TD : Ordre multiplicatif & Petit théorème de Fermat

Exercice 1
Démontrer, pour tout entier $n \geq 0$, que 7 divise $3^{12n+1} + 2^{6n+2}$.

Exercice 2
Montrez que pour tout n, $42 \mid n^7 - n$.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair. Montrer que $n \mid 2^{n!} - 1$.

Exercice 4
Soient p, q premiers tels que $q \mid 1 + p + ... + p^{p-1}$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod p$.

Exercice 5
Soit $k \geq 1$ un entier premier avec 6. Démontrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ pour lequel k divise $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Exercice 6
Montrez que pour $n \geqslant 2$, et a impair on a $a^{2^{n-2}} = 1 \pmod{2^n}$.

Exercice 7
Soit n un entier. Dénombrer les $a \in [\![1, n]\!]$ tels que $a^n = 0 \pmod n$.

Exercice 8
Soit $p > 3$ premier. Trouver un $k > 0$ tel que $1^k 2^k + 2^k 3^k + 3^k 4^K + \cdots (p-2)^k (p-1)^k = 2 \pmod p$.

Exercice 9
Soit d divisant n, que vaut $\mathrm{Card}\{k \in [\![1, n]\!] : \gcd(k, n) = d\}$?
En déduire la valeur de $\sum_{d \mid n} \varphi(d)$.