Problèmes d'optimisation

1 La théorie

On traite ici des problèmes de combinatoire dans lesquels il faut trouver le plus **grand** ou le plus **petit** entier k vérifiant une certaine propriété $\mathcal{P}$. Souvent, cette propriété $\mathcal{P}$ dépend en fait d'un entier n, et l'entier optimal k_n dépend alors lui aussi de n.

Conseils pour l'analyse : Prenons A un ensemble d'objets tel que A vérifiant $\mathcal{P}$.

- Se poser la question suivante : "si $x \in A$, quels sont les éléments qui ne peuvent pas appartenir à A ?"
- Comme variation de l'idée précédente : partitionner E en plusieurs sous-ensembles $X_1, \dots, X_r$ biens choisis et montrer qu'il y a au plus un élément de chaque X_i qui peut appartenir à A (un élément, ou deux éléments, ou k éléments...)
- Lorsque $E = \{1, 2, \dots, n\}$, observer la somme possible des entiers appartenant à A, la minorer par $1+2+3+\ldots+|A|$, la majorer par $n+n-1+\ldots+n-|A|+1$. Faire de même avec le produit, la somme des carrés, le plus grand élément de l'ensemble, le plus petit...
- Si on a déjà trouvé la construction, regarder pourquoi on ne peut pas rajouter d'éléments permet de deviner la partition adéquate (en revanche cela ne constitue pas une preuve).
- Dans l'analyse, il est possible que vous ne trouviez pas tout de suite la bonne borne. Par exemple, vous pourriez d'abord montrer que $k_n \leqslant n/2$, alors que la bonne borne est $n/4$. Dans ce cas là, on se rend généralement vite compte que la borne $n/2$ n'est pas optimal en essayant de faire la construction. Toutefois, écrivez ce raisonnement, car on ne sait jamais il pourrait rapporter des points partiels.

On va surtout travailler le deuxième tiret dans ce TD.

Conseils pour la construction :

- Penser simple : des polygones réguliers (lorsqu'on cherche un ensemble de points du plan), des coloriages à motifs réguliers (lorsqu'on cherche des cases d'un tableau), des ensembles classiques d'entiers (lorsqu'on cherche des sous-ensembles d'entiers) comme l'ensemble des entiers pairs/impairs, l'ensemble des k plus grands entiers.
- Chercher des constructions qui marchent permet de deviner la valeur maximale recherchée.
- Si l'on a fait l'analyse d'abord, regarder les cas d'égalité des inégalités effectuées dans l'analyse pour trouver la construction.

Dans tous les cas :

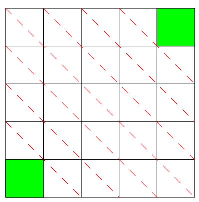
- Essayer de résoudre l'exercice pour des petites valeurs de n.
- Ne pas oublier la récurrence.
- Souvent, l'une des deux parties (analyse ou synthèse) est plus facile que l'autre, et rapporte tout de même des points. Ainsi, dans le cadre d'une compétition, vous **devez** passer du temps sur un exo 2/5 (voire 3/6) d'optimisation pour deviner quelle est la partie facile, la faire et récupérer les points faciles qui vont avec *même si vous n'arrivez pas à faire la deuxième moitié de l'exercice*. Beaucoup de candidates à nos compétitions oublient de lire les énoncés des exercices difficiles et "perdent" alors des points qui étaient à leur portée. Vous pouvez faire ce travail dans les exercices qui suivent.

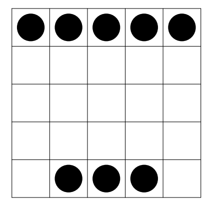
2 Un exemple

On regarde l'exemple suivant.

Exercice 1. Sur un échiquier 2023×2023, un fou est une pièce qui peut se déplacer uniquement en diagonale et d'autant de cases que voulu. On dit qu'un fou peut en *attaquer* un autre si, en un seul coup, il peut se déplacer vers la case surlaquelle se trouve le deuxième fou. Quel est, le nombre maximum de fous que l'on peut placer sur l'échiquier de telles sorte que deux fous quelconques ne s'attaquent jamais ?

Solution 1.





Posons $n = 2023$.

Analyse : Considérons les diagonales parallèles à la diagonale principale reliant la coins supérieur gauche au coin inférieur droit, comme sur la figure de gauche. Chacune de ces diagonales ne peut contenir plus d'un fou, sans quoi on aurait deux fous qui pourraient s'attaquer mutuellement. De plus, au plus une seule des deux cases vertes contient un fou. Puisqu'il y a $n + n - 1 - 2 = 2n - 3$ diagonales rouges, l'échiquier contient au plus $2n - 2$ fous.

Construction : Réciproquement, en plaçant les fous comme sur le figure de droite, c'est-à-dire en occupant toutes les cases de la première rangée et toutes les cases sauf les coins de la dernière rangée, on trouve bien une configuration à $2n - 2$ fous où deux fous ne s'attaquent jamais.

Le maximum est donc $2n - 2 = 4044$.

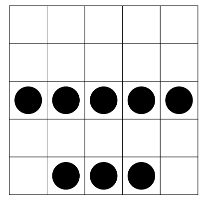
Dans cet exemple, les ensembles qui partitionnent la grille sont les diagonales parallèles à la diagonale principale, et on montre que chaque ensemble contient au plus un fou.

Erreur à ne pas commettre

Observons le raisonnement suivant :

Considérons la configuration de la figure de droite. Celle-ci contient $2n - 2$ fous, et on constate qu'on ne peut pas rajouter de fous. Ainsi, il n'est pas possible d'avoir plus de $2n - 2$ fous sur l'échiquier, c'est donc le plus grand entier.

Ce raisonnement ne constitue pas une preuve. Ce n'est pas parce qu'on ne peut pas rajouter de fous à la configuration proposée qu'il n'existe pas une configuration complètement différente et comportant plus de fous. D'ailleurs, on ne peut pas rajouter de fous à la configuration ci-dessous :



Pourtant, comme on l'a vu, il existe des configurations possédant plus de n fous.

Ainsi, même si la borne est correcte et si l'affirmation est correcte, la preuve proposée est fausse et ne rapportera pas beaucoup de points. L'erreur sous-jacente est de confondre *maximum local* et *global*. On prendra donc garde à ne pas chercher à mélanger les deux parties dans son raisonnement.

3 Les exercices

Entraînons-nous à présent sur les exercices suivants :

Exercice 2. *(St-Pétersbourg MO round 1)* On considère un échiquier de taille 8×8, dans lequel une case sur deux est coloriée en blanc et le reste des cases en noir. Une *tour infernale* est une pièce qui peut attaquer toute les cases qui sont sur la même ligne et de la même couleur que la case où elle est située ainsi que toutes les cases qui sont sur la même colonne mais de l'autre couleur que la case où elle est située. Quel est le nombre maximum de tours infernales que l'on peut placer sur l'échiquier de telle sorte que deux tours infernales ne puissent jamais s'attaquer entre elles ?

Exercice 3. *(JBMO SL 2024 C1)* Déterminer le plus petit entier strictement positif k vérifiant la propriété suivante : pour tout sous-ensemble S de $\{1, \ldots, 2024\}$ de taille k, il existe deux entiers distincts $a, b \in S$ tels que $ab + 1$ est un carré parfait.

Exercice 4. *(IMO 2018 P4)* Un *site* est un point $(x; y)$ du plan tel que x et y soient des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 20. Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre. Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière de laquelle Bernard place ses pierres bleues.

Exercice 5. *(EGMO 2024 P4)* Soit $a_1 < \ldots < a_n$ une suite strictement croissante d'entiers. Une paire (a_i, a_j) (avec $1 \leqslant i < j \leqslant n$) est dite *intéressante* s'il existe une paire (a_k, a_ℓ) telle que

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Pour tout entier $n \geqslant 3$, déterminer le plus grand nombre de paires intéressantes que peut contenir une suite de longueur n.

Exercice 6. *(BXMO 2025)* Soit $N \geqslant 2$ un nombre naturel. Lors d'un stage d'entrainement aux olympiades mathématiques, les mêmes N cours sont organisés chaque jour. Chaque étudiant suit, chaque jour, exactement un des N cours. À la fin du stage, chaque étudiant a suivi chaque cours exactement une fois et chaque paire d'étudiants a suivi au moins une fois le même cours la même journée, mais a suivi des cours différents pendant au moins un autre jour. Quel est, en fonction de N, le plus grand nombre possible d'étudiants participant au stage ?

Exercice 7. *(IMO 2020 P4)* Soit $n > 1$ un entier. Il y a n^2 stations sur le versant d'une montagne, toutes à des altitudes différentes. Chacune des deux compagnies de téléphériques, A et B, gère k téléphériques ; chaque téléphérique permet de se déplacer d'une des stations vers une station plus élevée (sans arrêt intermédiaire). Les k téléphériques de A ont k points de départ différents et k points d'arrivée différents, et un téléphérique qui a un point de départ plus élevé a aussi un point d'arrivée plus élevé. Les mêmes conditions sont satisfaites pour B. On dit que deux stations sont reliées par une compagnie s'il est possible de partir de la station la plus basse et d'atteindre la plus élevée en utilisant un ou plusieurs téléphériques de cette compagnie (aucun autre mouvement entre les stations n'est autorisé). Déterminer le plus petit entier strictement positif k qui garantisse qu'il existe deux stations reliées par chacune des deux compagnies.

Exercice 8. *(IMO SL 2021 C2)* Soit $n \geqslant 3$ un entier. Un entier $m \geqslant n+1$ est dit $n-$*coloré* si, étant donné une infinité de pierres de chacune des n couleurs $C_1, \ldots, C_n$, il est possible d'en placer m autour d'un cercle de sorte que tout groupe de $n+1$ pierres consécutives contient toujours au moins une pierre de chaque couleur.

Montrer qu'il existe un nombre fini d'entiers $n-$coloré et donner le plus grand d'entre eux.

Exercice 9. *(BXMO 2015)* Une progression arithmétique est un ensemble de la forme $\{a, a+d, \ldots, a+kd\}$ avec $k \geqslant 2$. L'entier d est appelé raison de la suite.

Étant donnée une partition de $\{1, \ldots, 3n\}$ en progression arithmétique (pas forcément de même taille), on note S la somme des raisons des progressions arithmétiques. Quelle est la plus grande valeur que peut prendre S ?