Solal Pivron-Djeddi 12/11/2025 Groupe B

Polynômes réels

Les polynômes sont des objets que l'on rencontre assez fréquemment en olympiades qui permettent une grande variété de points de vue. Leur grande particularité est leur caractère *rigide* que l'on retrouvera dans de nombreux exercices : ils sont entièrement déterminés par quelques informations.

On apprendra par exemple à travers ce cours à penser à un polynôme comme :

— Une suite de coefficients,

— Un ensemble de racines,

— Un ensemble fini de points,

— Une fonction en la variable x.

On va essentiellement se limiter à l'étude des polynômes sur les réels : il y aurait beaucoup de choses intéressantes à dire avec les nombres complexes mais ça sera pour une autre fois. On pourrait également aborder toutes les propriétés arithmétiques des polynômes mais ce serait s'éloigner du sujet.

Factorisation

Comme sur les entiers on peut naturellement définir une division euclidienne sur les polynômes.

Théorème 1 (Division euclidienne)**.** Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$. Il existe d'uniques polynômes $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$A = BQ + R,$$

avec $\deg R < \deg B$.

Démonstration. On remarque qu'on peut tuer le monôme dominant de A en lui enlevant un multiple de B approprié, puis on itère...

□

Un premier exemple de rigidité des polynômes provient alors du théorème suivant.

Théorème 2 (Factorisation)**.** Soit P un polynôme à coefficients réels et α un réel tel que $P(\alpha) = 0$. Il existe un polynôme Q tel que

$$P = (X - \alpha)Q.$$

Démonstration. On écrit la division euclidienne de P par $X - \alpha$: il existe deux polynômes $Q, R \in \mathbb{R}[X]$ avec R constant tels que

$$P = (X - \alpha)Q + R.$$

En évaluant en α :

$$R(\alpha) = 0.$$

On sait que R est constant donc c'est le polynôme nul et ainsi $P = (X - \alpha)Q$.

□

En itérant ce fait on en déduit que si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d$ sont des racines de P on peut écrire

$$P = (X - \alpha_1) \ldots (X - \alpha_d) Q,$$

pour un polynôme Q. En particulier en identifiant les degrés dans cette égalité on trouve que $d \leqslant \deg P$: un polynôme a moins de racine que son degré.

On en déduit immédiatement le lemme important suivant, très pratique.

Théorème 3. Deux polynômes égaux en une infinité de points sont égaux.

Démonstration. Soit P et Q deux polynômes égaux en une infinité de points. Le polynôme $P - Q$ a ainsi une infinité de racines donc ça doit être le polynôme nul : $P = Q$.

□

Voyons comment le mettre en pratique.

Exemple 4. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$.

On nous donne que $P(0) = 0$, ce qui nous incite à chercher d'autres valeurs de P. On obtient en tatonnant que $P(1) = P(1 + 0^2) = P(0)^2 + 1 = 1$, puis similairement que $P(2) = 2$.

On remarque qu'on peut itérer le processus précédent : on construit ainsi une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle qu'on ait toujours $P(x_n) = x_n$. Pour cela on se donne $x_0 = 0$, et pour $n \geqslant 0$ on prend $x_{n+1} = x_n^2 + 1$.

Cette suite tend clairement vers $+\infty$ donc on a $P(x) = x$ pour une infinité de valeurs de x : $P = X$ d'après le résultat précédent. Réciproquement c'est bien une solution, il s'agit donc de la seule.

On présente maintenant une deuxième application dans laquelle il s'agit de manipuler astucieusement l'énoncé avant d'utiliser le théorème de factorisation.

Exemple 5 (USAMO 1975 P3)**.** Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels tel que $P(k) = \frac{k}{k+1}$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$. Calculer $P(n + 1)$.

Ce deuxième exemple est assez astucieux et peu naturel pour le moment mais il a l'avantage d'être assez instructif. L'idée est d'introduire le polynôme

$$Q(x) = (x + 1)P(x) - x.$$

On sait que Q est de degré $n + 1$ et par hypothèse s'annule en $0, 1, \ldots, n$. On a trouvé $n + 1$ racines à un polynôme de degré $n + 1$ donc on peut le factoriser complètement :

$$Q = \lambda X(X - 1) \ldots (X - n),$$

pour un réel λ.

On veut déterminer λ; pour cela il nous faudrait une information supplémentaire. Il se trouve qu'on a déjà utilisé toutes les informations de l'énoncé, notre seule espoir proviendrait donc de la définition de Q. En l'occurence on se rend compte que $Q(-1) = 1$, ce qui force

$$\lambda = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

On a ainsi

$$Q(n+1) = \lambda \times (n+1)! = (-1)^{n+1},$$

et donc

$$P(n+1) = \frac{(-1)^{n+1} + n + 1}{n+2}.$$

Exercice 1
Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels tel que $P(k) = \frac{1}{k}$ pour $k = 1, 2, \ldots, n+1$. Que vaut $P(0)$?

Exercice 2 (Canada 1970)
Soit P un polynôme à coefficients entiers. On suppose qu'il existe des entiers deux à deux distincts a, b, c et d tels que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Montrer qu'il n'existe pas d'entier k tel que $P(k) = 8$.

Exercice 3 (Hongrie 1975)
Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients positifs et admettant n racines réelles. On suppose que $P(0) = 1$, montrer que $P(2) \geqslant 3^n$.

Interpolation de Lagrange

Revenons un instant sur le problème 3 de l'USAMO 1975. En connaissant un polynôme en les réels 0, 1, ..., n on a pu retrouver la donnée de $P(n+1)$.

On peut se demander si ce n'était qu'une simple coïncidence, et sinon comment généraliser. On se donne ainsi une liste de points $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_k, b_k)$ et on cherche un polynôme qui les interpole :

$$\forall i \in [\![1, k]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$

Graphiquement cela revient à trouver une courbe polynômiale qui passe par des points prescrits.

Telle quelle la question est en fait trop peu précise : on peut imaginer des polynômes arbitrairement complexes qui passent par ces points ; on va ainsi devoir dans un premier temps restreindre les possibilités, par exemple en limitant le degré de P.

Théorème 6 (Interpolation de Lagrange)**.** Soit $a_1, \ldots, a_{k+1}$ des réels distincts et $b_1, \ldots, b_{k+1}$ des réels quelconques. Il existe un unique polynôme P de degré plus petit que k tel que

$$\forall i \in [\![1, k+1]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$

Démonstration. On peut commencer par prouver l'unicité. Soit P et Q deux tels polynômes ; par hypothèse on a :

$$\forall i \in [\![1, k+1]\!], \quad P(a_i) = b_i = Q(a_i).$$

On en déduit que le polynôme $P - Q$ s'annule en $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$. C'est un polynôme de degré inférieur à d donc ce doit être le polynôme nul : $P = Q$.

On veut maintenant prouver l'existence. On va commencer par résoudre un problème légèrement plus simple : peut-on construire un polynôme L tel que

$$L(a_1) = 1 \text{ et } \forall i \in [\![2, k+1]\!], \quad L(a_i) = 0.$$

La deuxième condition impliquerait qu'on peut en fait écrire pour $Q \in \mathbb{R}[X]$:

$$L = (X - a_2) \ldots (X - a_{k+1})Q.$$

On veut alors simplement $L(a_1) = 1$, soit $Q(a_1) = \frac{1}{(a_1 - a_2) \ldots (a_1 - a_{k+1})}$; le plus simple est alors de prendre Q constant égal à cette valeur !

Okay donc maintenant on va considérer astucieusement des polynômes $L_1, L_2, \ldots, L_{k+1}$ tels que L_i vaut 1 en a_i et 0 ailleurs pour $i = 1, 2, \ldots, k+1$.

On considère maintenant le polynôme

$$P(X) = \sum_{i=1}^{k+1} b_i L_i(X).$$

On sait facilement calculer ce polynôme en un a_j donné ! Tous les termes de la somme s'annulent sauf celui en $i = j$ donc $P(a_j) = b_j L_j(a_j) = b_j$ pour $j = 1, 2, \ldots, k+1$! On a résolu le problème. □

Remarque 7.
On a donc la formule plus explicite suivante pour le polynôme interpolateur :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{k+1} b_i \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Ce théorème est en fait très puissant : donnons nous un polynôme P de degré n ainsi que $n+1$ réels distincts $a_1, \ldots, a_{n+1}$. On sait que P interpole les points $(a_1, P(a_1)), \ldots (a_{n+1}, P(a_{n+1}))$ et comme il y en a $n+1$, c'est l'unique polynôme de degré $\leqslant n$ à faire ceci.

On en déduit que P est défini uniquement par la donnée de $n+1$ de ses valeurs, et qu'en particulier on peut écrire :

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n+1} P(a_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

On peut s'essayer à résoudre notre problème d'USAMO avec ces nouveaux outils. On va très vite se rendre compte que ce n'est pas forcément le meilleur exemple d'utilisation de l'interpolation de Lagrange. Ca aura l'avantage de marcher (par définition !), mais en contrepartie les calculs seront assez lourds et astucieux. Je vous invite ainsi à ne pas forcément chercher à tous les comprendre dans un premier temps.

Exemple 8 (USAMO 1975 P3)**.** Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels tel que $\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(k) = \frac{k}{k+1}$. Que vaut $P(n+1)$?

On peut écrire que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \prod_{j \neq k} \frac{X - j}{k - j},$$

et donc

$$P(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \prod_{j \neq k} \frac{n+1-j}{k-j}.$$

Essayons d'abord de simplifier chacun des produits $\prod_{j \neq k} \frac{n+1-j}{k-j}$. En haut on va faire le produit de $n+1$ à 1 en excluant le terme en $n+1-k$ donc le numérateur se simplifie en

$$\frac{(n+1)!}{n+1-k}.$$

En bas on va faire le produit de k à 1 puis de -1 à $k-n$ donc finalement cela donne $k! \times (n-k)! \times (-1)^{n-k}$. Ainsi :

$$\prod_{j \neq k} \frac{n+1-j}{k-j} = (-1)^{n-k} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
P(n+1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} \prod_{j\neq k} \frac{n+1-j}{k-j} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{k+1} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{k} \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} k \binom{n+2}{k+1} (-1)^k \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \sum_{k=0}^{n} k \left(\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} \right) (-1)^k \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \left(-\binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3} - 3\binom{n+1}{3} - \cdots + (-1)^n n \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \left(0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k} + (-1)^n n \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \left((1-1)^{n+1} - 1 - (-1)^{n+1} + (-1)^n n \right) \\
&= \frac{(-1)^n}{n+2} \left(-1 + (-1)^n (n+1) \right) \\
&= \frac{n+1+(-1)^{n+1}}{n+2}.
\end{aligned}$$

Quelle leçon tirer de cet exemple ?

— La formule explicite d'interpolation de Lagrange permet d'excellents exercices de manipulations de coefficients binomiaux pour les profs de prepa,

— La formule explicite d'interpolation de Lagrange génère souvent des calculs lourds et doit en pratique être utilisée avec soin.

On retiendra donc souvent plutôt sous le nom d'interpolation de Lagrange l'idée que par $n+1$ points passe un unique polynôme de degré n ; et qu'un polynôme de degré n est défini par $n+1$ de ses valeurs. On pourra alors occasionnellement utiliser la formule explicite, une fois qu'on sait pourquoi et comment on veut l'utiliser.

Exercice 4
Soit P un polynôme à coefficients réels tel que si q est rationnel, $P(q)$ l'est aussi. Montrer que P est à coefficients rationnels.

Exercice 5
Soit $a_1, \ldots, a_k$ des réels distincts et $b_1, \ldots, b_k$ des réels. Décrire explicitement l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall i \in [\![1,k]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$

Exercice 6 (OFM 2024 P1)
Soient d et m deux entiers strictement positifs fixés. Pinocchio et Geppetto connaissent les valeurs de d et m, et jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Pinocchio choisit un polynôme P de

degré au plus d à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Ensuite, Geppetto lui pose des questions de la forme « Quelle est la valeur de $P(n)$? », où $n \in \mathbb{Z}$. Pinocchio dit habituellement la vérité, mais il peut mentir jusqu'à m fois.
Quel est, en fonction de d et m, le nombre minimal de questions que Geppetto devra poser pour être sûr de pouvoir déterminer P quelles que soient les réponses de Pinocchio ?

Asymptotique

Jusqu'à maintenant on a considéré les polynômes comme des objets abstraits, que l'on peut factoriser, interpoler, etc... Ici on s'intéressera plutôt à leurs propriétés "graphiques" et à leur comportement en tant que fonctions en x. On écrira par la suite $f \gg g$ pour signifier que f est en ordre de grandeur beaucoup plus grand que g ; typiquement $10^3 \gg 1$ et $-10^3 \gg 1$.

On se fixe un polynôme

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Intuitivement on peut découper le comportement de P sur l'axe réel en deux parties.

— Pour $|X| \gg 1$ on tend à avoir $X^n \gg X^{n-1} \gg \cdots \gg X \gg a_0$.

On a donc envie de dire que à un moment, pour X assez grand, P vaudra essentiellement son monôme dominant : $P(X) \approx a_n X^n$. On peut essayer de formaliser ce que l'on vient de dire.

Théorème 9. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels et $\epsilon > 0$. Il existe N tel que :

$$\forall x \geqslant N, \quad (a_n - \epsilon)x^n \leqslant P(x) \leqslant (a_n + \epsilon)x^n.$$

Démonstration. On remarque que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{P(x)}{x^n} = a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_0}{x^n}.$$

Quand on prend x très grand les termes du membre de droite autre que a_n tendent vers 0 : ils deviennent arbitrairement petits. A un moment leur somme sera donc comprise entre $-\epsilon$ et $+\epsilon$, d'où la conclusion.

□

Cette preuve et ce résultat sont essentiellement peu utiles (et se retrouvent sans problèmes) mais permettent de mettre en avant l'aspect mathématique derrière l'intuition des ordres de grandeur qu'on avait en tête.

— Pour $1 \gg |X|$ on tend à avoir $a_0 \gg X \gg X^2 \cdots \gg X^n$.

C'est peut-être moins intuitif ; pour s'en convaincre prenons $X = \frac{1}{100}$. Effectivement $\frac{1}{100} = 0,01$ est très petit, mais quand même 100 fois plus grand que $\left(\frac{1}{100}\right)^2 = 0,0001$ qui est encore plus petit.

Ici c'est moins clair de savoir quoi faire de ce constat : on voudrait bien approximer comme précédemment P par a_0 au voisinage de 0 mais ça semble peu intéressant. Effectivement les polynômes $X^2 + 1$ et $100X + 1$ valent tous les deux 1 en 0 tandis que le premier plonge vraiment plus vite que le second (cf. geogebra)...

Ainsi on devra adapter la qualité de nos approximations en fonction de ce dont on a besoin ; on utilisera donc parfois que $P(x) \approx a_0 + a_1 X$, plus rarement que $P(X) \approx a_0 + a_1 X + a_2 X^2$. L'important est surtout d'avoir ces ordres de grandeur en tête !

Exemple 10 (A1 2020)**.** Soit $N = 2^n$ pour un entier $n \geqslant 1$. Trouver le plus petit réel a_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt[N]{\frac{x^{2N}+1}{2}} \leqslant a_n(x-1)^2 + x.$$

On remarque tout d'abord qu'on a égalité en $x = 1$. On va donc avoir intérêt à s'intéresser à ce qu'il se passe au voisinage de 1 : il faut choisir a_n de sorte à ce que les courbes correspondant aux fonctions à droite et à gauche soient tangentes en $x = 1$ pour espérer garantir l'inégalité.

Avant toute chose on passe à la puissance N des deux côtés :

$$\frac{x^{2N}+1}{2} \leqslant (a_n(x-1)^2 + x)^N.$$

Idéalement on voudrait quantifier l'ordre de grandeur de chacun des deux côtés de cette inégalité au voisinage de 1 pour obtenir quelque chose d'intéressant. On n'a pas vu comment étudier un polynôme P au voisinage de 1 : on va ainsi considérer $Q(x) = P(x-1)$ et se ramener à étudier Q au voisinage de 0.

On regarde ainsi le polynôme

$$S(x) = (a_n x^2 + x + 1)^N - \frac{(x+1)^{2N}+1}{2}$$

au voisinage de 0. Pour cela on cherche à connaitre ses premiers termes, on procède par étapes.

A droite on garde les termes de degré $\leqslant 2$:

$$\frac{(x+1)^{2N}+1}{2} = \frac{\sum_{k=0}^{2N}\binom{2N}{k}x^k + 1}{2} = \frac{N(2N-1)x^2 + 2Nx + 2}{2} + x^3 P_1(x),$$

pour un polynôme P_1. On procède de même à gauche de sorte que

$$(a_n x^2 + x + 1)^N = 1 + Nx + \left(Na_n + \frac{N(N-1)}{2}\right)x^2 + x^3 P_2(x),$$

pour un polynôme P_2. On a donc :

$$S(x) = \left(Na_n + \frac{N(N-1)}{2} - \frac{N(2N-1)}{2}\right)x^2 + x^3 P_3(x),$$

pour un polynôme P_3 ($P_3 = P_1 + P_2$). On veut que S soit toujours positif ; il faut donc en particulier que son coefficient devant x^2 (qui est son monôme de plus petit degré) soit positif et ainsi que

$$Na_n + \frac{N(N-1)}{2} \geqslant \frac{N(2N-1)}{2},$$

soit $a_n \geqslant \frac{N}{2}$. On montre alors par récurrence que $a_n = \frac{N}{2}$ fonctionne en effet mais je vous passe les détails comme ce n'est pas la partie du problème qui m'intéressait.

On conclut cette partie en énonçant un autre fait assez intuitif.

Théorème 11 (Théorème de Rolle)**.** Soit $a < b$ deux réels tel que $P(a)$ et $P(b)$ soient de signe différents. Il existe $t \in [a, b]$ tel que $P(t) = 0$.

Ainsi la plupart des exercices du type "Montrer que tel polynôme n'a pas de racine réelle" seront souvent des exercices d'inégalités cachées : on veut en fait montrer que le polynôme concerné est de signe constant. Ce sera en particulier peine perdue pour les polynômes de degré impair, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 12. Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

Ecrivons $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ avec n impair. Quitte à considérer plutôt $-P$, ce qui ne changera rien au résultat, on peut supposer que a_n est strictement positif.

En $x \approx +\infty$ on a :

$$P(x) \approx a_n x^n.$$

Ainsi P va être ultimement positif pour des valeurs très grandes. En $x \approx -\infty$ on a :

$$P(x) \approx a_n x^n.$$

Ainsi P va être ultimement négatif pour des valeurs très grandes. On en déduit qu'il existe deux réels $a < b$ tels que $P(a) < 0$ et $P(b) > 0$; on conclut par Rolle.
Où a-t-on utilisée l'hypothèse n impair ?

Exercice 7
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad P(x) = \sqrt{x}.$$

Exercice 8
Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = 1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 9
Soit P un polynôme unitaire à coefficients entiers et Q un polynôme à coefficients entiers. On suppose qu'il existe une infinité d'entiers n tels que

$$P(n) \mid Q(n).$$

Montrer qu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $Q = PR$.

Différences finies

Soit P un polynôme de degré n. On a vu dans le chapitre asymptotique que globalement $P \approx X^n$: P est très grand. Parfois, on souhaitera réduire ce gap, on sera donc amené à définir d'autres quantités telles que le pas $Q(x) = P(x+1) - P(x)$, plus petit.

Essayons cela : étant donné un polynôme P de degré n et de coefficient dominant a_n on définit le polynôme $\Delta P = P(x+1) - P(x)$; c'est la première différence finie de P. On peut remarquer que :

— Le polynôme ΔP est de degré $n-1$,

— Le coefficient dominant de Q vaut na_n,

— Si P est à valeurs entières alors ΔP aussi.

Les différences finies permettent donc d'abaisser le degré d'un polynôme, et donc de le rendre plus appréhendable. On peut alors généraliser le processus et noter $\Delta^2 P = \Delta(\Delta Q) = P(x+2) - 2P(x+1) + P(x)$ la deuxième différence finie de P, et ainsi de suite.

On montre dès lors sans trop de problèmes que pour $k \in \mathbb{N}$:

$$(\Delta^k P)(X) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} P(X+i).$$

On sait que l'application Δ diminue le degré donc $\Delta^{n+1} P$ doit être le polynôme nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \binom{n+1}{i} P(x+i) = 0.$$

Cette formule n'est pas du tout intuitive ! Elle illustre cependant que même si un polynôme est très grand asymptotiquement, des termes consécutifs vont se compenser.

Exemple 13 (BMO A4 2021)**.** Soit f et g des fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Théo se déplace sur une grille d'entiers. Sa position initiale est (x_0, y_0), et pour chaque $n \geqslant 1$ elle saute de $f(n)$ dans une direction et de $g(n)$ dans l'autre direction, dans un sens ou dans l'autre :

$$(x_n, y_n) - (x_{n-1}, y_{n-1}) = (\pm f(n), \pm g(n)) \text{ ou } (\pm g(n), \pm f(n)).$$

Il y a en particulier 8 sauts possibles. Théo peut-il toujours repasser par $(0,0)$ une infinité de fois si

— f et g sont dans $\mathbb{Z}[X]$?

— f et g sont des fonctions quelconques ?

La deuxième question a l'air plus simple que la première, on y répond donc en premier. On va montrer avec deux constructions différentes que la réponse est non ; on fixe $g = 0$.

Parité : On pose $f(1) = 1$ et $f(n) = 0$ pour $n \geqslant 2$. On montre alors par récurrence immédiate que Théo se promène sur des points dont la première coordonnée est impaire : il ne reviendra jamais en $(0,0)$.

Taille : On pose $f(n) = 3^n$ pour $n \geqslant 1$. On montre avec Bernoulli que

$$|\sum_{k=1}^{n-1} \pm 3^k| < \frac{1}{2} \times 3^n.$$

Autrement dit, la fonction f ainsi construite croît beaucoup trop vite pour que des sommes partielles puissent se compenser : Théo ne reviendra jamais en $(0,0)$.

Voyons maintenant la première question. On considère le cas où $g = 0$ pour se faire une intuition.

On remarque que les deux contre-exemple précédemment fournis ne s'appliquent plus : ce ne sont pas des polynômes. Justement, on sait même qu'une idée de taille comme précédemment ne pourra aboutir comme une somme de la forme

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} f(i)$$

va s'annuler si on prend k assez grand. Il parait donc cohérent qu'une somme de la forme

$$\sum_{i=0}^{k} \pm f(i)$$

puisse s'annuler si on s'y prend bien. On va pour cela s'inspirer de la méthode des différences finies et abaisser progressivement le degré de f.

On pose d'abord $f_1(x) = f(x+1) - f(x)$. On remarque qu'on n'a pas intérêt à poser ensuite $f_2(x) = f_1(x+1) - f_1(x)$ car dans ce cas $f_2(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$ et on a 2 fois le terme $f(x+1)$. On essaye donc plutôt de poser $f_2(x) = f_1(x+2) - f_1(x)$, ce qui donne

$$f_2(x) = f(x+3) - f(x+2) - f(x+1) + f(x).$$

Tout va bien ! On itère en posant à l'étape i : $f_{i+1}(x) = f_i(x + 2^i) - f_i(x)$. On montre sans trop de problèmes que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad f_i(x) = \sum_{k=0}^{2^i - 1} \epsilon_i f(x+k),$$

avec $\epsilon_0, \epsilon_2, \ldots, \epsilon_{2^i - 1} \in \{-1, 1\}$. On sait que pour $i > \deg f$ on doit avoir $f_i = 0$. En écrivant cette égalité en $x = 1$ avec les ϵ_i correspondant on parvient à faire revenir Théo une fois à l'origine. On peut alors le faire revenir infiniment souvent, et de généraliser ensuite au cas où $g \neq 0$.

Exercice 10 (ELMO 2018 N1)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les ensembles $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$ consistant de n entiers naturels tels que $a_1 \ldots a_n$ divise $(x + a_1) \ldots (x + a_n)$ pour tout entier x.

Quelques exercices de plus

Exercice 11
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2x) = P(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 12
Soit P un polynôme à coefficients entiers. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$a - b \mid P(a) - P(b).$$

Exercice 13 (USAMO 1974)
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Existe-t-il trois entiers distincts a, b et c tels que

$$\begin{array}{rcl} P(a) & = & b \\ P(b) & = & c \\ P(c) & = & a. \end{array}$$

Exercice 14
Montrer que les fonctions $|x|$ et $\lfloor x \rfloor$ ne sont pas des polynômes.

Exercice 15
Trouver tous les polynômes P tels que pour tout réel x on ait

$$(x - 16)P(2x) = 16(x - 1)P(x).$$

Exercice 16 (Binaire)
a. Pour $n \in \mathbb{N}$, développer le polynôme

$$(1 + X)(1 + X^2)(1 + X^4)...(1 + X^{2^n}).$$

b. En déduire que tout entier $p > 0$ s'écrit de façon unique comme somme de puissances de 2.

Exercice 17 (nécessite la dérivée)
Montrer qu'un polynôme est monotone suffisament loin.

Exercice 18
Soit P un polynôme de degré 2026. Montrer qu'il existe un réel x tel que

$$P(x + 1) = P(x - 1).$$

Exercice 19
Soit x_1 et x_2 les racines du polynôme $X^2 - 6X + 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_1^n + x_2^n \in \mathbb{Z}$ et $x_1^n + x_2^n \not\equiv 0 \pmod 5$.

Exercice 20 (Olympiades Bulgares 2023, p10.3)
Soit k un entier naturel pour lequel il existe un polynôme P tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(n) = \operatorname{ppcm}(n + 1, n + 2, \ldots, n + k).$$

Trouver toutes les valeurs possibles de k.

Exercice 21 (Envoi 2020 P16)
Benoît et Théo jouent au jeu suivant : au départ le polynôme X^{2020} est écrit au tableau. Chacun leur tour, Benoît et Théo ajoutent un mônome de la forme X^k avec $0 \leqslant k \leqslant 2020$ au polynôme précédent. A la fin du tour de Théo, Benoît gagne si, en notant P le polynôme écrit, il existe x tel que $P(x) < 0$; sinon le jeu continue. Benoît commence, montrer que Théo peut alors s'assurer de ne pas perdre.

Exercice 22
Soit p un premier et P un polynôme à coefficients entiers de degré d. On suppose que $P(n) \in \{0, 1\} \pmod p$ pour tout entier n. Montrer que $d \geqslant p - 1$.

Exercice 23
Montrer que pour tout $M > 0$ il existe A tel que pour tout $d \geqslant A$ et tout polynôme P unitaire de degré d, il y a au plus d entiers n tels que $|P(n)| < M$.

Exercice 24 (APMO 2020 P4)
Trouver tous les polynômes à coefficients entiers qui vérifient la propriété suivante : Pour toute suite infinie $a_1, a_2, \ldots$ à valeur entières dans laquelle tout entier relatif apparaît exactement une fois, il existe des indices $i < j$ et un entier k tel que

$$a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j = P(k).$$

Exercice 25 (RMM A1 2024)
Soit $d \geqslant 1$ un entier fixé. Anna et Baptiste jouent au jeu suivant. Chacun à leur tour, en commençant par Anna, ils choisissent un entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant 2d - 1$ et qui n'a pas encore été choisi par un des deux joueurs, et un réel strictement positif qu'ils notent a_k. Lorsque tous les entiers ont été choisis, Anna écrit le polynôme $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{2d-1} X^{2d-1} + X^{2d}$. Anna gagne s'il existe un réel c tel que $P(c) = 0$. Sinon c'est Baptiste qui gagne.
Déterminer, en fonction de d, lequel des deux joueurs possède une stratégie lui permettant de gagner quels que soient les coups de son adversaire.

Exercice 26
Soit n un entier strictement positif pair, et $c_1, \ldots, c_{n-1}$ des réels vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n-1} |c_i - 1| < 1.$$

Démontrer que le polynôme

$$2x^n - c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} - \cdots - c_1 x + 2$$

n'a pas de racines réelles.

Exercice 27
Quel est, en fonction de d, l'intervalle de longueur maximale I tel que pour tout

$a_0, a_1, \ldots, a_{2d} \in I$, le polynôme $P(x) = x^{2d} + a_{2d-1}x^{2d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ n'ait aucune racine réelle.

Exercice 28
Soit P un polynôme à coefficients réels tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout réel x. Prouver qu'il existe des polynôme A et B à coefficients réels tels que

$$P(x) = A(x)^2 + B(x)^2.$$

Exercice 29 (USAMO 2003 P3)
Montrer que tout polynôme unitaire de degré n à coefficients réels est la moyenne de deux polynômes unitaires de degré n qui ont chacun n racines réelles.

Exercice 30 (RMM 2023 A1)
Identifier tous les polynômes P à coefficients réels tels que, pour tous les réels x et y tels que $P(x)$ et $P(y)$ sont rationnels, $P(x+y)$ est aussi rationnel.