Équations Fonctionnelles

Exercices

Exercice 1
(Slovénie 1999) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 3
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y.$$

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + y) + yf(x) = xy + f(x) + f(f(y)).$$

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions f telles que

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y)$$

pour tous réels x, y.

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(2x) + 8y + 6.$$

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy.$$

Exercice 8 (Baltic Way 2024, Problem 2)
On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $abc = 1$.

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x-y).$$

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x+1) + y - 1) = f(x) + y.$$

Exercice 12 (Baltic Way 2024, Problem 1)
Soit α un nombre réel non-nul. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$xf(x+y) = (x + \alpha y)f(x) + xf(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 13
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y.$$

Exercice 14
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait :

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1.$$

Exercice 15

Trouver toutes les fonctions **continues** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(f(x) + y) = x + f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.