Équations Fonctionnelles

Exercices

Exercice 1
(Slovénie 1999) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Solution de l'exercice 1
Soit f une solution éventuelle. Soit y quelconque, en remplaçant x par $f(y)$, on trouve

$$f(0) = 1 - f(y) - y$$

ce qui se réécrit

$$f(y) = -y + 1 - f(0).$$

Ainsi, f est de la forme $f(y) = -y + c$ avec c un réel. Réciproquement, si $f(y) = -y + c$ est solution, alors

$$f(x - f(y)) = -x + f(y) + c = -x - y + 2c = 1 - x - y.$$

On déduit que $c = 1/2$. La seule fonction solution est donc la fonction $f(x) = -x + 1/2$.

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \cdot f(y) = f(x - y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 2
Pour $x = y = 0$, on trouve $f(0)^2 = f(0)$ donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Ensuite, pour $x = y$, on obtient $f(x)^2 = f(0)$.
Si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle.

Sinon $f(0) = 1$.
Soit $a \in \mathbb{R}$, en prenant successivement $x = 0, y = a$ et $x = a, y = 0$, on trouve $f(a) = f(-a)$, donc f est paire.
Soit $a \in \mathbb{R}$. $f\left(\frac{a}{2}\right) = f\left(-\frac{a}{2}\right)$.
Donc (en évaluant successivement en $\left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right)$ puis en $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$) :
$f(a) = f\left(\frac{a}{2} - \left(-\frac{a}{2}\right)\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{a}{2}\right) = f\left(\frac{a}{2}\right) \cdot f\left(\frac{a}{2}\right) = f(0) = 1$.
Les solutions potentielles sont alors les fonctions constantes $f : x \mapsto 0$ et $f : x \mapsto 1$. Réciproquement elles conviennent bien.

Exercice 3
Trouver les $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y.$$

Solution de l'exercice 3
La fonction nulle est solution. Si f est non-identiquement nulle, il existe a tel que $f(a) \neq 0$.
Montrons que f est injective.
Soit $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $f(b) = f(c)$.

On substitue x par a et y par b et c : $f(a)b = f(f(a)f(b)) = f(f(a)f(c)) = f(a)c$.
Or $f(a) \neq 0$, donc $b = c$.

Avec $y = 1$, $\forall x, f(f(x)f(1)) = f(x)$, par injectivité : $\forall x, f(x)f(1) = x$.
Enfin $x = 1$ donne $f(1) = \pm 1$.
Conclusion : On vérifie les trois éventuelles solutions : $x \mapsto x, x \mapsto -x$, et $x \mapsto 0$.
Elles conviennent toutes.

Solution n°2 de l'exercice 3
Dans cette équation, le terme de gauche est symétrique en x et y alors que le terme de droite ne l'est pas. Dans ce genre de situation il est intéressant de se servir de cette symétrie, ici cela donne : $f(f(x)f(y)) = f(x)y = xf(y)$.
Donc pour tous réels x, y non nuls, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(y)}{y}$ donc le terme $\dfrac{f(x)}{x}$ est constant et on peut écrire $f(x) = cx$ pour tout x non nul.
De plus $f(0) \cdot 1 = 0 \cdot f(1) \implies f(0) = 0$, donc $f(x) = cx$ pour tout réel x.
$f(f(x)f(y)) = c^3xy = f(x)y = cxy$ donc $c = 0$, $c = 1$ ou $c = -1$.
On vérifie que les fonctions $f : x \mapsto 0$, $f : x \mapsto x$ et $f : x \mapsto -x$ sont bien solutions de l'équation.

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x)+y)+yf(x) = xy + f(x) + f(f(y)).$$

Solution de l'exercice 4
Analyse : Avec $x = y = 0$, on a que $f(0) = 0$.
Montrons que si f est solution alors f est injective.
Premièrement, si $f(r) = 0$, on prenant $x = y = r$:

$$f(f(r)+r)+rf(r) = 0 = r^2 + f(r) + f(0) = r^2$$

D'où l'unique racine de f est 0.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $f(a) = f(b)$, alors, avec $x = a$, $y = b$:

$$f(f(a)+b)+bf(a) = ab + f(a) + f(f(a))$$

avec $x = y = b$,

$$f(f(a)+b)+bf(a) = b^2 + f(a) + f(f(a))$$

Alors $ab = b^2$, donc soit $a = b \neq 0$, soit $b = 0$.
Or, si $b = 0$, $f(a) = 0$ puis $a = 0$. D'où $a = b$ aussi.
Mais alors, avec $x = 0$, on obtient $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = f(f(y))$, puis par injectivité $\forall y \in \mathbb{R}, f(y) = y$.

Synthèse : $f = \mathrm{Id}$ vérifie bien l'équation, car pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ on a bien

$$f(f(x)+y)+yf(x) = x + y + xy = xy + f(x) + f(f(y)).$$

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions f telles que

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y)$$

pour tous réels x, y.

Solution de l'exercice 5
En posant $y = 0$, on trouve que $f(x^2 + f(0)) = 2x - f(0)$. Comme le côté droit de cette égalité peut atteindre n'importe quelle valeur réelle en faisant varier x, il en est de même du côté gauche, ce qui signifie que f est surjective.

Soit z un réel quelconque et y tel que $f(y) = z$, qui existe bien par surjectivité de f. En posant $x = 0$ dans l'équation, on trouve

$$f(z) = f(f(y)) = -f(y) = -z.$$

Cependant, la fonction $f(z) = -z$ n'est pas solution de l'équation. Ainsi, l'équation n'a pas de solutions.

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(2x) + 8y + 6.$$

Solution de l'exercice 6
Soit f une solution éventuelle. En posant $x = 0$, on trouve

$$f(f(0) + 2f(y)) = f(0) + 8y + 6.$$

On peut en déduire que f est injective. En effet, en prenant u et v tels que $f(u) = f(v)$, on a en remplaçant y par u puis par v dans l'équation ci-dessus, on déduit que

$$f(0) + 8u + 6 = f(f(0) + 2f(u)) = f(f(0) + 2f(v)) = f(0) + 8v + 6.$$

On déduit que $u = v$, de sorte que f est injective.
Prenons alors $y = -3/4$, afin d'annuler le terme $8y + 6$. L'équation devient

$$f\left(f(x) + 2f\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = f(2x).$$

Par injectivité, on déduit que

$$f(x) + 2f\left(-\frac{3}{4}\right) = 2x.$$

f est donc de la forme $f(x) = 2x + c$. Réciproquement, si f est une solution de la forme $2x + c$, on a

$$f(f(x)+2f(y)) = 2(f(x)+2f(y))+c = 4x+2c+8y+4c+c = 2f(2x)+8y+6 = 4x+c+8y+6.$$

On déduit que $c = 1$, de sorte que la seule solution est la fonction $f : x \mapsto 2x + 1$.

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

Solution de l'exercice 7
Soit f une solution éventuelle. Avec $x = y = 0$, on trouve que $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$: En posant $y = 0$, on trouve que $0 = f(x) + 0$, de sorte que f est constante égale à 0. Mais la fonction nulle n'est pas solution de l'équation.

Si $f(0) = 1$: En posant $y = -x$, on trouve $f(x)f(-x) = 1 - x^2$. En posant $x = 1$ dans cette équation, on obtient que $f(1)f(-1) = 0$. On distingue alors encore deux cas :

- Si $f(1) = 0$, alors en posant $y = 1$ dans l'équation de départ, on trouve $0 = f(x+1) + x$. On déduit que $f(x) = -x + 1$. Réciproquement, cette fonction est bien solution du problème puisque

$$(-x+1)(-y+1) = (-x-y+1) + xy.$$

- Si $f(-1) = 0$, alors en posant $y = -1$ dans l'équation de départ, on trouve que $0 = f(x-1) - x$, de sorte que $f(x) = x + 1$ pour tout x. Réciproquement, cette fonction est bien solution puisque

$$(x+1)(y+1) = (x+y+1) + xy.$$

Exercice 8 (Baltic Way 2024, Problem 2)
On note $\mathbb{R}_+^*$ l'ensemble des nombres réels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\frac{f(a)}{1+a+ca} + \frac{f(b)}{1+b+ab} + \frac{f(c)}{1+c+bc} = 1$$

pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $abc = 1$.

Solution de l'exercice 8
En remplaçant (a, b, c) par $(x, y, \dfrac{1}{xy})$, la propriété devient
$P(x, y) : yf(x) + f(y) + xyf(\frac{1}{xy}) = xy + y + 1 \; \forall x, y > 0$
En soustrayant $P(y, x)$ à $P(x, y)$, on a $yf(x) + f(y) - xf(y) - f(x) = y - x$
Avec $y = 2$, on obtient $f(x) = x(f(2) - 1) + (2 - f(2))$
En injectant $f(x) = ax + b$ dans $P(x, y)$, on a $a + b = 1$ et donc $\boxed{f(x) = ax + 1 - a \quad \forall x > 0}$, qui convient effectivement, quel que soit $a \in [0, 1]$ (cette condition permet d'assurer que $f(x) > 0$ $\forall x > 0$).

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x-y).$$

Solution de l'exercice 9
On posant $x = y$, on a $2f(f(x)) = 2x + f(0)$, soit $f(f(x)) = x + \frac{1}{2}f(0)$. En réinjectant cette égalité dans l'équation, on trouve

$$x + y + f(0) = 2y + f(x-y),$$

soit $f(x-y) = x - y + f(0)$. Pour z un réel quelconque, en posant $x = y + z$, on trouve $f(z) = z + f(0)$. Réciproquement, si f est de la forme $f(x) = x + c$, on vérifie que

$$f(f(x)) + f(f(y)) = f(x) + c + f(y) + c = x + y + 2c = 2y + x - y + c = 2y + f(x-y).$$

On déduit que $c = 0$ et la seule solution est la solution identité.

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(xy)(x + f(y)) = x^2 f(y) + y^2 f(x)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 10
En prenant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 0$.
Ensuite avec $x = y = 1$, on a $f(1)(1 + f(1)) = 2f(1)$.
Donc $f(1) = 0$ ou $f(1) = 1$.

Si $f(1) = 0$, alors pour $y = 1$, l'équation devient directement $f(x)x = f(x)$. On a soit $f(x) = 0$, soit $x = 1$, mais justement $f(1) = 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$, et on vérifie que la fonction nulle est solution.
Si $f(1) = 1$, alors pour $y = 1$, on obtient $f(x) \cdot (x + 1) = x^2 + f(x)$ ce qui donne $xf(x) = x^2$ donc $\forall x \neq 0, f(x) = x$ et on sait que $f(0) = 0$.
Réciproquement $f : x \mapsto x$ est bien solution.

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x+1)+y-1)=f(x)+y.$$

Solution de l'exercice 11
En posant $x=0$ dans l'équation, on obtient

$$f(f(1)+y-1)=f(0)+y.$$

Comme le membre de gauche peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ quand y varie, il en est de même du membre de gauche. La fonction f est donc surjective.
Soit alors x_0 tel que $f(x_0+1)=1$. En remplaçant x par x_0 dans l'équation, on déduit que

$$f(y)=f(f(x_0+1)+y-1)=f(x_0)+y.$$

On peut alors en déduire que la fonction est injective : si u et v sont deux réels tels que $f(u)=f(v)$, alors en remplaçant y successivement par u et v, on trouve

$$u+f(x_0)=f(u)=f(v)=v+f(x_0).$$

Ainsi $u=v$ et f est bien injective. En prenant $y=0$ dans l'équation de départ, on trouve que

$$f(f(x+1)-1)=f(x).$$

Par injectivité, on obtient $f(x+1)-1=x$. Un changement de variable $z=x+1$ donne que $f(z)=z$.
Réciproquement, la fonction identité est bien solution du problème, c'est donc la seule.

Exercice 12 (Baltic Way 2024, Problem 1)
Soit α un nombre réel non-nul. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 12
On note $P(x,y)$ la propriété $xf(x+y) = (x+\alpha y)f(x) + xf(y)$.
Alors $P(1,0) \implies f(0) = 0$
Soit $x, y \neq 0$:
$P(x,y)$ donne $f(x+y) = (1+\alpha \cdot \frac{y}{x})f(x) + f(y)$
$P(y,x)$ donne $f(x+y) = (1+\alpha \cdot \frac{x}{y})f(y) + f(x)$
La soustraction donne : $\frac{y}{x}f(x) = \frac{x}{y}f(y)$, c'est-à-dire $\frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(y)}{y^2}$ $\forall x, y \neq 0$
Donc $f(x) = cx^2$ $\forall x \neq 0$, et ça reste vrai pour $x = 0$.
En réinjectant dans l'équation initiale, on obtient que n'importe quelle valeur de c convient si $\alpha = 2$ et que $c = 0$ si $\alpha \neq 2$.
Les solutions sont donc : $\forall \alpha$: $\boxed{f(x) = 0 \quad \forall x}$, qui convient bien et si $\alpha = 2$: $\boxed{f(x) = cx^2 \quad \forall x}$, qui convient bien, quelle que soit la valeur de c.

Exercice 13
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y.$$

Solution de l'exercice 13
Les propriétés de surjectivité et d'injectivité de f vont fortement dépendre de si $f(x) = 1$ ou non. Voyons plutôt.

Notons que la fonction constante $f(x) \equiv 1$ n'est pas solution du problème. Ainsi, on dispose de x_0 tel que $f(x_0) \neq 1$. En remplaçant x par x_0, on trouve

$$f(x_0 f(y) + f(x_0 + y)) = y(1 - f(x_0)) - f(x_0).$$

Comme le côté droit de l'équation parcourt tout $\mathbb{R}$ lorsque y parcourt $\mathbb{R}$, on déduit que le membre de gauche aussi, de sorte que f est surjective.

Refaisons alors le même raisonnement avec $f(0)$.

<u>Si $f(0) = 1$</u> : en remplaçant x par 0 dans l'équation, on trouve

$$f(f(y)) = -1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $y = 0$, on obtient que $f(1) = -1$. En posant $x = 1$ dans l'équation de départ, on trouve

$$f(f(y+1) + f(y)) = 2y + 1.$$

En réappliquant f, on trouve que $f(2y+1) = f(f(f(y+1) + f(y))) = -1$, de sorte que f n'est pas surjective, ce qui est une contradiction.

<u>Si $f(0) \neq 1$</u> : En remplaçant x par 0 dans l'équation de départ, on trouve que

$$f(f(y)) = y(1 - f(0)) - f(0).$$

On déduit notamment que f est surjective et que f est injective. En posant $y = -1$ dans cette égalité, on trouve $f(f(-1)) = -1$. Mais en posant $y = -1$ et $x = 1$ dans l'équation de départ, on trouve aussi $f(f(-1) + f(0)) = -1$. On déduit que $f(-1) + f(0) = f(-1)$ par injectivité de f, de sorte que $f(0) = 0$. On déduit que $f(f(y)) = y$ pour tout y. En posant $y = 0$ dans l'équation de départ, on trouve $f(f(x)) = -f(x)$, ce qui implique que $f(x) = -f(f(x)) = -x$ pour tout x.

Réciproquement, si $f(x) = -x$, on a bien

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = (y+1)(-x) - (-xy - x - y) = y.$$

La seule solution de l'équation est donc $f(x) = -x$.

Exercice 14
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y on ait :

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = 2xy - 1.$$

Solution de l'exercice 14
Analyse : Supposons que f soit une solution de l'équation. On pose $x = 0$ ce qui donne

$$f(-1) + f(x)f(0) = -1$$

Si $f(0) \neq 0$, on peut diviser et donc f est constante. C'est absurde car aucune fonction constante n'est solution. Donc $f(0) = 0$ ce qui donne $f(-1) = -1$
Pour $x \neq 0$ on pose $y = \frac{1}{x}$ ce qui donne

$$f(0) + f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 2x \cdot \frac{1}{x} - 1 \iff f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

En particulier avec $x = 1$, on obtient $\boxed{f(1)^2 = 1}$.
L'idée maintenant est de forcer une factorisation, pour cela, on voudrait que $xy - 1 = y \iff y = \frac{1}{x-1}$. Pour $x \neq 1$, on a donc

$$f\left(\frac{1}{x-1}\right)(1 + f(x)) = \frac{2x}{x-1} - 1 = \frac{x+1}{x-1}$$

Pour utiliser l'égalité précédente, on multiplie par $f(x-1)$ ce qui donne
$f(x) + 1 = \frac{x+1}{x-1} f(x-1)$
On pose maintenant $y = 1$ ce qui donne

$$f(x-1) + f(x)f(1) = 2x - 1$$

On réinjecte l'expression de $f(x-1)$ obtenue.

$$(f(x) + 1)\frac{x-1}{1+x} + f(x)f(1) = 2x - 1$$

Ce qui donne donc pour $x \neq 1$.

$$f(x) = \frac{(2x - 1 + 2x^2 - x) - (x-1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x - 1 + f(1)(x+1)}$$

$$\iff f(x) = \frac{2x^2}{x - 1 + f(1)(x+1)}$$

On rappelle que $f(1)^2 = 1$.
Si $f(1) = -1$ on a $f(x) = -x^2$ pour tout $x \neq 1$.
Si $f(1) = +1$ on a $f(x) = x$ pour tout $x \neq 1$.

Synthèse : Si $f : x \mapsto x$ on a

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = xy - 1 + xy = 2xy - 1$$

Si $f : x \mapsto -x^2$, on a

$$f(xy-1) + f(x)f(y) = -(x^2y^2 - 2xy + 1) - x^2y^2 = -2xy - 1$$

Donc les seules solutions sont, $x \mapsto x$ ainsi que $x \mapsto -x^2$.

Exercice 15

Trouver toutes les fonctions **continues** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$f(f(x) + y) = x + f(y)$$

pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 15

Analyse : Supposons que $f(0) \neq 0$. En remplaçant x par 0, on trouve $f(y + f(0)) = f(y)$ donc f est $f(0)$-périodique.
Or une fonction continue sur un intervalle fermé $[a, b]$ est bornée.
f est donc bornée sur $[0, f(0)]$ (ou $[f(0), 0]$ selon le signe de $f(0)$).
Comme f est périodique de période $f(0)$, f est bornée sur $\mathbb{R}$.
Ceci est absurde car, en remplaçant y par 0, on a $f(f(x)) = x + f(0)$ et le membre de droite n'est pas borné.

Donc $f(0) = 0$. On en déduit que $f(f(x)) = x$. D'où f est bijective.
En substituant x par $f(z)$, on a donc $f(z + y) = f(f(f(z)) + y) = f(z) + f(y)$.

Par conséquent, f **est solution de l'équation de Cauchy**, et puisque f est continue, $f(x) = a \cdot x$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$ par théorie.
Comme $f(f(x)) = x$, il faut que $a \in \{\pm 1\}$.

Synthèse : Réciproquement, $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$ sont bien solutions.