Martin Rakovsky

Problèmes de suites

Les problèmes d'arithmétique faisant intervenir les suites sont le nouveau jouet des créateurs de problèmes. Les arguments à savoir maitriser sont variés, puisqu'ils combinent les réflexes d'hygiène en arithmétique (divisibilité, taille, étude des facteurs premiers) et les réflexes d'étude de suites (variations, comparaison d'un terme à l'autre, introduction de suites auxiliaires). Ces derniers réflexes sont en général un peu plus difficiles car moins enseignés en olympiades. Voici donc quelques conseils.

- Si une suite fait intervenir des relations de divisibilités (par exemple $a_n \mid b_n$), il est souvent intéressant d'introduire la suite quotient ($c_n = b_n/a_n$) et d'étudier cette suite (peut-être que ses variations sont contrôlées ?). De manière générale, il est conseillé d'introduire des suites auxiliaires de nature arithmétique (valuation $p-$adique, PGCD de termes consécutifs...). On rappelle qu'un bon changement de variable permet de diminuer le nombre de variables dans les hypothèses (toujours chercher à travailler avec peu de termes), une relation reliant a_n et $a_1 + \ldots + a_{n-1}$ est moins facile à manipuler qu'une relation liant $S_n - S_{n-1}$ et S_{n-1}).
- Si on a une relation vraie pour tout n, il est intéressant d'étudier cette relation à l'indice n et à l'indice $n+1$. Exemple : si l'énoncé dit que $k \mid a_n + \ldots + a_{n+k}$ pour tout indice n, alors on a

$$k \mid a_n + \ldots + a_{n+k} \quad \text{et} \quad k \mid a_{n+1} + \ldots + a_{n+k+1}, \Rightarrow k \mid a_{n+k+1} - a_n.$$

  Cette nouvelle divisibilité possède moins de termes donc est plus facile à manipuler.
- Il est toujours intéressant de voir si une suite d'entiers est bornée. Si elle l'est, alors elle prend une infinité de fois la même valeur, ce qui ouvre la porte à des résultats du type "la suite est périodique/constante à partir d'un certain rang/constante". De tels résultats peuvent s'obtenir à l'aide d'arguments de taille : Si la suite (a_n) est bornée par M et si $p \mid a_n - a_m$ avec $p > 2M$, alors $a_n = a_m$. Bien souvent, obtenir les variations de la suite constitue l'entrée du problème, et rapporte des points partiels. Rappelons enfin qu'une suite strictement décroissante d'entiers strictement positifs est constante à partir d'un certain rang.
- Si un problème de suite fait intervenir la variable n et la suite a_n en même temps (par exemple un terme de la forme $\mathrm{PGCD}(n, a_n)$), il est intéressant de chercher des valeurs particulières de n : n un nombre premier ou une puissance de nombres premiers par exemple.
- Si la suite est définie par un système dynamique, (par exemple une relation de récurrence avec éventuellement une disjonction de cas, voire enoncé de l'exo 2). Il peut être intéressant de *renverser* la relation et partir de la fin, ou encore de considérer une suite d'indices pour lesquels les termes rentrent tous dans le même cas (pour par exemple se rendre compte qu'une telle suite ne peut pas être arbitrairement grande)...
- Le conseil le plus naturel : tester des conjectures sur des petits cas puis les montrer par récurrence.

On vous invite à compléter les exercices de ce TD avec le TD de suites donné par Erik et Eva au groupe D du stage de Valbonne 2025, dont la sélection des exercices est très pertinent.

Exercice 1. *(All Russia 2018)* Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers et $p_1, p_2, \ldots$ une suite de nombres premiers distincts telle que $p_n \mid a_n$ pour tout indice $n \geqslant 1$. On suppose que pour toute paire (n, k) d'indices, $a_n - a_k = p_n - p_k$. Montrer que la suite (a_n) est constituée exclusivement de nombres premiers.

Solution 1. Notons b_n l'entier tel que $a_n = p_n b_n$. On a donc

$$p_n - p_k = b_n p_n - b_k p_k \iff p_k(b_k - 1) = p_n(b_n - 1)$$

pour tous indices k et n. On fixe à présent un indice n. Pour tout $k \neq n$, $p_k \neq p_n$ donc $p_k \mid b_n - 1$ (car les p_k sont deux à deux distincts). On déduit que $b_n - 1$ est divisible par une infinité de nombres premiers, ce qui implique que $b_n = 1$. On a donc $a_n = p_n$, ce qui implique le résultat voulu.

Exercice 2. *(Belarus Iran 2022)* Existe-t-il une suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs telle que pour tous indices i et j,

$$d(a_i + a_j) = i + j,$$

où $d(n)$ est le nombre de diviseurs positifs de n.

Solution 2. Puisque $d(2a_i) = 2i$, la suite (a_i) est non bornée. D'autre part, puisque $a_{2i} + a_1$ et $a_{2i} + a_3$ ont un nombre impair de diviseurs, ce sont des carrés parfaits. Or, leur différence $a_3 - a_1$ est bornée, donc ces carrés parfaits sont eux-même bornés. Il résulte que (a_{2i}) est bornée, ce qui est absurde.

Exercice 3. *(Iran 2017 Round 2)*

1. Montrer qu'il n'existe pas de suites $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs telles que pour toute pair (i, j) d'indices distincts, $\mathrm{PGCD}(a_i + j, a_j + i) = 1$.
2. Soit p un nombre premier impair. Montrer qu'il existe une suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs telle que pour toute pair (i, j) d'indices distincts, $\mathrm{PGCD}(a_i + j, a_j + i)$ n'est pas divisible par p.

Solution 3.

1. Montrons qu'il existe un couple (i, j) tel que $a_i + j$ et $a_j + i$ sont pairs. En effet, si ce n'est pas le cas, alors $(a_i + j) + (a_j + i)$ est toujours impair. Comme ce nombre vaut $(a_i + i) + (a_j + j)$, cela veut dire que $a_i + i$ et $a_j + j$ ne sont jamais de même parité, ce qui est absurde en appliquant le principe des tiroirs à trois indices i, j et k.
2. La question précédente nous incite à construire une suite satisfaisant la condition plus forte que $(a_i + i) + (a_j + j)$ n'est jamais divisible par p. Pour cela, il suffit de choisir $a_i \equiv 1 - i \mod p$ (ce qui est le cas par exemple en posant $a_i = pi + 1 - i$. On a alors $(a_i + i) + (a_j + j) \equiv 2 \mod p$, donc p ne peut pas diviser à la fois $a_i + j$ et $a_j + i$.

Exercice 4. *(Taiwan IMOC 2021 N3)* Pour tout entier $x \geqslant 2$, on note $f(x)$ son plus grand facteur premier. Soient M et k des entiers strictement positifs. Une suite (a_n) d'entiers strictement positifs est définie par $a_1 = M > 1$ et

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - f(a_n) & \text{si } a_n \text{ est composé} \\ a_n + k & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que la suite (a_n) est bornée.

Solution 4. D'après la définition, si a_n est composé alors $a_{n+1} < a_n$ et si a_n est premier, $a_{n+1} = a_n + k$. Donc pour que la suite prenne de grandes valeurs, elle doit contenir beaucoup de termes consécutifs qui sont des nombres premiers, et qui forment alors une sous-suite arithmétique de raison k. Donc la suite (a_n) ne peut pas traverser un intervalle de longueur $k+1$ ne contenant que des nombres composés. Or, il est classique qu'il existe des intervalles d'entiers arbitrairement grands qui ne contiennent pas de nombres premiers, et si la suite ne peut pas traverser ces intervalles, elle sera bornée. C'est ce que l'on formalise ci-après.

Considérons l'intervalle $[\![(M+k)!+2, (M+k)!+k+2]\!]$. Les entiers de cet intervalle sont de la forme $(M+k)!+\ell$, qui est divisible par ℓ sans lui être égal. Donc cet intervalle contient k nombres composés. Supposons par l'absurde que la suite (a_n) soit non bornée et qu'il existe donc un indice $n \geqslant 1$, choisi minimal, tel que $a_n \geqslant (M+k)!+k+2$. Par minimalité de n, $a_{n-1} < a_n$ donc non seulement a_{n-1} est premier mais en plus il vérifie $a_{n-1} < (M+k)!+k+3$. On a donc $a_{n-1} = a_n - k \geqslant (M+k)!+2$. Il vient que $a_{n-1} \in [\![(M+k)!+2, (M+k)!+k+2]\!]$, ce qui est absurde car il est premier. La suite (a_n) prend donc toujours des valeurs inférieures à $(M+k)!+k+2$, ce qui conclut.

Solution alternative

La difficulté est qu'on ne sait pas comment caractériser la borne attendue, et un raisonnement par l'absurde en extraillant une sous-suite infinie n'a pas l'air de produire d'effet tel quel.

Començons par examiner les changements d'état du système. Par exemple, cherchons les conditions sur ℓ tel qu'il existe n tel que $a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+\ell}$ sont premiers (ce qui implique notamment que $a_{n+r} = a_n + kr$ pour tout $k \leqslant \ell$). C'est pertinent dans la mesure où, si la suite est bornée, un tel ℓ est nécessairement petit. Remarquons que si p est un nombre premier avec k, k est inversible donc les entiers $a_n + kr$ avec r qui varie sont deux à deux distincts modulo p. En particulier, si $\ell \geqslant p+1$, l'un de ces termes est nul modulo p, donc égal à p (car premier par hypothèse). Ainsi, si ℓ est grand, a_n doit être petit.

On est prêt à formaliser un tel raisonnement. Supposons que la suite est non bornée et choisissons un entier A, supposé grand, dont la taille exacte sera précisée plus tard (voir lignes violettes qui donnent les conditions). Comme la suite (a_n) est non bornée, il existe un indice n, que l'on prend minimal, tel que $a_n \geqslant A$. Par minimalité de n, $a_{n-1} < A \leqslant a_n$, donc a_{n-1} est premier.

Soit p le plus petit nombre premier ne divisant pas k. **On montre désormais que** $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-p}$ **sont premiers**, en procédant par récurrence décroissante sur l'indice de la suite. On a déjà que a_{n-1} est premier.

Supposons que $a_{n-1}, \ldots, a_{n-r}$ sont premiers avec $p-1 \geqslant r \geqslant 1$. Alors $a_n = a_{n-r} + kr$, donc $a_{n-r} \geqslant A - kr$. Si a_{n-r-1} est composé, $a_{n-r-1} = a_{n-r} + f(a_{n-r-1})$. De cette relation, on déduit $f(a_{n-r-1}) \mid a_{n-r}$, ce qui force $a_{n-r} = f(a_{n-r-1})$ (car a_{n-r} est premier). Mais alors $a_{n-r-1} = 2a_{n-r} \geqslant 2(A-kr)$. En choisissant A assez grand, par exemple A tel que $2(A-kp) \geqslant A$ (ce qui revient à choisir $A \geqslant 2kp$), on obtient que $2(A-kr) \geqslant A$. Cela contredit la minimalité de n. on déduit que a_{n-r-1} est également premier, ce qui achève la récurrence.

Cela implique que $a_{n-1}, \ldots, a_{n-p}$ sont tous premiers et deux à deux distincts modulo p, sont tous premiers. L'un d'entre eux, disons a_{n-i} étant nul modulo p, il vaut p. Mais alors $a_n = a_{n-i} + ik = p + ik$. En choisissant A suffisamment grand, par exemple A tel que $A > p + pk$, on obtient une contradiction car $a_n = p + ik \leqslant p + pk < A$. D'où la contradiction espérée.

Exercice 5. *(IMO 2018 P5)* Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. On suppose qu'il existe un entier $N > 1$ tel que, pour tout entier $n \geqslant N$, le nombre

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

est un entier. Montrer qu'il existe un entier M tel que $a_m = a_{m+1}$ pour tout entier $m \geqslant M$.

Solution 5. **Premier réflexe :** Notons brièvement S_n la somme considérée. On examine l'hypothèse de l'énoncé aux indices n et $n+1$. Cela donne que le nombre $S_{n+1} - S_n = \dfrac{a_{n+1} - a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_{n+1}}$ est entier. C'est avec cette hypothèse, à savoir que $\boxed{a_{n+1}a_1 \mid a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + a_1 a_n}$ pour tout $n \geqslant N$, que nous allons travailler par la suite.

Cette hypothèse implique notamment que $a_{n+1} \mid a_1 a_n$, ce qui implique que l'ensemble des facteurs premiers divisant les termes de la suite (a_n) est fini.

Soit p un nombre premier. La relation de divisibilité implique

$$v_p(a_1) + v_p(a_{n+1}) \leqslant v_p(a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + a_1 a_n).$$

C'est en voulant expliciter le terme de droite en fonction de $v_p(a_1), v_p(a_n)$ et $v_p(a_{n+1})$ que l'on aboutit à la disjonction de cas qui suit, et dans laquelle on pose $\alpha_n = v_p(a_n)$ et $\alpha = \alpha_1$.

- **Si $\alpha_n \geqslant \alpha$, alors $\alpha \leqslant \alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$.** Supposons d'abord que $\alpha_{n+1} < \alpha \leqslant \alpha_n$. Alors $v_p(a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + a_1 a_n) = 2\alpha_{n+1} < \alpha + \alpha_{n+1}$, ce qui est absurde. D'autre part, si $\alpha \leqslant \alpha_n < \alpha_{n+1}$, alors $v_p(a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + a_1 a_n) = \alpha + \alpha_n < \alpha + \alpha_{n+1}$, également en contradiction avec la relation ci-dessus.

  Par récurrence immédiate, la suite (α_k) est alors minorée et décroissante, donc, à partir d'un certain rang N_p, elle est constante.

- **Si $\alpha_n < \alpha$, alors $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n$.** En effet, si on avait $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, alors $v_p(a_{n+1}(a_{n+1} - a_n) + a_1 a_n) = 2\alpha_{n+1} < \alpha + \alpha_{n+1}$, ce qui est en contradiction avec la relation de divisibilité.

  Ainsi, si aucun indice n ne vérifie $\alpha_n \geqslant \alpha$, ce qu'on est en droit de supposer au vu du premier cas, la suite (α_k) est croissante et majorée par α, donc, à partir d'un certain rang N_p, elle est constante.

Vu que l'ensemble $\mathcal{P}$ des facteurs premiers divisant un terme de la suite est fini, on peut prendre $M = \max\{N_p, p \in \mathcal{P}\}$. A partir de ce rang M, les suites $v_p(a_n)$ sont toutes constantes, ce qui veut dire que (a_n) elle-même est constante.

Exercice 6. *(China TST 2016)* Soit $c, d \geqslant 2$ des entiers naturels. Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = c$ et $a_{n+1} = a_n^d + c$. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, il existe un nombre premier p tel que $p \mid a_n$ et p ne divise aucun des a_i pour $i = 1, \ldots, n-1$.

Solution 6. On commence par examiner les propriétés de la suite. En posant $P(X) = X^d + c$, cette suite satisfait $a_1 = P(0)$ et $a_{n+1} = P(a_n) = P^{(n)}(0)$, où la notation $P^{(n)}$ désigne la $n-$ème itérée de P. Ainsi, puisque P est à coefficients entier, l'itération de la relation $x - y \mid P(x) - P(y)$ donne que pour tout n,

$$a_n = a_n - 0 \mid P^{(\ell)}(a_n) - P^{(\ell)}(0) = a_{n+\ell} - a_\ell.$$

En particulier, si d divise a_n et a_m, puisqu'on a $a_{n-m} \equiv a_n \mod a_m$ donc d divise a_{n-m}. Mais on a aussi que si $d \mid a_m$ et a_{n-m}, alors puisqu'on a $a_n \equiv a_{n-m} \mod a_m$, on a déduit que $d \mid a_n$. On déduit que $\boxed{\mathrm{PGCD}(a_n, a_m) = \mathrm{PGCD}(a_n, a_{n-m})}$. Cette relation est suffisante pour enclencher l'algorithme d'Euclide, qui implique que $\mathrm{PGCD}(a_n, a_m) = \mathrm{PGCD}(a_{\mathrm{PGCD}(n,m)}, a_0) = a_{\mathrm{PGCD}(n,m)}$, avec la convention que $a_0 = 0$.

On n'a pas encore utilisé la forme particulière de P. On a la divisibilité raffinée suivante :

$$a_n^d = P(a_n) - c = P(a_n) - P(0) \mid P^{(\ell)}(a_n) - P^{(\ell)}(0) = a_{n+\ell} - a_\ell.$$

On va conclure avec cette relation. Supposons par l'absurde que a_n ne possède aucun facteur premier ne divisant pas $a_1 \dots a_{n-1}$. Soit p un facteur premier quelconque de a_n. On dispose d'un indice j, qu'on suppose minimal, tel que $p \mid a_j$. Au vu de la minimalité de j et de la relation $\mathrm{PGCD}(a_j, a_n) = a_{\mathrm{PGCD}(n,j)}$, on déduit que $j \mid n$. On a alors, du fait de la relation précédente, $a_n \equiv a_j \mod a_j^d$ et en particulier, $a_n \equiv a_j \mod p^{dv_p(a_j)}$. On déduit que $v_p(a_n) = v_p(a_j)$.
Comme $v_p(a_n) \in \{v_p(a_{n-1}), v_p(a_{n-2}), \dots, v_p(a_1)\}$ pour tout p, on déduit que $a_n < a_1 \dots a_{n-1}$. Mais une récurrence immédiate prouve l'inégalité contraire, ce qui prouve que a_n admet au moins un nombre premier qui ne divise aucun des termes précédents de la suite.

Exercice 7. *(Dutch BXMO TST 2019)* Existe-t-il un entier $k \geqslant 1$ et une suite non constante $a_1, a_2, \dots$ telle que $a_n = \mathrm{PGCD}(a_{n+k}, a_{n+k+1})$ pour tout indice $n \geqslant 1$.

Solution 7. Pour comprendre l'exercice, il est essentiel de comprendre les cas $k = 2$ et $k = 3$. Ces cas mettent en lumière la stratégie à adopter : on va montrer que $a_n \mid a_{n+1}$ pour tout n. Cela implique d'abord que la suite est croissante, mais aussi que $a_n = \mathrm{PGCD}(a_{n+k}, a_{n+k+1}) = a_{n+k}$, donc la suite est croissante et périodique, elle est donc constante.

Puisque $a_n \mid a_{n+k}$ et $a_n \mid a_{n+k+1}$ pour tout indice n, on a par récurrence que $\boxed{a_n \mid a_{n+ak+b(k+1)}}$ pour toute paire d'entiers positifs (a, b). Pour montrer que $a_n \mid a_{n+1}$, il suffit de montrer que a_n divise a_{n+k+1} et a_{n+k+2}. La première divisibilité vient de la relation de l'énoncé, on montre désormais la deuxième divisibilité. On a $a_n \mid a_{n+k^2}$ et $a_n \mid a_{n+(k-1)(k+1)}$, donc $a_n \mid \mathrm{PGCD}(a_{n+k^2}, a_{n+k^2-1}) = a_{n+k^2-k-1}$. On montre alors par récurrence descendante sur r que $a_n \mid a_{n+k+2+(k+1)r}$. C'est déjà le cas pour $r = k-2$. On suppose que c'est le cas pour un certain $r \leqslant k-2$. On a donc $a_n \mid a_{n+k+2+(k+1)r}$ et $a_n \mid a_{n+(k+1)(r+1)}$, donc $a_n \mid \mathrm{PGCD}(a_{n+(k+1)(r+1)}, a_{n+k+2+(k+1)r}) = a_{n+(k+1)r-k} = a_{n+k+2+(k+1)(r-1)}$. Ceci achève la récurrence. En particulier, pour $r = 0$, on trouve $a_n \mid a_{n+k+2}$, donc $a_n \mid a_{n+1}$, ce qui nous permet de conclure.