# Coupe Animath de Printemps

3 juin 2026

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

# Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

  **Chaque exercice est noté sur 7 points.**

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

## Exercices collégiens

*Exercice 1.* Par combien de $0$ se termine l'écriture décimale du nombre $2^{2026} \times 5^{2021}$ ?

*Seule une réponse numérique est attendue ici.*

*Exercice 2.* Soit $ABCD$ un carré. Soit $P$ le point d'intersection de la demi-droite $[AB)$ avec le cercle de centre $A$ et passant par $C$.

Combien mesure l'angle $\widehat{PCB}$ ?

*Exercice 3.* Sur un tableau sont écrits $n \geqslant 2$ nombres entiers strictement positifs deux à deux distincts. Ceux-ci vérifient la propriété suivante : quels que soient les $2$ nombres que l'on choisit parmi ces $n$ nombres, leur somme est un nombre premier.

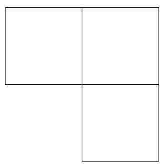
Quelle est la plus grande valeur de $n$ pour laquelle ceci est possible ?

*Exercice 4.* Aline écrit au tableau $n \geqslant 3$ nombres réels deux à deux distincts.

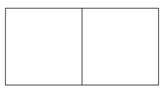
Pour quelles valeurs de $n$ est-ce que, peu importe les nombres réels écrits par Aline, Emilhan peut trouver trois nombres réels deux à deux distincts $a$, $b$ et $c$ parmi les $n$ nombres au tableau tels que $ab + bc + ca \geqslant 0$ ?

*Exercice 5.* Maxime écrit des nombres entiers non nécessairement distincts dans chacune des $64$ cases d'une grille $8 \times 8$. Maxime possède une pièce spéciale, qu'il peut tourner autant qu'il le souhaite, et il a le droit de la poser comme il le veut sur la grille tant que celle-ci ne déborde pas de la grille, et recouvre chaque case soit entièrement, soit pas du tout. Il remarque que chaque fois qu'il fait cela, la somme des nombres inscrits sur les cases qu'il recouvre est la même.

1. Déterminer le nombre maximum de nombres distincts que Maxime a écrit dans la grille si la pièce qu'il possède est la pièce suivante, composée de $3$ cases :



2. Déterminer le nombre maximum de nombres distincts que Maxime a écrit dans la grille si la pièce qu'il possède est la pièce suivante, composée de $2$ cases :



*Exercice 6.* Déterminer tous les triplets $(x, y, z)$ de nombres entiers (non nécessairement positifs) tels que

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1, \\ y^2 = zx + 1, \\ z^2 = xy + 1. \end{cases}$$

*Exercice 7.* Soit $ABC$ un triangle tel que $AB < BC$ et soit $D$ le symétrique de $A$ par rapport à $B$, et $E$ le symétrique de $A$ par rapport à $C$. Soit $P$ le point d'intersection des droites $(DC)$ et $(BE)$ et soit $Q$ le point d'intersection de la droite $(DC)$ et de la perpendiculaire à $(DC)$ passant par $E$. Soit $R$ le point de la droite $(BC)$ tel que le triangle $CQR$ soit isocèle en $R$.

Montrer que les droites $(AP)$, $(QR)$ et $(DE)$ s'intersectent en un même point.

## Exercices lycéens

*Exercice 8.* Combien de chiffres composent l'écriture décimale du nombre $2^{2026} \times 5^{2021}$ ?

*Seule une réponse numérique est attendue ici.*

*Par exemple, l'écriture décimale du nombre* 2020 *comporte* 4 *chiffres.*

*Exercice 9.* Dans une grille $4 \times 4$, deux des seize cases sont coloriées en noir et les quatorze autres en blanc. Déterminer le plus grand nombre entier positif $k$ tel que, peu importe quelles cases sont coloriées en noir, on peut toujours trouver un rectangle, formé de $k$ cases entières, dont les côtés sont parallèles aux côtés de la grille et qui ne contienne aucune case noire.

*Exercice 10.* Soient $A$ et $D$ deux points distincts, et $\Omega$ le cercle de diamètre $[AD]$. On note $B$ et $C$ deux points sur le cercle $\Omega$ tels que les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont distincts deux à deux et se trouvent dans cet ordre sur le cercle. On note $X$ et $Y$ les points d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les droites $(BD)$ et $(CD)$ respectivement.

Montrer que $DX = DY$.

*Exercice 11.* Théo choisit au moins deux nombres parmi les suivants :

$$-2^{2026}, -2^{2025}, \ldots, -2^2, -2^1, -1, 1, 2^1, 2^2, \ldots, 2^{2025}, 2^{2026}.$$

Il écrit au tableau les nombres qu'il a choisis dans l'ordre croissant, et remarque que la différence entre deux nombres voisins au tableau est toujours la même.

Quel est le nombre maximal de nombres que Théo peut écrire au tableau ?

*Exercice 12.* Soit $ABC$ un triangle tel que $AB < BC$ et soit $D$ le symétrique de $A$ par rapport à $B$, et $E$ le symétrique de $A$ par rapport à $C$. Soit $P$ le point d'intersection des droites $(DC)$ et $(BE)$ et soit $Q$ le point d'intersection de la droite $(DC)$ et de la perpendiculaire à $(DC)$ passant par $E$. Soit $R$ le point de la droite $(BC)$ tel que le triangle $CQR$ soit isocèle en $R$.

Montrer que les droites $(AP)$, $(QR)$ et $(DE)$ s'intersectent en un même point.

*Exercice 13.* Déterminer s'il existe une infinité de nombres réels positifs $x$ tels que $x^2$ est un nombre entier et

$$\lfloor \lfloor x \rfloor^2 \{x\} \rfloor = 1.$$

*On rappelle que $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière du réel $y$, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à $y$, et on rappelle que $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire du réel $y$, c'est-à-dire la quantité $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$.*

*Exercice 14.* Baptiste a choisi un nombre entier strictement positif $n$ qui possède exactement 1000 diviseurs positifs (1 et $n$ inclus). Il écrit tous ces diviseurs au tableau dans l'ordre croissant, et remarque que deux diviseurs consécutifs sont toujours de parités différentes : l'un des deux est pair, l'autre est impair.

Montrer que $n$ a au moins 150 chiffres dans son écriture décimale.

*Exercice 15.* Le pays d'Animath contient 2026 villes. Certaines de ses villes sont reliées par des routes (qui vont dans les deux sens). On sait que pour tout triplet de villes deux à deux distinctes $X$, $Y$ et $Z$, il est possible de trouver une suite de routes allant de $X$ à $Z$ sans passer par $Y$. On dit que $n$ villes $V_1, \ldots, V_n$ forment, dans cet ordre, un cycle de longueur $n$ si les $n$ villes sont **deux à deux distinctes**, et si pour tout entier $i$ vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n-1$, les villes $V_i$ et $V_{i+1}$ sont reliées, et $V_n$ est reliée à $V_1$.

Quelle est la plus grande valeur de $n$ telle que, peu importe la manière dont les villes sont reliées, il existe un cycle de longueur au moins $n$ ?