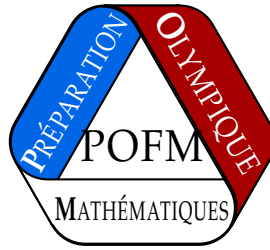


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 2 MARS 2026

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe senior est constitué des élèves nés en 2010 ou avant, ou étant en terminale. Les autres élèves sont dans le groupe junior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Cinq amis se retrouvent pour une fête d'anniversaire. Chaque personne serre la main de chacune des autres personnes, une et une seule fois. Quel est le nombre total de poignées de main échangées ?

Exercice 2. Sur une table, 7 verres sont posés à l'envers. Vous voulez tous les remettre à l'endroit. La seule règle est la suivante : à chaque tour, vous devez choisir exactement deux verres et les retourner. Est-il possible de remettre les 7 verres à l'endroit ?

Exercice 3. À une fête se trouvent $2n$ personnes avec $n \geq 2$, chacune étant amie avec au moins n autres personnes (on suppose que les amitiés sont réciproques). Montrer qu'on peut trouver 4 personnes que l'on peut asseoir à une table circulaire tel que chacune est amie avec ses 2 voisins.

Exercice 4. Emilhan explore un pays où chaque ville possède au moins d routes directes menant à d autres villes. Montrer que Emilhan peut planifier un itinéraire de voyage qui traverse au moins $d + 1$ villes différentes, sans jamais repasser par une ville déjà visitée.

Exercice 5. Chacun des nombres $1, 2, \dots, 2026^2$ est placé dans un tableau de taille 2026×2026 (avec un nombre par case). Démontrez qu'il existe deux cases partageant un côté ou un sommet commun (voisinage du roi aux échecs) telles que la somme des nombres qu'elles contiennent soit divisible par 4.

Exercice 6. La planète Zork possède plusieurs villes. Celles-ci sont réparties en paires disjointes de villes dites *jumelées*.

Sur Zork, il existe des routes reliant certaines paires de villes de telle sorte que si deux villes sont reliées, les deux villes jumelées correspondantes sont reliées également. De plus, toute paire de villes est reliée par une suite de routes. Chaque ville a un certain nombre d'habitants, de telle sorte que la différence entre les populations de deux villes reliées par une route soit toujours d'au plus 100.

Prouver qu'il existe deux villes jumelées dont les populations diffèrent d'au plus 100.

Exercice 7. Soit a et b deux entiers strictement positifs et soit A et B des ensembles finis d'entiers tel que A et B ne partagent pas d'élément et tel que pour tout i dans A ou dans B , $i + a$ est dans A ou $i - b$ est dans B .

Montrer que $a|A| = b|B|$ où $|X|$ désigne le nombre d'éléments dans l'ensemble X .

Exercice 8. Supposons que dans une certaine société, chaque paire de personnes puisse être classée comme amicale ou hostile. Nous dirons que chaque membre d'une paire amicale est l'ami de l'autre, et que chaque membre d'une paire hostile est l'ennemi de l'autre. Supposons que la société compte n personnes et q paires amicales, et que pour tout groupe de trois personnes, au moins une paire soit hostile. Prouver qu'il existe au moins un membre de la société dont l'ensemble des ennemis contient au plus $q \left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ paires amicales (contenir une paire amicale veut dire que les deux personnes de la paire appartiennent à l'ensemble).

Exercice 9. Soit $n \geq 3$ un entier. Deux joueurs, Hannah et Paul, jouent au jeu suivant. Hannah étiquette les sommets d'un n -gone régulier avec les nombres de 1 à n , dans l'ordre qu'elle souhaite. Chaque sommet doit porter un numéro différent. Ensuite, on place un dindon sur chacun des n sommets. Ces dindons sont entraînés à effectuer les actions suivantes :

- Si Paul siffle, chaque dindon se déplace vers le sommet adjacent ayant l'étiquette la plus élevée.
- Si Paul tape dans ses mains, chaque dindon se déplace vers le sommet adjacent ayant l'étiquette la plus basse.

Paul gagne si, après un certain nombre de sifflements et d'applaudissements, il parvient à amener tous les dindons sur un seul et même sommet. Hannah gagne si elle peut étiqueter les sommets de manière à ce que Paul ne puisse pas y parvenir. Pour chaque $n \geq 3$, déterminez quel joueur possède une stratégie gagnante.

Exercices Seniors

Exercice 10. Sur une table, 7 verres sont posés à l'envers. Vous voulez tous les remettre à l'endroit. La seule règle est la suivante : à chaque tour, vous devez choisir exactement deux verres et les retourner. Est-il possible de remettre les 7 verres à l'endroit ?

Exercice 11. Emilhan explore un pays où chaque ville possède au moins d routes directes menant à d'autres villes. Montrer que Emilhan peut planifier un itinéraire de voyage qui traverse au moins $d + 1$ villes différentes, sans jamais repasser par une ville déjà visitée.

Exercice 12. On considère une grille 8×8 dans laquelle on écrit les nombres de 1 à 64 dans l'ordre de gauche à droite, puis de bas en haut. Ensuite, Anatole décide de colorier les cases de la grille en rouge et en bleu, de manière à ce que chaque ligne et chaque colonne ait autant de cases bleues que rouges. Montrer que quelque soit la manière dont Anatole colorie les cases, la somme des nombres sur les cases bleues est égale à la somme des nombres sur les cases rouges.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

FIGURE 1 – Grille 4×4 numérotée de gauche à droite et de bas en haut.

Exercice 13. A partir d'un entier positif n , on s'autorise 2 opérations : rajouter 9 à ce nombre, ou enlever un chiffre 1 de n'importe quelle position de son écriture décimale. Est-il toujours possible d'obtenir $n + 1$ à partir de n en appliquant ces opérations un certain nombre de fois ?

Exercice 14. Soient n et k des entiers naturels fixés, avec k divisant n . On considère un tableau de taille $n \times n$ dont chaque case est colorée soit en noir, soit en blanc. Supposons que pour tous les sous-tableaux de taille $k \times k$ de ce tableau, le nombre de cases noires est inférieur ou égal au nombre de cases blanches. Trouvez le nombre maximal de cases noires possible dans le tableau.

Exercice 15. Soit $r > 1$ un entier et A un ensemble infini d'entiers tel que tout élément a de A est le produit d'exactly r nombres premiers distincts. On suppose en outre que pour tous éléments a et b de A , $\text{pgcd}(a, b) > 1$. Montrer qu'il existe un entier n s'écrivant comme un produit d'exactly $r - 1$ nombres premiers distincts tel que pour tout élément a de A , $\text{pgcd}(a, n) > 1$.

Exercice 16. Soit $n \geq 3$ un entier fixé. Un nombre fini de cartes sont placées sur les points A_1, A_2, \dots, A_n (situés sur un cercle) et sur un point central O . À chaque étape, nous pouvons effectuer l'une des opérations suivantes :

1. Si un point A_i contient strictement plus de 2 cartes, nous pouvons retirer 3 cartes de A_i et en placer une sur A_{i-1} , une sur A_{i+1} et une sur O (avec la convention $A_0 = A_n$ et $A_{n+1} = A_1$).
2. Si le point O contient au moins n cartes, nous pouvons retirer n cartes de O et en placer une sur chacun des points A_1, A_2, \dots, A_n .

Montrer que si le nombre total de cartes est d'au moins $n^2 + 3n + 1$, nous pouvons effectuer une suite finie d'opérations telle qu'à la fin, chaque point (y compris O) possède au moins $n + 1$ cartes.

Exercice 17. On dispose de $m \geq 3$ entiers strictement positifs, non nécessairement distincts, disposés sur un cercle de telle sorte que chaque entier divise la somme de ses deux voisins.

Montrer que s'il y a exactement un nombre 1 parmi ces entiers, alors pour tout entier strictement positif n , il y a au plus $\varphi(n)$ copies de n sur le cercle (où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler).

Exercice 18. Le château de Héloïse possède 100 pièces et 1000 couloirs. Chaque couloir relie deux pièces, de sorte que chaque paire de pièces est reliée par au plus un couloir. Héloïse a remis le plan du château à des sages et a énoncé les règles du défi suivant. Les sages doivent se répartir dans les pièces comme ils le souhaitent. Chaque minute, Héloïse choisit un couloir et l'un des sages doit l'emprunter pour passer de l'une des pièces à ses extrémités vers l'autre. Héloïse gagne si, dans les deux pièces aux extrémités du couloir choisi, il n'y a aucun sage. Appelons m le *nombre magique* du château si m sages peuvent se concerter avant le défi et agir de telle sorte que Héloïse ne gagne jamais, m étant le nombre minimal possible. Quelles sont les valeurs possibles du nombre magique du château, en fonction des différentes configurations de pièces et de couloirs ? (Héloïse et tous les sages connaissent à tout moment la position de tous les sages).

Solutions

Solution de l'exercice 1

Pour déterminer le nombre total de poignées de main, on remarque que chacune des 5 personnes serre la main des 4 autres. Un premier calcul donne $5 \times 4 = 20$ interactions. Cependant, ce raisonnement comptabilise chaque poignée de main deux fois (la poignée de main entre A et B est la même que celle entre B et A). Pour obtenir le nombre d'échanges uniques, il convient donc de diviser ce résultat par 2. Le nombre total de poignées de main est ainsi :

$$\frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

Commentaire des correcteurs : A quelques exceptions près, l'exercice a été parfaitement traité.

Solution de l'exercice 2

Désignons par n le nombre de verres posés à l'envers sur la table. Initialement, $n = 7$. À chaque tour, nous devons retourner exactement deux verres. Trois situations peuvent se produire :

1. On retourne deux verres qui étaient à l'envers : ils passent à l'endroit, donc n devient $n - 2$.
2. On retourne deux verres qui étaient à l'endroit : ils passent à l'envers, donc n devient $n + 2$.
3. On retourne un verre à l'envers et un verre à l'endroit : le nombre de verres à l'envers reste inchangé ($n - 1 + 1 = n$).

Dans tous les cas, la modification du nombre de verres à l'envers est soit 0, soit ± 2 . Par conséquent, la parité de n est un invariant : elle ne change jamais au cours des étapes.

Comme le nombre initial de verres à l'envers (7) est impair, il restera impair après n'importe quel nombre de tours. Or, pour que tous les verres soient à l'endroit, il faudrait que $n = 0$, ce qui est un nombre pair. Cette situation est donc impossible.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice a été plutôt bien réussi bien que certains élèves semblent ne pas avoir compris que les retournements pouvaient se faire dans les 2 sens, ce qui rendait l'exhibition d'un invariant nécessaire. Pour les détails de la démonstration, il y avait plusieurs façons très similaires de voir les choses : ou bien on se place directement modulo 2, c'est à dire qu'on ne considère que l'état des verres (vers le haut ou vers le bas, on oublie ce qu'on a fait après 2 retournements d'un verre), ou bien on se souvient pour chaque verre du nombre de fois qu'il a été retourné et on demande une valeur impaire de "retournements" au total pour un nombre impair de verre (ce qui fait une somme impaire d'actions). On pouvait aussi numéroter les verres -1 ou 1 selon le sens et prendre le produit puis remarquer que 2 retournements constitue 2 multiplications par -1 et donc le produit est invariant.

Solution de l'exercice 3

On peut séparer le problème en deux cas :

Le premier cas a lieu quand tout le monde est ami avec tout le monde. Dans ce cas on peut choisir n'importe quel groupe de 4 pour les asseoir à une table, chacun sera bien ami avec ses deux voisins.

Dans le second cas, on peut trouver deux personnes A et B qui ne sont pas amies entre elles. Alors A et B ont chacun au moins n amis dans le reste du groupe, constitué de $2n - 2$ personnes. Ainsi, ils ont au moins deux amis C et D en commun. On peut alors les asseoir dans l'ordre A,C,B et D.

Commentaire des correcteurs : Le problème est assez mal réussi par ceux qui l'ont rendu. Certains supposent qu'il existe deux personnes non amies ou oublient lorsqu'ils considèrent deux personnes que celles ci pourraient être amies et n'avoir aucun ami en commun. Certains aussi oublient de vérifier que les quatre personnes trouvées à la fin sont distinctes. Enfin on ne peut pas dire "par principe des tiroirs" pour tout exercice de combinatoire. Dire que le fait que deux personnes pas amies ont au total $2n$ relations d'amitié et qu'il y a $2n-2$ personnes exceptés celles-ci et conclure par principe des tiroirs qu'il y a deux amis en commun n'est pas correct. Ici le principe des tiroirs montre qu'ils ont un ami en commun et on peut refaire le raisonnement pour passer à deux amis en commun.

Solution de l'exercice 4

On considère le chemin passant par le plus de villes différentes.

Si le chemin est infini on a gagné !

Sinon, à un moment, Emilhan arrive à la dernière ville du chemin qu'on nomme F . L'énoncé nous dit que F est reliée à au moins d autres villes par des routes directes. Or, comme le chemin est maximal, on ne peut plus avancer. Les villes accessibles depuis F sont donc toutes dans le chemin. Ainsi, le chemin contient toutes les villes accessibles depuis F et F , soit au moins $d + 1$ villes.

Commentaire des correcteurs : L'exo est plutôt bien réussi, la plupart des élèves ont trouvé soit une solution par récurrence soit celle du corrigé. Néanmoins, dans la solution avec la récurrence, il est important de bien justifier la partie hérédité, un simple "on continue jusqu'à la ville d " ne suffit pas. Il faut bien expliquer ce qui nous permet d'atteindre la ville d .

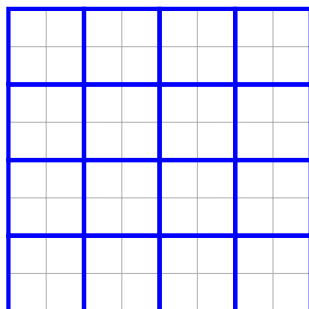
Solution de l'exercice 5

Considérons les restes possibles de la division par 4 pour n'importe quel nombre entier. Ces restes appartiennent à l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$. Pour que la somme de deux nombres soit divisible par 4, leurs restes (r_1, r_2) doivent vérifier $r_1 + r_2 \equiv 0 \pmod{4}$. Les paires de restes qui respectent cette condition sont donc :

- $(0, 0)$: deux nombres divisibles par 4.
- $(1, 3)$: un nombre de la forme $4k + 1$ et un autre de la forme $4k + 3$.
- $(2, 2)$: deux nombres de la forme $4k + 2$.

Puisque 2026^2 est un multiple de 4 (car 2026 est pair, donc $2026 = 2 \times 1013$ et $2026^2 = 4 \times 1013^2$), il y a exactement le même nombre de représentants pour chaque reste. Il y a donc $N = \frac{2026^2}{4} = 1013^2$ nombres pour chaque reste 0, 1, 2 et 3.

On partitionne le grand tableau en petits carrés disjoints de 2×2 cases comme illustré ci dessous pour un carré 8×8 . Puisque le tableau est de taille 2026×2026 et que 2026 est pair, on peut parfaitement le diviser. On aura alors $N = \frac{2026^2}{4} = 1013^2$ tels petits carrés.



• Partition en blocs 2×2

Tableau 8×8 divisé en 16 blocs de 2×2

Dans chaque bloc 2×2 , toutes les cases sont adjacentes entre-elles.

Si on a deux nombres de reste 0 ou deux nombres de reste 2 dans un même bloc, on a gagné. Si ce n'est pas le cas, puisqu'il y a le même nombre de représentants de chaque reste que de blocs, on a exactement un nombre de reste 0 et un nombre de reste 2 par bloc, et deux nombres de restes 1 ou 3. Il peut y avoir zéro, un ou deux nombres de reste 1 par carré. Or comme le nombre N de nombres de reste 1 est impair, il ne peut pas y avoir que des petits carrés qui en contiennent un nombre pair (zéro ou deux). Ainsi, il y a un carré qui contient exactement un nombre de reste 1 et donc un nombre de reste 3. Leur somme étant divisible par 4 on a gagné !

Commentaire des correcteurs : Exercice assez bien réussi dans l'ensemble. Certains élèves sont cependant partis sur des pistes très compliquées, en essayant de traiter tout les cas géométriques de ce qui pouvait se passer dans la grille, et il est important lorsque l'on travaille sur un problème de se demander si ce que l'on fait a une chance d'aboutir en un temps raisonnable, et si ce que l'on fait n'est pas trop dur pour le niveau attendu de l'exercice que l'on cherche. De plus, trop d'élèves donnent des arguments trop vagues, à base de dessins, d'intuition. C'est comme cela que l'on trouve l'exercice, mais ensuite pour expliquer la solution, il faut trouver des arguments limpides : des invariants, des modulus etc... ce n'est pas parce que c'est un exo de combinatoire qu'il faut lâcher toute rigueur.

Solution de l'exercice 6

Notons $f(X)$ la population de la ville X et considérons l'écart avec sa jumelle X' , défini par la fonction

$$g(X) = f(X) - f(X').$$

On procède par l'absurde, en supposant que cet écart soit toujours strictement supérieur à 100 en valeur absolue.

On peut alors séparer les villes en deux groupes :

- V_+ : celles qui comptent plus de 100 habitants de plus que leur jumelle (c'est-à-dire les villes X telles que $g(X) > 100$).
- V_- : celles qui en comptent au moins 100 de moins que leur jumelle (c'est-à-dire les villes X telles que $g(X) < 100$).

Puisque $g(X') = -g(X)$, il est clair qu'une ville X appartient à V_+ si et seulement si sa jumelle X' appartient à V_- .

Comme toutes les villes sont reliées entre elles, il existe une route directe entre une ville P de V_+ et une ville Q de V_- . Par définition de nos ensembles, $g(P) - g(Q)$ est strictement supérieur à 200 (puisque $100 - (-100) = 200$). Cependant, par inégalité triangulaire, on a

$$|g(P) - g(Q)| \leq |f(P) - f(Q)| + |f(Q') - f(P')|.$$

Or, l'existence d'une route entre P et Q implique celle d'une route entre leurs jumelles P' et Q' . Comme l'écart de population sur une route ne dépasse jamais 100, on obtient $|g(P) - g(Q)| \leq 100 + 100 = 200$. On aboutit donc à une contradiction ($200 < |g(P) - g(Q)| \leq 200$) donc il existe obligatoirement une ville X dont la population ne diffère pas de plus de 100 habitants de celle de sa jumelle.

Commentaire des correcteurs : Comme souvent en combinatoire, le problème a été mal réussi par rapport à ce que les élèves prétendaient avoir fait. En effet, il faut être très rigoureux sur les définitions d'objets et les différents arguments. Certains se sont compliqués la vie sur la partie considération d'un chemin entre une ville et sa jumelée, et ont fait un chemin compliqué n'existant pas ou se sont restreints à des types de graphes trop restrictifs. D'autres se sont emmêlés les pincesaux sur l'inégalité triangulaire ou sur les inégalités.

Solution de l'exercice 7

Notons $\tilde{A} = \{n - a \mid n \in A\}$ et $\tilde{B} = \{n + b \mid n \in B\}$ les ensembles translés de A et B respectivement. On va montrer que $A \cup B = \tilde{A} \cup \tilde{B}$:

- Tout d'abord, $A \cup B \subseteq \tilde{A} \cup \tilde{B}$ puisque si $i \in A \cup B$, alors $i + a \in A$ ou $i - b \in B$ donc $(i + a) - a = i \in \tilde{A}$ ou $(i - b) + b = i \in \tilde{B}$.
- Ensuite, les deux ensembles A et B étant disjoints,

$$|A \cup B| \leq |\tilde{A} \cup \tilde{B}| \leq |\tilde{A}| + |\tilde{B}| = |A| + |B| = |A \cup B|.$$

Donc ces deux unions sont de même taille et l'une est incluse dans l'autre i.e. elle sont égales. De plus, les inégalités précédentes étant toutes des égalités, on obtient que \tilde{A} et \tilde{B} sont disjoints.

On peut désormais procéder par double comptage :

$$\begin{aligned} \sum_{x \in A} x + \sum_{y \in B} y &= \sum_{z \in A \cup B} z \\ &= \sum_{z \in \tilde{A} \cup \tilde{B}} \tilde{z} \\ &= \sum_{\tilde{x} \in \tilde{A}} \tilde{x} + \sum_{\tilde{y} \in \tilde{B}} \tilde{y} \\ &= \left(\sum_{x \in A} x \right) - a|A| + \left(\sum_{y \in B} y \right) + b|B| \end{aligned}$$

Donc $a|A| = b|B|$ comme voulu.

Commentaire des correcteurs : Le problème était assez compliqué mais pouvait être résolu de diverses manières. Comme d'habitude en combinatoire, des arguments trop vagues sont sources d'erreurs. Par exemple, si on applique la fonction qui à $i \in A \cup B$ associe $i + a \in A$ ou $i - b \in B$ selon les cas, pour pouvoir écrire $\sum_{i \in A \cup B} f(i) = \sum_{i \in A \cup B} i$ il faut montrer que f est une bijection, soit une injection de $A \cup B$ dans lui-même.

Solution de l'exercice 8

On représente cette société par un graphe G où les n sommets sont les personnes et les q arêtes sont les paires amicales. L'énoncé précise que dans tout groupe de trois personnes, il y a au moins une paire hostile : cela signifie que le graphe ne contient aucun triangle (trois personnes amies entre elles deux à deux).

Puisqu'il y a q arêtes au total dans notre graphe, l'expression de l'énoncé nous incite à nous intéresser au complémentaire de l'ensemble des arêtes entre ennemis d'un sommet.

Notons d_i le nombre d'amis (le degré) de chaque individu i . Si l'on considère un ami Y de X , ce dernier possède d_Y amitiés. Comme il n'y a pas de triangle dans le graphe, on sait que X et Y n'ont aucun ami en commun. Par conséquent, toutes les amitiés de Y relient celui-ci soit à X , soit à une personne qui est nécessairement une ennemie de X .

On peut donc compter toutes les paires d'amis de l'entourage immédiat de X en sommant les amitiés de tous les voisins de X . Dans le langage de la théorie des graphes, nous dénombrons les arêtes dont au moins un sommet est relié à X . Puisque le graphe est sans triangle, il y a en fait exactement un sommet de l'arête qui est relié à X , et nous pouvons donc sommer sur les voisins de X en ne comptant chaque arête qu'une seule fois. En notant $X \sim Y$ lorsque X et Y sont amis, cette quantité V_X vaut alors

$$V_X = \sum_{X \sim Y} d_Y.$$

Nous voulons montrer qu'au moins l'un des V_X est assez grand, et pour ce faire nous sommons les V_X afin de minorer la moyenne de ces quantités. Puisque chaque sommet i est par définition relié à d_i autres sommets, on obtient alors :

$$\sum_{i=1}^n V_i = \sum_{i=1}^n \sum_{i \sim Y} d_Y = \sum_{i=1}^n d_i^2.$$

Puis il convient de se rappeler de deux lemmes connus :

- Le lemme des poignées de mains : la somme des degrés dans un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes, autrement dit dans ce cas

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2q.$$

- L'inégalité arithmético-quadratique (ou de Cauchy-Schwarz) qui nous donne ici :

$$\sum_{i=1}^n d_i^2 \geq \frac{(\sum_{i=1}^n d_i)^2}{n} = \frac{4q^2}{n}.$$

On peut alors appliquer le principe des tiroirs pour affirmer qu'il existe une personne X telle que

$$V_X \geq \frac{\sum d_i^2}{n} \geq \frac{4q^2}{n^2}.$$

Il suffit maintenant de remarquer que les arêtes entre ennemis de X sont exactement celles que nous n'avons pas comptées dans V_X , donc :

$$\text{Paires amicales d'ennemis de } X \leq q - \frac{4q^2}{n^2},$$

ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été très peu abordé, mais plutôt bien réussi par les sept élèves courageux qui se sont attaqués à cet exercice 8. Il y avait aussi malheureusement quelques confusions par rapport à l'énoncé dans certaines copies, qui ont empêché les élèves concernés d'avancer sur le problème.

Solution de l'exercice 9

Montrons que Paul gagne si n est un nombre premier impair, et que Hannah gagne dans les autres cas. Si n est pair, Hannah gagne quel que soit l'étiquetage. En effet, en coloriant les sommets du n -gone en couleurs alternées, le nombre de dindons sur une couleur est toujours égal au nombre de dindons sur l'autre couleur. Nous supposons donc que n est impair.

Pour que Paul gagne, il est nécessaire et suffisant qu'il puisse rassembler deux dindons quelconques sur une même case.

Fixons deux dindons; on définit la distance paire entre eux en considérant l'arc de longueur paire, n étant impair. En parcourant l'arc de longueur paire dans le sens antihoraire, on appelle le premier dindon "dindon de droite" et le second dindon "dindon de gauche".

Il existe toujours un choix de mouvement qui déplace le dindon de droite dans le sens antihoraire; et la distance paire ne peut pas augmenter lors d'un tel mouvement si elle est non nulle. Nous appelons cela un *mouvement sûr*.

Les sommets sont notés A_0, A_1, \dots, A_{n-1} dans le sens antihoraire avec les indices pris modulo n .

Preuve que Paul gagne lorsque n est premier et impair :

Supposons par l'absurde qu'il existe une distance paire d et deux dindons tel que Paul ne puisse pas rapprocher ces deux dindons, situés à une distance paire d .

Considérons deux sommets, par exemple A_0 et A_d , séparés par la distance d . Sans perte de généralité, supposons que l'applaudissement soit le mouvement sûr (autrement dit $A_{n-1} > A_1$). Dans ce cas, l'applaudissement fait s'éloigner l'autre dindon, ce qui signifie que

$$A_{d-1} > A_{d+1}.$$

Nous pouvons continuer à effectuer des mouvements sûrs, qui vont déplacer les deux dindons dans le sens anti-horaire, jusqu'à ce que les dindons se trouvent en A_d et A_{2d} . Alors l'applaudissement est également le mouvement sûr, donc $A_{2d-1} > A_{2d+1}$.

On répète l'argument (qui nous permet d'ajouter d au numéro du sommet de droite, modulo n) et comme $\text{pgcd}(d, n) = 1$, l'applaudissement est le mouvement sûr peu importe le sommet où se trouve le dindon de droite. Ainsi nous avons :

$$A_{n-1} > A_1 > A_3 > A_5 > \dots > A_n > A_2 > \dots > A_{n-1},$$

ce qui fournit une contradiction.

Preuve que Hannah gagne lorsque n est composé :

Supposons maintenant que n soit un nombre composé impair. On l'écrit sous la forme $n = p \cdot q$ avec $q \geq p \geq 3$. L'objectif d'Hannah est de créer un motif d'étiquettes périodique pour que certains dindons fassent toujours les mêmes mouvements et restent à une distance constante.

Elle veut alors étiqueter les sommets en créant une périodicité par exemple :

$$A_1 < A_2 < A_3 \dots < A_q > A_{q+1}$$

et

$$A_{q-1} > A_{q+1}, A_q > A_{q+2}$$

et pour k entre 1 et $p - 1$:

$$A_{kq+1} < A_{kq+2} < A_{kq+3} \dots < A_{kq+q} > A_{kq+q+1}$$

et

$$A_{kq+q-1} > A_{kq+q+1}, A_{kq+q} > A_{kq+q+2}$$

Ainsi un dindon a la position A_i aura toujours le même déplacement qu'un dindon à la position A_{i+q} (avec l'indice considéré modulo n).

Pour la période proposée au dessus elle peut par exemple numéroter les sommets de 1 à n dans cet ordre, où la première ligne désigne les numéros des sommets étiquetés par les nombres de 1 à p respectivement, et la dernière ligne désigne les numéros des sommets étiquetés par les nombres de $(q - 1) \cdot p + 1$ à n respectivement.

$$A_1, A_{q+1}, A_{2q+1} \dots A_{(p-1)q+1},$$

$$A_2, A_{q+2}, A_{2q+2} \dots A_{(p-1)q+2}$$

...

$$A_q, A_{2q}, A_{3q} \dots A_n$$

Les dindons qui commencent sur A_0 et A_q garderont une distance de q entre eux. Ils ne seront jamais sur le même sommet. Hannah gagne.

Commentaire des correcteurs : Ce problème, assez dur mais abordable avec très peu d'outils, a été résolu par quelques élèves. Des avancées partielles ont été valorisées.

Solution de l'exercice 10

Désignons par n le nombre de verres posés à l'envers sur la table. Initialement, $n = 7$. À chaque tour, nous devons retourner exactement deux verres. Trois situations peuvent se produire :

1. On retourne deux verres qui étaient à l'envers : ils passent à l'endroit, donc n devient $n - 2$.
2. On retourne deux verres qui étaient à l'endroit : ils passent à l'envers, donc n devient $n + 2$.
3. On retourne un verre à l'envers et un verre à l'endroit : le nombre de verres à l'envers reste inchangé ($n - 1 + 1 = n$).

Dans tous les cas, la modification du nombre de verres à l'envers est soit 0, soit ± 2 . Par conséquent, la parité de n est un invariant : elle ne change jamais au cours des étapes.

Comme le nombre initial de verres à l'envers (7) est impair, il restera impair après n'importe quel nombre de tours. Or, pour que tous les verres soient à l'endroit, il faudrait que $n = 0$, ce qui est un nombre pair. Cette situation est donc impossible.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été très bien résolu.

Solution de l'exercice 11

On considère le chemin passant par le plus de villes différentes.

Si le chemin est infini on a gagné !

Sinon, à un moment, Emilhan arrive à la dernière ville du chemin qu'on nomme F . L'énoncé nous dit que F est reliée à au moins d autres villes par des routes directes. Or, comme le chemin est maximal, on ne peut plus avancer. Les villes accessibles depuis F sont donc toutes dans le chemin. Ainsi, le chemin contient toutes les villes accessibles depuis F et F , soit au moins $d + 1$ villes.

Commentaire des correcteurs : L'idée du problème a été comprise sur toutes les copies, qui étaient en grande majorité correctes, excepté quelques petites imprécisions.

Solution de l'exercice 12

Chaque nombre de la grille peut être écrit comme la somme de deux termes : un décalage de ligne et un numéro de colonne. Dans une grille 8×8 où les nombres vont de 1 à 64, si on appelle L l'indice de la ligne (allant de 0 à 7 de bas en haut) et C l'indice de la colonne (allant de 1 à 8 de gauche à droite), chaque nombre N s'écrit :

$$N = (8 \times L) + C.$$

	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8
+ 7 × 8	57	58	59	60	61	62	63	64
+ 6 × 8	49	50	51	52	53	54	55	56
+ 5 × 8	41	42	43	44	45	46	47	48
+ 4 × 8	33	34	35	36	37	38	39	40
+ 3 × 8	25	26	27	28	29	30	31	32
+ 2 × 8	17	18	19	20	21	22	23	24
+ 1 × 8	9	10	11	12	13	14	15	16
+ 0 × 8	1	2	3	4	5	6	7	8

FIGURE 2 – Grille 8×8 avec décomposition des nombres par ligne et colonne.

Notons S_{rouge} la somme de tous les nombres inscrits dans les cases coloriées en rouge. En utilisant notre décomposition, cette somme peut être séparée en deux parties : la somme des "parties lignes" ($8 \times L$) et la somme des "parties colonnes" (C).

L'énoncé nous dit qu'il y a exactement 4 cases rouges par ligne. Sur la ligne 0, on compte 4 fois le nombre 0×8 . Sur la ligne 1, on compte 4 fois le nombre 1×8 ... et ainsi de suite jusqu'à la ligne 7 ($4 \cdot 56$). La somme des parties lignes pour les cases rouges est donc : $4 \times (0 + 8 + 16 + 24 + 32 + 40 + 48 + 56)$.

L'énoncé nous dit également qu'il y a exactement 4 cases rouges par colonne. Dans la colonne 1, on compte 4 fois le nombre 1. Dans la colonne 2, on compte 4 fois le nombre 2... jusqu'à la colonne 8 ($4 \cdot 8$). La somme des parties colonnes pour les rouges est donc : $4 \times (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8)$.

Appliquons le même raisonnement pour la somme des cases bleues (S_{bleu}) : Comme il y a aussi 4 cases bleues par ligne, la somme de leurs parties lignes sera : $4 \times (0 + 8 + 16 + \dots + 56)$. C'est la même que pour les rouges. Comme il y a aussi 4 cases bleues par colonne, la somme de leurs parties colonnes sera : $4 \times (1 + 2 + \dots + 8)$. C'est également la même que pour les rouges.

Puisque la somme des nombres rouges et la somme des nombres bleus sont composées des mêmes "morceaux" additionnés le même nombre de fois, elles sont forcément égales :

$$S_{\text{rouge}} = S_{\text{bleu}}$$

L'égalité est vérifiée quel que soit le coloriage d'Anatole, tant qu'il respecte la règle des 4 cases de chaque couleur par ligne et par colonne.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été très bien traité par les copies l'ayant abordé. La principale erreur apparue dans les copies était de traiter l'exercice avec un échiquier 4×4 (au lieu de 8×8). Il est tout de même dommage de voir ce genre d'étourderie, dans la mesure où une simple relecture attentive de l'énoncé permettait de l'éviter.

Solution de l'exercice 13

La réponse est oui, il est toujours possible d'obtenir $n + 1$ à partir de n .

Rappelons qu'un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

On remarque que le nombre m créé en ajoutant 8 fois le chiffre 1 à la fin de $n + 1$ est congru à :

$$m \equiv (n + 1) + 1 * 8 \equiv n + 9 \equiv n [9].$$

De plus, on a $m > n$ donc il existe un entier $k > 0$ tel que $m = 9k + n$. En ajoutant k fois 9 à n , on obtient donc le nombre m , puis en retirant les huit chiffres "1" à la fin de m , on obtient $n + 1$ par construction !

Commentaire des correcteurs : Le problème a été dans l'ensemble beaucoup résolu et les erreurs relèvent plus d'une incompréhension de l'énoncé que d'erreurs mathématiques dans le raisonnement.

Solution de l'exercice 14

On considère un sous-tableau de taille $k \times k$. Le nombre total de cases dans ce sous-tableau est k^2 . Soit N_{sub} le nombre de cases noires et B_{sub} le nombre de cases blanches dans ce sous-tableau. L'énoncé nous dit :

$$N_{\text{sub}} \leq B_{\text{sub}}.$$

Comme chaque case est soit noire, soit blanche, on a $N_{\text{sub}} + B_{\text{sub}} = k^2$. On en déduit :

$$N_{\text{sub}} \leq k^2 - N_{\text{sub}} \implies 2N_{\text{sub}} \leq k^2 \implies N_{\text{sub}} \leq \frac{k^2}{2}.$$

Puisque N_{sub} doit être un entier, le nombre maximal de cases noires dans un bloc $k \times k$ est :

$$N_{\text{max_bloc}} = \left\lfloor \frac{k^2}{2} \right\rfloor.$$

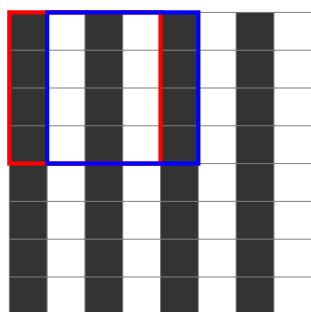
Puisque k divise n , nous pouvons diviser le tableau de taille $n \times n$ en un quadrillage parfait de petits blocs de taille $k \times k$. Le nombre de ces blocs est donné par :

$$\text{Nombre de blocs} = \frac{n}{k} \times \frac{n}{k} = \frac{n^2}{k^2}.$$

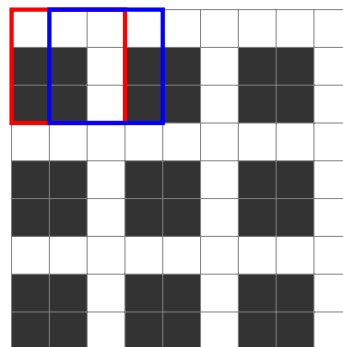
Chaque case du grand tableau appartient à exactement un bloc de cette partition. Ainsi, le nombre total de cases noires N_{total} est la somme des cases noires de chaque bloc.

D'après l'étape 1, chaque bloc contient au plus $\left\lfloor \frac{k^2}{2} \right\rfloor$ cases noires. Donc :

$$N_{\text{total}} \leq \left(\frac{n^2}{k^2} \right) \times \left\lfloor \frac{k^2}{2} \right\rfloor.$$



(a) Un motif pour $k = 4$



(b) Un motif optimal pour $k = 3$.

FIGURE 3 – Exemples de motifs dans le cas pair et impair, en rouge le premier bloc répété sur toute la figure, en bleu un bloc décalé qui permet de voir la conservation du nombre de cases noires.

Réciproquement, pour atteindre cette borne, il suffit de colorier $\left\lfloor \frac{k^2}{2} \right\rfloor$ cases de chaque bloc $k \times k$ en répétant le même motif (comme montré sur la figure (b)).

Commentaire des correcteurs : Problème très bien traité, l'idée qui a manqué à certains étaient dans la justification d'une construction pour k impair.

Solution de l'exercice 15

Notons $P(x)$ l'ensemble des r facteurs premiers d'un entier x .

Parmi tous les ensembles de nombres premiers possibles, choisissons un ensemble K tel qu'il existe un sous-ensemble infini $A' \subseteq A$ vérifiant $K \subseteq P(a)$ pour tout $a \in A'$, et tel que K soit maximal pour l'inclusion (aucun autre nombre premier ne divise une infinité d'éléments de A'). Un tel K existe bien car si on prend un élément a dans A , par le principe des tiroirs infinis, au moins un des nombres premiers p de $P(a)$ divise une infinité d'éléments dans A . On peut donc prendre $K = \{p\}$ et A' l'ensemble des éléments de A divisible par p , puis rajouter dans K tant que c'est possible un nombre premier qui divise une infinité d'éléments de A' , puis remplacer A' par le sous-ensemble des éléments de A' qui sont divisible par ce nombre premier. Ce processus se terminera bien car $|K| \leq r$, et chaque étape rajoute exactement un nombre premier dans K . Par construction, K sera maximal pour l'inclusion.

Puisque les éléments de A sont distincts, ils ne peuvent avoir les mêmes facteurs premiers, donc $|K| < r$, soit $|K| \leq r - 1$.

Construisons inductivement une suite $(u_i)_{1 \leq i \leq r+1}$ d'éléments de A' tels que les ensembles "restants" $R_i = P(u_i) \setminus K$ soient deux à deux disjoints. Choisissons u_1 arbitrairement dans A' . Par maximalité de K , aucun premier $p \in R_1$ ne divise une infinité d'éléments de A' . On peut donc retirer de A' le nombre fini d'éléments partageant un facteur avec R_1 pour choisir u_2 , et ainsi de suite jusqu'à avoir choisi u_{r+1} . Considérons maintenant un entier quelconque $a \in A$. Il doit partager un facteur premier avec chaque u_i de la suite (car $\text{pgcd}(a, u_i) > 1$). Puisque les R_i sont disjoints et que a possède exactement r facteurs, $P(a)$ peut intersecter au plus r des ensembles R_i . Il existe donc un indice i tel que $P(a) \cap R_i = \emptyset$, le facteur commun entre a et u_i se trouve donc dans K . Ainsi, $P(a) \cap K \neq \emptyset$.

On peut alors définir n comme le produit des premiers de K (en le complétant éventuellement par des premiers arbitraires pour atteindre exactement $r - 1$ facteurs), on garantit que $\text{pgcd}(a, n) > 1$ pour tout $a \in A$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile pour sa position et a été très peu résolu. Beaucoup d'élèves ont tenté d'utiliser le cas A fini pour traiter le cas A infini, mais cela n'aidait pas. En effet, l'idée de l'exercice était d'appliquer à plusieurs reprises le principe des tiroirs infinis.

Solution de l'exercice 16

Observons d'abord que le nombre total de cartes reste constant. La stratégie consiste à lisser la distribution sur les A_i pour maximiser le stock en O , puis à redistribuer massivement.

- (a) **Réduction initiale** : Appliquons l'opération (1) tant qu'il existe un sommet A_i ayant au moins 3 cartes. Ce processus termine nécessairement car chaque opération augmente strictement le nombre de cartes en O , qui est borné par le nombre total de cartes. À l'état final, chaque A_i possède 0, 1 ou 2 cartes.
- (b) **Décalage** : Appliquons l'opération (2) une seule fois. Désormais, chaque A_i possède 1, 2 ou 3 cartes. Cela nous donne plus de flexibilité pour la suite.
- (c) **Condition suffisante** : Soient x, y, z les nombres de sommets A_i ayant respectivement 1, 2 et 3 cartes. On a $x + y + z = n$. La somme des cartes sur le cercle est $S_A = 1x + 2y + 3z$. Le nombre de cartes en O est $\text{Card}(O) = \text{Total} - S_A \geq (n^2 + 3n + 1) - (x + 2y + 3z)$. Remarquons que $x + 2y + 3z = 2(x + y + z) + z - x = 2n + z - x$. Si nous parvenons à garantir que $x \geq z$ (plus de 1 que de 3), alors $S_A \leq 2n$. Dans ce cas, $\text{Card}(O) \geq (n^2 + 3n + 1) - 2n = n^2 + n + 1$. Nous pourrions alors appliquer l'opération (2) exactement n fois. Chaque A_i (qui a déjà ≥ 1 carte) recevrait n cartes supplémentaires, atteignant $\geq n + 1$. Le centre O , après avoir distribué n^2 cartes, garderait au moins $n + 1$ cartes. Le problème serait résolu.
- (d) **Algorithme de séparation** : Il suffit donc de trouver un algorithme partant d'une configuration $\{1, 2, 3\}$ et aboutissant à une configuration $\{1, 2, 3\}$ vérifiant $x \geq z$. L'idée est d'insérer des 1 entre les 3.
- *Cas des 3 adjacents* : Si on a une séquence $(\dots, u, 3, 3, \dots, 3, v, \dots)$ avec $u, v \neq 3$, appliquons l'opération (1) sur toute la chaîne de 3. La séquence devient $(\dots, u+1, 1, 2, \dots, 2, 1, v+1, \dots)$. Les 3 ont disparu localement et des 1 sont apparus.
 - *Cas des 3 séparés par des 2* : Si on a $(\dots, u, 3, 2, 2, \dots, 2, 3, v, \dots)$, appliquons l'opération (1) sur le premier 3. Il distribue ses cartes, créant un 3 (ou plus) sur son voisin de droite (anciennement un 2). On propage cette opération de proche en proche vers la droite. Le résultat final est la séquence $(\dots, u+1, 1, 1, \dots, 1, v+1, \dots)$. Tous les 2 intermédiaires sont devenus des 1.
- Ces procédures préservent la condition $A_i \in \{1, \dots\}$ (car $u, v \geq 1 \implies u+1 \geq 2$) et augmentent strictement le nombre de cartes en O , assurant la terminaison. À l'arrêt, il ne peut plus y avoir deux 3 adjacents ni deux 3 reliés uniquement par des 2. Autrement dit, entre deux 3 quelconques, il y a au moins un 1. Sur un cercle, cela force $x \geq z$. La condition suffisante est remplie.

C.Q.F.D.

Commentaire des correcteurs : Exercice difficile et peu abordé. Toutes les copies proposées avaient saisi l'idée principale, à savoir que l'on pouvait forcer la moyenne des cartes sur le cercle à être inférieure à $n + 2$ en appliquant l'opération 1 sur des suites de cartes du type $n = 3, n + 2, \dots, n + 2, n + 3$.

Solution de l'exercice 17

Commençons par observer que deux voisins quelconques u et v sur le cercle sont premiers entre eux. En effet, si $d = \text{pgcd}(u, v) > 1$, la relation de divisibilité $u|v + w$ (où w est l'autre voisin de u) implique que $d|w$. En propageant ce raisonnement de proche en proche, d diviserait tous les nombres du cercle, ce qui contredit l'existence du nombre 1.

Considérons maintenant l'élément maximal x du cercle, avec $x > 1$, et soient y et z ses voisins. Par maximalité, $y < x$ et $z < x$, donc $y + z < 2x$. La condition $x|y + z$ impose alors l'égalité $x = y + z$.

Puisque le plus grand nombre est simplement la somme de ses deux voisins, on peut imaginer l'opération inverse : On retire x du cercle. On relie y et z directement. Le cercle ainsi réduit respecte toujours la règle de divisibilité ! On peut répéter cette opération (retirer le plus grand nombre actuel) jusqu'à ce qu'il ne reste plus que 1 et un voisin, qui vaut nécessairement 2.

Cette méthode de construction (insérer la somme de deux voisins entre eux) garantit que chaque nombre n est généré par un couple de voisins (y, z) tel que $y + z = n$. Et nous avons vu que y et n doivent alors nécessairement être premiers entre eux, donc il y a au plus $\phi(n)$ valeurs possibles pour y (par définition de l'indicatrice d'Euler), qui déterminent la valeur de $z = n - y$.

Pour conclure, il suffit donc de démontrer que toute paire de naturels (x, y) apparaît au plus une fois dans cet ordre autour du cercle, ce que nous allons faire par récurrence en repartant de la situation avec un 1 et un 2, où la propriété est vérifiée. Remarquons que lorsque nous ajoutons $z = x + y$ entre x et y , on a $z > x, y$. Ainsi, il est possible de reconstruire le cercle en ajoutant les nombres ayant la même valeur en même temps, dans l'ordre croissant. L'hérédité consiste à remarquer que si nous ajoutons tous les $z \geq 3$ sur le cercle simultanément, il ne peut y avoir de paire ordonnée (x, z) apparaissant deux fois, car cela signifierait que la paire ordonnée $(x, z - x)$ apparaissait au moins deux fois à l'étape précédente. Cela conclut la récurrence et donc la preuve.

Commentaire des correcteurs : Le problème était difficile et a été peu abordé. L'idée principale était de se rendre compte que l'on pouvait enlever l'élément maximal d'un cercle qui vérifie l'énoncé tout en préservant les conditions de divisibilité. Ensuite, pour conclure, il fallait remarquer qu'une paire ordonnée (a, b) ne pouvait pas apparaître plus d'une fois sur le cercle.

Solution de l'exercice 18

On va montrer que pour tout graphe simple $G = (V, E)$ (V est l'ensemble des sommets et E l'ensemble des arêtes), le nombre minimal de wise men à avoir est $|E|$, ceci implique que la seule valeur pour m dans l'énoncé est 1000.

Tout d'abord, étant donné un graphe G , s'il y a $|E|$ wise men, une stratégie pour eux est de choisir chacun une arête différente, puis de se poser sur une des extrémités de l'arête, et à chaque fois que Héloïse choisit une arête, le wise man correspondant la traverse. Ainsi, les wise men gagnent car chaque arête aura toujours le wise man correspondant sur une des extrémités.

Il reste à montrer que si le nombre de wise men est strictement inférieur à $|E|$, alors Héloïse a une stratégie gagnante.

On fait la remarque suivante : Supposons qu'il existe un sous-ensemble de sommets $A \subseteq V$ qui ne soit jamais vidé de ses sages au cours du jeu. Sans perte de généralité, on peut considérer qu'il y a un sage spécifiquement "cloué" sur chaque sommet de A , c'est-à-dire un sage qui ne bougera jamais de ce sommet. (Si la stratégie exigeait qu'il bouge, un autre sage devrait prendre sa place pour que le sommet ne soit pas vide, ils peuvent donc simplement échanger leurs rôles).

On montre le résultat par récurrence sur le nombre de sommets $|V|$ de G .

Initialisation : Si G a 1 sommet, il a 0 arête et il y a bien sûr besoin de 0 wise men pour que Héloïse ne gagne pas.

Hérédité : Supposons le résultat vrai pour tous les graphes à strictement moins de N sommets et supposons que G soit un graphe à N sommets. Considérons m le nombre minimal de sages permettant de gagner sur G . Montrons par l'absurde que si $m < |E|$, Héloïse gagne.

Cas 1 : Le graphe G possède un sommet isolé v .

Un sommet est dit isolé s'il n'est relié à aucune arête (son degré est 0). Par minimalité de m , ce sommet n'accueille aucun sage. En effet, Héloïse ne peut choisir que des arêtes. Un sage posté sur un sommet sans arête ne pourrait répondre à aucune attaque et serait donc inutile. Puisqu'il n'y a ni arête ni sage sur v , le jeu se déroule en réalité intégralement sur le sous-graphe $G' = G \setminus \{v\}$. Le graphe G' possède $N - 1$ sommets, le même nombre d'arêtes $|E|$, et les sages sont toujours au nombre de m . Par hypothèse de récurrence sur G' (qui a strictement moins de N sommets), si $m < |E|$, Héloïse possède une stratégie gagnante. Le cas du sommet isolé est donc résolu et on peut l'écarter.

Cas 2 : Le graphe G ne possède aucun sommet isolé.

Puisque le Cas 1 est écarté, chaque sommet a au moins un voisin (son degré d vérifie $d \geq 1$).

Supposons par l'absurde qu'Héloïse ne puisse jamais vider aucun sommet. D'après notre remarque préliminaire (avec $A = V$), on pourrait "clouer" un sage sur chaque sommet de G . Mais si chaque sommet possède son sage immobile, toutes les arêtes ont leurs deux extrémités occupées en permanence. C'est superflu : une seule extrémité suffit. Si on retire le sage d'un sommet arbitraire v , toutes les arêtes incidentes à v restent couvertes par les sages postés sur les voisins de v (qui existent, car v n'est pas isolé). Les sages continueraient donc de gagner avec $m - 1$ membres, ce qui contredit la minimalité de m . Héloïse a donc forcément une suite de coups permettant de vider un certain sommet v .

Ainsi, supposons que Héloïse arrive à vider un certain sommet v . On suppose qu'elle ne choisira plus les arêtes adjacentes à v . Comme les wise men gagnent par hypothèse, les voisins v_1, \dots, v_d de v ne seront jamais vides. Ainsi, par la remarque avec $A = \{v_i, i \leq d\}$, on peut supposer qu'il y a un wise man m_i cloué en chaque sommet v_i .

Considérons le graphe $G' = G \setminus \{v\}$. Alors G' a $|E| - d$ arêtes. Supposons que l'on enlève les wise men cloués m_i . Alors il ne reste plus que $m - d$ wise men. Supposons par l'absurde $m < |E|$, alors

$m - d < |E| - d$ et donc par hypothèse de récurrence sur G' , il y a une stratégie gagnante pour Héloïse si on ignore les m_i .

Supposons que Héloïse joue cette stratégie. Alors il obtiendra une arête w_1w_2 de G' qui sera vide, à part s'il y a des wise men cloués m_i sur les extrémités. Dans tous les cas, Héloïse choisit cette arête. Si elle est vide, elle a gagné. Sinon, il force un des wise men cloués m_i à bouger, mais alors l'arête v_i devient vide, et donc Héloïse gagne à nouveau.

Conclusion : Ainsi, c'est absurde, donc on a bien $m \geq |E|$.

Finalement, le nombre magique est $m \geq 1000$

Commentaire des correcteurs : Un problème très difficile mais très intéressant qui n'a été tenté que par 4 personnes. L'idée de la récurrence a bien été trouvée par la plupart des élèves avec cependant quelques erreurs d'initialisation faciles à éviter.