PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ALGÈBRE
À TÉLÉVERSER AU PLUS TARD LE 27 DÉCEMBRE 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe senior est constitué des élèves nés en 2010 ou avant, ou étant en terminale. Les autres élèves sont dans le groupe junior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geqslant 3 - xy$.

Exercice 2. Soit $a, b, c \geqslant 3$ des réels. Montrer que $abc \geqslant 3(a+b+c)$.

Exercice 3. Soit x, y, z des réels strictement positifs. Trouver la valeur minimale que peut prendre l'expression

$$M = \frac{x^2}{(x+z)(x+y)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+y)(z+x)}.$$

Exercice 4. Soit x et y deux entiers strictement positifs tels que

$$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2.$$

Montrer que x est le carré d'un entier.

Exercice 5. Soit a, b, c des réels strictement positifs distincts tels que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Montrer que

$$\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} + \frac{b^2-c^2}{b^3-c^3} + \frac{c^2-a^2}{c^3-a^3} < 2.$$

Exercice 6. Soit a, b, c des réels tels que :

$$a+b+c = 2,$$

$$a^2+b^2+c^2 = 2.$$

Peut-on avoir à la fois $|a-b| < 1, |b-c| < 1$ et $|c-a| < 1$?

Exercice 7. Soit S un ensemble de n réels positifs distincts. Montrer qu'il existe $x, y \in S$ tels que

$$\frac{xy+2y+1}{y-x} > n.$$

Exercice 8. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Soit $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, et $p = a_1 a_2 \cdots a_n$. Montrer que

$$2^n \cdot \sqrt{p} \leqslant 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}.$$

Exercice 9. Soit $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ des réels strictement positifs tels que l'on ait les deux égalités

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 4n,$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = n.$$

Montrer que $\frac{x_n}{x_1} \geqslant 7 + 4\sqrt{3}$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit $a, b, c \geqslant 3$ des réels. Montrer que $abc \geqslant 3(a+b+c)$.

Exercice 11. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de réels définie par $a_0 = 1$, $a_1 = a \geqslant 1$, et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1}(a_{n+1} - 1) - a_n(a_n - 2).$$

Montrer que $a_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 12. Soit $0 < a < b < c < d$ quatre réels tels que $ad \geqslant bc$. Montrer que $a + d \geqslant b + c$.

Exercice 13. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xf(y) - y^2) = (y+1)f(x-y).$$

Exercice 14. Rémi choisit une suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs. Il définit ensuite la suite $b_1, b_2, \ldots$ de réels par, pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Il remarque alors que parmi un million de termes consécutifs de la suite (b_n), il en existe toujours au moins un qui est entier.
Montrer que l'un des termes de la suite (b_n) est supérieur ou égal à 2025^{2025}.

Exercice 15. Glustave écrit 2025 polynômes unitaires de degré 2025 au tableau. Tous ces polynômes sont à coefficients réels positifs. A chaque minute, il choisit deux polynômes f et g écrits au tableau, et les remplace par deux polynômes unitaires f_1 et g_1, tous deux de degré 2025, tels que $f_1 + g_1 = f + g$ ou $f_1 g_1 = fg$.
Est-il possible qu'au bout d'un certain temps, chacun des polynômes écrits ait 2025 racines réelles strictement positives ?

Exercice 16. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y > 0$,

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$

Exercice 17. Soit n un entier strictement positif. Trouver la plus grande constante M telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n - 1$,

$$\sum_{i=0}^{n} (i^n - P(i))^2 \geqslant M.$$

Exercice 18. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite strictement croissante de réels positifs et inférieurs ou égaux à 1. Montrer qu'il existe un réel apparaissant exactement une fois dans la suite

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots$$

Solutions Juniors

Solution de l'exercice 1

Cette inégalité est équivalente à $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy \geqslant 3$. Or, par IAG,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+xy \geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}\cdot xy}=3,$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

Essayons de comparer abc à chacun des trois termes séparément.

Pour comparer abc à $3a$, on souhaite se débarasser du b et du c dans le produit. Pour cela, on peut simplement les minorer tous les deux par 3 :

$$abc \geqslant a \cdot 3 \cdot 3 = 9a.$$

De même, on obtient

$$abc \geqslant 9b$$

et

$$abc \geqslant 9c.$$

Il ne reste plus qu'à additionner ces trois expressions :

$$abc + abc + abc \geqslant 9a + 9b + 9c$$

On obtient alors l'inégalité voulue en divisant par 3.

Solution alternative de l'exercice 2

Supposons sans perte de généralité que a soit le plus grand des trois nombres. En minorant b et c par 3 dans le membre de gauche, on obtient :

$$abc \geqslant 9a = 3a + 3a + 3a \geqslant 3(a + b + c),$$

puisque l'on a supposé que $a \geqslant b$ et $a \geqslant c$.

Solution de l'exercice 3
On applique l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{x^2}{(x+z)(x+y)}+\frac{y^2}{(y+x)(y+z)}+\frac{z^2}{(z+y)(z+x)} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}$$
$$= \frac{x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)}{x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)}.$$

Si $x=y=z$, on trouve $M=\frac{3}{4}$. On est donc tentés de montrer que $M \geqslant \frac{3}{4}$. Pour cela, il suffit de prouver que

$$4(x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)) \geqslant 3(x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+zx)).$$

Cette dernière inégalité est équivalente à $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$, ce qui est bien connu (cette inégalité est équivalente à $(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqslant 0$).
Réciproquement, en choisissant $x=y=z=1$, on obtient bien $M=\frac{3}{4}$, donc cette valeur est atteinte.

Solution alternative de l'exercice 3 :
En ramenant au même dénominateur et en développant, on obtient :

$$M = \frac{x^2}{(x+z)(x+y)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+y)(z+x)}$$
$$= \frac{x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \frac{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y}{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2xyz}.$$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\frac{1}{6}(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) \geqslant \sqrt[6]{x^2y\cdot x^2z\cdot y^2x\cdot y^2z\cdot z^2x\cdot z^2y} = \sqrt[6]{x^6y^6z^6} = xyz.$$

D'où

$$M \geqslant \frac{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y}{x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y+2\cdot\frac{1}{6}(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y)} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Réciproquement, en choisissant $x=y=z=1$, on obtient bien $M=\frac{3}{4}$, donc cette valeur est atteinte.

Solution de l'exercice 4
Mettons plusieurs fois au carré l'égalité pour simplifier l'expression :

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=2 \Rightarrow & \left(\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)^2=4 \\
& \Rightarrow \sqrt{x}+\sqrt{y}-2\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\cdot\sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}}+\sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \\
& \Rightarrow 2\sqrt{x}-2\sqrt{(\sqrt{x}+\sqrt{y})(\sqrt{x}-\sqrt{y})}=4 \\
& \Rightarrow \sqrt{x}-\sqrt{x-y}=2 \\
& \Rightarrow \left(\sqrt{x}-\sqrt{x-y}\right)^2=4 \\
& \Rightarrow x-2\sqrt{x(x-y)}+(x-y)=4 \\
& \Rightarrow (2x-y-4)^2=4x(x-y) \\
& \Rightarrow 4x^2+y^2+16-4xy-16x+8y=4x^2-4xy \\
& \Rightarrow y^2+8y+16=16x \\
& \Rightarrow 16x=(y+4)^2.
\end{aligned}$$

Ces deux nombres sont pairs, donc $y+4$ est pair. On peut alors écrire $y+4=2a$, avec a entier. On a alors $4x=a^2$. De même, ces deux nombres sont pairs donc a est pair. On peut donc écrire $a=2b$, avec b entier. On a enfin $x=b^2$, donc x est bien le carré d'un entier.

Solution de l'exercice 5
On peut factoriser le numérateur et le dénominateur de chaque fraction, sachant que

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \text{ et } a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2).$$

Ainsi, la somme vaut aussi

$$\frac{a+b}{a^2+ab+b^2} + \frac{b+c}{b^2+bc+c^2} + \frac{a+c}{a^2+ac+c^2}.$$

On essaie maintenant de simplifier les dénominateurs, qui ne sont pas très agréables. Le premier réflexe est d'appliquer l'IAG :

$$a^2+ab+b^2 \geqslant ab+2ab = 3ab.$$

Ainsi, le membre de gauche est inférieur ou égal à

$$\frac{a+b}{3ab} + \frac{b+c}{3bc} + \frac{a+c}{3ac} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 2.$$

On cherche maintenant à montrer que l'égalité ne peut être atteinte. Lorsque l'on applique l'IAG, l'égalité a lieu si $a = b$, $b = c$ et $c = a$. Or, l'énoncé exclut explicitement ces égalités, donc l'inégalité est bien stricte.

Solution de l'exercice 6

Dans un premier temps, on cherche à donner un sens aux valeurs absolues des différences. Pour cela, l'idée la plus naturelle est d'ordonner les trois nombres. Ça tombe bien, l'énoncé est symétrique, on peut supposer $a \geqslant b \geqslant c$. Soit $d = a - b$ et $e = b - c$.

On va maintenant essayer d'utiliser les conditions de l'énoncé. Pour passer des valeurs absolues à une expression symétrique en a, b, c qu'on maîtrise mieux, on peut regarder les carrés de ces trois valeurs absolues :

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2 = 2$$

et d'un autre côté,

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = d^2+e^2+(d+e)^2 \leqslant (d+e)^2+(d+e)^2 = 2(d+e)^2.$$

Ainsi, $2(d+e)^2 \geqslant 2$, donc $|a-c| \geqslant 1$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7

On cherche tout d'abord à transformer la quantité $\frac{xy+2y+1}{y-x}$, que l'on notera $S(x,y)$ par la suite, pour obtenir quelque chose de plus joli. En essayant de rendre le numérateur symétrique en x et y, on se rend compte que $S(x,y)-1 = \dfrac{xy+2y+1}{y-x} - \dfrac{y-x}{y-x} = \dfrac{xy+x+y+1}{y-x} \quad (*)$. On remarque ensuite que $xy+x+y+1 = (x+1)(y+1)$, ce qui nous pousse à passer l'égalité $(*)$ à l'inverse : on obtient, pourvu que $S(x,y) \neq -1$,

$$\frac{1}{S(x,y)-1} = \frac{y-x}{(x+1)(y+1)} = \frac{(y+1)-(x+1)}{(x+1)(y+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{y+1}.$$

Sous cette forme, nous pouvons à présent appliquer le principe des tiroirs : on note $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les n éléments (distincts) de S, et on considère les n fractions $\dfrac{1}{x_1+1}, \dfrac{1}{x_2+1}, \ldots, \dfrac{1}{x_n+1}$. Les x_i étant positifs, on a, pour tout i, $0 < \dfrac{1}{x_i+1} \leqslant 1$. Cela nous pousse à considérer les $n-1$ intervalles $]0, \frac{1}{n-1}]$, $]\frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}], \ldots,]\frac{n-2}{n-1}, 1]$ qui partitionnent $]0,1]$ en guise de tiroirs. D'après le principe des tiroirs, il existe deux indices $i \neq j$ tels que $\dfrac{1}{x_i+1}$ et $\dfrac{1}{x_j+1}$ soient dans le même intervalle de longueur $\frac{1}{n-1}$, avec sans perte de généralité $\dfrac{1}{x_i+1} > \dfrac{1}{x_j+1}$. On a alors

$$\frac{1}{S(x_i,x_j)-1} = \frac{1}{x_i+1} - \frac{1}{x_j+1} < \frac{1}{n-1},$$

ou encore $S(x_i,x_j) > n$ en passant à l'inverse. Cela conclut l'exercice : les éléments x_i et x_j de S conviennent.

Solution de l'exercice 8

On a envie de donner un peu de sens aux termes de la forme $\frac{s^k}{k!}$. Le $k!$ fait penser aux permutations de k nombres. Et justement, quand on développe s^k, on remarque que pour tous $1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n$, le terme $a_{i_1} a_{i_2} ... a_{i_k}$ apparaît $k!$ fois. En effet, chaque permutation de $a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}$ apparaît une fois dans le développement de $(a_1 + ... + a_n)^k$. On a donc

$$\frac{s^k}{k!} \geqslant \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n} a_{i_1} \cdot a_{i_2} \ldots a_{i_k}.$$

Ainsi,

$$1 + s + \frac{s^2}{2!} + ... + \frac{s^n}{n!} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \sum_{a \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n} a_{i_1} \ldots a_{i_k}.$$

Or, dans le terme de droite, on reconnaît le développement de $(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n)$. Pour tout i, on a par IAG $1 + a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$, donc

$$(1 + a_1)...(1 + a_n) \geqslant 2\sqrt{a_1} \cdot 2\sqrt{a_2} \cdot ... \cdot 2\sqrt{a_n} = 2^n \sqrt{p}.$$

D'après les deux inégalités précédentes, on a bien

$$1 + s + \frac{s^2}{2} + ... + \frac{s^n}{n!} \geqslant 2^n \sqrt{p},$$

ce qui conclut.

Solution Alternative de l'exercice 8

L'inégalité arithmético-géométrique nous donne la valeur minimale de s à p fixé :

$$s \geqslant np^{\frac{1}{n}}.$$

L'exercice revient donc à montrer que, pour tout $p > 0$,

$$2^n \cdot \sqrt{p} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k p^{\frac{k}{n}}}{k!}.$$

Les factorielles qui apparaissent au dénominateur nous incitent à essayer de faire apparaître des coefficients binomiaux. On utilise donc la majoration suivante :

$$\forall k, \quad n^k \geqslant n \cdot (n-1) \cdot \cdots \cdot (n-k+1).$$

Cela nous permet d'écrire, par binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k p^{\frac{k}{n}}}{k!} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)p^{\frac{k}{n}}}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n! p^{\frac{k}{n}}}{(n-k)!k!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} p^{\frac{k}{n}} = (p^{\frac{1}{n}} + 1)^n.$$

Pour conclure, il nous suffit de remarquer que, par IAG,

$$(p^{\frac{1}{n}} + 1)^n \geqslant \left(2\sqrt{p^{\frac{1}{n}}}\right)^n = 2^n \cdot \sqrt{p}.$$

Solution de l'exercice 9 Une première difficulté dans ce problème est d'aboutir à une inégalité portant sur deux termes spécifiques, à savoir x_n et x_1, à partir d'hypothèses symétriques en toutes les variables. Une bonne idée pour pallier à ce problème est d'établir, pour chaque terme, une inégalité impliquant x_n, x_1 et ce terme particulier, puis de sommer ces inégalités afin d'utiliser les hypothèses de l'énoncé.

Puisque les x_i sont rangés dans l'ordre croissant, on a, pour tout $i \geqslant 1$, $(x_i - x_1)(x_i - x_n) \leqslant 0$. En sommant cette inégalité sur tous les i, on obtient

$$\sum x_i^2 - (x_1 + x_n) \sum x_i + n x_n x_1 \leqslant 0,$$

ce qui semble difficile à manipuler puisque l'on a pas d'information sur la somme des x_i^2. Ainsi, on modifie légèrement l'inégalité établie, que l'on écrit sous la forme

$$0 \geqslant \frac{(x_i - x_1)(x_i - x_n)}{x_i} = x_i - (x_1 + x_n) + \frac{x_1 x_n}{x_i}.$$

En sommant cette inégalité sur tous les $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on obtient

$$0 \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i - n(x_1 + x_n) + x_1 x_n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i},$$

ou encore $0 \geqslant 4n - n(x_1 + x_n) + n x_1 x_n$ en utilisant les conditions de l'énoncé. En divisant par n et en notant $t = \frac{x_n}{x_1} \geqslant 1$, on trouve

$$0 \geqslant 4 - x_1(1 + t) + x_1^2 t.$$

On reconnaît là une équation du second degré en la variable x_1, dont le discriminant est nécessairement positif, sans quoi la quantité $4 - x_1(1 + t) + x_1^2 t$ serait toujours strictement positive. Ainsi, $0 \leqslant (1 + t)^2 - 16t = t^2 - 14t + 1$, ou encore $48 \leqslant (t - 7)^2$. En passant à la racine, on trouve $4\sqrt{3} \leqslant t - 7$ ou $-4\sqrt{3} \geqslant t - 7$. Ce second cas est impossible puisque $t \geqslant 1$. Ainsi, $t \geqslant 7 + 4\sqrt{3}$, comme attendu. Cela conclut.

Solutions Seniors

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>
Essayons de comparer abc à chacun des trois termes séparément.
Pour comparer à abc à $3a$, on souhaite se débarasser du b et du c dans le produit. Pour cela, on peut simplement les minorer tous les deux par 3 :

$$abc \geqslant a \cdot 3 \cdot 3 = 9a$$

De même, on obtient

$$abc \geqslant 9b$$

et

$$abc \geqslant 9c$$

Il ne reste plus qu'à additionner ces trois expressions :

$$abc + abc + abc \geqslant 9a + 9b + 9c$$

On obtient alors l'inégalité voulue en divisant par 3.

Solution de l'exercice 11

Si l'on calcule les premiers termes de la suite pour certaines valeurs de a, on remarque que celle-ci semble croissante. C'est ce qu'on va montrer en toute généralité.

Montrons donc par récurrence sur n que $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant a_{n-2} \geqslant ... \geqslant a_0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien d'après l'énoncé $a_1 = a \geqslant a_0$.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant a_{n-2} \geqslant ... \geqslant a_0$, montrons que $a_{n+1} \geqslant a_n$.

On a, d'après la relation de l'énoncé,

$$a_{n+1} = a_n(a_n - 1) - a_{n-1}(a_{n-1} - 2),$$

donc

$$a_{n+1} - a_n = a_n(a_n - 2) - a_{n-1}(a_{n-1} - 2) = (a_n - 1)^2 - (a_{n-1} - 1)^2.$$

Or, $a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant a_0 = 1$ par hypothèse de récurrence, donc $a_n - 1 \geqslant a_{n-1} - 1 \geqslant 0$ et $(a_n - 1)^2 \geqslant (a_{n-1} - 1)^2$. Ainsi, $a_{n+1} - a_n \geqslant 0$, donc $a_{n+1} \geqslant a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant ... \geqslant a_0$, ce qui achève la récurrence. Ainsi, la suite est croissante. Comme le premier terme vaut 1, a fortiori chaque terme de la suite est supérieur ou égal à 1.

Solution Alternative de l'exercice 11

Montrer que $a_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$ revient à montrer que $a_n - 1 \geqslant 0$ pour tout $n \geqslant 0$. Cette remarque, ainsi que la présence du 1 dans la condition de l'énoncé, nous incite à introduire la suite auxiliaire b, définie pour tout $n \geqslant 0$ par $b_n = a_n - 1$.

L'hypothèse de l'énoncé se réécrit alors, pour tout $n \geqslant 0$:

$$b_{n+2} = b_{n+1} + b_{n+1}^2 - b_n^2.$$

On montre alors par récurrence, comme dans la première solution, que pour tout $n \geqslant 0$, $b_{n+1} \geqslant b_n$, donc pour tout $n \geqslant 0$, $b_n \geqslant b_0 = 0$.

Solution de l'exercice 12

On va essayer de forcer l'apparition de factorisations pour transformer le produit en une somme. Pour cela, on ajoute un terme des deux côtés de l'inégalité, qui permette de factoriser les deux termes. On a $cd - ad \leqslant cd - bc$, donc $(c - a)d \leqslant (d - b)c$.

Cette expression semble plus agréable car on veut justement montrer que $c - a \leqslant d - b$. On cherche maintenant à se débarasser du d en facteur à gauche et du c en facteur à droite.

On a en fait $(d - b)c \leqslant (d - b)d$. Ainsi, $(c - a)d \leqslant (d - b)d$, donc $c - a \leqslant d - b$ (on peut diviser par d car $d > 0$), et on obtient bien $c + b \leqslant a + d$.

Solution de l'exercice 13
On commence par poser $y=-1$ pour faire disparaître le membre de droite. On obtient $f(xf(-1)-1)=0$ pour tout x. En particulier, $x=0$ donne $f(-1)=0$.
Cherchons les zéros de f. Soit y_0 un réel tel que $f(y_0)=0$. Alors

$$f\left(-y_0^2\right)=(y_0+1)f(x-y_0).$$

Si l'on dispose d'un tel $y_0\neq -1$, alors f est constante égale à $\dfrac{f\left(-y_0^2\right)}{y_0+1}$, donc identiquement nulle car $f(-1)=0$. Sinon, -1 est le seul zéro de f. Mais alors en posant $y=x+1$, on obtient $f\left(xf(x+1)-(x+1)^2\right)=0$, d'où

$$xf(x+1)-(x+1)^2=-1$$

En simplifiant par x lorsqu'il est non nul, on en déduit que pour tout $z\neq 1$, $f(z)=z+1$. Enfin, on pose $x=3$ et $y=2$ dans l'équation initiale, ce qui donne $f(3f(2)-4)=3f(1)$ soit $f(1)=2$.
Réciproquement, la fonction $x\mapsto x+1$ ainsi que la fonction nulle sont bien solutions.

Solution de l'exercice 14 Soit $M = 2025^{2025}$ et $N = 1000000$. Il s'agit de démontrer qu'au moins un terme de la suite (b_n) est supérieur ou égal à M. On sépare deux cas :

Cas 1 : Il existe un entier i tel que $a_i = a_{i+1} = \ldots = a_{i+MN-1} = 1$.
Remarquons tout d'abord que pour n'importe quel indice n, si $a_n = 1$, alors

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \ldots a_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} = \frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}}{a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + 1} < b_{n-1}.$$

Ainsi, on a les inégalités

$$b_i > \ldots > b_{i+MN-1} \quad (\star)$$

Cependant, parmi ces MN éléments de la suite (b_n), au moins M sont entiers. En effet, pour chaque $k \in [\![0; M-1]\!]$, au moins un des termes de la suite (b_n) parmi les indices $[\![i+kN, i+(k+1)N-1]\!]$ est un entier. Par construction, ces M entiers sont strictement positifs. Par ailleurs, au vu de $(\star)$, ils sont distincts deux-à-deux. Le plus grand d'entre eux est donc supérieur ou égal à M, comme voulu.

Cas 2 : Parmi MN termes consécutifs de la suite (a_n), il y en a toujours au moins 1 qui est supérieur ou égal à 2.
Dans ce cas, on remarque que, pour tout entier naturel k, on a

$$\frac{1}{b_{kMN}} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{kMN}}{a_1 a_2 \ldots a_{kMN}} = \sum_{i=1}^{kMN} \frac{1}{\prod_{j \neq i} a_j}.$$

Parmi les termes $a_1, a_2, \ldots, a_{kMN}$, au moins k sont supérieurs ou égaux à 2 par hypothèse. Il en découle que chacun des kMN dénominateurs de la somme de droite contient au moins $k-1$ termes supérieurs ou égaux à 2 et est donc supérieur ou égal à 2^{k-1}. Ainsi, on a

$$\frac{1}{b_{kMN}} \leqslant \frac{kMN}{2^{k-1}}.$$

On applique cette inégalité à $k = 2M^2N + 2$, de sorte que $k^2 > 2kM^2N + k$ puis $\frac{k^2-k+2}{2} > kM^2N$. Ensuite, d'après le binôme de Newton,

$$2^{k-1} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \binom{k-1}{\ell} \geqslant 1 + \binom{k-1}{1} + \binom{k-1}{2} = \frac{k^2-k+2}{2} > kM^2N,$$

Puis $b_{kMN} \geqslant \frac{2^{k-1}}{kMN} > M$. Cela conclut le deuxième cas et termine l'exercice.

Solution de l'exercice 15

Clairement 2025 ne joue aucun rôle (sauf peut-être pour sa parité), on pose donc $n = 2025$. La tête du problème nous donne très envie de chercher un invariant. Le problème est qu'il va nous falloir un invariant qui prouve qu'un polynôme ne peut pas avoir que des racines strictement positives, ce qui semble audacieux.

Une première chose claire est que les transformations autorisées par l'énoncé vont mal se comporter avec les racines (il est impossible d'exprimer les racines de f_1 et g_1 en fonction de celles de f et g). Alors, si l'invariant ne peut pas porter sur les racines, il ne peut porter que sur les coefficients des polynômes.

En effet, si l'on trouve un invariant sur les coefficients des polynômes, les relations de Viète nous permettront de trouver une propriété sur les racines afin d'aboutir à une contradiction si elles sont toutes strictement positives.

Tout cela est bien beau, mais il nous manque toujours l'invariant. Pour le trouver, analysons plus en détail l'énoncé. Il précise que tous les polynômes sont unitaires, ce qui semble nous inciter à nous intéresser aux coefficients de haut degré plutôt qu'à ceux de bas degré.

Pour avancer, le plus simple est d'écrire les égalités entre f, g, f_1, g_1 en fonction de leurs coefficients. Posons donc

$$f = a_0 + a_1X + ... + a_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

$$g = b_0 + b_1X + ... + b_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

$$f_1 = u_0 + u_1X + ... + u_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

$$g_1 = v_0 + v_1X + ... + v_{n-1}X^{n-1} + X^n$$

On a alors $f + g = f_1 + g_1 +$ ou $fg = f_1g_1$, ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} &(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)X + ... + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + 2X^n \\ = &(u_0 + v_0) + (u_1 + v_1)X + ... + (u_{n-1} + v_{n-1})X^{n-1} + 2X^n \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} &a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + ... + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{2n-1} + X^{2n} \\ = &u_0v_0 + (u_0v_1 + u_1v_0)X + ... + (u_{n-1} + v_{n-1})X^{2n-1} + X^{2n} \end{aligned}$$

Or, si l'on regarde le coefficient devant X^{n-1} dans le premier cas et le coefficient devant X^{2n-1} dans le second cas, on remarque qu'on a toujours $a_{n-1} + b_{n-1} = u_{n-1} + v_{n-1}$!

On tient maintenant notre invariant : d'après la remarque précédente, la somme des coefficients devant X^{n-1} des polynômes est invariante.

Au début, cette somme est positive car tous les coefficients des polynômes sont positifs.

Ainsi, cette somme est toujours positive. A fortiori, il existe toujours un polynôme dont le coefficient devant X^{2n-1} est positif. Or, d'après les relations de Viète, le polynôme étant unitaire, ce coefficient est égal à l'opposé de la somme des racines du polnyôme. Si toutes ces racines sont strictement positives, alors l'opposé de leur somme est strictement négatif, ce qui est contradictoire.

Ainsi, il existe, à chaque instant, au moins un polynôme qui n'a pas que des racines strictement positives, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 16

On devine que la solution est la fonction inverse, qui convient bien.

On cherche à faire une substitution telle que $x + f(y) = xy + 1$. C'est possible en posant $x = \frac{f(y)-1}{y-1}$, à condition que $y \neq 1$ et que cette fraction soit strictement positive. Si c'est le cas, en divisant des deux côtés par les $f()$ rendus égaux on aboutit directement à $y = 1$, ce qui contredit notre hypothèse. On en déduit que $\frac{f(y)-1}{y-1} < 0$, autrement dit si $y < 1$, alors $f(y) > 1$ et inversement.

Supposons que $y > 1$. On pose $x = \frac{y-1}{y}$, ce qui donne $f\left(\frac{y-1}{y} + f(y)\right) = yf(y)$. Mais alors si $f(y) < \frac{1}{y}$, alors $yf(y) < 1$, donc $f\left(\frac{y-1}{y} + f(y)\right) < 1$, donc $\frac{y-1}{y} + f(y) > 1$, soit $f(y) > \frac{1}{y}$, ce qui contredit notre hypothèse. Le même raisonnement montre que l'on ne peut pas non plus avoir $f(y) > \frac{1}{y}$, donc finalement, $f(y) = \frac{1}{y}$ pour tout $y > 1$.

Revenons à l'équation de départ. Comme $xy + 1 > 1$, on peut écrire, pour tout $y > 1$:

$$f\left(\frac{xy+1}{y}\right) = f\left(x + \frac{1}{y}\right) = f(x + f(y)) = yf(xy+1) = \frac{y}{xy+1}$$

En prenant x suffisamment petit et y suffisamment grand, on peut atteindre tous les réels de $]0,1]$ avec l'expression $\frac{xy+1}{y} = x + \frac{1}{y}$. Pour $z \in]0,1]$, cela se fait explicitement en posant $x = \frac{z}{2}$ et $y = \frac{2}{z}$ par exemple. Finalement, la seule solution est bien la fonction inverse.

Solution de l'exercice 17 Montrons que la constante recherchée est $M = \frac{(n!)^2}{\binom{2n}{n}}$.

Dans cet exercice, nous nous intéressons aux valeurs que prend un polynôme de degré au plus $n-1$ en $n+1$ points. Cela nous fait penser à l'interpolation de Lagrange : une première idée est d'essayer de rendre M nul, en prenant par exemple $P(i) = i^n$ pour $0 \leqslant i \leqslant n$. Cependant, le polynôme interpolateur de ces $n+1$ points est de degré n et non de degré au plus $n-1$.

Fixons désormais un polynôme P de degré au plus $n-1$. Nous savons que si l'on note, pour chaque $0 \leqslant i \leqslant n$, q_i la quantité $i^n - P(i)$, l'unique polynôme de degré au plus n vérifiant $P(i) = i^n - q_i$ pour chaque $0 \leqslant i \leqslant n$ est de degré au plus $n-1$. Cela nous donnera une condition sur les $i^n - q_i$, et à fortiori sur les q_i. On écrit l'égalité

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} \left((i^n - q_i) \prod_{j \neq i} \frac{X-j}{i-j} \right).$$

En effet, ces 2 polynômes sont de degré au plus n et coïncident en $n+1$ points : ils sont donc égaux.

Le polynôme P étant de degré au plus $n-1$, nous savons que le coefficient devant X^n dans l'expression du membre de droite est nulle. Cela s'écrit

$$0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{i^n - q_i}{\prod_{j \neq i} i-j} \quad (1).$$

De plus, remarquons que l'on a l'égalité polynomiale

$$X^n = \sum_{i=0}^{n} i^n \prod_{j \neq i} \frac{X-j}{i-j}.$$

En effet, ce sont deux polynômes de degré au plus n qui coïncident en $n+1$ points : 0, 1, ..., n. En égalant les coefficients devant X^n, il vient

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{i^n}{\prod_{j \neq i} i-j}. \quad (2)$$

En combinant les égalités (1) et (2), on trouve

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{q_i}{\prod_{j \neq i} i-j}.$$

Pour tout i, on a $\prod_{j \neq i}(i-j) = (-1)^{n-i} i!(n-i)!$. On peut faire apparaître des coefficients binomiaux en multipliant l'égalité ci-dessus par $n!$:

$$n! = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} q_i \binom{n}{i}. \quad (*)$$

Nous pouvons maintenant appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et obtenir

$$\left(\sum_{i=0}^{n} q_i^2 \right) \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 \right) \geqslant \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} q_i \binom{n}{i} \right)^2 = (n!)^2.$$

D'où, finalement,

$$\sum_{i=0}^{n}(i^n - P(i))^2 \geqslant \frac{(n!)^2}{\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2} = \frac{(n!)^2}{\binom{2n}{n}},$$

où la dernière égalité découle d'un double comptage classique pour dénombrer le nombre de manières de construire un sous-ensemble à n éléments de $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Réciproquement, si l'on pose, pour chaque i, $q_i = \dfrac{(-1)^{n-i}\binom{n}{i}n!}{\binom{2n}{n}}$, ils vérifient l'égalité $(*)$ et le cas d'égalité de Cauchy-Schwarz. De plus, l'égalité $(*)$ est équivalente à l'égalité (1), elle-même équivalente au fait que le polynôme P de degré au plus n vérifiant $P(i) = i^n - q_i$ pour $i = 0, \ldots, n$ soit bien de degré au plus $n - 1$.
Cela montre bien que M est atteignable, et donc que M est bel et bien la constante recherchée.

Solution de l'exercice 18 Supposons par l'absurde que pour tout i, il existe $j \neq i$ tel que $\frac{a_i}{i} = \frac{a_j}{j}$. En particulier, $a_1 > 0$, sinon la valeur 0 ne serait prise qu'une seule fois. On remarque tout d'abord que pour tout réel r, un indice i vérifiant $\frac{a_i}{i} = r$ doit vérifier $1 \geqslant a_i = ir$, ou encore $i \leqslant \frac{1}{r}$. En particulier, il n'y a qu'un nombre fini de tels indices i. Par la suite, on dira qu'un indice i est *bleu* s'il existe un indice $j > i$ avec $\frac{a_i}{i} = \frac{a_j}{j}$ et *rouge* sinon. D'après la remarque précédente, pour tout indice bleu i, il existe un indice rouge j vérifiant $\frac{a_i}{i} = \frac{a_j}{j}$. De plus, il existe une infinité d'indices bleus, puisqu'il existe une infinité de valeurs prises par la suite $(\frac{a_i}{i})$ (celle-ci prenant des valeurs strictement positives arbitrairement petites). On définit maintenant deux suites d'indices strictement croissantes (i_k) et (j_k), l'une entièrement bleue et l'autre entièrement rouge, par récurrence :

▷ On pose $i_1 = 1$, qui est effectivement bleu, puis on définit $j_1 > 1$ comme étant le plus grand indice vérifiant $\frac{a_{j_1}}{j_1} = \frac{a_1}{1}$, qui est rouge par définition.

▷ Ensuite, une fois $i_1, i_2, \ldots, i_n$ et $j_1, j_2, \ldots, j_n$ définis pour un certain $n \geqslant 1$, on définit i_{n+1} comme étant le plus petit indice bleu supérieur à j_n, puis j_{n+1} comme étant l'indice rouge vérifiant $\frac{a_{j_{n+1}}}{j_{n+1}} = \frac{a_{i_{n+1}}}{i_{n+1}}$.

Pour tout indice k, on pose également $x_k = j_k - i_k$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Les intervalles de la forme $[j_k, i_{k+1} - 1]$, où $1 \leqslant k \leqslant n-1$, sont disjoints et leur union est incluse dans $[1, i_n - 1]$ par construction. De plus, les éléments de ces intervalles sont exclusivement rouges. On en déduit que, parmi les indices de 1 à $i_n - 1$, au moins

$$\sum_{k=1}^{n-1} i_{k+1} - j_k = i_n - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} x_k$$

sont rouges. Cependant, à chaque indice rouge r de l'intervalle $[1, i_n - 1]$, on peut associer un indice bleu différent b vérifiant $\dfrac{a_r}{r} = \dfrac{a_b}{b}$ et $b < r$. Ainsi, le nombre d'indices rouges dans cet intervalle vaut au plus $\frac{i_n - 1}{2}$. En combinant ces deux dernières remarques, on obtient $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} x_k \geqslant \frac{i_n - 1}{2}$, ou encore $i_n \leqslant 1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} x_k$.

Remarquons enfin que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a $a_{j_k} - a_{i_k} \leqslant a_{j_k} - a_{j_{k-1}}$ (où l'on pose $j_0 = 0$ et $a_0 = 0$). De plus, on a $\frac{a_{i_k}}{i_k} = \frac{a_{j_k}}{j_k}$, de sorte que

$$a_{j_k} - a_{i_k} = \frac{a_{i_k} x_k}{i_k} \geqslant \frac{a_1 x_k}{i_k} \geqslant \frac{a_1 x_k}{1 + 2\sum_{i=1}^{k-1} x_i}.$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier. En sommant ces deux inégalités pour $k = 1, 2, \ldots, n$, et en faisant apparaitre une somme télescopique, on trouve

$$1 \geqslant a_{j_n} = \sum_{k=1}^{n} a_{j_k} - a_{j_{k-1}} \geqslant \sum_{k=1}^{n} a_{j_k} - a_{i_k} \geqslant \frac{a_1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i}.$$

Notons L le membre de droite. On remarque que

$$L = \frac{a_1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i} = \frac{a_1}{2} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k} x_i}{\frac{1}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i} - 1 \right),$$

d'où, par IAG en faisant apparaitre un produit télescopique,

$$L \geqslant \frac{n a_1}{2} \left(\sqrt[n]{1 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i} - 1 \right),$$

d'où l'on tire $L > \frac{na_1}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$ en utilisant simplement l'inégalité $x_i \geqslant 1$ pour tout i. Finalement, en notant $A = \sqrt[n]{n}$ et en se rappelant l'inégalité $1 \geqslant L$ obtenue précédemment, on obtient $1 > \frac{na_1}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$. Divers arguments de nature analytique permettent de montrer que cette inégalité est fausse pour n assez grand, ce qui constitue la contradiction recherchée. Une manière d'établir cette absurdité est de se rappeler l'inégalité $(1+\frac{1}{x})^x \leqslant e$, vraie pour tout réel $x > 0$, où e est la constante d'Euler. Ainsi, si $k > \frac{2}{a_1}$ est un réel et $n \geqslant e^k$, on a $n \geqslant e^k \geqslant (1+\frac{k}{n})^n$, de sorte que $n\left(\sqrt[n]{n}-1\right) \geqslant k$, puis $\frac{na_1}{2}\left(\sqrt[n]{n}-1\right) \geqslant \frac{ka_1}{2} > 1$, absurde. Cela conclut la preuve de l'exercice.