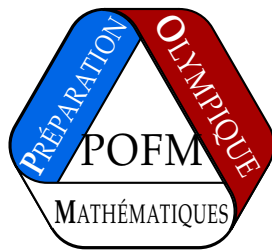


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



ENVOI 5 : POT-POURRI
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 3 AVRIL 2026

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe senior est constitué des élèves nés en 2010 ou avant, ou étant en terminale. Les autres élèves sont dans le groupe junior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit a , b et c trois réels strictement positifs tels que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \leq 8abc.$$

Démontrer que $a = b = c$.

Exercice 2. On dit qu'un entier $n \geq 1$ est *girondin* s'il possède au moins trois diviseurs positifs, et s'il est égal à la somme de ses trois plus petits diviseurs positifs. Trouver tous les entiers girondins.

Exercice 3. Emilhan a dessiné 8 triangles d'aire 8 à l'intérieur d'un carré de côté 6. Démontrer qu'il existe deux triangles dont l'intersection est d'aire au moins 1.

Exercice 4. Soit ABC un triangle d'orthocentre H . On note H_A , H_B et H_C les pieds des hauteurs de ABC issues de A , B et C . Enfin, on note M le milieu de $[BC]$ et N le milieu de $[AH]$. Démontrer que les trois triangles $MH_A N$, $MH_B N$ et $MH_C N$ sont des triangles rectangles.

Exercice 5. Soit n un entier naturel non nul, et σ une permutation des entiers $1, 2, \dots, 2n$. Démontrer qu'il existe deux entiers k et ℓ distincts, compris entre 1 et $2n$, tels que

$$k + \sigma(k) \equiv \ell + \sigma(\ell) \pmod{2n}.$$

Exercice 6. Soit a et n deux entiers supérieurs ou égaux à 2. On suppose que $a^n + a + 1$ est le carré d'un entier. Démontrer que 8 divise a .

Exercice 7. Soit A un ensemble d'entiers compris entre 1 et 2026 (inclus). On suppose que toute partie de A de cardinal 3 contient deux entiers k et ℓ tels que $|k - \ell| \geq \sqrt{k} + \sqrt{\ell}$. Combien, au maximum, A contient-il d'entiers ?

Exercice 8. Soit ABC un triangle, et P , Q , R des points situés sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. La droite (AP) recoupe respectivement les cercles circonscrits à AQR , BRP et CPQ en trois points X , Y et Z . Démontrer que les triangles BXZ et CXY sont de même aire.

Exercice 9. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers naturels non nuls tels que

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 1.$$

Démontrer que $a_n \leq n^{2^{n-1}}$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Étant donné un entier $n \geq 1$, soit a et b deux nombres à n chiffres. On suppose que tous les chiffres de a et de b sont impairs, et que $a \equiv b \pmod{5^n}$. Démontrer que $a = b$.

Exercice 11. Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Soit ω le cercle circonscrit à ABH et soit R son centre. Le cercle ω recoupe la droite (BC) en un point D . Soit P le point d'intersection des droites (DH) et (AC) . Enfin, soit Q le centre du cercle circonscrit au triangle ADP . Démontrer que les points B, D, Q et R sont cocycliques.

Exercice 12. Victor souhaite colorier en blanc ou en noir les n^2 cases d'une grille $n \times n$ de sorte que chaque case ait exactement deux cases voisines de la même couleur qu'elle ; on dit que deux cases sont voisines lorsqu'elles ont un côté commun. Pour quelles valeurs de n peut-il accomplir son souhait ?

Exercice 13. Lilas a écrit un entier $n \geq 0$ au tableau. Camille choisit ensuite une permutation σ de l'ensemble des 1000 entiers entre 1 et 1000, et Lilas lui donne un euro pour chaque entier k compris entre 1 et 1000 et tel que k ne divise pas $n + \sigma(k)$. Quelle est la plus grande somme d'argent que Camille peut s'assurer de gagner quel que soit l'entier n choisi par Lilas ?

Exercice 14. Démontrer, pour tout entier $n \geq 0$, qu'il existe un polynôme P à coefficients entiers et de degré exactement n tel que chacun des entiers $P(0), P(1), \dots, P(n)$ soit une puissance de 2.

Exercice 15. Combien existe-t-il de permutations $(a_1, a_2, \dots, a_{2026})$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2026\}$ telles que k divise $2(a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ pour tout $k \leq 2026$?

Exercice 16. Soit ABC un triangle isocèle en A et M le milieu de $[BC]$. Soit X un point situé sur le cercle circonscrit à ABM , sur le plus petit arc de cercle reliant A à M . Enfin, soit S le point situé entre les demi-droites $[MA)$ et $[MB)$, tel que $\widehat{SMX} = 90^\circ$ et $SX = BX$. Démontrer que $\widehat{MSB} = \widehat{CSM} + \widehat{MAB}$.

Exercice 17. Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels strictement positifs deux à deux distincts. Démontrer que les n^4 fractions $\frac{a_i + a_j}{a_k + a_\ell}$ prennent au moins $2n^2 - 1$ valeurs distinctes.

Exercice 18. Étant donnés deux entiers $m \geq 2$ et $n \geq 2$, soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des entiers dont aucun n'est divisible par m^{n-1} . Démontrer qu'il existe des entiers $e_1, e_2, \dots, e_n$, tous compris strictement entre $-m$ et m et non tous nuls, tels que

$$e_1 a_1 + e_2 a_2 + \dots + e_n a_n$$

soit divisible par m^n .