Quelques inégalités

Un des enjeux majeurs des problèmes d'algèbre rencontrés aux Olympiades est d'être capable **d'estimer des quantités et de comparer des quantités entre elles**. Cela peut être explicité dans l'énoncé ("démontrer l'inégalité suivante") ou implicite, c'est-à-dire que la recherche de la solution amène à comparer des quantités. Les outils à notre disposition sont les suivants.

- Les inégalités classiques : inégalité des moyennes, Cauchy-Schwarz, réordonnement, convexité.
- l'inégalité triangulaire : $|x-y| \leqslant |x-z|+|z-y|$.
- $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
- Manipulations algébriques : télescopage, ajout/retrait d'une quantité, dans le cas d'une somme regroupe certains termes bien choisis de la somme entre eux.

Dans les problèmes d'Olympiades, la seule connaissance de ces inégalités ne suffit pas. La réussite d'un problème dépend souvent de la capacité à estimer une expression sans être "trop gourmand". Voici quelques conseils :

- Prenons $x \in [0,1]$. Pour estimer x^2, il y a plusieurs possibilités. On peut par exemple majorer x^2 par 1, mais on peut aussi majorer x^2 par x, ce qui est plus fin et permet de conserver de "l'information" (par exemple si les variables sont reliées par une hypothèse). Ainsi, en plus des inégalités classiques, il faut détecter quelle majoration/minoration va être la plus précise pour le problème qui nous intéresse. On n'hésitera pas à commencer par des estimations grossières, que l'on raffine en reprenant son raisonnement.
- Un bon indicateur pour savoir si l'on est trop gourmand est le cas d'égalité de l'inégalité que l'on cherche à estimer. Une fois que vous avez le cas d'égalité en tête, demandez-vous si l'inégalité que vous êtes en train d'appliquer conserve bien ce cas d'égalité. Si ce n'est pas le cas, c'est que vous êtes trop gourmand. Ainsi, inutile de minorer $x+1/x$ par 2 si le cas d'égalité ne correspond pas à $x=1$.
- Il est possible qu'il faille une disjonction de cas sur la valeur de x (une fois encore, x^2 ne se majore pas de la même façon selon que $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 1$. De même, il est possible qu'il faille découper l'expression en plusieurs orceaxu et de devoir faire un raisonnement différent pour chaque morceau.
- Enfin, il n'est pas rare qu'un argument combinatoire ou arithmétique soit nécessaire dans le problème. Il faut y être sensible.

Ces conseils abstraits trouvent leur illustration dans les exercices qui suivent (qui ne sont pas classés par ordre de difficulté).

Exercices

Exercice 1. *(Coupe Animath 2021)* Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe n réels $x_1, \ldots, x_n$ appartenant tous à l'intervalle $]-1,1[$ et pour lesquels $x_1 + \ldots + x_n = 0$ et $x_1^2 + \ldots + x_n^2 = 2020$.

Exercice 2. *(TST belge 2010)* Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^n i a_i\right| \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Exercice 3. *(RMM 2016 P4)* Soient x et y des réels strictement positifs tels que $x + y^{2016} \geqslant 1$. Montrer que $x^{2016} + y > 1 - \frac{1}{100}$.

Exercice 4. *(IMO SL 2010 A3)* Soient $x_1, \ldots, x_{100}$ des réels positifs vérifiant que $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leqslant 1$ pour tout $i \leqslant 100$ (avec la convention $x_{101} = x_1$ et $x_{102} = x_2$). Déterminer la valeur maximale que peut prendre

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$$

Exercice 5. *(Entraînement groupe E 2023)* Déterminer la plus grande constante $C > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $2023-$uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_{2023})$ de réels strictement positifs deux à deux distincts, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} > C.$$

Exercice 6. *(EGMO 2014 P1)* Déterminer tous les réels t tels que pour tout triplet (a, b, c) désignant les longueurs des côtés d'un triangle, $a^2 + bct$, $b^2 + cat$ et $c^2 + abt$ sont également les longueurs des côtés d'un triangle.

Exercice 7. *(IMO 2007 P1)* Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$d_i = \max\{a_j, 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j, i \leqslant j \leqslant n\}$$

On pose $d = \max\{d_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

1) Montrer que pour tous $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ réels, on a

$$\max\{|x_i - a_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}$$

2) Montrer qu'existent des réels $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ tels qu'on ait égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 8. *(EGMO 2018 P6)*
1) Montrer que pour tout $0 < t < \frac{1}{2}$, il existe un entier $n > 0$ tel que : pour tout ensemble S de n entiers strictement positifs, il existe deux éléments distincts $x, y \in S$ et $m \geqslant 0$ entier tels que

$$|x - my| \leqslant ty.$$

2) Déterminer si pour tout $0 < t < 1/2$, il existe un ensemble S infini d'entiers distincts tel que pour tous $x, y \in S$, $m > 0$,

$$|x - my| > ty.$$

Exercice 9. *(IMO SL 2021 A5)* Soit $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs de somme 1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}.$$

Exercice 10. *(IMO SL 2007 A5)* Soit $c > 2$. Soit (a_n) une suite de réels positifs telle que pour tout $m, n \geqslant 1$:

$$a_{m+n} \leqslant 2a_n + 2a_m$$

et $a_{2^k} \leqslant \frac{1}{(k+1)^c}$ pour tout $k \geqslant 0$. Montrer que la suite (a_n) est bornée.