PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT-POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 3 AVRIL 2026

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe senior est constitué des élèves nés en 2010 ou avant, ou étant en terminale. Les autres élèves sont dans le groupe junior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que

$$(a+b)(b+c)(c+a) \leqslant 8abc.$$

Démontrer que $a = b = c$.

Exercice 2. On dit qu'un entier $n \geqslant 1$ est *girondin* s'il possède au moins trois diviseurs positifs, et s'il est égal à la somme de ses trois plus petits diviseurs positifs. Trouver tous les entiers girondins.

Exercice 3. Emilhan a dessiné 8 triangles d'aire 8 à l'intérieur d'un carré de côté 6. Démontrer qu'il existe deux triangles dont l'intersection est d'aire au moins 1.

Exercice 4. Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On note H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs de ABC issues de A, B et C. Enfin, on note M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AH]$. Démontrer que les trois triangles MH_AN, MH_BN et MH_CN sont des triangles rectangles.

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul, et σ une permutation des entiers $1, 2, \ldots, 2n$. Démontrer qu'il existe deux entiers k et ℓ distincts, compris entre 1 et $2n$, tels que

$$k + \sigma(k) \equiv \ell + \sigma(\ell) \pmod{2n}.$$

Exercice 6. Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^n + a + 1$ est le carré d'un entier. Démontrer que 8 divise a.

Exercice 7. Soit A un ensemble d'entiers compris entre 1 et 2026 (inclus). On suppose que toute partie de A de cardinal 3 contient deux entiers k et ℓ tels que $|k - \ell| \geqslant \sqrt{k} + \sqrt{\ell}$. Combien, au maximum, A contient-il d'entiers ?

Exercice 8. Soit ABC un triangle, et P, Q, R des points situés sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. La droite (AP) recoupe respectivement les cercles circonscrits à AQR, BRP et CPQ en trois points X, Y et Z. Démontrer que les triangles BXZ et CXY sont de même aire.

Exercice 9. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers naturels non nuls tels que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Démontrer que $a_n \leqslant n^{2^{n-1}}$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Étant donné un entier $n \geqslant 1$, soit a et b deux nombres à n chiffres. On suppose que tous les chiffres de a et de b sont impairs, et que $a \equiv b \pmod{5^n}$. Démontrer que $a = b$.

Exercice 11. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Soit ω le cercle circonscrit à ABH et soit R son centre. Le cercle ω recoupe la droite (BC) en un point D. Soit P le point d'intersection des droites (DH) et (AC). Enfin, soit Q le centre du cercle circonscrit au triangle ADP. Démontrer que les points B, D, Q et R sont cocycliques.

Exercice 12. Victor souhaite colorier en blanc ou en noir les n^2 cases d'une grille $n \times n$ de sorte que chaque case ait exactement deux cases voisines de la même couleur qu'elle ; on dit que deux cases sont voisines lorsqu'elles ont un côté commun. Pour quelles valeurs de n peut-il accomplir son souhait ?

Exercice 13. Lilas a écrit un entier $n \geqslant 0$ au tableau. Camille choisit ensuite une permutation σ de l'ensemble des 1000 entiers entre 1 et 1000, et Lilas lui donne un euro pour chaque entier k compris entre 1 et 1000 et tel que k ne divise pas $n + \sigma(k)$. Quelle est la plus grande somme d'argent que Camille peut s'assurer de gagner quel que soit l'entier n choisi par Lilas ?

Exercice 14. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, qu'il existe un polynôme P à coefficients entiers et de degré exactement n tel que chacun des entiers $P(0), P(1), \ldots, P(n)$ soit une puissance de 2.

Exercice 15. Combien existe-t-il de permutations $(a_1, a_2, \ldots, a_{2026})$ de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2026\}$ telles que k divise $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ pour tout $k \leqslant 2026$?

Exercice 16. Soit ABC un triangle isocèle en A et M le milieu de $[BC]$. Soit X un point situé sur le cercle circonscrit à ABM, sur le plus petit arc de cercle reliant A à M. Enfin, soit S le point situé entre les demi-droites $[MA)$ et $[MB)$, tel que $\widehat{SMX} = 90°$ et $SX = BX$. Démontrer que $\widehat{MSB} = \widehat{CSM} + \widehat{MAB}$.

Exercice 17. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs deux à deux distincts. Démontrer que les n^4 fractions $\dfrac{a_i + a_j}{a_k + a_\ell}$ prennent au moins $2n^2 - 1$ valeurs distinctes.

Exercice 18. Étant donnés deux entiers $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$, soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers dont aucun n'est divisible par m^{n-1}. Démontrer qu'il existe des entiers $e_1, e_2, \ldots, e_n$, tous compris strictement entre $-m$ et m et non tous nuls, tels que

$$e_1 a_1 + e_2 a_2 + \cdots + e_n a_n$$

soit divisible par m^n.

1 Solutions

Solution de l'exercice 1 L'inégalité arithmético-géométrique indique que $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$, avec égalité si et seulement si $a = b$. De même $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$ et $c + a \geqslant 2\sqrt{ca}$, avec égalité si et seulement si $b = c$ et $c = a$.
Par conséquent,

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca} = 8abc,$$

avec égalité si et seulement si $a = b = c$. Puisque l'énoncé nous assure de l'inégalité contraire, on est donc bien dans le cas d'égalité, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2 Supposons que l'on dispose d'un entier girondin $n = d_1 + d_2 + d_3$, où l'on a noté d_k le $k^{\text{ème}}$ plus petit diviseur positif de n.
Comme $1 = d_1 < d_2 < d_3 < n$, on sait que $d_3 \leqslant n/2$ et $d_2 \leqslant n/3$, de sorte que $n \leqslant 1 + 5n/6$, c'est-à-dire que $n \leqslant 6$. D'autre part, $n \geqslant 1 + 2 + 3 = 6$.
Réciproquement, on vérifie bien que $n = 6$ convient, car il possède quatre diviseurs positifs qui sont $d_1 = 1$, $d_2 = 2$, $d_3 = 3$ et $d_4 = 6$. En conclusion, $n = 6$ est le seul entier girondin.

Solution alternative Reprenons les notations de la solution précédente. Tout d'abord, $d_1 = 1$. Ensuite, puisque d_3 divise $n = 1 + d_2 + d_3$, il divise aussi $1 + d_2$. Comme $d_2 < d_3$, c'est donc que $d_2 = d_3 - 1$, et donc que $n = 2d_3$. En particulier, n est pair, donc $d_2 = 2$, puis $d_3 = 3$, et $n = 6$.
Réciproquement, on vérifie comme précédemment que $n = 6$ convient.

Solution de l'exercice 3 Soit a l'aire maximale de l'intersection entre deux triangles d'Emilhan. Une fois qu'il a déjà dessiné k triangles, l'aire que couvre le $(k+1)^{\text{ème}}$ triangle et que ne couvre aucun des k triangles précédents vaut au moins $8 - ak$.
Par conséquent, l'aire totale des 8 triangles d'Emilhan vaut au moins

$$\mathcal{A} = \sum_{k=0}^{7} (8 - ak) = 64 - 28a.$$

Comme $\mathcal{A} \leqslant 36$, on en conclut que $a \geqslant 1$.

Solution alternative Notons de nouveau a l'aire maximale de l'intersection entre deux triangles. La formule d'inclusion-exclusion indique alors que l'aire totale $\mathcal{A}$ des triangles vérifie :

$$36 \geqslant \mathcal{A} \geqslant 8 \cdot 8 - \binom{8}{2} \cdot a = 64 - 28a.$$

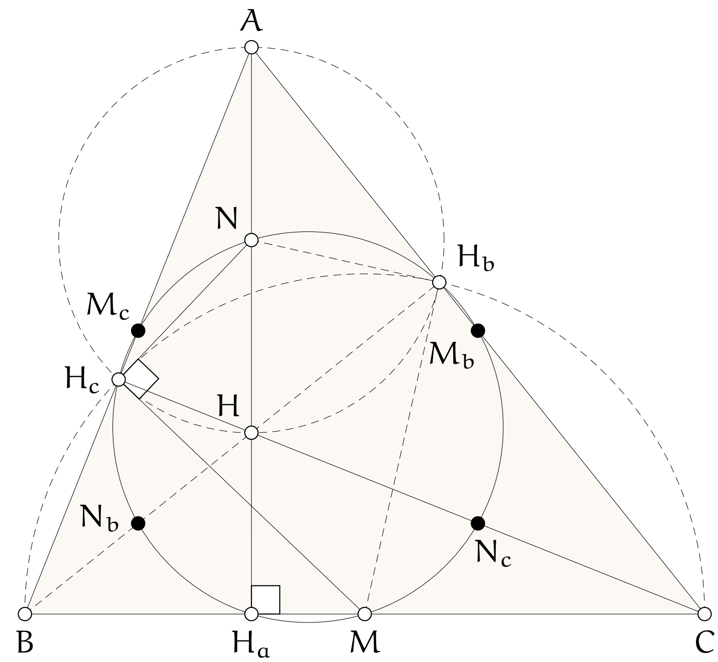
On conclut comme précédemment.

Solution de l'exercice 4 Tout d'abord, le triangle MH_AN est rectangle en H_a par construction.
Ensuite, puisque BH_BC et BH_CC sont rectangles en H_B et H_C, le cercle de centre M et diamètre $[BC]$ contient les points H_B et H_C. De même, AH_BH et AH_CH sont rectangles en H_B et H_C, donc le cercle de centre N et diamètre $[AH]$ contient les points H_B et H_C.
Ainsi, (MN) est la médiatrice de $[H_BH_C]$, et H_B est symétrique de H_C par rapport à (MN). Par conséquent,

$$\widehat{NH_BM} = \widehat{NH_CM} = (360° - \widehat{H_BMH_C} - \widehat{H_BNH_C})/2.$$

Le théorème de l'angle au centre, dans les cercles de centres M et N, indique alors que

$$\widehat{NH_BM} = 180° - \widehat{H_BBH_C} - \widehat{H_BAH_C} = 180° - \widehat{H_BBA} - \widehat{H_BAB} = \widehat{BH_BA} = 90°.$$



Solution alternative Soit M_A, M_B et M_C les milieux des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$, de sorte que $M = M_A$; et N_A, N_B et N_C les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$, de sorte que $N = N_A$.
Le *cercle des neuf points*, ou *cercle d'Euler*, est connu pour passer par ces neuf points. Comme le triangle $N_AH_AM_A$ est rectangle en H_A, ce cercle a $[N_AM_A]$ pour diamètre. Par conséquent, les triangles $N_AH_BM_A$ et $N_AH_CM_A$ sont eux aussi rectangles.

Solution de l'exercice 5 La somme des résidus modulo $2n$, que l'on notera S, vaut

$$0+1+\cdots+(2n-1) \equiv \frac{2n(2n-1)}{2} \equiv n(2n-1) \equiv n \pmod{2n}.$$

Si les $2n$ sommes $k+\sigma(k)$ sont deux à deux distinctes modulo $2n$, elles prennent nécessairement toutes les valeurs possibles modulo $2n$, de sorte que

$$\sum_{k=1}^{2n} k+\sigma(k) \equiv S \pmod{2n}.$$

Cela dit, en coupant cette somme en deux, on constate aussi que

$$\sum_{k=1}^{2n} k+\sigma(k) \equiv \sum_{k=1}^{2n} k + \sum_{k=1}^{2n} \sigma(k) \equiv S+S \pmod{2n},$$

de sorte que $n \equiv S \equiv 2S \equiv 0 \pmod{2n}$.
Notre supposition était donc absurde, et il existe bien deux sommes qui sont égales modulo $2n$.

Solution de l'exercice 6 Tout d'abord, on constate que n est impair. En effet, si n s'écrit comme $n = 2m$, alors $(a^m)^2 = a^n < a^n + a + 1$, donc

$$a^n + a + 1 \geqslant (a^m + 1)^2 = a^n + 2a^m + 1 \geqslant a^n + 2a + 1,$$

ce qui est absurde.
On constate ensuite que les carrés modulo 8 sont 0, 1 et 4. Comme $a^n + a + 1$ est impair, c'est donc que $a^n + a + 1 \equiv 1 \pmod 8$, ou encore que $a(a^{n-1} + 1) \equiv a^n + a \equiv 0 \pmod 8$. Si a n'est pas divisible par 8, cela veut dire que $a^{n-1} + 1$ est pair, donc que a est impair ; mais alors $a^n + a \equiv 2a \not\equiv 0 \pmod 8$. On en conclut comme souhaité que 8 divise a.

Solution de l'exercice 7 On dit qu'un ensemble d'entiers strictement positifs S est *joli* si S contient deux entiers, disons k et ℓ, tels que $|k-\ell| \geqslant \sqrt{k}+\sqrt{\ell}$. Quitte à supposer sans perte de généralité que $k \geqslant \ell$, cette inégalité se réécrit (puisque $\sqrt{k}+\sqrt{\ell}>0$) :

$$k-\ell \geqslant \sqrt{k}+\sqrt{\ell}$$

$$\iff (\sqrt{k}+\sqrt{\ell}) \cdot (\sqrt{k}-\sqrt{\ell}) \geqslant (\sqrt{k}+\sqrt{\ell})$$

$$\iff \sqrt{k}-\sqrt{\ell} \geqslant 1.$$

Par conséquent, un ensemble A constitué d'entiers $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ satisfait les contraintes de l'énoncé si et seulement si $\sqrt{a_{k+2}} \geqslant \sqrt{a_k}+1$ pour tout $k \leqslant n-2$. Cette condition est nécessaire puisque l'on peut choisir, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n-2$, la partie $B=\{a_k, a_{k+1}, a_{k+2}\}$. Cette condition est suffisante car si la partie B de cardinal au moins 3 a un minimum de la forme a_k, son maximum vaut au moins a_{k+2}.
En particulier, pour tout $k \geqslant 1$, $\sqrt{a_{2k+1}} \geqslant \sqrt{a_1}+k \geqslant k+1$. Cependant, tous les éléments de A valent au plus 2026. Donc $k \leqslant 44$ car $46 > \sqrt{2026}$.
De même, pour tout $k \geqslant 1$, on a $\sqrt{a_{2k+2}} \geqslant \sqrt{a_2}+k \geqslant k+\sqrt{2}$, donc $k \leqslant 43$ car $44+\sqrt{2} > \sqrt{2026}$.
Cette dernière inégalité se montre en mettant les deux côtés au carré (ceux-ci étant >0) :

$$44+\sqrt{2} > \sqrt{2026}$$

$$\iff 1936+2+88\sqrt{2} > 2026$$

$$\iff 88\sqrt{2} > 88,$$

ce qui est bien sûr vérifié car $\sqrt{2}>1$.
Nous avons donc montré que $n \leqslant 89$.

Réciproquement, si l'on pose $a_{2u+1}=(u+1)^2$ et $a_{2u+2}=(u+2)^2-1$, on a $\sqrt{a_{2u+3}}=\sqrt{a_{2u+1}}+1$ et

$$\sqrt{a_{2u+4}}-\sqrt{a_{2u+2}}=\frac{(u+3)^2-(u+2)^2}{\sqrt{a_{2u+4}}+\sqrt{a_{2u+2}}} \geqslant \frac{(u+3)^2-(u+2)^2}{2u+5}=1$$

pour tout u; par ailleurs, la suite $(a_u)_{u\geqslant 1}$ est croissante, $a_1 = 1$ et $a_{89} = 2025$. L'ensemble $A=\{a_1, a_2, \ldots, a_{89}\}$ convient effectivement, et il est de cardinal 89, ce qui est donc le plus grand cardinal possible.

Remarque : L'idée clef de l'exercice est de remarquer que pour chaque naturel $n \geqslant 1$, il y a au plus deux entiers $x \in A$ tels que $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = n$.

Solution de l'exercice 8 Notons ω_A, ω_B et ω_C les cercles cironcscrits à AQR, BRP et CPQ. Une figure indique que ces cercles sont concourants. On note donc M le point d'intersection, autre que P, entre ω_B et ω_C, et on observe que

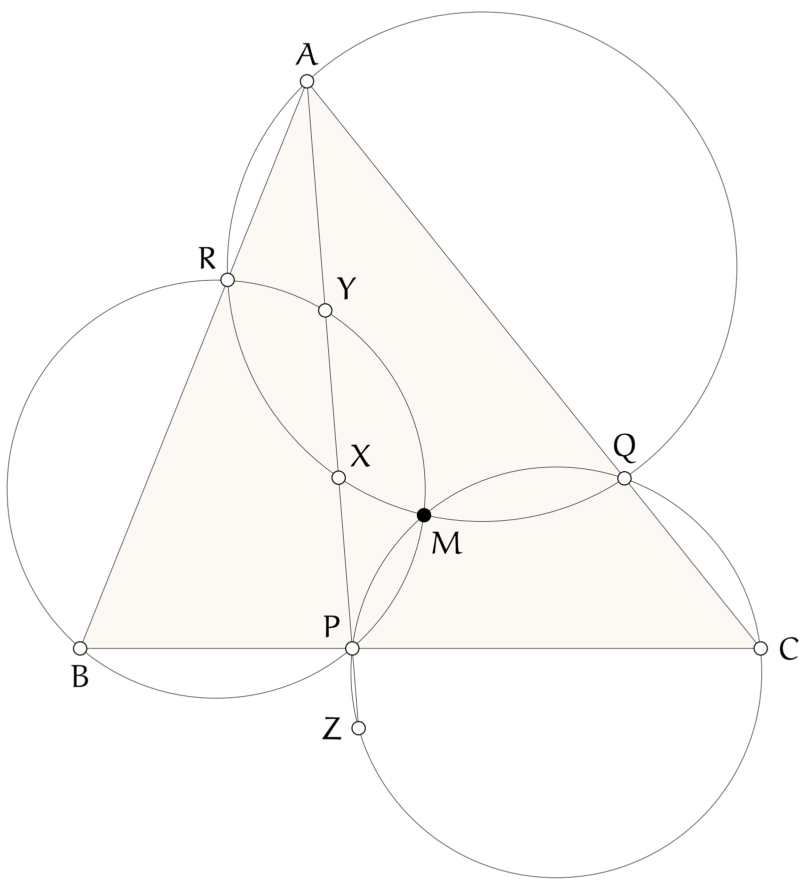
$$\widehat{RMQ} = 360^\circ - \widehat{QMP} - \widehat{PMR} = \widehat{PCQ} + \widehat{RBP} = 180^\circ - \widehat{QAR},$$

ce qui signifie bien que M appartient à ω_A : il s'agit du *point de Miquel* de nos trois cercles.
On recherche maintenant des angles égaux et des triangles semblables. Par exemple,

$$\widehat{MXZ} = 180^\circ - \widehat{AXM} = \widehat{AQM} = 180^\circ - \widehat{MQC} = \widehat{MPC} \quad \text{et} \quad \widehat{XZM} = \widehat{PZM} = \widehat{PCM},$$

donc les triangles MXZ et MPC sont semblables. De même, MXY et MPB sont semblables.
On en déduit, en notant θ l'angle $\widehat{CPA}$, que

$$\begin{aligned}\mathsf{Aire}(BXZ) &= BP \times XZ \times \sin(\theta)/2 \\ &= (XY \times MP/MX) \times (PC \times MX/MP) \times \sin(\theta)/2 \\ &= XY \times PC \times \sin(\theta)/2 \\ &= \mathsf{Aire}(CXY).\end{aligned}$$



<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Supposons que l'on a trié les entiers a_i dans l'ordre croissant :

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n.$$

Pour tout entier $k \leqslant n-1$, on sait que

$$1 - \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} - \cdots - \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_{k+2}} + \cdots + \frac{1}{a_n} \leqslant \frac{n}{a_{k+1}}.$$

Comme le membre de gauche s'écrit comme une fraction non nulle de dénominateur $a_1 a_2 \cdots a_k$, on en déduit que

$$\frac{1}{a_1 a_2 \cdots a_k} \leqslant \frac{n}{a_{k+1}},$$

ce qui signifie que $a_{k+1} \leqslant n a_1 a_2 \cdots a_k$.
Dès lors, on constate par récurrence que chaque terme a_k satisfait l'inégalité $a_k \leqslant n^{2^{k-1}}$: on a bien $a_1 \leqslant n = n^{2^0}$, et on a ensuite

$$a_{k+1} \leqslant n^{1+2^0+2^1+\cdots+2^{k-1}} = n^{2^k}.$$

Solution de l'exercice 10 On procède par récurrence sur n. Si $n = 1$, comme a et b appartiennent à l'ensemble $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ et que ces cinq nombres valent $1, 3, 0, 2, 4 \pmod 5$, on a bien $a = b$.
Puis, si $n \geqslant 2$, on écrit a et b comme

$$a = (2k + 1) \times 10^{n-1} + a' \text{ et } b = (2\ell + 1) \times 10^{n-1} + b',$$

où k et ℓ appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, tandis que a' et b' sont deux nombres à $n - 1$ chiffres, tous impairs. Comme $a' \equiv a \equiv b \equiv b' \pmod{5^{n-1}}$, on sait que $a' = b'$. Dès lors,

$$(2k + 1) \times 10^{n-1} \equiv a - a' \equiv b - b' \equiv (2\ell + 1) \times 10^{n-1} \pmod{5^n}.$$

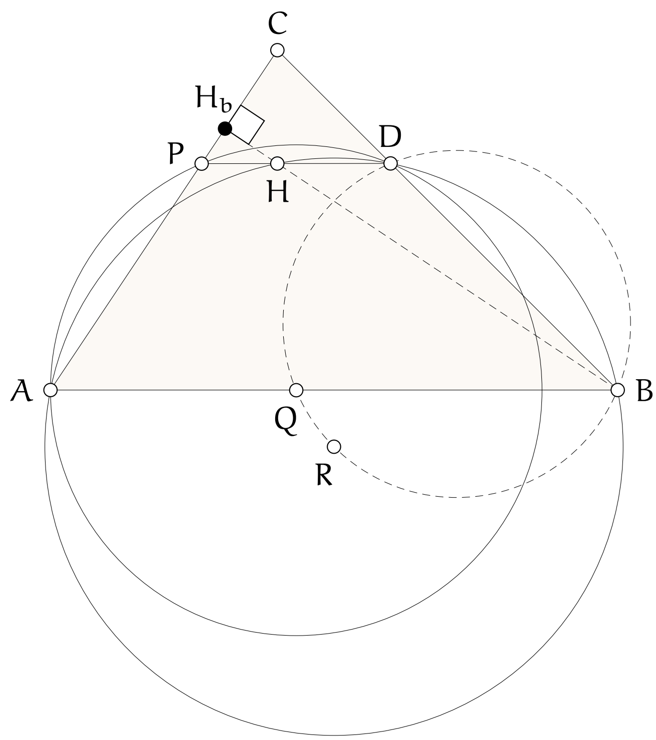
Autrement dit, 5^n divise $2(k - \ell) \times 2^{n-1} \times 5^{n-1}$, ce qui signifie que 5 divise $k - \ell$, et donc que $k = \ell$. On en conclut comme souhaité que $a = b$.

Solution de l'exercice 11 Une figure indique que Q semble appartenir au côté (AB). On s'empresse donc de le démontrer, à l'aide d'une chasse aux angles, et après avoir bien sûr pris soin d'introduire les pieds des hauteurs issues de A, B et C, que l'on note H_a, H_b et H_c :

$$\begin{aligned}
\widehat{QAP} &= 90^\circ - \widehat{PQA}/2 && \text{car } APQ \text{ est isocèle en } Q \\
&= 90^\circ - \widehat{PDA} && \text{car } Q \text{ est le centre du cercle circonscrit à } A, D \text{ et } P \\
&= 90^\circ - \widehat{HDA} && \\
&= 90^\circ - \widehat{HBA} && \text{car } A, B, D \text{ et } H \text{ sont cocycliques} \\
&= 90^\circ - \widehat{H_bBA} && \\
&= \widehat{BAH_b} && \text{car } ABH_b \text{ est rectangle en } H_b \\
&= \widehat{BAP}.
\end{aligned}$$

On peut désormais utiliser l'alignement de A, B et Q pour démontrer la relation de cocyclicité désirée :

$$\begin{aligned}
\widehat{BQD} &= 180^\circ - \widehat{DQA} && \\
&= 2\widehat{QAD} && \text{car } QAD \text{ est isocèle en } Q\,; \\
&= 2\widehat{BAD} && \\
&= \widehat{BRD} && \text{car } R \text{ est le centre du cercle circonscrit à } A, B \text{ et } D.
\end{aligned}$$



Solution de l'exercice 12 Si n est pair, il suffit pour Victor de colorier les cases par blocs de 2×2, en alternant blanc et noir d'un bloc au bloc voisin.
Réciproquement, supposons que Victor a accompli son souhait. On forme un graphe dont les n^2 sommets sont les cases de la grille, et dont les arêtes relient les paires de cases voisines de même couleur. Par construction, chaque sommet est de degré 2, donc on a recouvert notre graphe par des cycles disjoints.
Or, chaque cycle est composé d'un nombre pair d'arêtes horizontales et d'un nombre pair d'arêtes verticales, puisqu'il faut revenir au sommet de départ dans la grille. Il contient donc un nombre pair d'arêtes, et aussi un nombre pair de sommets, de sorte que n^2 est pair, et n aussi.
En conclusion, les entiers n recherchés sont les entiers pairs.

Solution alternative : Pour la deuxième partie. On considère un coloriage en échiquier (type 1 et 2) de la grille. Remarquons qu'une paire de cases voisines de même couleur contient exactement une case de chaque type. Or, le nombre de telles paires est par hypothèse égal au double du nombre de cases de type 1, et également au double du nombre de cases de type 2. Il y a donc autant de cases de chaque type, et donc un nombre paire de cases en tout. Cela montre que n doit être pair.

Solution de l'exercice 13 Puisque 1 divisera $n + \sigma(1)$, Camille ne peut pas gagner 1000 euros. Elle note donc E l'ensemble $\{n+1, n+2, \ldots, n+1000\}$, puis elle s'attache donc à gagner 999 euros en choisissant une fonction injective $f \colon E \to E$ telle que nul entier $k \geqslant 2$ ne divise $f(k)$.
Pour ce faire, elle choisit successivement et dans cet ordre les entiers $f(2), f(3), f(4), \ldots, f(1000)$, et terminera par $f(1)$, pour lequel elle n'aura plus guère de choix. Au moment de choisir $f(k)$, il lui reste $1002 - k$ valeurs possibles. Puisque k divise au plus $\lceil 1000/k \rceil$ éléments de E, Camille gagne donc dès lors que $1002 - k > \lceil 1000/k \rceil$ c'est-à-dire dès que $1001 - k \geqslant 1000/k$. Comme

$$1001 - k - \frac{1000}{k} = \frac{-k^2 + 1001k - 1000}{k} = \frac{(1000-k)(k-1)}{k} \geqslant 0,$$

Camille arrive donc aisément à ses fins et remporte bien 999 euros.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u> Par principe des tiroirs, il existe deux entiers $u \geqslant 0$ et $\delta \geqslant 1$ tels que

$$2^u \equiv 2^{u+\delta} \pmod{n!}.$$

Démontrons maintenant que le polynôme $P(X)$ pour lequel $P(k) = 2^{u+2\overline{k}\delta}$ lorsque $0 \leqslant k \leqslant n$ est bien à coefficients entiers, où l'on pose $\overline{k} = 0$ si k est pair, et $\overline{k} = 1$ sinon. D'après le théorème d'interpolation de Lagrange, il existe un unique tel polynôme, à coefficients réels, de degré au plus n.
Tout d'abord, lorsque $0 \leqslant k \leqslant n-1$, le polynôme $P(X) - 2^{u+\delta}$ n'est pas de même signe quand on l'évalue en k et en $k+1$. Il admet donc une racine sur l'intervalle $]k, k+1[$, et il a donc au moins n racines. Ainsi, $P(X) - 2^{u+\delta}$ est bien de degré n, et $P(X)$ aussi.
On considère ensuite le polynôme constant $Q(X) = 2^u$. Par construction, $2^u \equiv 2^{u+2\delta} \pmod{n!}$, donc $n!$ divise $P(k) - Q(k)$ pour tout entier $k \leqslant n$. Puis le théorème d'interpolation de Lagrange indique cette fois que

$$\begin{aligned} n!P(X) = n! \sum_{k=0}^{n} P(k) \prod_{\ell \neq k} \frac{X-\ell}{k-\ell} &= \sum_{k=0}^{n} P(k)(-1)^{n-k} \binom{n}{k} \prod_{\ell \neq k} (X-\ell) \\ &\equiv \sum_{k=0}^{n} Q(k)(-1)^{n-k} \binom{n}{k} \prod_{\ell \neq k} (X-\ell) = n!Q(X) \pmod{n!}, \end{aligned}$$

où la relation $A(X) \equiv B(X) \pmod{s}$ signifie que les coefficients de $A(X) - B(X)$ sont tous divisibles par s. Ainsi, les coefficients de $P(X) - Q(X)$ sont entiers, et $P(X)$ lui-même est à coefficients entiers.

<u>Solution alternative :</u> On cherche la solution la plus simple possible au problème. On veut donc avoir le moins de degrés de libertés possibles.
On va donc faire en sorte que le polynôme atteigne la même puissance de 2 de 0 a $(n-1)$:

$$P(X) = 2^a + CX(X-1)..(X-(n-1)),$$

qui est bien de degré n. Il suffit de trouver le bon C pour que $P(n)$ soit une puissance de 2.
Donc, on cherche a, b et C tel que $2^b = 2^a + Cn!$. Donc on cherche des entiers a et b tels que $n! \mid 2^b - 2^a$.
Soit m le plus grand entier impair qui divise $n!$. Alors on peut prendre $a = v_2(n!)$ et $b = a + o_m(2)$ où $o_m(2)$ est l'ordre de 2 modulo m. Ainsi $n! \mid 2^a(2^{b-a} - 1) = 2^b - 2^a$. On pose alors $C = \frac{2^b - 2^a}{n!}$. Cela fonctionne.

Solution de l'exercice 15 On dit qu'une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est *convenable* si k divise $2(a_1 + a_2 + \cdots + a_k)$ pour tout $k \leqslant n$, et on note A_n le nombre de permutations convenables de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$. Il s'agit de calculer A_{2026}, et on commence à s'intéresser aux premières valeurs de A_n.

Puique $2(1 + 2 + \cdots + n) = n(n + 1)$, la relation de divisibilité ci-dessus est toujours satisfaite lorsque $k \in \{1, 2, n\}$. Par conséquent, $A_n = n!$ lorsque $n \leqslant 3$, et on s'intéresse désormais au cas où $n \geqslant 4$.

Pour qu'une permutation $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ soit convenable, il faut que $n - 1$ divise $n(n+1) - 2a_n$, c'est-à-dire divise $2(a_n - 1)$. Par conséquent, a_n vaut 1, $(n+1)/2$ ou n :

— Si $a_n = 1$, la permutation $(a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_{n-1} - 1)$ est convenable si et seulement si $\mathbf{a}$ est convenable.

— Si $a_n = (n + 1)/2$, il faut ensuite que $n - 2$ divise $n(n + 1) - 2(a_{n-1} + a_n)$, c'est-à-dire divise $2a_{n-1} - 3$. Il existe donc un entier k tel que $2a_{n-1} = k(n-2) + 3 = k(2a_n - 3) - 3$, de sorte que $0 \equiv k + 1 \pmod 2$, et que k est impair. Les inégalités

$$3(n-2) > 2n - 3 \geqslant 2a_{n-1} - 3 \geqslant -1 > 2 - n$$

indiquent que $k = 1$, de sorte que $a_{n-1} = (n + 1)/2 = a_n$, ce qui est absurde. Ce cas est donc impossible.

— Si $a_n = n$, la permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ est convenable si et seulement si $\mathbf{a}$ est convenable.

Ainsi, $A_n = 2a_{n-1}$, donc $A_n = 3 \times 2^{n-2}$ pour tout $n \geqslant 3$, et $A_{2026} = 3 \times 2^{2024}$.

Solution de l'exercice 16 Quand, comme ici, on dispose du milieu M d'un segment $[BC]$, il est souvent utile d'introduire le milieu d'un autre segment d'extrémité B ou C, de manière à faire apparaître une droite des milieux, ou bien le symétrique d'un autre point par rapport à M, de manière à faire apparaître un parallélogramme.

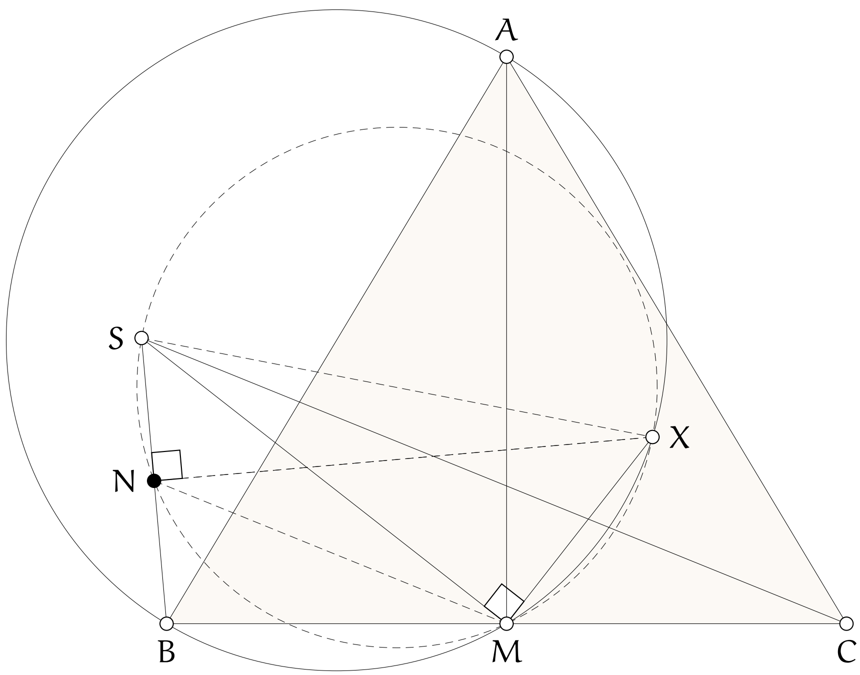
Par exemple, soit N le milieu de $[BS]$. Comme (XN) est la médiatrice de $[BS]$, on sait que $\widehat{SNX} = \widehat{SMX} = 90°$. Les points N et M appartiennent donc au cercle de diamètre $[SX]$.

Puisque BSX est isocèle en X, la droite (XN) est également la bissectrice de $\widehat{BXS}$, donc $\widehat{BXN} = \widehat{NXS}$.

Par ailleurs, (MN) est une droite des milieux de BCS ; elle est donc parallèle au côté (CS), et $\widehat{CSM} = \widehat{NMS} = \widehat{NXS} = \widehat{BXN}$.

On en conclut que

$$\widehat{CSM} + \widehat{MAB} = \widehat{BXN} + \widehat{MXB} = \widehat{MXN} = \widehat{MSN} = \widehat{MSB}.$$



Solution de l'exercice 17 Ci-dessous, on note A l'ensemble des réels a_i, et B l'ensemble des fractions $(a_i + a_j)/(a_k + a_\ell)$.
Soit $r_1 < r_2 < \cdots < r_\ell$ les valeurs que peuvent prendre les fractions a_i/a_j. Chaque fraction r_k est atteinte $s(k)$ fois : l'ensemble A^2 contient $s(k)$ paires (a_u, a_v) telles que $a_u = r_k a_v$. Nous allons démontrer que B contient au moins $s(k) + s(k+1) - 1$ éléments dans l'intervalle $]r_k, r_{k+1}[$.
En effet, soit $x_1 < x_2 < \ldots < x_{s(k)}$ et $y_1 < y_2 < \ldots < y_{s(k+1)}$ les éléments de A tels que $x_i r_k \in A$ et $y_i r_{k+1} \in A$. En identifiant chaque ratio $(x r_k + y r_{k+1})/(x + y)$ à une moyenne arithmétique des réels r_k et r_{k+1} pondérée avec des poids x et y, on constate que

$$\frac{x_1 r_k + y_1 r_{k+1}}{x_1 + y_1} < \frac{x_1 r_k + y_2 r_{k+1}}{x_1 + y_2} < \cdots < \frac{x_1 r_k + y_{s(k+1)} r_{k+1}}{x_1 + y_{s(k+1)}}$$

et que, de même,

$$\frac{x_{s(k)} r_k + y_1 r_{k+1}}{x_{s(k)} + y_1} < \cdots < \frac{x_2 r_k + y_1 r_{k+1}}{x_2 + y_1} < \frac{x_1 r_k + y_1 r_{k+1}}{x_1 + y_1}.$$

On dispose donc bien des $s(k) + s(k+1) - 1$ éléments désirés.
Par ailleurs, chaque nombre r_k s'écrit comme une fraction a_i/a_j, donc aussi comme la fraction $(a_i + a_i)/(a_j + a_j)$, et il appartient donc à B. On vient donc de démontrer que B contient au moins

$$\ell + \sum_{k=1}^{\ell-1} s(k) + s(k+1) - 1$$

éléments.
Or, chacun des ratios r_1 et r_ℓ est obtenu exactement une fois, en utilisant les éléments minimal et maximal de A ; autrement dit, $s(1) = s(\ell) = 1$. Par ailleurs, la somme des entiers $s(k)$ vaut n^2. Cela signifie comme souhaité que

$$\ell + \sum_{k=1}^{\ell-1} s(k) + s(k+1) - 1 = 2n^2 - 1.$$

Solution de l'exercice 18 Notons S l'ensemble $\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Pour tout vecteur $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dans S^n, on pose

$$\varphi(\mathbf{x}) = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n \pmod{m^n}.$$

Soit alors $\omega = \exp(2\imath\pi/m^n)$ une racine primitive $(m^n)^{\text{ème}}$ de l'unité. Si la fonction $\varphi\colon S^n \mapsto \mathbb{Z}/m^n\mathbb{Z}$ est surjective, on sait que

$$\sum_{\mathbf{x}\in S^n} \omega^{\varphi(\mathbf{x})} = \sum_{k=0}^{m^n-1} \omega^k = \frac{\omega^{m^n}-1}{\omega-1} = 0.$$

Cependant, la somme de gauche s'écrit aussi comme le produit

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{k a_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\omega^{m a_i}-1}{\omega^{a_i}-1},$$

dont aucun facteur n'est nul.

Par conséquent, φ n'est pas surjective, donc elle n'est pas injective non plus. En particulier, il existe deux vecteurs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ tels que $\varphi(\mathbf{x}) \equiv \varphi(\mathbf{x}') \pmod{m^n}$, et il suffit de poser $e_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}'_i$.