

pgcd et Nombres premiers

Groupe A

1 Introduction(Entrée)

Exercice 1

Décomposer en nombres premiers 7, 13, 46, 71, 91, 113

Exercice 2

Trouver $v_3(2^{100})$.

Exercice 3

Trouver $v_2(2^{50} + 2^3)$

Exercice 4

Soit p un nombre premier, et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $p^2 | n(n+1)$, alors $p^2 | n$ ou $p^2 | n+1$

Exercice 5

Montrer que pour tout entier n , $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 6

Soient a et b des entiers premiers entre eux, montrer que $a+b$ et ab sont premiers entre eux.

2 Plat

Exercice 1

Trouver tous les couples (m, n) tel que $m^3 = 4n + 2$

Exercice 2

Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n(n+1)$ soit un carré parfait.

Exercice 3

Trouver les entiers relatifs n tels que $n^5 - 2n^4 - 7n^2 - 7n + 3 = 0$

Exercice 4

Trouver les entiers n positifs tels que $3^n + 5^n$ divise $3^{n+1} + 5^{n+1}$

Exercice 5

Trouver les n tels que $n^2 + 1 | n^5 + 3$

Exercice 6

Trouver les couples (a, b) d'entiers tels que $a^2b - 1$ divise $a^2b^2 + 1$

Exercice 7

Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $\frac{a^3b-1}{a+1}$ et $\frac{b^3a+1}{b-1}$ sont tous deux des entiers.

Exercice 8

A quelle condition sur $y \in \mathbb{N}$, $y^2 + 7y + 6$ est un carré?

Exercice 9

A quelle condition sur $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $(x+y)^2 + 3x + y + 1$ est un carré?

3 Dessert

Exercice 1

Soient m, n, a des entiers strictement positifs avec $a \geq 2$. Montrer que $\text{PGCD}(a^n - 1, a^m - 1) = a^{\text{PGCD}(m, n)} - 1$.

Exercice 2

A quelle condition sur $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n a + b$ est un carré?

Exercice 3

Exercice 4

Trouver tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que les trois nombres suivants sont entiers :

$$\frac{p^2 + 2q}{q + r}, \frac{q^2 + 9r}{r + p}, \frac{r^2 + 3p}{p + q}$$