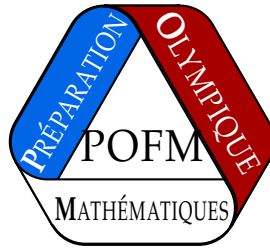


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 2 MARS 2026

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe senior est constitué des élèves nés en 2010 ou avant, ou étant en terminale. Les autres élèves sont dans le groupe junior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Cinq amis se retrouvent pour une fête d'anniversaire. Chaque personne serre la main de chacune des autres personnes, une et une seule fois. Quel est le nombre total de poignées de main échangées ?

Exercice 2. Sur une table, 7 verres sont posés à l'envers. Vous voulez tous les remettre à l'endroit. La seule règle est la suivante : à chaque tour, vous devez choisir exactement deux verres et les retourner. Est-il possible de remettre les 7 verres à l'endroit ?

Exercice 3. À une fête se trouvent $2n$ personnes avec $n \geq 2$, chacune étant amie avec au moins n autres personnes (on suppose que les amitiés sont réciproques). Montrer qu'on peut trouver 4 personnes que l'on peut asseoir à une table circulaire tel que chacune est amie avec ses 2 voisins.

Exercice 4. Emilhan explore un pays où chaque ville possède au moins d routes directes menant à d'autres villes. Montrer que Emilhan peut planifier un itinéraire de voyage qui traverse au moins $d + 1$ villes différentes, sans jamais repasser par une ville déjà visitée.

Exercice 5. Chacun des nombres $1, 2, \dots, 2026^2$ est placé dans un tableau de taille 2026×2026 (avec un nombre par case). Démontrez qu'il existe deux cases partageant un côté ou un sommet commun (voisinage du roi aux échecs) telles que la somme des nombres qu'elles contiennent soit divisible par 4.

Exercice 6. La planète Zork possède plusieurs villes. Celles-ci sont réparties en paires disjointes de villes dites *jumelées*.

Sur Zork, il existe des routes reliant certaines paires de villes de telle sorte que si deux villes sont reliées, les deux villes jumelées correspondantes sont reliées également. De plus, toute paire de villes est reliée par une suite de routes. Chaque ville a un certain nombre d'habitants, de telle sorte que la différence entre les populations de deux villes reliées par une route soit toujours d'au plus 100.

Prouver qu'il existe deux villes jumelées dont les populations diffèrent d'au plus 100.

Exercice 7. Soit a et b deux entiers strictement positifs et soit A et B des ensembles finis d'entiers tel que A et B ne partagent pas d'élément et tel que pour tout i dans A ou dans B , $i + a$ est dans A ou $i - b$ est dans B .

Montrer que $a|A| = b|B|$ où $|X|$ désigne le nombre d'éléments dans l'ensemble X .

Exercice 8. Supposons que dans une certaine société, chaque paire de personnes puisse être classée comme amicale ou hostile. Nous dirons que chaque membre d'une paire amicale est l'ami de l'autre, et que chaque membre d'une paire hostile est l'ennemi de l'autre. Supposons que la société compte n personnes et q paires amicales, et que pour tout groupe de trois personnes, au moins une paire soit hostile. Prouver qu'il existe au moins un membre de la société dont l'ensemble des ennemis contient au plus $q \left(1 - \frac{4q}{n^2}\right)$ paires amicales (contenir une paire amicale veut dire que les deux personnes de la paire appartiennent à l'ensemble).

Exercice 9. Soit $n \geq 3$ un entier. Deux joueurs, Hannah et Paul, jouent au jeu suivant. Hannah étiquette les sommets d'un n -gone régulier avec les nombres de 1 à n , dans l'ordre qu'elle souhaite. Chaque sommet doit porter un numéro différent. Ensuite, on place un dindon sur chacun des n sommets. Ces dindons sont entraînés à effectuer les actions suivantes :

- Si Paul siffle, chaque dindon se déplace vers le sommet adjacent ayant l'étiquette la plus élevée.
- Si Paul tape dans ses mains, chaque dindon se déplace vers le sommet adjacent ayant l'étiquette la plus basse.

Paul gagne si, après un certain nombre de sifflements et d'applaudissements, il parvient à amener tous les dindons sur un seul et même sommet. Hannah gagne si elle peut étiqueter les sommets de manière à ce que Paul ne puisse pas y parvenir. Pour chaque $n \geq 3$, déterminez quel joueur possède une stratégie gagnante.

Exercices Seniors

Exercice 10. Sur une table, 7 verres sont posés à l'envers. Vous voulez tous les remettre à l'endroit. La seule règle est la suivante : à chaque tour, vous devez choisir exactement deux verres et les retourner. Est-il possible de remettre les 7 verres à l'endroit ?

Exercice 11. Emilhan explore un pays où chaque ville possède au moins d routes directes menant à d'autres villes. Montrer que Emilhan peut planifier un itinéraire de voyage qui traverse au moins $d + 1$ villes différentes, sans jamais repasser par une ville déjà visitée.

Exercice 12. On considère une grille 8×8 dans laquelle on écrit les nombres de 1 à 64 dans l'ordre de gauche à droite, puis de bas en haut. Ensuite, Anatole décide de colorier les cases de la grille en rouge et en bleu, de manière à ce que chaque ligne et chaque colonne ait autant de cases bleues que rouges. Montrer que quelque soit la manière dont Anatole colorie les cases, la somme des nombres sur les cases bleues est égale à la somme des nombres sur les cases rouges.

13	14	15	16
9	10	11	12
5	6	7	8
1	2	3	4

FIGURE 1 – Grille 4×4 numérotée de gauche à droite et de bas en haut.

Exercice 13. A partir d'un entier positif n , on s'autorise 2 opérations : rajouter 9 à ce nombre, ou enlever un chiffre 1 de n'importe quelle position de son écriture décimale. Est-il toujours possible d'obtenir $n + 1$ à partir de n en appliquant ces opérations un certain nombre de fois ?

Exercice 14. Soient n et k des entiers naturels fixés, avec k divisant n . On considère un tableau de taille $n \times n$ dont chaque case est colorée soit en noir, soit en blanc. Supposons que pour tous les sous-tableaux de taille $k \times k$ de ce tableau, le nombre de cases noires est inférieur ou égal au nombre de cases blanches. Trouvez le nombre maximal de cases noires possible dans le tableau.

Exercice 15. Soit $r > 1$ un entier et A un ensemble infini d'entiers tel que tout élément a de A est le produit d'exactly r nombres premiers distincts. On suppose en outre que pour tous éléments a et b de A , $\text{pgcd}(a, b) > 1$. Montrer qu'il existe un entier n s'écrivant comme un produit d'exactly $r - 1$ nombres premiers distincts tel que pour tout élément a de A , $\text{pgcd}(a, n) > 1$.

Exercice 16. Soit $n \geq 3$ un entier fixé. Un nombre fini de cartes sont placées sur les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ (situés sur un cercle) et sur un point central O . À chaque étape, nous pouvons effectuer l'une des opérations suivantes :

1. Si un point A_i contient strictement plus de 2 cartes, nous pouvons retirer 3 cartes de A_i et en placer une sur A_{i-1} , une sur A_{i+1} et une sur O (avec la convention $A_0 = A_n$ et $A_{n+1} = A_1$).
2. Si le point O contient au moins n cartes, nous pouvons retirer n cartes de O et en placer une sur chacun des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Montrer que si le nombre total de cartes est d'au moins $n^2 + 3n + 1$, nous pouvons effectuer une suite finie d'opérations telle qu'à la fin, chaque point (y compris O) possède au moins $n + 1$ cartes.

Exercice 17. On dispose de $m \geq 3$ entiers strictement positifs, non nécessairement distincts, disposés sur un cercle de telle sorte que chaque entier divise la somme de ses deux voisins.

Montrer que s'il y a exactement un nombre 1 parmi ces entiers, alors pour tout entier strictement positif n , il y a au plus $\varphi(n)$ copies de n sur le cercle (où φ désigne la fonction indicatrice d'Euler).

Exercice 18. Le château de Héloïse possède 100 pièces et 1000 couloirs. Chaque couloir relie deux pièces, de sorte que chaque paire de pièces est reliée par au plus un couloir. Héloïse a remis le plan du château à des sages et a énoncé les règles du défi suivant. Les sages doivent se répartir dans les pièces comme ils le souhaitent. Chaque minute, Héloïse choisit un couloir et l'un des sages doit l'emprunter pour passer de l'une des pièces à ses extrémités vers l'autre. Héloïse gagne si, dans les deux pièces aux extrémités du couloir choisi, il n'y a aucun sage. Appelons m le *nombre magique* du château si m sages peuvent se concerter avant le défi et agir de telle sorte que Héloïse ne gagne jamais, m étant le nombre minimal possible. Quelles sont les valeurs possibles du nombre magique du château, en fonction des différentes configurations de pièces et de couloirs ? (Héloïse et tous les sages connaissent à tout moment la position de tous les sages).