TD Petites shortlists

Exercice 1
Un couple d'entiers (m, n) est dit *cool* si $1 < m < n$, m a les mêmes diviseurs premiers que n et $m + 1$ a les mêmes diviseurs premiers que $n + 1$.

a) Trouver trois couples cools avec $m \leqslant 14$.

b) Montrer qu'il y a une infinité de couples cools.

Exercice 2
Soient $b, n > 1$ des entiers tels que pour tout entier $k > 0$, il existe un entier a_k tel que $k \mid a_k^n - b$. Montrer qu'il existe un entier A tel que $b = A^n$.

Exercice 3
On dit qu'un nombre n est *équilibré* s'il est le produit d'un nombre pair de nombres premiers (non nécessairement distincts).

Pour des nombres a, b fixés on considère le polynôme $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Montrer qu'il existe deux entiers a, b tels que $P(1), \ldots, P(50)$ sont tous équilibrés.

b) Montrer que si $P(n)$ est équilibré pour tout n alors $a = b$.

Exercice 4
Pour un entier k on note $S(k)$ la somme des chiffres de k (en base 10). Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(n)$ est positif pour $n \geqslant 2026$ et

$$P(S(n)) = S(P(n))$$

pour tout $n \geqslant 2026$.

Exercice 5
Soit $f : \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}^*$ une fonction non constante telle que $a - b \mid f(a) - f(b)$ pour tous $a, b > 0$.

Montrer que f admet une infinité de diviseurs premiers.