

COUPE ANIMATH DE PRINTEMPS

4 juin 2025

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
Chaque exercice est noté sur 7 points.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ **Pour les exercices 1 et 8**, seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.
- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8**, on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Exercices collégiens

Exercice 1. Par combien de 0 se termine l'écriture décimale du nombre $2^{2026} \times 5^{2021}$?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 On sait que la multiplication par 10 d'un nombre n revient à ajouter un 0 à la fin du nombre n . Ainsi, le nombre de 0 à la fin d'un nombre est le plus grand entier k tel que 10^k divise n . On écrit

$$2^{2026} \times 5^{2021} = 2^{2021+5} \times 5^{2021} = 10^{2021} \times 2^5.$$

Comme 2^5 n'est pas divisible par 10, on en déduit que le nombre de 0 recherché est 2021.

Commentaire des correcteurs : Problème bien réussi dans l'ensemble, cependant de trop nombreux élèves écrivent que $2^{2026} \times 5^{2021} = 10^{4047}$. De plus, il ne suffisait pas de regarder les derniers chiffres, mais regarder la plus grande puissance de 10 qui divise $2^{2026} \times 5^{2021}$. Même si une justification n'est pas attendue ici, il est intéressant d'expliquer son raisonnement pour avoir des points lorsque la réponse est fausse.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un carré. Soit P le point d'intersection de la demi-droite $[AB)$ avec le cercle de centre A et passant par C .

Combien mesure l'angle \widehat{PCB} ?

Solution de l'exercice 2

Comme P est sur le cercle de centre A passant par C , $AP = AC$, donc APC est isocèle en A . De plus, comme $ABCD$ est un carré, $\widehat{CAP} = \widehat{CAB} = 45$. Donc en faisant la somme des angles dans le triangle APC , on a que $180 = \widehat{PAC} + \widehat{APC} + \widehat{ACP} = 45 + 2\widehat{ACP}$, donc $\widehat{ACP} = \frac{135}{2} = 67,5$. Or $\widehat{ACB} = 45$ car $ABCD$ est un carré, donc $\widehat{BCP} = \widehat{ACP} - \widehat{ACB} = 67,5 - 45 = 22,5$.

Commentaire des correcteurs : Exercice bien traité, de nombreuses copies comprennent les attendus de rigueur et de rédaction d'un tel exercice.

Certaines copies ont trouvé des solutions alternatives, introduisant parfois de nouveaux points, par exemple celui diamétralement opposé à C , ou le symétrique de C par rapport à (AB) . Lorsque ce n'était pas pour conclure par angle inscrit, cela n'était pas nécessaire et pouvait allonger le raisonnement. De plus, quelques élèves ont essayé un raisonnement avec des longueurs et ont parfois réussi à trouver la tangente de l'angle \widehat{BCP} , mais cela ne permettait pas directement de trouver la valeur de l'angle. En effet, dans un problème de maths olympiques, et surtout lorsque l'on veut chercher un angle, les solutions n'utilisent quasiment jamais de trigonométrie, mais plutôt de simples chasses aux angles.

Parmi les copies présentant une preuve fautive, une majorité n'utilise nulle part l'hypothèse de l'énoncé selon laquelle P est sur le cercle de centre A passant par C . Comme dans presque tous les exercices, toutes les hypothèses étaient ici nécessaires, ne pas en utiliser une devrait mettre la puce à l'oreille qu'une étape est probablement fautive.

On rappelle que fournir une figure où sont placés les angles et objets mentionnés dans la preuve est apprécié, surtout si de nouveaux points sont introduits.

Exercice 3. Sur un tableau sont écrits $n \geq 2$ nombres entiers strictement positifs deux à deux distincts. Ceux-ci vérifient la propriété suivante : quels que soient les 2 nombres que l'on choisit parmi ces n nombres, leur somme est un nombre premier.

Quelle est la plus grande valeur de n pour laquelle ceci est possible ?

Solution de l'exercice 3 Montrons que la plus grande valeur possible est $n = 2$. Pour cela, on va montrer que $n = 2$ convient, et qu'il ne peut pas y avoir $n > 2$ nombres écrits au tableau.

Le nombre $n = 2$ convient : Il est possible d'écrire 2 et 3 au tableau, leur somme fait bien 5 qui est un nombre premier.

Il ne peut pas y avoir $n > 2$ nombres écrits au tableau : Si $n > 2$, alors au moins 3 nombres sont écrits au tableau. Comme les nombres sont soit pair, soit impair, il existe deux nombres ayant la même parité, que l'on note a et b . Quitte à échanger, on peut supposer $a < b$ (car les nombres écrits sont distincts), on a donc $a \geq 1$ et $b \geq 2$, donc $a + b \geq 3$. Ainsi $a + b$ est un nombre pair, donc divisible par 2, et vaut strictement plus que 2, donc $a + b$ n'est pas premier, ce qui est absurde.

En conclusion, la plus grande valeur de n pour laquelle ceci est possible est $n = 2$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été généralement bien traité, la plupart des copies ont trouvé la solution. Il est vraiment dommage que plusieurs copies oublient de donner une construction pour $n = 2$, ce qui leur a coûté des points. Quelques élèves ont aussi mal lu l'énoncé, qui mentionne des entiers strictement positifs, et ont ajouté 0 aux nombres écrits au tableau. Une autre erreur récurrente a été l'oubli du cas de 2, un nombre premier pair, qui nécessitait un argument un peu différent.

Exercice 4. Aline écrit au tableau $n \geq 3$ nombres réels deux à deux distincts.

Pour quelles valeurs de n est-ce que, peu importe les nombres réels écrits par Aline, Emilhan peut trouver trois nombres réels deux à deux distincts a, b et c parmi les n nombres au tableau tels que $ab + bc + ca \geq 0$?

Solution de l'exercice 4 On montre que seuls les nombres entiers $n \geq 5$ sont tels que Emilhan peut trouver des nombres a, b et c vérifiant les hypothèse de l'exercice.

L'entier $n = 4$ ne convient pas : si $n = 4$ et que Aline choisit les nombres $-2, -1, 1$ et 2 , on peut vérifier que quels que soient les choix d'Emilhan pour les nombres a, b et c on a toujours $ab + bc + ca < 0$. En effet, il y a 4 choix différents possibles pour le triplet $\{a, b, c\}$ (on peut s'en rendre compte en regardant l'unique élément non choisi dans le triplet) qui donnent

$$\begin{aligned}(-1) \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-1) &= -1 < 0 \\(-2) \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times (-2) &= -4 < 0 \\(-2) \times (-1) + (-1) \times 2 + 2 \times (-2) &= -4 < 0 \\(-2) \times (-1) + (-1) \times 1 + 1 \times (-2) &= -1 < 0.\end{aligned}$$

L'entier $n = 3$ ne convient pas : il suffit de prendre un sous-ensemble de l'exemple précédent. Une autre solution pour Aline est $-1, 0, 1$.

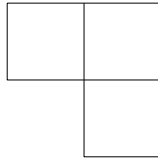
Tout entier vérifiant $n \geq 5$ convient : si $n \geq 5$, par principe des tiroirs, il est toujours possible pour Emilhan de trouver 3 nombres positifs ou nuls ou bien 3 nombres strictement négatifs. Il choisit a, b et c comme étant 3 nombres de même signe, ainsi $ab \geq 0, bc \geq 0$ et $ca \geq 0$, donc $ab + bc + ca \geq 0$. Ce qui conclut ce cas là et l'exercice.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été globalement bien traité par les copies l'ayant abordé. On note cependant plusieurs écueils à éviter.

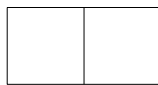
- ▷ Presque toutes les copies utilisent le fait qu'il y a forcément trois nombres de même signe si Aline écrit au moins cinq nombres au tableau. Il y a ici une petite subtilité dans le principe des tiroirs, puisqu'il faudrait choisir une convention pour le signe de 0 afin d'être rigoureux (il serait aussi possible de le mettre dans les deux tiroirs). Les correcteurs n'ont cependant pas pénalisé cette imprécision.
- ▷ De nombreux élèves affirment que si $ab + bc + ca \geq 0$, alors a, b, c sont tous trois de même signe. Ce n'est cependant pas du tout vrai (par exemple avec $10, 11, -1$). Il s'agissait en général d'une erreur bénigne (puisque peu d'élèves l'ont utilisé dans le reste de leur preuve), mais il convient d'avoir conscience de la différence logique entre une propriété et sa réciproque pour éviter ce genre d'erreur.
- ▷ Pour les cas $n = 3$ et $n = 4$ où Aline gagnait, il était nécessaire de fournir une construction pour Aline (voir le corrigé). Certaines copies se contentent d'affirmer que puisque la preuve fournie pour $n \geq 5$ ne marche pas pour $n < 5$, Aline gagne forcément dans ce cas. Ceci n'a aucune raison d'être vrai a priori.
- ▷ Enfin, certaines copies proposent une construction où Aline écrit plusieurs fois le même nombre au tableau. C'est dommage de perdre des points pour une telle étourderie dans la mesure où l'énoncé précise explicitement que les nombres écrits par Aline doivent tous être distincts...

Exercice 5. Maxime écrit des nombres entiers non nécessairement distincts dans chacune des 64 cases d'une grille 8×8 . Maxime possède une pièce spéciale, qu'il peut tourner autant qu'il le souhaite, et il a le droit de la poser comme il le veut sur la grille tant que celle-ci ne déborde pas de la grille, et recouvre chaque case soit entièrement, soit pas du tout. Il remarque que chaque fois qu'il fait cela, la somme des nombres inscrits sur les cases qu'il recouvre est la même.

1. Déterminer le nombre maximum de nombres distincts que Maxime a écrit dans la grille si la pièce qu'il possède est la pièce suivante, composée de 3 cases :



2. Déterminer le nombre maximum de nombres distincts que Maxime a écrit dans la grille si la pièce qu'il possède est la pièce suivante, composée de 2 cases :



Solution de l'exercice 5

- ▷ L'énoncé nous demande de trouver le plus grand nombre vérifiant une certaine propriété. La solution contiendra donc nécessairement deux étapes. Nous allons d'abord montrer qu'un nombre vérifiant la propriété voulue est inférieur ou égal à une certaine valeur, puis exhiber une situation dans laquelle cette valeur est atteinte.

Considérons une grille remplie par Maxime telle que la pièce 'coin' possède la même somme quel que soit l'endroit où on la pose, somme que l'on note S . On considère deux cases C_1 et C_2 qui sont adjacentes (au sens où elles partagent un sommet). On peut alors trouver un carré de taille 2×2 dans la grille qui contient ces deux cases. Soit T la somme des nombres écrits sur les 4 cases du carré 2×2 . Par hypothèse, en faisant tourner la pièce coin de 90° à trois reprises dans le carré 2×2 , on sait que la somme de 3 des 4 cases du carré 2×2 vaut toujours S . En particulier, sur les cases C_1 et C_2 il est écrit le même nombre $T - S$. Nous avons montré que deux cases adjacentes ont toujours le même nombre, donc Maxime a forcément écrit le même nombre sur toutes les cases de la grille.

Réciproquement, si Maxime écrit le nombre 0 dans toutes les cases de la grille 8×8 , la somme des nombres inscrits sur les cases qu'il recouvre avec un coin sera toujours 0. La réponse dans ce cas est donc : il a utilisé au maximum un nombre.

- ▷ Suivons les mêmes étapes.

Considérons une grille remplie par Maxime telle que la pièce 'domino' possède la même somme quel que soit l'endroit où on la pose, somme que l'on note S . On considère deux cases C_1 et C_3 qui possèdent un coin en commun mais pas de côté en commun. Il existe alors un coin composé des cases C_1 , C_2 et C_3 , de sorte que C_2 soit au milieu. Notons T la somme des nombres inscrits sur les trois cases C_1 , C_2 et C_3 . En posant le domino sur les cases C_1 et C_2 , puis sur les cases C_2 et C_3 , on voit que le nombre écrit sur la case C_3 est nécessairement $T - S$ puis que le nombre écrit sur la case C_1 est $T - S$ également. Ainsi, les nombres écrits sur deux cases qui sont adjacentes en diagonale sont forcément les mêmes. En particulier, si l'on colorie la grille 8×8 en damier (blanc/noir), toutes les cases de la même couleur ont le même chiffre.

Réciproquement, il est possible que Maxime ait utilisé deux nombres différents : il lui suffit en effet d'écrire 0 sur les cases blanches et 1 sur les cases noires. La somme des nombres écrits sur

un domino vaudra alors toujours 1 car un domino possède toujours une case blanche et une case noire.

La réponse dans ce cas est donc : il a utilisé au maximum deux nombres distincts.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été beaucoup abordé, mais peu l'ont résolu entièrement. Un nombre important d'élèves arrivaient à démontrer, par exemple dans la question 1, que toutes les cases d'un carré 2×2 de la grille contenaient le même nombre, et en déduisent sans explication supplémentaire qu'on ne pouvait écrire qu'un seul nombre dans la grille. Ce passage du local à global était assez visuel mais nécessitait au moins une courte justification. Beaucoup d'élèves raisonnent en tâtonnant, par exemple en fixant les valeurs dans un coin de la grille, ou en traitant des cas non exhaustifs (comme supposer qu'il y a exactement 2 valeurs distinctes si il n'y en a pas une seule) : il faut faire attention à ne pas perdre de généralité lorsqu'on fait ce genre de suppositions.

Exercice 6. Déterminer tous les triplets (x, y, z) de nombres entiers (non nécessairement positifs) tels que

$$\begin{cases} x^2 = yz + 1, \\ y^2 = zx + 1, \\ z^2 = xy + 1. \end{cases}$$

Solution de l'exercice 6 Le raisonnement dans chacune des solutions nécessite deux phases : une phase d'analyse qui à partir du fait que (x, y, z) est solution détermine les (x, y, z) , et la synthèse, qui consiste à vérifier que tous les triplets trouvés sont solution.

Analyse : Soit (x, y, z) un triplet solution. On soustrait la deuxième ligne à la première, on obtient que $x^2 - y^2 = -(x - y)z$. Or $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$, donc soit $x = y$, soit $x + y = -z$, c'est-à-dire $x + y + z = 0$.

Or le système est symétrique, si on échange deux variables, alors le système reste le même. Donc en particulier, on a $y = z$ ou $x + y + z = 0$, et de même $x = z$ ou $x + y + z = 0$ (on peut également retrouver cela en soustrayant la troisième ligne à la seconde, puis la première à la troisième). Ainsi soit $x + y + z = 0$, soit $x + y + z \neq 0$ et dans ce cas $x = y = z$. Ce cas est rapidement traité, car la première équation devient $x^2 = x^2 + 1$ qui est absurde. Ainsi $x + y + z = 0$.

La première équation devient $yz + 1 = (-y - z)^2 = y^2 + z^2 + 2yz$, donc $y^2 + yz + z^2 = 1$. En faisant de même avec les autres équations (ou par symétrie du système), $x^2 + xz + z^2 = y^2 + yx + x^2 = 1$. Or parmi x, y, z , deux ont même signes (car il y a 3 éléments et deux possibilités pour le signe), disons x et y . L'équation $x^2 + y^2 + xy = 1$ implique, comme x^2, y^2, xy sont positifs, qu'un des 3 vaut 1, et les autres 0. Si $x^2 = y^2 = 0$, $x = y = 0$ donc $xy = 0$. Ainsi, dans tous les cas $xy = 0$, donc quitte à échanger x et y , $y = 0$.

Dans ce cas, la deuxième équation devient $xz = -1$, donc $x = 1$ et $z = -1$ ou inversement. Ainsi (x, y, z) est, à l'ordre près, égal à $(-1, 0, 1)$.

Synthèse : Montrons que tout triplet valant $(-1, 0, 1)$ à l'ordre près est solution. Déjà comme le système est symétrique, il suffit de le vérifier pour $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$. Dans ce cas on a bien $(-1)^2 = 0 \times 1 + 1 = 1$, $0^2 = -1 \times 1 + 1$ et $1^2 = 0 \times (-1) + 1$, donc les solutions sont exactement les triplets $(-1, 0, 1)$ à permutation près : les solutions sont donc exactement les 6 triplets $(1, 0, -1)$, $(1, -1, 0)$, $(0, 1, -1)$, $(0, -1, 1)$, $(-1, 0, 1)$ et $(-1, 1, 0)$.

Solution alternative n°1 On propose une autre façon de faire l'analyse. On remarque que si les trois nombres xy, yz et zx sont positifs on a, en multipliant les trois équations

$$\begin{aligned} x^2 y^2 z^2 &= (yz + 1)(zx + 1)(xy + 1) \\ &= x^2 y^2 z^2 + yz zx + zx xy + xy yz + yz + zx + xy + 1 \\ &\geq x^2 y^2 z^2 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 \times 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \\ &= x^2 y^2 z^2 + 1. \end{aligned}$$

On obtiendrait alors $0 \geq 1$ ce qui est manifestement faux.

On peut donc supposer qu'un des nombres de la forme xy, yz ou zx est strictement négatif. Sans perte de généralité, on suppose qu'il s'agit de yz . Comme y et z sont des entiers, on a donc $yz \leq -1$ et ainsi $x^2 = yz + 1 \leq -1 + 1 = 0$. Le seul nombre entier dont le carré est 0 est 0 lui-même et on obtient donc que $x = 0$. En remplaçant $x = 0$ dans les deux autres équations, on obtient $y^2 = z^2 = 1$, donc y et z valent -1 ou 1 . Comme yz est négatif, il faut nécessairement qu'un des nombres, disons y soit égal à -1 et l'autre soit égal à 1 . Ainsi à permutation près, (x, y, z) vaut $(-1, 0, 1)$ ce qui conclut.

Solution alternative n°2 On présente une autre façon de faire l'analyse. L'idée de cette preuve est de remarquer que si un nombre est trop grand par rapport aux deux autres, les égalités de l'énoncé

ne peuvent pas être vérifiées. Nous voulons donc considérer le nombre qui a la plus grande valeur absolue.

Quitte à échanger les nombres x , y et z , supposons sans perte de généralité que x a la plus grande valeur absolue.

Puisque $x^2 \neq \pm x^2 + 1$, on ne peut pas avoir à la fois $|x| = |y|$ et $|x| = |z|$. Ainsi, sans perte de généralité, $|x| > |y|$, en particulier $|x| \geq 1$. On trouve alors en réinjectant dans la première équation :

$$x^2 = yz + 1 \leq |yz| + 1 \leq (|x| - 1) \cdot |x| + 1 = x^2 - |x| + 1.$$

Ainsi, on doit avoir $|x| \leq 1$, donc $|x| = 1$.

On trouve

$$x^2 = 1 = yz + 1,$$

donc $yz = 0$. Supposons sans perte de généralité (quitte à échanger y et z) que $y = 0$. On doit alors avoir

$$y^2 = 0 = xz + 1 = z + 1,$$

donc $x = 1$ et $z = -1$ ou inversement. On trouve donc que, à permutation près, $(x, y, z) = (1, 0, -1)$, ce qui conclut.

Solution alternative n°3 On présente une autre façon de faire l'analyse. Sommons toutes les égalités, on obtient que

$$x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz + 3.$$

En multipliant par 2, on obtient que

$$6 = 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) = (x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2xz + x^2) = (x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2.$$

En particulier, $|x - y| \leq \sqrt{6} < 3$, donc $|x - y| \leq 2$, de même pour $|y - z|$ et $|x - z|$. Ainsi $(x - y)^2$ vaut 4, 1 ou 0, et de même pour les autres carrés. En testant, la seule possibilité pour faire une somme de 6 avec 3 nombres valant 0, 1, 4 est d'avoir 4 + 1 + 1. Ainsi il existe deux éléments parmi x, y, z dont la différence vaut ± 2 , donc deux éléments dont la différence vaut 2, disons que $z = x + 2$ (par symétrie du système), et la différence entre y et x , et celle entre y et z vaut 1, donc par symétrie $y = x + 1 = z - 1$.

La dernière équation devient $(x + 2)^2 = x(x + 1) + 1$, donc $x^2 + 4x + 4 = x^2 + x + 1$, donc $3x = -3$, donc $x = -1$. On a donc $(x, y, z) = (-1, 0, 1)$ ou une permutation de ce triplet.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été bien abordé pour sa position dans le sujet et de nombreux élèves ont su y trouver des points, ce qui est très positif. Il était possible de l'approcher de beaucoup de façons différentes, comme en témoigne la variété de solutions proposées par les élèves. D'un autre côté, il est dommage de constater qu'une proportion très faible des élèves ayant manifestement compris les idées essentielles du problème obtiennent la note maximale. En particulier on rappelle à cet effet que :

- ▷ Une résolution de système appelle à une synthèse : il faut expressément vérifier que les solutions potentielles trouvées sont bien solution (et le signaler).
- ▷ Attention à ne pas diviser par 0 : pour pouvoir simplifier l'égalité $(x - y)(x + y) = z(y - x)$ par $x - y$ il faut traiter à part le cas où $x = y$.
- ▷ L'inégalité $x \geq y \geq z$ n'implique pas $x^2 \geq yz$ comme en témoigne le contre exemple $(x, y, z) = (3, -5, -5)$. En particulier il faut être prudent lors de la manipulation d'inégalité avec des réels potentiellement négatif, et préférer plutôt travailler avec leurs valeurs absolues.

▷ Avoir une équation comme $x^2 + xy + y^2 = 1$ et affirmer que cela implique par exemple que $|x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$ sans preuve n'est pas correct. Tout ce qui est affirmé doit être prouvé, surtout quand les équations ne peuvent pas être résolues directement. Idem pour les solutions de $x^3 - x = y^3 - y$.

Finalement il est à noter que ce problème présentait une symétrie en les variables x , y et z , ainsi que par la transformation $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. Certaines copies auraient donc pu s'épargner de traiter trop de cas essentiellement identiques en le remarquant!

Exercice 7. Soit ABC un triangle tel que $AB < BC$ et soit D le symétrique de A par rapport à B , et E le symétrique de A par rapport à C . Soit P le point d'intersection des droites (DC) et (BE) et soit Q le point d'intersection de la droite (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par E . Soit R le point de la droite (BC) tel que le triangle CQR soit isocèle en R .

Montrer que les droites (AP) , (QR) et (DE) s'intersectent en un même point.

Solution de l'exercice 7 On va montrer que les trois droites passent toutes par le milieu du segment $[DE]$.

Tout d'abord, on remarque que dans le triangle ADE , les droites (DC) et (BE) sont les médianes des côtés AE et AD . Or, on sait que les trois médianes d'un triangle sont concourantes, donc dans le triangle ADE , ce point de concours est P . Cela implique que la droite (AP) est une médiane et donc qu'elle coupe le segment $[DE]$ en son milieu.

Comme les points B et C sont les milieux des côtés AD et AE respectivement dans le triangle ADE , on en déduit également que les droites (BC) et (DE) sont parallèles par la droite des milieux ou directement pour le théorème de Thalès.

On note M' l'intersection de la droite (QR) et de la droite (DE) . Comme montré précédemment, on sait que $(BC) \parallel (DE)$ et grâce au théorème de Thalès appliqué aux triangles QCR et QDM' que

$$\frac{QR}{QM'} = \frac{CR}{DM'}$$

Le triangle QCR est isocèle en R donc $RC = RQ$ et donc, d'après l'identité précédente, on sait que $QM' = M'D$. Ainsi, le point M' est sur la médiatrice de $[DQ]$. Soit M le milieu de $[DE]$. Comme l'angle \widehat{DQE} est droit on en déduit que M est le centre du cercle circonscrit à DQE et donc sur la médiatrices de $[DQ]$. Les points M et M' sont donc tous deux intersections de la médiatrice de $[DQ]$ avec (DE) et comme ces deux droites ne sont pas confondues on en déduit que $M = M'$. Cela conclut l'exercice.

Solution alternative n°1 On propose une autre manière de conclure à partir de l'introduction de M' .

$$\begin{aligned} \widehat{M'QE} &= \widehat{RQE} \\ &= \widehat{CQE} - \widehat{CQR} \\ &= \widehat{DQE} - \widehat{QCR} \quad RCQ \text{ est isocèle en } R \\ &= 90 - \widehat{BCD} = 90 - \widehat{QDE} \quad \text{car } (BC) \text{ et } (DE) \text{ sont parallèles} \\ &= \widehat{DEQ} \quad \text{car } QED \text{ est rectangle en } Q \qquad \qquad \qquad = \widehat{M'EQ}. \end{aligned}$$

Ainsi $M'EQ$ est isocèle en M' . Soit M le milieu de $[DE]$. Comme l'angle \widehat{DQE} est droit on en déduit que M est le centre du cercle circonscrit à DQE et donc sur la médiatrices de $[EQ]$. Les points M et M' sont donc tous deux intersections de la médiatrice de $[EQ]$ avec (DE) et comme ces deux droites ne sont pas confondues on en déduit que $M = M'$. Cela conclut l'exercice.

Commentaire des correcteurs : La plupart des élèves qui ont avancé dans le problème ont soit trouvé le parallélisme soit remarqué que (AP) passe par le milieu de $[DE]$. Les solutions complètes étaient très variées, en passant par les solutions officielles, ou même en utilisant des astuces avec des homothéties par exemple.

Attention, beaucoup d'élèves ont supposé d'emblée l'existence d'un point d'intersection commun aux trois droites, ce qui revient à admettre ce que l'on cherche précisément à démontrer.

Exercices lycéens

Exercice 8. Combien de chiffres composent l'écriture décimale du nombre $2^{2026} \times 5^{2021}$?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Par exemple, l'écriture décimale du nombre 2020 comporte 4 chiffres.

Solution de l'exercice 8 On sait que

$$2^{2026} \times 5^{2021} = 2^5 \times 2^{2021} \times 5^{2021} = 32 \times 10^{2021}.$$

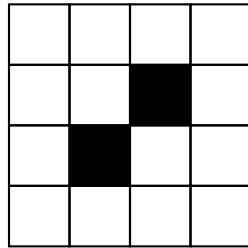
Ce nombre est donc composé des chiffres 3, 2, puis de 2021 chiffres 0. Il possède donc 2023 chiffres au total.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien résolu dans l'ensemble. Toutefois, un certain nombre d'élèves a donné une réponse fautive sans justification, les empêchant d'obtenir des points, ce qui est dommage. Une source d'erreur importante a été d'oublier que 10^{2021} a 2022 chiffres et pas 2021. Nous rappelons aussi que le nombre de chiffres du produit de deux nombres n'est pas la somme des nombres de chiffres des facteurs (par exemple : $10 \times 10 = 100$ a 3 chiffres et non 4).

Exercice 9. Dans une grille 4×4 , deux des seize cases sont coloriées en noir et les quatorze autres en blanc. Déterminer le plus grand nombre entier positif k tel que, peu importe quelles cases sont coloriées en noir, on peut toujours trouver un rectangle, formé de k cases entières, dont les côtés sont parallèles aux côtés de la grille et qui ne contienne aucune case noire.

Solution de l'exercice 9 L'énoncé nous demande de trouver le plus grand nombre vérifiant une certaine propriété. La solution contiendra donc nécessairement deux étapes. Nous allons d'abord montrer que le nombre recherché vaut au plus 4, puis montrer que le nombre 4 vérifie bien la propriété annoncée.

Considérons la situation où deux cases centrales diagonalement adjacentes de la grille 4×4 sont coloriées en noir. Dans ce cas, on peut vérifier qu'il n'y a pas de rectangles possédant strictement plus de 4 cases et ne contenant aucune case noire. Donc $k \leq 4$.



Réciproquement, remarquons que quel que soit le coloriage de la grille 4×4 , il y a forcément une ligne 1×4 qui ne contient aucune case noire (puisque'il y a 4 lignes et deux cases noires). Donc $k \geq 4$. Nous avons donc bien montré que la réponse est 4.

Commentaire des correcteurs : Un grand nombre d'élèves a traité le problème, correctement pour la majorité d'entre eux.

Beaucoup ont réussi à montrer que $k \geq 4$, même si une grande partie des élèves a rencontré des difficultés pour l'autre partie, qui consistait à montrer que $k \leq 4$. Les erreurs venaient principalement de la méthode de raisonnement : les exemples ne suffisent pas à montrer une généralité, on attendait donc des arguments indépendants de la configuration pour justifier qu'on pouvait toujours former un rectangle de 4 cases. Les raisonnements par disjonction de cas peuvent conclure mais il faut alors redoubler de vigilance pour s'assurer que tous les cas sont en effet traités. Plusieurs élèves essaient de traiter les deux parties en une, en expliquant comment trouver la situation "la plus restrictive", afin de directement trouver un extremum pour k . Raisonner en parlant de 'pire cas' est souvent un piège où notre intuition nous souffle la réponse sans que nous sachions comment prouver le résultat.

Exercice 10. Soient A et D deux points distincts, et Ω le cercle de diamètre $[AD]$. On note B et C deux points sur le cercle Ω tels que les points A, B, C et D sont distincts deux à deux et se trouvent dans cet ordre sur le cercle. On note X et Y les points d'intersection de la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} avec les droites (BD) et (CD) respectivement.

Montrer que $DX = DY$.

Solution de l'exercice 10 On sait que le segment $[AD]$ est le diamètre du cercle Ω , ainsi on a $\widehat{ABD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$. Ainsi les triangles BXA et AYC sont rectangles respectivement en B et C , donc $\widehat{BXA} = 180 - \widehat{XBA} - \widehat{BAX} = 90 - \widehat{BAX}$ et de même $\widehat{DYA} = 90 - \widehat{YAC}$.

Or comme X et Y sont sur la bissectrice de \widehat{BAC} , $\widehat{BAX} = \widehat{YAC}$, donc $\widehat{BXA} = \widehat{CAY}$. ainsi $\widehat{BXA} = 90 - \widehat{BAX} = 90 - \widehat{YAC} = \widehat{AYC}$. Comme par angles correspondants, $\widehat{BXA} = \widehat{YXD}$, on a $\widehat{YXD} = \widehat{XYD}$. Ainsi le triangle DXY est isocèle en D , donc $DX = DY$.

Solution alternative n°1 Par théorème du pôle sud, (AX) (qui est la bissectrice de \widehat{BAC} recoupe Ω en E le milieu de l'arc BC). De même, la bissectrice de \widehat{CDB} recoupe également Ω en E . Comme $[AD]$ est un diamètre, $\widehat{DEA} = 90^\circ$. Ainsi X et Y sont échangés par la symétrie d'axe (DE) , et donc $DX = DY$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup abordé et très bien réussi. Nous n'avons pas remarqué d'erreur trop souvent récurrente, les élèves assez familiers en géométrie n'ont souvent pas eu trop de problème avec l'exercice.

Exercice 11. Théo choisit au moins deux nombres parmi les suivants :

$$-2^{2026}, -2^{2025}, \dots, -2^2, -2^1, -1, 1, 2^1, 2^2, \dots, 2^{2025}, 2^{2026}.$$

Il écrit au tableau les nombres qu'il a choisis dans l'ordre croissant, et remarque que la différence entre deux nombres voisins au tableau est toujours la même.

Quel est le nombre maximal de nombres que Théo peut écrire au tableau ?

Solution de l'exercice 11 On va montrer que la réponse est 3, ce qui va être fait en deux étapes : on montre d'abord que Théo peut écrire 3 nombres, puis que Théo ne peut écrire strictement plus que 3 nombres.

Théo peut écrire trois nombres au tableau : il lui suffit d'écrire $-2, 1, 4$, les différences entre deux nombres voisins valent bien toujours 3.

Théo ne peut écrire strictement plus de trois nombres au tableau. On va montrer le résultat suivant, qu'on utilisera pendant toute la solution : **Lemme :** si b, c, d sont trois entiers positifs tels que $2^b = 2^c + 2^d$, alors $c = d = b - 1$.

Preuve : Soit b, c, d trois entiers positifs tels que $2^b = 2^c + 2^d$. Comme $2^b > 2^c$, $c < b$, donc $c \leq b - 1$, de même $d \leq b - 1$. Ainsi $2^b + 2^c \leq 2 \times 2^{b-1} = 2^b$. On a donc égalité dans l'inégalité donc $c = d = b - 1$ ce qui conclut.

Autre preuve du lemme : De même que dans la preuve précédente, $b > c$ et $b > d$. Quitte à échanger c et d , on suppose $c \leq d$. Si $c < d$, 2^{c+1} divise 2^d et 2^b , il divise donc aussi $2^d - 2^b = 2^c$ ce qui est absurde. Ainsi $c = d$, donc $2^b = 2^{c+1}$ donc $c = d = b - 1$.

Supposons que Théo puisse écrire trois nombres positifs au tableau, il existe donc trois nombres positifs voisins écrits au tableau, disons $2^a, 2^e$ et 2^f dans cet ordre (avec $a < e < f$). On a alors $2^f - 2^e = 2^e - 2^a$, donc $2^f + 2^a = 2 \times 2^e = 2^{e+1}$. Ainsi d'après le lemme, $a = e = f$ ce qui est absurde. Ainsi Théo peut écrire au plus 2 nombres positifs. De même il peut écrire au plus deux nombres négatifs. Donc Théo peut écrire au plus 4 nombres.

Si Théo arrive à écrire 4 nombres, deux sont positifs et deux négatifs. Disons que les trois nombres écrits dans l'ordre sont $-2^p, -2^q, 2^r, 2^s$. On a $2^s - 2^r = 2^r + 2^q$, donc $2^s = 2^{r+1} + 2^q$, donc d'après le lemme, $s - 1 = r + 1 = q$. Ainsi les nombres écrits au tableau sont $-2^p, -2^{r+1}, 2^r, 2^{r+2}$. De même, on a $2^p - 2^{r+1} = 2^{r+1} + 2^r$, donc $2^p = 2^{r+2} + 2^r$, donc $p - 1 = r + 2 = r$ ce qui est absurde. Ainsi Théo peut écrire au plus 3 nombres au tableau, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été résolu de manière mitigée. Quelques commentaires :

- ▷ Un certain nombre d'élèves ont conjecturé que la réponse était 2. Il est dommage que ceux-ci n'aient pas testé les petits cas : $-2, 1, 4$ est une solution qu'on trouve assez rapidement, et qui contredit tout argument montrant qu'il y a au plus 2 nombres écrits.
- ▷ Beaucoup d'élèves ont essayé de résoudre des équations de la forme $2^b - 2^c = 2^c \pm 2^d$. Il est dommage que souvent, l'ensemble des solutions soit admis. Par exemple, affirmer que $2^n - 1$ n'était jamais une puissance de 2 sauf pour $n = 1$ sans preuve coûtait un point, idem pour $2^n + 1$ (sauf $n = 0$), il fallait invoquer l'imparité. Affirmer que si $2^b + 2^c$ est une puissance de 2, alors $b = c$ coûtait plus de points.
- ▷ De manière plus grave que le commentaire précédent, beaucoup d'élèves ont oublié que $2^n + 1$ et $2^n - 1$ peuvent être des puissances de 2. Cela faisait souvent louper un nombre important de points (non pas parce que l'erreur était pénalisée fortement, mais parce que les cas à traiter après (cf la solution officielle) ne pouvaient pas être traités).
- ▷ De manière plus générale que dans les deux précédents points, un manque global de justifications s'est fait sentir sur ce problème. Il est important de justifier toutes ses affirmations.
- ▷ Certains élèves ont fait des erreurs de calcul facilement évitables : relire sa copie est crucial pour éviter toute erreur, qui peut rapidement coûter beaucoup de point.

Exercice 12. Soit ABC un triangle tel que $AB < BC$ et soit D le symétrique de A par rapport à B , et E le symétrique de A par rapport à C . Soit P le point d'intersection des droites (DC) et (BE) et soit Q le point d'intersection de la droite (DC) et de la perpendiculaire à (DC) passant par E . Soit R le point de la droite (BC) tel que le triangle CQR soit isocèle en R .

Montrer que les droites (AP) , (QR) et (DE) s'intersectent en un même point.

Solution de l'exercice 12 On va montrer que les trois droites passent toutes par le milieu du segment $[DE]$.

Tout d'abord, on remarque que dans le triangle ADE , les droites (DC) et (BE) sont les médianes des côtés AE et AD . Or, on sait que les trois médianes d'un triangle sont concourantes, donc dans le triangle ADE , ce point de concours est P . Cela implique que la droite (AP) est une médiane et donc qu'elle coupe le segment DE en son milieu.

Comme les points B et C sont les milieux des côtés AD et AE respectivement dans le triangle ADE , on en déduit également que les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

On note M' l'intersection de la droite (QR) et de la droite (DE) . Comme montré précédemment, on sait que $(BC) \parallel (DE)$ et grâce au théorème de Thalès appliqué aux triangles QCR et QDM' que

$$\frac{QR}{QM'} = \frac{CR}{DM'}$$

Le triangle QCR est isocèle en R donc $RC = RQ$ et donc, d'après l'identité précédente, on sait que $QM' = M'D$. Ainsi, le point M' est sur la médiatrice de $[DQ]$. Soit M le milieu de $[DE]$. Comme l'angle \widehat{DQE} est droit on en déduit que M est le centre du cercle circonscrit à DQE et donc sur la médiatrice de $[DQ]$. Les points M et M' sont donc tous deux intersections de la médiatrice de $[DQ]$ avec (DE) et comme ces deux droites ne sont pas confondues on en déduit que $M = M'$. Cela conclut l'exercice.

Commentaire des correcteurs : Nous avons reçu beaucoup de copies sur cet exercice et il a été très bien résolu. Lorsqu'il s'agit de montrer la concurrence de trois droites il y a plusieurs méthodes possibles. La plus répandue est de nommer l'intersection de deux des trois droites et essayer de montrer qu'elle se trouve sur la dernière. Lors de cet exercice, l'approche naturelle (et que toutes les personnes ayant réussi l'exercice ont utilisée) est de montrer que les trois droites s'intersectaient sur un point particulier du segment $[DE]$, son milieu. Il fallait ensuite traiter les deux droites séparément. Montrer que la droite (AP) passait par le milieu de $[DE]$ a été considéré comme plus facile par les correcteurs car la deuxième concurrence nécessitait plus d'étape.

Nous avons très peu d'erreurs à remarquer. Certains élèves confondent hauteurs, médiane ou bissectrice. Cela est dommage car cela peut vous induire en erreur. On rappelle également qu'il est vraisemblable que toutes les hypothèses de l'énoncé soient utiles (ici ce n'était d'ailleurs pas le cas, on pouvait remplacer la définition de D et E comme les symétriques de A par rapport à B et C et l'exercice restait correct). Par exemple, une copie qui n'utilisait jamais le fait que $\widehat{CED} = 90^\circ$ n'avait aucune chance de conclure correctement

Exercice 13. Déterminer s'il existe une infinité de nombres réels positifs x tels que x^2 est un nombre entier et

$$\lfloor [x]^2 \{x\} \rfloor = 1.$$

On rappelle que $\lfloor y \rfloor$ désigne la partie entière du réel y , c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à y , et on rappelle que $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire du réel y , c'est-à-dire la quantité $\{y\} = y - \lfloor y \rfloor$.

Solution de l'exercice 13 Montrons qu'il existe un nombre fini de x vérifiant l'énoncé.

Soit x vérifiant l'énoncé, notons qu'on ne peut avoir $\lfloor x \rfloor = 0$. Ainsi $\lfloor x \rfloor \geq 1$, posons $\alpha = [x]^2 \{x\}$ qui est dans $[1, 2[$. On a alors $\{x\} = \frac{\alpha}{[x]^2}$.

Ainsi

$$x^2 = (\lfloor x \rfloor + \{x\})^2 = \left(\lfloor x \rfloor + \frac{\alpha}{[x]^2} \right)^2 = [x]^2 + \frac{2\alpha}{[x]} + \frac{\alpha^2}{[x]^4}.$$

Or comme α est entre 1 et 2, cette quantité est strictement plus grande que $[x]^2$ et strictement plus petite que $[x]^2 + \frac{4}{[x]} + \frac{4}{[x]^4}$. Comme x^2 est entier, et $[x]^2$ aussi, on a donc $x^2 \geq [x]^2 + 1$, donc (comme $[x]^2 \geq [x]$ car la partie entière de x vaut au moins 1)

$$1 \leq \frac{4}{[x]} + \frac{4}{[x]^4} \leq \frac{8}{[x]}.$$

Ainsi si x est solution, $\lfloor x \rfloor \leq 8$, donc $x < 9$. Donc $x^2 < 81$, ainsi comme x^2 est entier, x^2 peut uniquement prendre un nombre fini de valeurs, donc x aussi, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Malgré un grand nombre de copies reçues, cet exercice a été résolu par moins d'un tiers des copies reçues. Cet exercice nécessitait de bien comprendre les hypothèses données et d'en déduire des propriétés algébriques. Par exemple, le nombre x^2 étant entier et x ne l'étant pas, il pouvait être intéressant de considérer la décomposition de x comme $\lfloor x \rfloor + \{x\}$ pour faire apparaître les deux termes de l'équation principale. De manière générale, il est fortement encouragé d'écrire et de réinterpréter les hypothèses de l'énoncé. C'était, dans ce problème, la première étape clef dans la résolution. Il est également conseillé d'utiliser les opérations $\lfloor \cdot \rfloor$ et $\{ \cdot \}$ avec beaucoup de soin. En particulier, le fait de les réécrire comme des inégalités est souvent très utile.

Exercice 14. Baptiste a choisi un nombre entier strictement positif n qui possède exactement 1000 diviseurs positifs (1 et n inclus). Il écrit tous ces diviseurs au tableau dans l'ordre croissant, et remarque que deux diviseurs consécutifs sont toujours de parités différentes : l'un des deux est pair, l'autre est impair.

Montrer que n a au moins 150 chiffres dans son écriture décimale.

Solution de l'exercice 14 Notons $d_1 < \dots < d_k$ les diviseurs impairs de n . Déjà notons que comme n a un diviseur pair, il est pair. En particulier, $2d_1 < \dots < 2d_k$ sont des diviseurs pairs de n . Comme les diviseurs de n commencent par 1 et finissent par n qui est pair, on a une alternance de 500 diviseurs impairs et 500 diviseurs pairs : ainsi $k = 500$, et les seuls diviseurs pairs de n sont $2d_1, \dots, 2d_k$.

De plus, comme les diviseurs pairs et impairs alternent, les diviseurs écrits sont, dans l'ordre, $1 = d_1, 2d_1, d_2, 2d_2, \dots, d_{500}, 2d_{500} = n$. Ainsi $d_{500} = n/2$. De plus, on a que $d_2 > 2d_1, d_3 > 2d_2 > 4d_1$, donc en itérant on en déduit que $d_{500} > 2^{499}d_1$. Ainsi $n = 2d_{500} > 2^{500}$.

Pour montrer que n a au moins 150 chiffres dans son écriture décimale, il suffit de montrer que $2^{500} \geq 10^{150}$, ce qui en prenant la racine 50-ème équivaut à $2^{10} > 10^3$. Or $2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Ce problème a été abordé par de nombreux élèves mais assez peu l'ont traité entièrement.

Beaucoup de copies réussissent à montrer que n n'est pas un multiple de 4 : ce fait n'est pas indispensable pour résoudre le problème mais est utilisé dans certaines preuves. Dans tous les cas, les élèves ont eu raison de prouver ce résultat intermédiaire et ont été récompensés : il faut toujours indiquer sur sa copie ses pistes de recherches.

Ensuite, de nombreuses copies ont cru que raisonner uniquement sur les diviseurs de n et non sur leur ordre permettait de conclure. En substance, ces élèves essayaient de montrer que tout nombre à 1000 diviseurs avec 500 pairs et 500 impairs présentait au moins 150 chiffres dans son écriture décimale. Remarquons d'une part que cela est faux ($2 \times 3^{24} \times 5^{19}$ a bien 500 diviseurs pairs et 500 impairs mais est plus petit que 10^{149}) et d'autre part qu'une telle stratégie de preuve n'utilise pas une hypothèse forte de l'énoncé : les diviseurs alternent en parité.

Les tentatives de démonstration reposaient sur l'exploitation de la formule donnant le nombre de diviseurs d'un entier : il est heureux que de nombreux élèves la connaissent (même si elle n'était pas nécessaire à la résolution de l'exercice, car absente des prérequis de la coupe, elle pouvait être utile). Cependant, son utilisation a souvent conduit à des raisonnements faux (voire absents) pour trouver le plus petit nombre à 1000 diviseurs : le cas optimal n'est pas de prendre le plus petit facteur premier (3 dans le contexte du problème) à chaque étape car il faut alors le prendre de nombreuses fois, ainsi $2 \times 3^{24} \times 5^{19}$ est une solution inférieure à 2×3^{499} que de nombreuses copies n'ont pas vue. Signalons aussi que le plus petit nombre à 1000 diviseurs n'a pas nécessairement 1, 2, 3, ..., 1000 pour diviseurs. De façon générale, rappelons qu'une preuve de minimalité doit être rigoureuse et qu'un choix optimal à chaque étape ne garantit pas d'aboutir à la configuration optimale parmi toutes celles possibles. Quelques copies affirment que n est divisible par le produit de ses diviseurs : cela n'est vrai que pour des diviseurs deux-à-deux premiers entre eux.

Concernant la solution de l'exercice, l'étape clef était de prouver que les diviseurs de n étaient dans l'ordre $d_1 < 2d_1 < d_2 < \dots < d_{500} < 2d_{500}$: ce point contenait la plus grande difficulté de l'exercice et devait donc être démontré soigneusement alors que beaucoup de copies furent trop imprécises. Il y avait de nombreuses preuves de ce résultat : une approche par récurrence était possible, exploitant le fait que si $d \mid n$ avec d impair alors $2d \mid n$, mais il fallait alors justifier en détail pourquoi il ne pouvait pas y avoir de diviseurs entre d et $2d$ dans l'ordre croissant. Trop d'élèves utilisent le fait (peut-être même sans s'en rendre compte) que les seuls diviseurs de n sont ses diviseurs impairs et leurs doubles sans le préciser ni le prouver.

Une fois cette inégalité obtenue, finir l'exercice devenait plus accessible mais tous les arguments devaient encore une fois être présents. En particulier, l'inégalité $2^{500} \geq 10^{150}$ ne saute pas aux yeux :

il est dommage que de bonnes copies perdent des points parce qu'elles ne la démontrent pas alors qu'elles en étaient certainement capables.

Exercice 15. Le pays d'Animath contient 2026 villes. Certaines de ses villes sont reliées par des routes (qui vont dans les deux sens). On sait que pour tout triplet de villes deux à deux distinctes X, Y et Z , il est possible de trouver une suite de routes allant de X à Z sans passer par Y . On dit que n villes V_1, \dots, V_n forment, dans cet ordre, un cycle de longueur n si les n villes sont **deux à deux distinctes**, et si pour tout entier i vérifiant $1 \leq i \leq n - 1$, les villes V_i et V_{i+1} sont reliées, et V_n est reliée à V_1 .

Quelle est la plus grande valeur de n telle que, peu importe la manière dont les villes sont reliées, il existe un cycle de longueur au moins n ?

Solution de l'exercice 15 Montrons que la réponse est 4 : pour cela, il faut prouver qu'il existe une situation vérifiant l'énoncé pour lequel le plus grand cycle est de longueur 4, ce qui montrera que tout n vérifiant l'énoncé vérifie $n \leq 4$, et montrer que quelque soit la manière dont les villes sont reliées, il y a un cycle de longueur au moins 4.

Il existe une configuration où tout cycle est de longueur au plus 4 :

Regardons la configuration suivante avec deux villes A et B qui sont reliées aux 2024 autres (sans aucune autre route). Si on retire une arête, disons l'arête entre A et V_1 où V_1 est une des 2024 villes, il est toujours possible d'aller d'une ville à l'autre.

- ▷ Si $Y = A$ ou B , disons A par symétrie, alors si X, Z sont B et une des 2024 autres villes, elles sont directement reliées par une route, sinon X, Z sont deux villes parmi les 2024, et il est possible de passer de l'une à l'autre en passant par B .
- ▷ Si Y est une des 2024 autres villes, si X et Z sont deux des 2024 autres villes, elles sont reliées en passant par A . Si X et Z sont A et B , elles sont reliées en passant par n'importe laquelle des 2024 autres villes autre que Y . Sinon, X et Z sont A ou B , et une des 2024 autres villes différentes de Y , et sont reliées directement.

De plus, ici tout cycle alterne entre une ville parmi les 2024 différentes de A et B , et soit A soit B , donc doit être de longueur paire, et ne peut comporter 6 villes ou plus : en effet, sinon comme la moitié des villes sont soit A soit B , il y aurait au moins 3 villes qui sont soit A soit B , ce qui contredit le fait que les villes sont distinctes. Ainsi l'exemple ne contient que des cycles de longueur au plus 4.

Quelle que soit la manière dont les villes sont reliées, il y a un cycle de longueur au moins 4 :

Déjà notons que toute ville a au moins 2 routes partant de celle-ci : en effet, s'il y a une ville X dont ne part aucune route, en choisissant Y et Z deux autres villes on obtient une contradiction. Si X n'est reliée qu'à une ville, en notant Y celle-ci, et Z une autre ville, on obtient une contradiction.

Ceci implique l'existence d'un cycle de longueur au moins 3 : en prenant A_1 une ville quelconque, A_2 une ville reliée à A_1 , A_3 une ville reliée à A_2 différente de A_1 (qui existe car il y a deux routes partant de A_2), A_4 une ville reliée à A_3 différente de A_2 (qui existe car il y a deux routes partant de A_3), etc, on obtient une suite infinie de villes $(A_n)_{n \geq 1}$. Comme il y a un nombre fini de routes, il existe $i < j$ tel que $A_i = A_j$. On peut prendre j minimal pour lequel il existe $i < j$ tel que $A_i = A_j$. On ne peut avoir $i = j + 1$ par définition, et $i = j + 2$ est aussi exclu (car $A_{i+2} \neq A_i$ par définition). Ainsi A_i, \dots, A_{j-1} forme un cycle de villes distinctes, et de longueur au moins 3.

Si le cycle obtenu est de longueur au moins 4, on a le résultat voulu. Sinon notons A, B, C le cycle dans l'ordre. S'il n'existe aucune autre ville reliée à A, B, C , alors en prenant $X = A, Y = B$ et Z une autre ville (qui n'est pas C), on obtient une contradiction. Il existe donc une ville notée D , reliée à A, B ou C . Par symétrie, disons que D est relié à A . Il existe un chemin allant de D à B sans passer par A . Si ce chemin passe par C , on a un chemin de D à C qui ne passe pas par A ou B , donc on peut le refermer en empruntant les routes de C vers B puis de B vers A pour obtenir un cycle de longueur au moins 4. Sinon, on a alors un chemin allant de D à B ne passant pas par C ou par A . Notons D, V_1, \dots, V_k, B les villes de ce chemin avec $k \geq 0$, on a alors le cycle $D, V_1, \dots, V_k, B, C, A$ qui est de longueur au moins 4, ce qui conclut.

Solution alternative n°1 On propose une solution alternative de l'existence d'un cycle de longueur

≥ 4 . Si toutes les villes sont reliées par des routes directes, il existe un cycle de longueur 2026. Sinon, il existe deux villes A et B qui ne sont pas reliées par une route directe. Considérons un chemin $AC_1C_2 \dots C_kB$, où les sommets C_i sont tous distincts et différents de A et de B , avec $k \geq 1$ et $B = C_{k+1}$ par convention. Soit i l'indice maximal tel que A est relié à C_i . Un tel indice existe car AC_1 est une route, et $i \leq k$ car A et B ne sont pas reliés. Par maximalité, on sait que A est relié à C_i , C_i est relié à C_{i+1} mais A n'est pas relié à C_{i+1} . Or, il existe un chemin allant de C_{i+1} à A sans passer par C_i . On en déduit donc un cycle de longueur ≥ 4 de la forme $AC_iC_{i+1}D_1 \dots D_\ell$, avec $\ell \geq 1$.

Commentaire des correcteurs : Ce problème a été de très loin le moins traité. Il est dommage de voir si peu de copies, le barème proposait de nombreux points intermédiaires accessibles. L'exercice était assez technique, et il était facile d'affirmer des choses fausses si l'on manquait de rigueur. De nombreuses personnes ont par exemple construit un cycle de longueur au moins 4 sans s'assurer que tous les sommets du cycle étaient bien différents. Similairement, le fait qu'il existe deux chemins différents entre toute paire de sommets n'implique pas immédiatement qu'il existe deux chemins ne partageant aucun sommet entre toute paire de sommets. Cette propriété est en fait vraie sous l'hypothèse de l'énoncé, mais est loin d'être évidente (c'est un cas particulier du théorème de Menger).