $(BC) = (BR) \parallel$. L'objet sur lequel doit bouger R est donc la parallèle à (BC) passant par T! Comme il n'y a plus que des droites sur la figures, ce résultat peut se montrer avec) peu près n'importe quel système de bash (carthésien, barycentrique, trigo). Mais il est possible de conclure de manière plus élégante en appliquant Pappus à BMR et TAC.

Solution de l'exercice 9
voir le corrigé sur le site de la POFM test de mai 2023 (exercice 7 du test), ici

4 Entraînement de fin de parcours

Exercices

Exercice 4
Pour tout entier $k \geqslant 2$, on définit $\rho(k)$ comme son plus petit diviseur premier. Soit $a_1, a_2, \ldots$ la suite vérifiant $a_1 \geqslant 3$ et $a_{n+1} = a_n^n - 1$ pour tout entier strictement positif n. Pour quelles valeurs de a_1 la suite $\rho(a_n)$ est-elle bornée ?

Exercice 5
Soit ABC un triangle acutangle scalène, on note Γ son cercle circonscrit. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et S le milieu de l'arc BC de Γ qui ne contient pas A. Soit P et Q les points respectivement sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BP = BS$ et $CQ = CS$. Soit K le point de la droite (AS) différent de S vérifiant $MK = MS$. Montrer que $\widehat{PKQ} = 90°$.

Exercice 6
Soit c un réel strictement positif et $a_1, a_2, \ldots$ une suite d'entiers positifs qui satisfait les deux conditions suivantes pour tout entier strictement positif n :

— $\dfrac{2^{a_1} + 2^{a_2} + \cdots + 2^{a_n}}{n}$ est entier ;
— $2^{a_n} \leqslant cn$.

Montrer que la suite $a_1, a_2, \ldots$ est constante à partir d'un certain rang.

On dit qu'une suite $b_1, b_2, \ldots$ est constante à partir d'un certain rang s'il existe un entier $N \geqslant 1$ et un réel b tel que pour tout $n \geqslant N$, $b_n = b$.

Solutions

Solution de l'exercice 4
On va montrer qu'il s'agit des a_1 impairs. Notons que quelque soit a_1, la parité des a_n alterne.

Remarquons déjà que si a_1 est impair, l'énoncé est vérifié.. Effectivement, si a_1 est impair alors

$$a_3 = (a_1 - 1)^2 - 1 \equiv (-1)^2 - 1 \equiv 0 \mod a_1,$$

donc $a_1 \mid a_3$. Plus généralement, pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_{2n+3} = (a_{2n-1}^{2n-1} - 1)^{2n} - 1 \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{a_{2n-1}}$$

donc a_{2n-1} divise a_{2n+1}. Ainsi de proche en proche a_1 divise tous les a_m avec m impair.
En outre a_1 est impair donc par alternance de parité tous les termes de la forme a_{2n} sont pairs et similairement 2 divise tous les a_m avec m pair.

Considérons maintenant un a_1 solution. Puisque la suite des $\rho(a_n)$ est majorée, on peut noter $p_1, \ldots, p_k$ l'ensemble de ses valeurs.
On pose $N = 2\prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)$, qui est donc en particulier pair. Pour $i \in [\![1, k]\!]$, si $p_i \nmid a_N$ on a par petit Fermat

$$p_i \mid a_N^N - 1 = a_{N+1},$$

et ainsi $a_{N+2} \equiv -1 \mod p_i$. Maintenant si $p_i \mid a_N$ alors $a_{N+1} \equiv -1 \pmod{p_i}$ donc $a_{N+2} \equiv (-1)^{N+1} - 1 \equiv -2 \mod p_i$.
Or $\rho(a_{N+2})$ est par définition un des p_i, donc divise -2. Ainsi $\rho(a_{N+2}) = 2$. Par alternance de parité, on a, comme $N + 2$ est pair, que forcément a_1 est impair, ce qui conclut.

Solution n°2 de l'exercice 4
On peut procéder autrement pour exhiber un N qui prouve que a_1 doit être impair.
Effectivement, si N est un premier plus grand que les p_i alors si p_i divise $a_N^N - 1$, on a $\mathrm{ord}_{p_i}(a_N) \in \{1, N\}$ et donc $\mathrm{ord}_{p_i}(a_N) = 1$ car $N > p_i - 1$. Dès lors :

$$a_{N-1}^{N-1} - 2 \equiv a_N - 1 \equiv 0 \mod p_i.$$

Ainsi si on prend par Dirichlet N un premier impair tel que

$$N \equiv 1 \pmod{\prod_{i=1}^{k}(p_i - 1)},$$

et $N > p_i$ pour tout i. On a alors $a_{N-1}^{N-1} \in \{0, 1\} \mod p_i$ pour tout i. Ainsi comme $\rho(a_{N+1})$ divise $a_N^N - 1$, on a que $0 \equiv a_{N-1}^{N-1} - 2 \equiv -1$ ou $-2 \pmod{\rho(a_{N+1})}$, donc $\rho(a_{N+1})$ vaut 2 et $2 \mid a_{N+1}$. On conclut alors comme précédemment car $N + 1$ est pair.

Barème : Partie Z : Ce qui vaut 0 ou est non cumulable ..... 0 **pts**
A.1 Montrer que si a_1 est impair alors a_1 divise tous les a_m avec m impair ..... 1 pt
A.2 S'attarder sur N premier ou divisible par $p - 1$ (ou un voisin de N) ..... 1 pt
Partie A : Synthèse ..... 2 **pts**

A.1 Montrer que la suite est 2-périodique modulo 2 ..... 1 pt

♠ On ne demande pas de le formuler avec ces termes. Une preuve qui montre que si a_1 est impair alors 2 divise tous les a_m avec m pair valide l'item.

A.2 Montrer que si a_1 est impair alors les a_{2m+1} sont divisibles par un diviseur impair non trivial de a_1 ..... 1 pt

Partie B : Analyse ..... 5 **pts**

La note sur cette partie est le maximum de la note obtenue sur le barème de la solution 1 et sur le barème de la solution 2.

Solution 1 :

B.11 Considérer un N proche d'un nombre divisible par tous les $p_i - 1$ ..... 2 pts

B.12 Montrer que si $p-1$ divise N alors a_{N+1} vaut -1 ou 0 modulo p ..... 1 pts

♠ Si l'élève oublie que a_N^{p-1} peut valoir 0 modulo p, un point est automatiquement déduit.

B.13 Montrer que si $p-1$ divise N et que N est pair, alors a_{N+2} vaut -1 ou -2 modulo p ..1 pts

B.14 Connecter le bon N et conclure ..... 1 pts

Solution 2 :

B.21 Considérer un N proche d'un nombre divisible par tous les $p_i - 1$ ..... 2 pts

B.22 Montrer que si N est un premier assez grand alors $\rho(a_{N+1})$ divise $a_N - 1$ ..... 1 pts

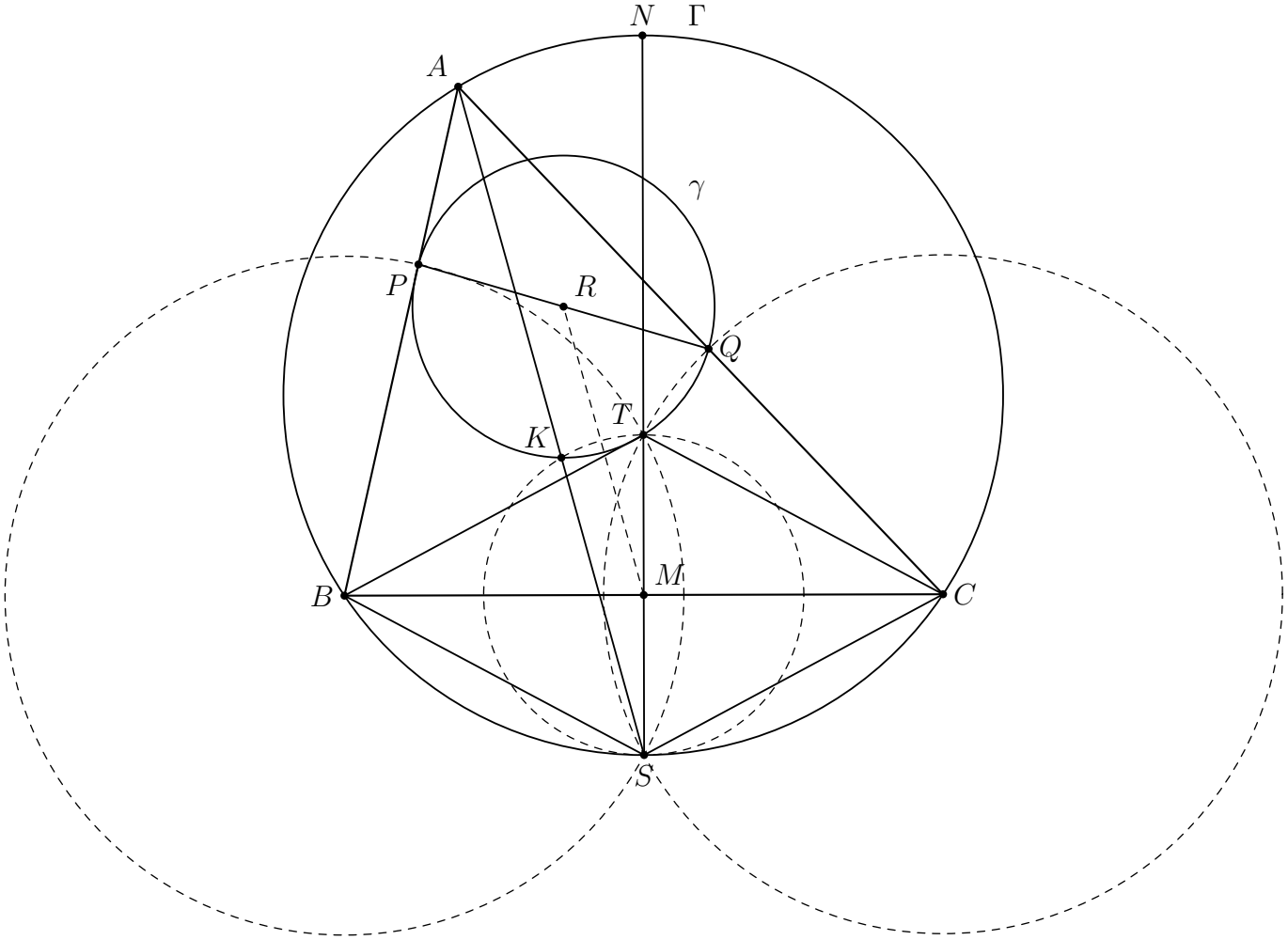
B.23 Montrer que si N est un premier assez grand alors $a_{N-1}^{N-1} - 2 \in \{-1, -2\}$ modulo $\rho(a_{N+1})$ 1 pts

♠ Si l'élève oublie que a_N^{p-1} peut valoir 0 modulo p, un point est automatiquement déduit.

B.24 Connecter le bon N et conclure ..... 1 pts

Solution de l'exercice 5

En traçant la figure, on s'aperçoit que le cercle de centre B de rayon BS et le cercle de centre C de rayon CS s'intersectent à nouveau au point T, symétrique de S par rapport à BC. Le point S vérifiant $SB = SC$ d'après les propriétés du pôle sud, nous savons que T est également le symétrique de S par rapport à M. Ensuite, pour vérifier que la condition $\widehat{PKQ} = 90°$ est bel et bien vérifiée, il convient de tracer le cercle γ de diamètre PQ, dont on note R le centre, et de vérifier que le point K s'y trouve. Il apparaît alors que le point T s'y trouve également :



Lemme 1. Le point T vérifie $\widehat{PTQ} = 90°$, c'est-à-dire $T \in \gamma$.

Démonstration. Dans le cercle de centre B et de rayon $BS = BT = BP$, on a $\widehat{PTS} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{ABS}$ d'après le théorème de l'angle au centre. De même, on a $\widehat{QTS} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{ACS}$. En utilisant enfin $\widehat{ABS} + \widehat{ACS} = 180°$, on trouve

$$\widehat{PTQ} = 360° - \widehat{PTS} - \widehat{QTS} = \frac{1}{2}\widehat{ABS} + \frac{1}{2}\widehat{ACS} = 90°,$$

comme attendu. □

Pour conclure l'exercice, il suffit de montrer que $K \in \gamma$, ou encore que $RK = RT$ d'après le lemme. Cependant, on remarque que le point T vérifie aussi $MS = MT = MK$, de sorte

que $\widehat{SKT} = 90°$. Ainsi, il suffit de montrer $(RM) \perp (KT)$, ou encore $(RM) \parallel (AS)$. Ceci constitue notre second lemme.

Lemme 2. Les droites (RM) et (AS) sont parallèles.

Démonstration. Notons N le pôle nord relatif à A dans ABC, c'est-à-dire la seconde intersection de la médiatrice (SM) avec le cercle Γ. Remarquons que l'on a les égalités $NB = NC$, $BP = BS = CS = CQ$ et enfin $\widehat{NBP} = \widehat{NCQ}$ d'après le théorème de l'angle inscrit. Il en découle que les triangles NBP et NCQ sont semblables (ils sont mêmes isométriques !) et qu'il existe une similitude centrée en N envoyant B sur C et P sur Q. D'après les propriétés des similitudes, il existe donc une similitude centrée encore une fois en N envoyant B sur P et C sur Q. Cette similitude envoie donc M, le milieu de BC, sur R, le milieu de PQ. Finalement, les triangles NMR, NBP et NCQ sont à leur tours semblables, de sorte que

$$\widehat{NMR} = \widehat{NBP} = \widehat{NBA} = \widehat{NSA},$$

d'où le parallélisme annoncé. □
Ceci clôt la preuve de l'exercice.

Solution n°2 de l'exercice 5
On propose ici une autre démonstration du second lemme, plus directe.
En notant M_1 le milieu du segment CP, on a l'égalité vectorielle :

$$\overrightarrow{RM} = \overrightarrow{RM_1} + \overrightarrow{M_1M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{QC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \quad (\clubsuit).$$

Puisque les vecteurs $\overrightarrow{QC}$ et $\overrightarrow{PB}$ ont la même norme, leur somme est colinéaire à la bissectrice des droites (PB) et (QC), c'est-à-dire la droite (AS). On en déduit que les droites (RM) et (AS) sont bel et bien parallèles.

Solution n°3 de l'exercice 5
On propose une dernière manière de conclure, en montrant que les points P, K, T et Q sont cocycliques sans introduire le point R.
Comme annoncé dans la preuve du second lemme, les triangles NPB et NQC sont semblables. Ainsi, on a

$$\widehat{NPA} = 180° - \widehat{NPB} = 180° - \widehat{NQC} = \widehat{NQA},$$

de sorte que les points A, P, Q et N soient cocycliques. De plus, nous savons que les droites (AN) et (KT) sont parallèles puisqu'elles sont toutes deux perpendiculaires à (AS).
Ceci nous permet de considérer l'involution $\mathcal{I}$ de centre S obtenue comme la composition de l'inversion de centre S et de rayon $\sqrt{SA \times ST}$ avec la symétrie par rapport à la bissectrice de $\widehat{ASN}$. Par définition, $A \leftrightarrow T$, et d'après le théorème de Thalès, $N \leftrightarrow K$. On souhaite donc naturellement montrer que $P \leftrightarrow Q$ afin de traduire la cocyclicité de A, N, P et Q en celle recherchée par $\mathcal{I}$. On vérifie cela en deux temps :

▷ On vérifie tout d'abord que $(SP) \leftrightarrow (SQ)$. Pour cela, on montre que les bissectrices de $\widehat{PSQ}$ et $\widehat{ASN}$ sont confondues. Cela découle des égalités

$$\widehat{PSA} = \widehat{BSA} - \widehat{BSP} = \widehat{BCA} - \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{ABS}\right) = \widehat{BCA} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \frac{1}{4}\widehat{BAC} - 90°$$

$$\widehat{QSN} = \widehat{CSN} - \widehat{CSQ} = \left(90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}\right) - \frac{1}{2}\left(180° - \widehat{ACS}\right) = \frac{1}{2}\widehat{ACB} + \frac{1}{4}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{BAC},$$

après lesquelles on vérifie aisément que $\widehat{PSA} = \widehat{QSN}$, d'où la conclusion.

▷ Ensuite, nous devons vérifier l'égalité $SP \times SQ = SA \times ST$. Pour cela, on fait un peu de trigonométrie. On note classiquement α, β et γ les trois angles du triangle.
D'après la loi des sinus dans le triangle ASP, on a

$$\frac{SP}{SA} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\widehat{APS}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\widehat{BPS}} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin(90 - \widehat{ABS}/2)} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{4}\right)}.$$

D'après la loi des sinus dans le triangle SQT, on a $\frac{SQ}{\sin\widehat{STQ}} = 2 \times SC$, ce qui se réécrit

$$\frac{SQ}{SC} = 2 \times \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{4}\right).$$

Enfin, on a $\frac{SC}{SM} = \frac{1}{\sin\widehat{SCM}} = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Dès lors, comme $ST = 2SM$,

$$\frac{SP \times SQ}{SA \times ST} = \frac{SP}{SA} \times \frac{SQ}{SC} \times \frac{SC}{ST} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{4}\right)} \times 2 \times \sin\left(\frac{\gamma}{2} + \frac{\alpha}{4}\right) \times \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = 1,$$

comme attendu.
Ainsi, on a $P \leftrightarrow Q$ par $\mathcal{I}$. L'image par $\mathcal{I}$ du cercle passant par A, P, Q et N est un cercle passant par T, Q, P et K, ce qui montre la cocyclicité attendue.

Barème :
Toutes les preuves ont une première étape commune qui consiste à montrer que $\widehat{PTQ} = 90°$. Tous les items de ce barème sont non cumulables. La note d'une copie est la somme de la note obtenue dans la partie A et de la note maximale obtenue à l'une des sous-parties B.1, B.2 ou B.3. Toute solution complète pour l'une des deux parties rapporte la totalité des points de la partie concernée.

Partie A : Montrer que $\widehat{PTQ} = 90°$. ..... 2 pts

A.1 Introduire le point T et spécifier les égalités $BP = BT = BS$, $CQ = CT = CS$, $MK = MT = MS$ et $\widehat{SKT} = 90°$ ..... 0 pts

A.2 Annoncer que $\widehat{PTQ} = 90°$ ..... 0 pts

A.3 Annoncer que $\widehat{PTQ} = 90°$ et spécifier qu'il suffit de montrer que K, P, Q, T sont cocycliques ..... 0 pts

A.4 Démontrer que $\widehat{PTQ} = 90°$ ..... 2 pts

A.5 Démontrer que $\widehat{PTQ} = 90°$ et spécifier qu'il suffit de montrer que K, P, Q, T sont cocycliques ..... 2 pts

Partie B : Conclure ..... 5 pts

Solution 1 :

B.1.1 Introduire R et justifier qu'il suffit de montrer le parallélisme $(RM) \parallel (AS)$ ..... 1 pts
♠ Justifier qu'il suffit de montrer $(RM) \perp (KT)$ est suffisant pour obtenir cet item, sous réserve que l'élève spécifie explicitement ailleurs que $(KT) \perp (AS)$.

B.1.2 Introduire N et montrer que les triangles NPB et NQC sont semblables ou que les triangles NPQ et NBC sont semblables. ..... 0 pts

B.1.3 Introduire N et montrer qu'il existe une similitude centrée en N qui envoie B sur P et C sur Q. ..... 0 pts

B.1.4 Introduire le centre de la similitude qui envoie B sur P et C sur Q (sans montrer que c'est N) ..... 0 pts

B.1.5 Montrer que NMR est semblable à NBP ou NCQ ..... 3 pts

B.1.6 Montrer que $(RM) \parallel (AS)$ ..... 4 pts

B.1.7 items B.1.1 et B.1.2 ..... 2 pts

B.1.8 items B.1.1 et B.1.3 ..... 2 pts

B.1.9 items B.1.1 et B.1.5 ..... 4 pts

B.1.10 item B.1.6 et conclure ..... 5 pts
♠ Une copie obtient les points de cet item si elle conclut à partir de $\widehat{PTQ} = 90°$ sans forcément avoir montré cette égalité.

Solution 2 **:**

B.2.1 pareil que B.1.1

B.2.2 Introduire R et écrire des égalités vectorielles comportant $\overrightarrow{RM}$ ..... 1 pts
♣ On entend par égalité vectorielle comportant $\overrightarrow{RM}$ toute égalité permettant d'écrire $\overrightarrow{RM}$ comme somme d'autres vecteurs apparaissant dans la figure et qui ne contiennent ni le point R, ni le point M. Par exemple, une relation de Chasles ne suffit pas pour avoir cet item.

B.2.3 Établir l'égalité (♣) de la solution 2 ..... 2 pts

B.2.4 Montrer $(RM) \parallel (AS)$ ..... 4 pts

B.2.5 items B.2.1 et B.2.2 ..... 2 pts

B.2.6 items B.2.1 et B.2.3 ..... 3 pts

B.2.7 item B.2.4 et conclure ..... 5 pts
♠ Une copie obtient les points de cet item si elle conclut à partir de $\widehat{PTQ} = 90°$ sans forcément avoir montré cette égalité.

Solution 3 **:**
Cette troisième solution montre que K, P, Q et T sont cocycliques.
♠ Une copie qui ne montre pas que A, P, Q et N sont cocycliques ne peut pas obtenir de point dans cette partie. Montrer cette cocyclicité rapporte 1 point. Dans les items qui suivent, on suppose cette propriété démontrée. Le reste de cette partie est sur 4 points.

B.3.1 Montrer qu'il suffit d'avoir K, P, Q, T cocycliques ..... 0 pts

B.3.2 Établir $(KT) \parallel (AN)$ ..... 0 pts

B.3.3 Établir $(KT) \parallel (AN)$ et considérer l'involution $\mathcal{I}$ ..... 0 pts

B.3.4 Montrer qu'avoir $P \leftrightarrow Q$ par $\mathcal{I}$ suffit pour conclure ..... 1 pts

B.3.5 Montrer $\widehat{PSA} = \widehat{QSN}$ ou égalité équivalente ..... 0 pts

B.3.6 Montrer $SP \times SQ = SA \times ST$ ..... 0 pts

B.3.7 Montrer que $P \leftrightarrow Q$ par $\mathcal{I}$ ..... 3 pts

B.3.8 items B.3.3 et B.3.5 ..... 1 pts

B.3.9 items B.3.4 et B.3.5 ..... 1 pts

B.3.10 items B.3.4 et B.3.6 ..... 3 pts

B.3.11 item B.3.7 et conclure ..... 4 pts

♠ Une copie obtient les points de cet item si elle conclut à partir de $\widehat{PTQ} = 90°$ sans forcément avoir montré cette égalité.

Solution de l'exercice 6

L'idée de ce problème est qu'au départ on a une borne sur $\frac{2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}}{n}$ par une quantité de la forme cn. Or si la suite est constante à partir d'un certain rang, on peut voir que cette quantité est constante à partir d'un certain rang. Donc on va travailler sur la différence entre deux termes consécutifs de la forme $\frac{2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}}{n}$ tout en essayant d'abaisser la borne sur celui-ci.

Posons $b_n = \frac{2^{a_1}+2^{a_2}+\cdots+2^{a_n}}{n}$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Par la majoration de l'énoncé, on a pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$b_n \leqslant \frac{c(1+\cdots+n)}{n} \leqslant \frac{c(n+1)}{2} \leqslant cn.$$

Posons $d_n = b_{n+1} - b_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Soit $n \geqslant 1$, comme $(n+1)b_{n+1} - nb_n = 2^{a_{n+1}}$, on a que $(n+1)d_n = 2^{a_{n+1}} - b_n$, donc

$$d_n = \frac{2^{a_{n+1}} - b_n}{n+1}. \tag{VII.7}$$

Ainsi $d_n \geqslant \frac{-b_n}{n+1} \geqslant -c$, et $d_n \leqslant \frac{2^{a_n+1}}{n+1} \leqslant c$, donc la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée par c.

On montre le lemme suivant :

Lemme 3. Il existe une constante $K > 0$ tel que, si n' et n sont deux entiers strictement positifs tels que $n < n'$, $\frac{n'-n}{n} < K$ et $d_n = d_{n'} > 0$, alors $b_{n'} < b_n$.

Démonstration. Notons que par l'équation (VII.7), $(n+1)d_n + b_n = 2^{a_{n+1}}$ et $(n'+1)d_{n'} + b_{n'} = 2^{a_{n'+1}}$, donc $2^{a_{n+1}} \geqslant n$ et $2^{a_{n'+1}} \geqslant n$. De plus, en soustrayant les deux équations, comme $d_n = d_{n'}$, on obtient :

$$(n'-n)d_n + b_{n'} - b_n = 2^{a_{n'+1}} - 2^{a_{n+1}}. \tag{VII.8}$$

Or $|b_{n'} - b_n| = |d_n + d_{n+1} + \cdots + d_{n'-1}| \leqslant c(n'-n)$, donc le terme de gauche de l'équation (VII.8) vaut au plus $2c(n'-n)$. Or celui de droite vaut soit 0, soit au moins $\max(2^{a_{n+1}}, 2^{a_{n'+1}})/2$ en valeur absolue, donc au moins $n/2$. Ainsi si $2c(n'-n) < n/2$, i.e. $\frac{n'-n}{n} < \frac{1}{4c}$, alors $a_{n+1} = a_{n'+1}$.

En posant $K = \frac{1}{4c}$, on obtient que si $\frac{n'-n}{n} < K$, alors $(n'-n)d_n = b_n - b_{n'}$ d'après l'équation (VII.8), donc $b_n > b_{n'}$, ce qui conclut la preuve du lemme. □

On va maintenant montrer que $\frac{b_n}{n}$ tend vers 0 en montrant le lemme suivant :

Lemme 4. Il existe une constante $K > 0$ tel que, si n' et n sont deux entiers strictement positifs tels que $n < n'$, $\frac{n'-n}{n} < K$, alors $b_{n'} - b_n \leqslant \frac{c(c+1)}{2}$.

Démonstration. Donnons nous deux tels n' et n, et notons $i_0 < \cdots < i_k$ les indices i dans $\{n, \ldots, n'\}$ tels que $b_i > b_j$ pour tout j vérifiant $n \leqslant j < i$ (en particulier, $i_0 = n$). Par définition, pour tout j vérifiant $0 \leqslant j \leqslant k-1$, $b_{i_{j+1}} = b_{i_{j+1}-1} + d_{i_{j+1}-1} \leqslant b_{i_j} + d_{i_{j+1}-1}$, donc en itérant

$$b_{n'} \leqslant b_{i_k} \leqslant b_n + d_{i_1-1} + \cdots + d_{i_k-1}.$$

Or s'il existe j, j' vérifiant $1 \leqslant j < j' \leqslant k$ tels que $d_{i_j-1} = d_{i_{j'}-1} > 0$, alors $b_{i_j-1} > b_{i'_j-1}$ par le Lemme 3, donc $b_{i_j} > b_{i'_j}$ en ajoutant d_{i_j-1} de chaque côté de l'égalité précédente, ce qui est absurde.

Ainsi les d_{i_j-1} prennent des valeurs soit négatives soit positives, mais les positives sont deux à deux distinctes et bornées par c, donc $b_{n'} \leqslant b_n + 1 + \cdots + c$ ce qui donne le résultat voulu.

□

Posons désormais u_1 assez grand et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = \lfloor (1+0,9K)u_n \rfloor$ (où K est la constante donnée par le lemme précédent), avec u_1 pris de sorte à ce que $(1+0,9K)u_1 \geqslant u_1+1$. On a alors par récurrence immédiate que $u_{n+1} \geqslant u_n + 1$ donc la suite tend vers $+\infty$, et donc pour n assez grand, $u_{n+1} \geqslant (1+K/2)u_n$, donc $u_n \geqslant (1+K/2)^n \times C_1$ pour C_1 une constante strictement positive.

De plus, comme $u_{n+1} \leqslant (1+0,9K)u_n$, on a $\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n} < K$, donc $b_{u_{n+1}} \leqslant b_{u_n} + \frac{c(c+1)}{2}$, donc par récurrence $b_{u_n} \leqslant b_{u_1} + n\frac{c(c+1)}{2}$. Soit m un entier supérieur ou égal à u_1, il existe un unique n tel que $u_n \leqslant m < u_{n+1}$. En particulier $\frac{m-u_n}{u_n} < K$, donc $b_m \leqslant b_{u_n} + \frac{c(c+1)}{2} \leqslant b_{u_1} + n\frac{c(c+1)}{2}$. Ainsi

$$\frac{b_m}{m} \leqslant \frac{b_{u_1} + n\frac{c(c+1)}{2}}{u_n} \leqslant \frac{b_{u_1} + n\frac{c(c+1)}{2}}{(1+K/2)^n C_1}.$$

Or si m tend vers $+\infty$, n aussi, donc on a bien que $\frac{b_m}{m}$ tend vers 0 lorsque m tend vers $+\infty$.

Notons que pour tout $m \geqslant 2$, $b_m m \geqslant b_{m-1}(m-1)$, donc pour m assez grand on a $b_m \geqslant b_{m-1} - \frac{b_{m-1}}{m} > b_{m-1} - 1$, soit $b_m \geqslant b_{m-1}$, de sorte que d_{m-1} est positif. Ainsi la suite $(b_m)_{m\geqslant 1}$ est soit stationnaire, soit tend vers $+\infty$ et est croissante à partir d'un certain rang.

Si la suite $(b_m)_{m\geqslant 1}$ stationne, alors la suite $(d_m)_{m\geqslant 1}$ stationne à 0, et donc l'équation (VII.7) donne que la suite pour n assez grand, $2^{a_{n+1}} = b_n$, ce qui conclut.

Si la suite $(b_m)_{m\geqslant 1}$ tend vers $+\infty$ et est croissante à partir d'un certain rang, comme celle-ci augmente d'au plus c à chaque fois, et il y a des puissances de 2 arbitrairement grande, il existe des intervalles de n consécutifs arbitrairement grand pour lesquels b_n est strictement entre deux puissances de 2 (et sur lesquels b_n croit et d_n est positif). En particulier, pour ces n là, par l'équation (VII.7), on ne peut avoir $d_n = 0$. Par le lemme 3, les d_n ne prennent pas deux fois la même valeur, donc un tel intervalle a taille au plus c, ce qui est absurde.

Ainsi on a bien que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ stationne. Notons ceci dit que la suite $a_1 = a_2 = 1, a_3 = 3$ et $a_n = 2$ pour tout $n \geqslant 3$ est solution, donc il n'est pas vrai que la suite est forcément constante.

Barème :

A.1 Montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est au plus linéaire ..... 0 point

A.2 Montrer que la suite $(d_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée ..... 1 point

A.3 Traiter le cas où $\liminf(b_n) < +\infty$ ..... 1 point, non cumulable avec la suite

A.4 Annoncer le lemme 3 ..... 0 point

A.5 Montrer le lemme 3 ..... 2 points

♠ Si la contrainte $(n'-n)/n < K$ devient $n'-n < K$ mais la preuve marcherait dans le cas général, l'élève obtient 1 point

A.6 Annoncer le lemme 4 ..... 0 point

A.7 Montrer le lemme 4 ..... 1 points

A.8 Montrer que b_n/n tend vers 0 ..... 1 point.

A.9 Montrer, à partir de $b_n = o(n)$, que $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante apcr ..... 0 point

A.10 Traiter le cas où la suite est bornée ..... 0 point

♠ Ceci coûte un point en cas de solution complète

A.11 Traiter le cas où la suite est non bornée ..... 1 points
A.12 Avoir une solution complète ..... 1 point.
A.13 Ceci octoire également tous les points précédents.

VIII. Conférences

1 Conférence du 19 août (Emilhan)

Le road coloring theorem est un résultat de théorie des graphes démontré en 2007 par A.N. Thratman. Son énoncé est le suivant :

Théorème 1.
Tout graphe fortement connexe, apériodique et de degré sortant constant égal à $k \geqslant 1$ admet un coloriage synchronisant.

Dans cette conférence, nous avons commencé par définir chacun des termes apparaissant dans la formule précédente.

Notre objectif était d'arriver à colorier les k arêtes sortantes de chaque sommet en k couleurs de sorte qu'il existe une suite d'instructions (comme rouge-rouge-bleu-rouge, par exemple) qui envoie tous les sommets sur le même, comme illustré par la figure suivante.

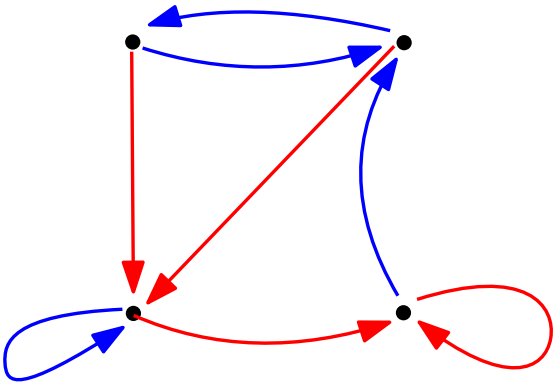


FIGURE 1 – Le mot rr synchronise ce graphe colorié en rouge (r) et bleu (b)

Nous avons vu en quoi l'apériodicité était une condition nécessaire au théorème et avons donné l'idée générale de la preuve de Thratman qui utilise le graphe quotient, appliquée au cas particulier où le graphe est dit Eulérien (c'est-à-dire que le degré entrant des sommets est constant également).

Voici les liens respectifs vers les slides de la conférence et mon rapport de TIPE pour plus d'ouverture sur le Road Coloring Theorem.

Pour toute précision sur le sujet ou si l'un de ces liens ne marche plus, vous pouvez me contacter par email à l'adresse emilhan.durruoglu@animath.fr.

2 Conférence du 21 août (Félix)

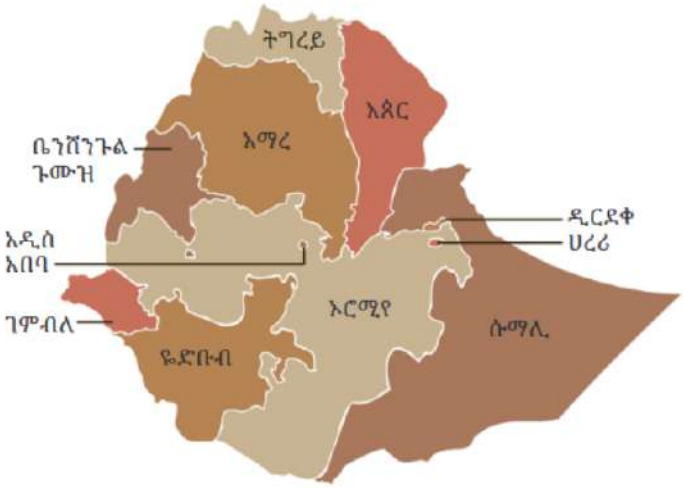
Un exemple de problème d'olympiade de linguistique (tiré de l'olympiade Irlandaise, illustration Alex Bellos) :

L'Amharique est une langue parlée par des dizaines de millions de personne en Éthiopie, et la principale langue de travail du pays. Elle s'écrit avec l'alphasyllabaire guèze.

1.) Les régions de l'Éthiopie ont été écrites en amharique sur la carte et dans le tableau ci-dessous. La liste des noms transcrits en français est également donnée. Trouver quel nom français correspond à chaque nom amharique.

2.) Les noms de 5 villes françaises sont donnés en amharique. Quelles sont ces villes ?

ትግረይ	Adis Ababaa
ቤንሸንጉል ጉሙዝ	Afar
ኦሮሚየ	Amaara
ሀረሪ	Benshangoul-Goumouz
ዲርደቀ	Diredawa
ሱማሊ	Gambela
አጸር	Harari
አዲስ አበባ	Oromiya
ዬድቡብ	Sumaali
አማረ	Tegray
ገምብለ	Yedebub



1.ንስ 2.ማርሴ 3.ስትራስቡር 4.ግረኖብል 5.ሊል

Pour en savoir plus et s'inscrire à l'olympiade française de linguistique, rendez-vous sur https://olympiade-linguistique.fr/ (QR code ci-dessous)

IX. Citations mémorables

— Théo Lenoir, mathématicien : *"Faire du calcul, c'est faire de la combi"*

— Kévin jouant à un jeu de bluff : *"Ah on a le droit de mentir ?"*

— Saad : *"Un Bennigan vs 100 Théo Lenoir au foot"*
Benningan : *"1 gorille vs 100 personnes tu connais ?"*
Vlad : *"1 Horia vs 100 ...(nom illisible)"*

— Antoine D. : *"C'est impossible de faire un triangle qui ne soit pas rectangle ou isocèle"*

— Rémi : *"Un polynôme de degré* 2 *a au maximum* 2 *racines réelles,* 3 *sous un beau jour, mais certainement pas une infinité"*

— Théo : *"Quentin, tu manges ton ventilo ?"*

— Théo : *"Vous en faites du boucan, et il y a même pas Noé dans la salle"*

— Nicolas oublie un terme dans son explication, Théo : *"Nicolas a fait* 90% *du job, et d'autres finissent par marquer le but. Même Mbappé il fait pas ça."*

— Antoine S. : *"C'était mon premier cours. Donc si vous avez des questions, des conseils, des insultes, je prends tout."*

— Quentin : *"Pourquoi Valbonne c'est à Valbonne ? Pourquoi c'est pas en bretagne ?"*

— Matthieu B : *"Un spectre hante l'Europe"*

— Kevin (au foot) : *"Moi, je sais taper les élèves, mais pas le ballon"*

— Oscar : *"Là on va faire quelque chose de plus compliqué, pour que peut-être, à la fin, on arrive à quelque chose de plus simple"*

— Anonyme : *"C'est de la discrimination d'Animatheux"*

— Une personne lui demande si il veut de la mousse au chocolat. Noé : *"Eh, c'est gratuit ou pas ?"*

— Aurélien : *"Les maths, c'est pas un match de boxe mais un combat de karaté"*

— Hadriel : *"Les monômes, c'est comme les Pokémons, tu les captures"*

— *"J'ai confondu ma date de naissance avec l'armistice"*

— Rémi : *"Idéalement, on va corriger les élèves dans l'ordre, donc essayez de faire les élèves dans l'ordre"*

— Rémi : *"Matthieu est un terroriste"*

— Gaëtan : *"Théo, je peux toucher ton nez avec mes auriculaires ?"*

— Mira : *"J'ai entendu quelque part que le fils de Robin des Bois s'appelle Robinet des bosquets."*

— Thibault : *"C'est toi qui est trivial"*

— Entendu dans le couloir : *"C'est pas parce que tu cours que tu iras plus vite"*
— Mattéo : *"Tristan il serait très fier de présenter ses conseils qui marchent pas "*