# Problèmes de suites

Les problèmes d'arithmétique faisant intervenir les suites sont le nouveau jouet des créateurs de problèmes. Les arguments à savoir maitriser sont variés, puisqu'ils combinent les réflexes d'hygiène en arithmétique (divisibilité, taille, étude des facteurs premiers) et les réflexes d'étude de suites (variations, comparaison d'un terme à l'autre, introduction de suites auxiliaires). Ces derniers réflexes sont en général un peu plus difficiles car moins enseignés en olympiades. Voici donc quelques conseils.

- ➢ Si une suite fait intervenir des relations de divisibilités (par exemple $a_n \mid b_n$), il est souvent intéressant d'introduire la suite quotient ($c_n = b_n/a_n$) et d'étudier cette suite (peut-être que ses variations sont contrôlées ?). De manière générale, il est conseillé d'introduire des suites auxiliaires de nature arithmétique (valuation $p-$adique, PGCD de termes consécutifs...). On rappelle qu'un bon changement de variable permet de diminuer le nombre de variables dans les hypothèses (toujours chercher à travailler avec peu de termes), une relation reliant $a_n$ et $a_1 + \ldots + a_{n-1}$ est moins facile à manipuler qu'une relation liant $S_n - S_{n-1}$ et $S_{n-1}$).
- ➢ Si on a une relation vraie pour tout $n$, il est intéressant d'étudier cette relation à l'indice $n$ et à l'indice $n+1$. Exemple : si l'énoncé dit que $k \mid a_n + \ldots + a_{n+k}$ pour tout indice $n$, alors on a
$$k \mid a_n + \ldots + a_{n+k} \quad \text{et} \quad k \mid a_{n+1} + \ldots + a_{n+k+1}, \Rightarrow k \mid a_{n+k+1} - a_n.$$
Cette nouvelle divisibilité possède moins de termes donc est plus facile à manipuler.
- ➢ Il est toujours intéressant de voir si une suite d'entiers est bornée. Si elle l'est, alors elle prend une infinité de fois la même valeur, ce qui ouvre la porte à des résultats du type "la suite est périodique/constante à partir d'un certain rang/constante". De tels résultats peuvent s'obtenir à l'aide d'arguments de taille : Si la suite $(a_n)$ est bornée par $M$ et si $p \mid a_n - a_m$ avec $p > 2M$, alors $a_n = a_m$. Bien souvent, obtenir les variations de la suite constitue l'entrée du problème, et rapporte des points partiels. Rappelons enfin qu'une suite strictement décroissante d'entiers strictement positifs est constante à partir d'un certain rang.
- ➢ Si un problème de suite fait intervenir la variable $n$ et la suite $a_n$ en même temps (par exemple un terme de la forme $\text{PGCD}(n, a_n)$), il est intéressant de chercher des valeurs particulières de $n$ : $n$ un nombre premier ou une puissance de nombres premiers par exemple.
- ➢ Si la suite est définie par un système dynamique, (par exemple une relation de récurrence avec éventuellement une disjonction de cas, voire enoncé de l'exo 2). Il peut être intéressant de *renverser* la relation et partir de la fin, ou encore de considérer une suite d'indices pour lesquels les termes rentrent tous dans le même cas (pour par exemple se rendre compte qu'une telle suite ne peut pas être arbitrairement grande)...
- ➢ Le conseil le plus naturel : tester des conjectures sur des petits cas puis les montrer par récurrence.

**On vous invite à compléter les exercices de ce TD avec le TD de suites donné par Erik et Eva au groupe D du stage de Valbonne 2025, dont la sélection des exercices est très pertinent.**

*Exercice 1.* *(All Russia 2018)* Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers et $p_1, p_2, \ldots$ une suite de nombres premiers distincts telle que $p_n \mid a_n$ pour tout indice $n \geqslant 1$. On suppose que pour toute paire $(n, k)$ d'indices, $a_n - a_k = p_n - p_k$. Montrer que la suite $(a_n)$ est constituée exclusivement de nombres premiers.

*Exercice 2.* *(Belarus Iran 2022)* Existe-t-il une suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs telle que pour tous indices $i$ et $j$,

$$d(a_i + a_j) = i + j,$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de $n$.

*Exercice 3.* *(Iran 2017 Round 2)*

1. Montrer qu'il n'existe pas de suites $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs telles que pour toute pair $(i, j)$ d'indices distincts, $\mathrm{PGCD}(a_i + j, a_j + i) = 1$.
2. Soit $p$ un nombre premier impair. Montrer qu'il existe une suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs telle que pour toute pair $(i, j)$ d'indices distincts, $\mathrm{PGCD}(a_i + j, a_j + i)$ n'est pas divisible par $p$.

*Exercice 4.* *(Taiwan IMOC 2021 N3)* Pour tout entier $x \geqslant 2$, on note $f(x)$ son plus grand facteur premier. Soient $M$ et $k$ des entiers strictement positifs. Une suite $(a_n)$ d'entiers strictement positifs est définie par $a_1 = M > 1$ et

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - f(a_n) & \text{si } a_n \text{ est composé} \\ a_n + k & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la suite $(a_n)$ est bornée.

*Exercice 5.* *(IMO 2018 P5)* Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier $N > 1$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, le nombre

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

est un entier. Montrer qu'il existe un entier $M$ tel que $a_m = a_{m+1}$ pour tout entier $m \geqslant M$.

*Exercice 6.* *(China TST 2016)* Soit $c, d \geqslant 2$ des entiers naturels. Soit $(a_n)$ la suite définie par $a_1 = c$ et $a_{n+1} = a_n^d + c$. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un nombre premier $p$ tel que $p \mid a_n$ et $p$ ne divise aucun des $a_i$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.

*Exercice 7.* *(Dutch BXMO TST 2019)* Existe-t-il un entier $k \geqslant 1$ et une suite non constante $a_1, a_2, \ldots$ telle que $a_n = \mathrm{PGCD}(a_{n+k}, a_{n+k+1})$ pour tout indice $n \geqslant 1$.