

# Équations fonctionnelles

Groupe B

## 1 Introduction(Entrée)

### Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que pour tous réels  $x$  et  $y$  :

$$f(x + y) = f(x) + y$$

### Exercice 2

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

### Exercice 3

Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Déterminer toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que pour tous réels  $x$  et  $y$  distincts :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$$

## 2 Plat

### Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que pour tous réels  $x$  et  $y$  :

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

### Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}^+$  telles que pour tous réels  $x$  et  $y$  strictement positifs :

$$(x + y)f(yf(x)) = x^2(f(x) + f(y))$$

### Exercice 3

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$f(f(x + 1) + y - 1) = f(x) + y$$

### Exercice 4

Pour les solutions des équations fonctionnelles ci dessous lesquelles sont injectives ou surjectives.

1.  $f(f(x) - 1) = x + 1$ .
2.  $f(2x + f(3y)) = f(x) + y^5$ .
3.  $f(f(x) - f(y)) = xf(x - y)$ .
4.  $f(f(x) + f(y)) - f(f(x) - f(y)) = 2x + 3y$ .

---

**Exercice 5**

Déterminer toutes les fonctions  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  telles que pour tous réels  $x$  et  $y$ ,

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x$$

**Exercice 6**

$$f(f(x) + 9y) = f(y) + 9x + 24y$$

**Exercice 7**

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que,  $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 8**

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

### 3 Dessert

**Exercice 1**

Déterminer les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

**Exercice 2**

Déterminer les fonctions de  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telles que  $f(f(n)) = n + 1$

**Exercice 3**

Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , telles que

$$f(n + 1) > f(f(n))$$