1 Tiroirs

Exercice 1
Combien d'enfants faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (on considère aussi le 29 février)

Exercice 2
On considère un groupe de n personnes ($n > 1$), dans lequel certaines personnes se serrent la main.

Prouver qu'il existe au moins deux personnes ayant donné le même nombre de poignées de main.

Exercice 3
Soient a, b, c trois entiers. Montrer que $(a - b)(b - c)(c - a)$ est pair.

Exercice 4
On colorie le plan de deux couleurs différentes, montrer qu'il existe deux points de la même couleur à un mètre de distance.

Exercice 5
On considère 5 points dans un carré de côté 2, montrer qu'il y en a deux qui sont à distance au plus $\sqrt{2}$ l'un de l'autre.

Exercice 6
Soient $a_1, \dots a_n$ des entiers relatifs pas forcément distincts, montrer qu'il existe $0 \leqslant k < l \leqslant n$ tels que la somme $a_{k+1} + \dots a_l$ soit divisible par n.

Exercice 7
On place 4 points sur un cercle. Montrer qu'il existe un demi-cercle qui contient 3 de ces 4 points.

Exercice 8
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, 20\}$ pour être sûr que parmi ceux-ci on ait deux entiers a et b tels que $a - b = 2$?

Exercice 9
Sur un tableau sont écrits 20 nombres distincts entre 1 et 64. Sur un autre tableau sont écrites toutes les différences qu'on puisse calculer avec ces nombres. Montrer qu'un nombre est écrit quatre fois sur ce deuxième tableau.

Exercice 10
On choisit dix entiers quelconques à 2 chiffres. Montrer que parmi eux, on peut trouver deux sous-ensembles disjoints de même somme.

Exercice 11
On considère S une partie de l'ensemble des parties de $\{1, 2, \dots n\}$, telle que deux éléments de S ne soient jamais disjoints.

Montrer que S est de cardinal au plus 2^{n-1}.

Montrer que cette borne peut être atteinte.

Dénombrement

Exercice 12
Calculer
$$\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\cdots+\binom{r}{n}=\binom{r+1}{n+1}.$$
Indice : Dessiner le triangle de Pascal.

Exercice 13
Combien y a-t-il d'anagrammes de DENOMBREMENT ? Et de DÉNOMBREMENT ?

Exercice 14
Montrer de manière combinatoire les formules
$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k},\quad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n \text{ et } \quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Exercice 15
Parmi les entiers plus petits que 10000, combien sont ni multiples de 3, ni de 5, ni de 7 ?

Exercice 16
Une fourmi se déplace dans le plan, elle peut se déplacer d'exactement d'une case vers le haut ou vers la droite à chaque étape. Elle est initialement sur la case $(0,0)$ et veut se rendre sur la case (n,m). Combien y a-t-il de chemins possibles ?

Exercice 17
Soient n,k des entiers strictement positifs. Trouver le nombre de solutions de
$$a_1+\cdots+a_k=n,$$
où $a_1,\ldots,a_k$ sont des entiers strictement positifs. Et si les a_i sont seulement supposés être des entiers positifs ?

Invariants

Exercice 18
Les nombres $2,3,5,7,11$ sont écrits sur un tableau. Un mouvement consiste à remplacer deux nombres a et b **de même parité** par $(a+b)/2$ et $(b+a)/2$.

Est-il possible de suivre ce processus pour rendre tous les nombres du tableau égaux ?

Exercice 19
Peut-on répartir les nombres $1,\ldots,33$ en 11 groupes de 3 tels que dans chaque groupe, l'un des nombres est la somme des deux autres ?

Exercice 20
On écrit sur le tableau les entiers de 1 à 2011. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à

la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de 1. Le dernier entier obtenu à la deux mille dixième étape peut-il être égal à 1 ?

Exercice 21
Théo et Martin sont sur le plan, chaque minute ils se déplacent d'une unité verticalement ou horizontalement. Initialement, Martin est en $(123, 456)$, et Théo est en $(111, 111)$. Est-il possible que Martin et Théo soient sur la même case à un moment ?

Exercice 22
On dispose d'une pile de 100 pièces. De là, il est possible d'effectuer deux types d'opérations :
— Enlever une pièce d'un tas d'au moins 3 pièces et diviser le tas restant en deux tas (non vides),
— Supprimer un tas d'une seule pièce.

Est-il possible après une succession de telles opérations d'arriver à la situation où l'on n'a plus aucune pièce ?

Exercice 23
6 arbres se trouvent aux 6 sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre ?

Exercices de coloriage

Exercice 24
Le jeux du taquin est formé de 15 carrés qui se déplacent dans un rectangle 4×4. On commence le jeu avec les 15 carrés dans un ordre quelconque et la case vide en bas à droite. Le but est de trier les 15 cases, en laissant la case vide de nouveaux en bas à droite. Montrer qu'il est impossible d'y arriver en exactement 2023 mouvements.

Exercice 25
Le plancher est pavé avec des dalles de type 2×2 et 1×4. Une dalle s'est brisée. Est-il possible de réarranger les dalles de façon à remplacer la dalle brisée avec une nouvelle dalle de l'autre type ?

Exercice 26
Pour quelles valeurs de n est-il possible de paver un carré $n \times n$ avec des pièces en forme de T ?

Exercice 27
Soit k un entier. Pour quelles valeurs de m, n est-il possible de paver un rectangle de taille $n \times m$ par des rectangles $1 \times k$?

Exercice 28
Alice et Bob posent des jetons sur un damier infini, blanc pour Alice et noir pour Bob. L'un des joueurs gagne s'il parvient à placer 5 jetons adjacents sur une ligne ou colonne. Alice commence à jouer. L'un des joueurs dispose-t-il d'une stratégie gagnante ?