

Équations fonctionnelles

Groupe B

1 Introduction(Entrée)

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que pour tous réels x et y :

$$f(x + y) = f(x) + y$$

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que pour tous réels x et y distincts :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a$$

2 Plat

Exercice 1

Déterminer toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que pour tous réels x et y :

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

Exercice 2

Déterminer toutes les fonctions f de \mathbb{R}^+ dans \mathbb{R}^+ telles que pour tous réels x et y strictement positifs :

$$(x + y)f(yf(x)) = x^2(f(x) + f(y))$$

Exercice 3

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y ,

$$f(f(x + 1) + y - 1) = f(x) + y$$

Exercice 4

Pour les solutions des équations fonctionnelles ci dessous lesquelles sont injectives ou surjectives.

1. $f(f(x) - 1) = x + 1$.
2. $f(2x + f(3y)) = f(x) + y$.
3. $f(f(x) - f(y)) = xf(x - y)$.
4. $f(f(x) + f(y)) - f(f(x) - f(y)) = 2x + 3y$.

Exercice 5

Déterminer toutes les fonctions f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telles que pour tous réels x et y ,

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x$$

Exercice 6

$$f(f(x) + 9y) = f(y) + 9x + 24y$$

Exercice 7

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, $f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que,

$$f(x + f(y)) = f(x) + y$$

3 Dessert

Exercice 1

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

Exercice 2

Déterminer les fonctions de $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que $f(f(n)) = n + 1$

Exercice 3

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, telles que

$$f(n + 1) > f(f(n))$$