Arithmétique groupe B : Révisions

Définitions

La **factorielle** d'un nombre entier $n \geqslant 0$, notée $n!$ est le produit des nombres entiers qui lui sont inférieurs : $n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Si $k \leqslant n$, le **coefficient binomial** "k parmi n" est : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$.

Exercices

Exercice 1
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n^2 + n$ est divisible par 2.

Exercice 2
Trouver les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $13^n - 11^n$ est premier.

Exercice 3

$a)$ Trouver tous les nombres premiers p tels que $p + 1$ est aussi premier.

$b)$ Trouver tous les nombres premiers p tels que $p + 2$ et $p + 4$ sont aussi premiers.

Exercice 4

— Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que 6 divise $n^3 - n$.

— Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5. Montrer que 24 divise $p^2 - 1$.

Exercice 5
193116 est il divisible par 3 ? par 9 ? par 11 ? par 33 ? par 99 ?

Exercice 6
Soit n un entier naturel et A un ensemble de $n+1$ entiers. Montrer qu'il existe a, b appartenant à A tels que $n \mid a - b$.

Exercice 7
Prouver qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 8
Pour tout entier $n > 1$, trouver n entiers consécutifs non premiers.

Exercice 9
Soit $a > 1$ et $b > 2$ tels que $a^b - 1$ est premier. Montrer que $a = 2$ et que b est premier.

Exercice 10
Soit $a \geqslant 2$, $m > n > 1$.

$a)$ Montrer que $\operatorname{pgcd}(a^m - 1, a^n - 1) = \operatorname{pgcd}(a^{m-n} - 1, a^n - 1)$.

$b)$ Montrer que $\operatorname{pgcd}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\operatorname{pgcd}(m,n)} - 1$.

$c)$ Montrer que $a^n - 1 \mid a^m - 1 \iff n \mid m$.

Exercice 11
Montrer que la somme de cinq carrés d'entiers consécutifs n'est jamais un carré parfait.

Exercice 12
On note $P(n)$ le produit des diviseurs de n et $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. Montrer que $P(n) = n^{d(n)/2}$.

Exercice 13
Soit $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$. Montrer que le nombre de diviseurs de n est

$$\prod_{i=1}^{r} (\alpha_i + 1).$$

Exercice 14
Soit p premier et $k \in \{1, ..., p-1\}$. Montrer que $\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}$ est divisible par p.

Exercice 15 (Énigme)
Gargamel a capturé N Schtroumpfs pour faire une bonne soupe et leur propose un jeu le temps que l'eau chauffe : il fait apparaître sur le chapeau de chacun un entier, compris entre 1 et N, un même nombre pouvant apparaître plusieurs fois (ou jamais). Les Schtroumpfs peuvent alors se regarder mais pas communiquer entre eux. Gargamel les interroge ensuite un par un (ils ne peuvent pas entendre les réponses des autres) en leur demandant un nombre entre 1 et N. Si au moins l'un des Schtroumpfs lui donne exactement le nombre écrit sur son bonnet, ils sont tous libérés (sinon, la soupe). Ayant expliqué les règles, Gargamel s'en va quelques minutes pour aller nourrir son chat. Le Grand Schtroumpf en profite pour glisser à tous une stratégie pour éviter la soupe à coup sûr. Quelle peut être cette stratégie ?

Exercice 16
Soient a et b des entiers premiers entre eux. Montrer que ab et $a+b$ sont premiers entre eux.

Exercice 17
Prouver que pour deux entiers distincts strictement positifs a et b, on a

$$\operatorname{ppcm}(a, b) + \operatorname{ppcm}(a+1, b+1) > \frac{2ab}{\sqrt{|a-b|}}.$$

Exercice 18
Calculer le nombre de 0 à la fin de l'écriture décimale de l'entier $2026!$.