Quelques inégalités

Un des enjeux majeurs des problèmes d'algèbre rencontrés aux Olympiades est d'être capable **d'estimer des quantités et de comparer des quantités entre elles**. Cela peut être explicité dans l'énoncé ("démontrer l'inégalité suivante") ou implicite, c'est-à-dire que la recherche de la solution amène à comparer des quantités. Les outils à notre disposition sont les suivants.

- Les inégalités classiques : inégalité des moyennes, Cauchy-Schwarz, réordonnement, convexité.
- l'inégalité triangulaire : $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
- Manipulations algébriques : télescopage, ajout/retrait d'une quantité, dans le cas d'une somme regroupe certains termes bien choisis de la somme entre eux.

Dans les problèmes d'Olympiades, la seule connaissance de ces inégalités ne suffit pas. La réussite d'un problème dépend souvent de la capacité à estimer une expression sans être "trop gourmand". Voici quelques conseils :

- Prenons $x \in [0, 1]$. Pour estimer x^2, il y a plusieurs possibilités. On peut par exemple majorer x^2 par 1, mais on peut aussi majorer x^2 par x, ce qui est plus fin et permet de conserver de "l'information" (par exemple si les variables sont reliées par une hypothèse). Ainsi, en plus des inégalités classiques, il faut détecter quelle majoration/minoration va être la plus précise pour le problème qui nous intéresse. On n'hésitera pas à commencer par des estimations grossières, que l'on raffine en reprenant son raisonnement.
- Un bon indicateur pour savoir si l'on est trop gourmand est le cas d'égalité de l'inégalité que l'on cherche à estimer. Une fois que vous avez le cas d'égalité en tête, demandez-vous si l'inégalité que vous êtes en train d'appliquer conserve bien ce cas d'égalité. Si ce n'est pas le cas, c'est que vous êtes trop gourmand. Ainsi, inutile de minorer $x + 1/x$ par 2 si le cas d'égalité ne correspond pas à $x = 1$.
- Il est possible qu'il faille une disjonction de cas sur la valeur de x (une fois encore, x^2 ne se majore pas de la même façon selon que $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 1$. De même, il est possible qu'il faille découper l'expression en plusieurs orceaxu et de devoir faire un raisonnement différent pour chaque morceau.
- Enfin, il n'est pas rare qu'un argument combinatoire ou arithmétique soit nécessaire dans le problème. Il faut y être sensible.

Ces conseils abstraits trouvent leur illustration dans les exercices qui suivent (qui ne sont pas classés par ordre de difficulté).

Exercices

Exercice 1. *(Coupe Animath 2021)* Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe n réels $x_1, \ldots, x_n$ appartenant tous à l'intervalle $]-1,1[$ et pour lesquels $x_1+\ldots+x_n = 0$ et $x_1^2+\ldots+x_n^2 = 2020$.

Exercice 2. *(TST belge 2010)* Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^n i a_i\right| \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Exercice 3. *(RMM 2016 P4)* Soient x et y des réels strictement positifs tels que $x + y^{2016} \geqslant 1$. Montrer que $x^{2016} + y > 1 - \dfrac{1}{100}$.

Exercice 4. *(IMO SL 2010 A3)* Soient $x_1, \ldots, x_{100}$ des réels positifs vérifiant que $x_i+x_{i+1}+x_{i+2} \leqslant 1$ pour tout $i \leqslant 100$ (avec la convention $x_{101} = x_1$ et $x_{102} = x_2$). Déterminer la valeur maximale que peut prendre

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$$

Exercice 5. *(Entraînement groupe E 2023)* Déterminer la plus grande constante $C > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout $2023-$uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_{2023})$ de réels strictement positifs deux à deux distincts, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a_1}{|a_2-a_3|} + \frac{a_2}{|a_3-a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1-a_2|} > C.$$

Exercice 6. *(EGMO 2014 P1)* Déterminer tous les réels t tels que pour tout triplet (a,b,c) désignant les longueurs des côtés d'un triangle, a^2+bct, b^2+cat et c^2+abt sont également les longueurs des côtés d'un triangle.

Exercice 7. *(IMO 2007 P1)* Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$d_i = \max\{a_j, 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j, i \leqslant j \leqslant n\}$$

On pose $d = \max\{d_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.

1) Montrer que pour tous $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ réels, on a

$$\max\{|x_i - a_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}$$

2) Montrer qu'existent des réels $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ tels qu'on ait égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 8. *(EGMO 2018 P6)*

1) Montrer que pour tout $0 < t < \frac{1}{2}$, il existe un entier $n > 0$ tel que : pour tout ensemble S de n entiers strictement positifs, il existe deux éléments distincts $x, y \in S$ et $m \geqslant 0$ entier tels que

$$|x - my| \leqslant ty.$$

2) Déterminer si pour tout $0 < t < 1/2$, il existe un ensemble S infini d'entiers distincts tel que pour tous $x, y \in S$, $m > 0$,

$$|x - my| > ty.$$

Exercice 9. *(IMO SL 2021 A5)* Soit $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs de somme 1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1 - a_k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}.$$

1 Solutions

Exercice 1. *(Coupe Animath 2021)* Déterminer le plus petit entier n tel qu'il existe n réels $x_1, \ldots, x_n$ appartenant tous à l'intervalle $]-1,1[$ et pour lesquels $x_1+\ldots+x_n=0$ et $x_1^2+\ldots+x_n^2=2020$.

Solution 1.
Réponse : $n = 2022$.

L'exercice demande de trouver le plus petit entier n vérifiant une certaine propriété. Pour montrer que le plus grand entier recherché est un entier c, il y a donc nécessairement deux parties distinctes : l'analyse, dans laquelle on établit que tout entier n vérifiant la propriété énoncée vérifie $n \geqslant c$, et la construction, dans laquelle on donne un exemple de c réels $x_1, \ldots, x_c$ de l'intervalle $]-1,1[$ vérifiant les deux égalités mentionnées.

Analyse : Soit n le plus petit entier vérifiant la propriété de l'énoncé et soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels de l'intervalle $]-1,1[$ pour lesquels

$$x_1+\ldots+x_n=0 \qquad \text{et} \qquad x_1^2+\ldots+x_n^2=2020.$$

Tout d'abord, puisque $x_i^2<1$ pour tout entier $i \leqslant n$, on a $2020 = x_1^2+\ldots+x_n^2 < 1+\ldots+1 = n$ donc $n \geqslant 2021$.
Par ailleurs, si l'un des réels, par exemple x_n, est nul, alors

$$x_1+\ldots+x_{n-1}=0 \qquad \text{et} \qquad x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2=2020.$$

Ainsi, $n-1$ vérifie également la propriété, en contradiction avec la minimalité de n. On sait donc que tous les réels x_i sont non nuls. Quitte à les renuméroter, on peut aussi supposer que $-1<x_1,\ldots,x_k<0$ et $0<x_{k+1},\ldots,x_n<1$ pour un certain entier $1 \leqslant k \leqslant n-1$. En effet, comme la somme des réels est nulle, on dispose d'au moins un réel strictement négatif, et d'au moins un réel strictement positif.

Tout d'abord, puisque $x_i > -1$ pour tout réel $i \leqslant k$, on sait que

$$0 = x_1+x_2+\ldots+x_n > (-k)+x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n.$$

En outre, pour tout $i \leqslant k$, le réel x_i appartient à l'intervalle $]-1,0[$, donc $x_i^2<1$. De même, pour tout $i \geqslant k+1$, le réel x_i appartient à l'intervalle $]0,1[$, donc $x_i^2 < x_i$. On en déduit que

$$2020 = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2 < k+x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n,$$

et donc que

$$2020-2k < (-k)+x_{k+1}+x_{k+2}+\ldots+x_n < 0.$$

On a donc $k > 1010$, soit $k \geqslant 1011$. Ainsi, quels que soient les réels tous non nuls vérifiant les deux égalités, il y a au moins 1011 réels strictement négatifs. Or, si $(x_1,\ldots,x_n)$ est un n-uplet vérifiant les deux égalités de l'énoncé, le n-uplet $(-x_1,\ldots,-x_n)$ vérifie également les deux égalités de l'énoncé. On a donc également au moins 1011 réels strictement positifs. On a donc en tout au moins 2022 réels, de sorte que $n \geqslant 2022$.

Construction : Réciproquement, on montre que $n = 2022$ vérifie la propriété de l'énoncé. Le plus simple pour cela est de chercher un 2022-uplet de la forme $(x, -x, x, -x, \ldots, x, -x)$ avec x bien choisi. En injectant ce 2022-uplet dans l'équation de droite, on trouve $2022x^2 = 2020$, soit

$$x = \pm\sqrt{\frac{2020}{2022}}.$$

Par construction, pour un tel x, le 2022-uplet $(x, -x, x, -x, \ldots, x, -x)$ vérifie bien les deux égalités.

En conclusion, le plus petit entier n vérifiant la propriété de l'énoncé est $n = 2022$.

Exercice 2. *(TST belge 2010)* Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^n i a_i\right| \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Solution 2. Si on utilise l'inégalité triangulaire à tours de bras, cela ne va pas donner quelque chose de concluant. En revanche, la forme de la somme donne envie de séparer les termes comme suit, puis d'échanger l'ordre des signe somme (on a le droit de le faire car le résultat ne dépend pas de l'ordre de sommation) :

$$\sum_{i=1}^n i a_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_i$$

Par inégalité triangulaire on a donc :

$$\left|\sum_{i=1}^n i a_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=j}^n a_i\right|$$

Pour rajouter un peu de symétrie, on est tenté d'introduire un terme de la forme $|\sum (n-i)a_i|$. Cela est d'ailleurs bien commode puisque

$$\left|\sum (n-i)a_i\right| = \left|n\sum a_i - \sum i a_i\right| = \left|\sum i a_i\right|$$

Or ce terme vérifie de même que plus haut :

$$\left|\sum_{i=1}^n (n-i)a_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=1}^j a_i\right|$$

En résumé :

$$\begin{aligned}
2\left|\sum_{i=1}^{n} i a_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(n-i)a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} i a_i\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=j}^{n} a_i\right| + \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{j} a_i\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\left|\sum_{i=j}^{n} a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{j} a_i\right|\right) \\
&\leqslant \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i| \\
&= n-1
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Exercice 3. *(RMM 2016 P4)* Soient x et y des réels strictement positifs tels que $x + y^{2016} \geqslant 1$. Montrer que $x^{2016} + y > 1 - \frac{1}{100}$.

Solution 3. Si $y > 1 - \frac{1}{100}$, on a déjà gagné. On suppose désormais que $y \leqslant \frac{99}{100}$. On rappelle l'inégalité de Bernouilli :

$$(1+t)^n \geqslant 1 + nt, \qquad \forall t > -1, n \in \mathbb{N}^\star$$

que l'on peut prouver par récurrence sur n.
On a $x \geqslant 1 - y^{2016} \geqslant 1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{2016}$. L'inégalité de Bernouilli donne alors

$$x^{2016} = \left(1 - \left(\frac{99}{100}\right)^{2016}\right)^{2016} \geqslant 1 - 2016\left(\frac{99}{100}\right)^{2016}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{1}{100} \geqslant 2016\left(\frac{99}{100}\right)^{2016} \Leftrightarrow \left(\frac{100}{99}\right)^{2016} \geqslant 100 \cdot 2016.$$

L'inégalité de Bernouilli appliquée directement est trop gourmande et ne donne pas le résultat voulu, il faut donc être un peu plus fin. On peut par exemple utiliser

$$\left(1+\frac{1}{99}\right)^{2016} = \left(\left(1+\frac{1}{99}\right)^{99}\right)^{2016/99} \geqslant (1+1)^{2016/99} = 2^{2016/99} > 2^{20} > 1000^2 > 2016 \cdot 100,$$

ce qui conclut.

Exercice 4. *(IMO SL 2010 A3)* Soient $x_1, \ldots, x_{100}$ des réels positifs vérifiant que $x_i+x_{i+1}+x_{i+2} \leqslant 1$ pour tout $i \leqslant 100$ (avec la convention $x_{101} = x_1$ et $x_{102} = x_2$). Déterminer la valeur maximale que peut prendre

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$$

Solution 4. **Réponse :** $S \leqslant \dfrac{25}{2}$

Analyse :

L'idée ici est de regarder deux termes consécutifs de cette somme et d'essayer de les connecter à l'aide de l'hypothèse :

$$x_i x_{i+2}+x_{i+1}x_{i+3} \leqslant (1-x_{i+1}-x_{i+2})x_{i+2}+x_{i+1}(1-x_{i+1}-x_{i+2}) = (x_{i+1}+x_{i+2})(1-(x_{i+1}+x_{i+2})) \leqslant \frac{1}{4}$$

en utilisant l'inégalité $x(1-x) \leqslant 1/4$ pour tout $x \in [0,1]$, ce qui est le cas pour $x_{i+1}+x_{i+2}$. Il reste à découper la somme en paquet de quatre :

$$S = \sum_{k=1}^{50} (x_{2k-1}x_{2k+1} + x_{2k}x_{2k+2}) \leqslant \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{4} = \frac{25}{2}$$

Construction :

Il reste à montrer que cette valeur peut être atteinte. Pour cela, on regarde le cas d'égalité des inégalités que l'on a utilisées. Notamment, pour que les inégalités utilisées soient des égalités, il faut $x_{2k}+x_{2k+1} = \frac{1}{2}$. D'autre part, au moins l'un des deux termes x_{2k-1} et x_{2k+2} doit valoir $1/2$ pour vérifier $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 1$. On aboutit alors à la construction $x_{2k} = 0$ et $x_{2k+1} = 1/2$ pour tout k, dont on vérifie qu'elle permet d'atteindre la valeur maximale.

Exercice 5. *(Entraînement groupe E 2023)* Déterminer la plus grande constante $C > 0$ vérifiant la propriété suivante :
Pour tout $2023-$uplet $(a_1, a_2, \dots, a_{2023})$ de réels strictement positifs deux à deux distincts, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} > C.$$

Solution 5.
Réponse : 1012
On commence par montrer que $C \leqslant 1012$.
Pour cela, on se donne $0 < \varepsilon$ suffisamment petit et on pose

$$a_1 = \varepsilon^2, a_2 = 1, a_3 = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_{2i} = (i-1)\varepsilon,\ a_{2i+1} = 1 + i\varepsilon \ \ \forall\, 2 \leqslant i \leqslant 1011$$

pour laquelle on vérifie que les termes de la suite sont deux à deux distincts.

$$\begin{aligned}
RHS &= \frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + \frac{1}{1+\varepsilon-\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon}{1} + \sum_{i=2}^{1010}\left(\frac{(i-1)\varepsilon}{1+i\varepsilon - i\varepsilon} + \frac{1+i\varepsilon}{1+(i+1)\varepsilon - i\varepsilon}\right) \\
&\quad + \tfrac{1010\varepsilon}{1+1011\varepsilon-\varepsilon^2} + \tfrac{1+1011\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \\
&= \varepsilon + 1 + 1 + \varepsilon + \sum_{i=2}^{1010}\left((i-1)\varepsilon + 1 + \underbrace{\frac{(i-1)\varepsilon}{1+\varepsilon}}_{<(i-1)\varepsilon}\right) + \underbrace{\frac{1010\varepsilon}{1+1011\varepsilon-\varepsilon^2}}_{<1010\varepsilon} + \underbrace{\frac{1+1011\varepsilon}{1-\varepsilon^2}}_{<1+1012\varepsilon} \\
&< 1012 + \left(\tfrac{1011\times 1012}{2} + 2\right)\varepsilon
\end{aligned}$$

où chacune des inégalités est satisfaite pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Ainsi, pour tout $C' > 1012$, on dispose de $(a_1, \dots, a_{2023})$ tel que l'expression du membre de gauche est inférieur à C'. On a donc bien $C \geqslant 1012$.

On démontre désormais que $C \geqslant 1012$. Soit $(a_1, \dots, a_{2023})$ un ensemble de réels strictement positifs et distincts. Pour simplifier la notation, on pose $a_{2024} = a_1$ et $a_{2025} = a_2$
Pour tout i, on pose $f(i) = a_{i+1}$ si $a_{i+1} > a_{i+2}$ et $f(i) = i + 2$, de sorte que $\dfrac{a_i}{|a_{i+1} - a_{i+2}|} \geqslant \frac{a_i}{a_{f(i)}}$.
La suite $(f^{(n)}(1))_n$ étant à valeurs dans $\{1, \dots, 2023\}$, de sorte que l'on dispose de $r < s$ tel que $f^{(r)}(1) = f^{(s)}(1)$. Quitte à translater la suite, on peut supposer que $r = 0$. La suite est donc périodique, on note p sa période. Puisque $|f(i) - i| \leqslant 2$, on a $2p \geqslant 2023$ de sorte que $p \geqslant 1012$.
On peut alors conclure par l'inégalité des moyennes :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} \geqslant \sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_{f^{(i)}(1)}}{a_{f^{(i+1)}(1)}} \geqslant p \sqrt[p]{\prod \frac{a_{f^{(i)}(1)}}{a_{f^{(i+1)}(1)}}} = p \geqslant 1012$$

Remarque : Le problème reste vrai si les réels ne sont plus supposés deux à deux distincts (mias en imposant que le membre de gauche soit bien défini). La construction peut alors être simplifiée par

$$a_1 = \varepsilon^2, a_2 = 1, a_3 = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_{2i} = \varepsilon,\ a_{2i+1} = 1\ \ \forall\, 2 \leqslant i \leqslant 1011.$$

Exercice 6. *(EGMO 2014 P1)* Déterminer tous les réels t tels que pour tout triplet (a,b,c) désignant les longueurs des côtés d'un triangle, a^2+bct, b^2+cat et c^2+abt sont également les longueurs des côtés d'un triangle.

Solution 6. Quand on voit un exercice qui parle des longueurs des côtés d'un triangle, on pense au changement de variables, dit de Ravi :

$$a = y+z, \quad b = z+x, \quad c = x+y,$$

où x, y, z n'ont pour seule propriété que d'être positives.
Pour un $t \in \mathbb{R}$, on se demande si quelque soient $x, y, z > 0$, le triplet $(A, B, C) = (a^2+bct, b^+cat, c^2+abt)$ désigne les longueurs des côtés d'un triangle. On exprime A, B, C en fonction de (x, y, z) :

$$A = y^2 + z^2 + x^2t + zxt + xyt + zy(2+t),$$

$$B = z^2 + x^2 + y^2t + xyt + yzt + xz(2+t),$$
$$C = x^2 + y^2 + z^2t + yzt + zxt + yx(2+t).$$

Par symétrie des rôles, il suffit qu'on cherche la condition nécessaire et suffisante sur t pour que $A+B-C > 0$ pour tout $x, y, z > 0$.
Tout d'abord,

$$A+B-C = x^2t + y^2t + z^2(2-t) + xy(t-2) + yz(2+t) + zx(2+t).$$

Étudions plusieurs cas de figure. Dans le cas où $x = y > 0$ et $z = 0$,

$$A+B-C = 2x^2t + x^2(t-2) = (3t-2)x^2.$$

Ainsi, $A+B-C < 0$ si et seulement si $t < \frac{2}{3}$. Ainsi, pour $t < \frac{2}{3}$, par continuité, en choisissant des z petits, on trouve des $A+B-C$ strictement négatifs.
Dans le cas où $x = y = 0$ et $z > 0$,

$$A+B-C = z^2(2-t).$$

Ainsi, $A+B-C < 0$ si et seulement si $t > 2$. Ainsi, pour $t > 2$, par continuité, en choisissant des x, y suffisament petits, on trouve des $A+B-C$ strictement négatifs.
Ainsi, les seuls t qui ont une chance de marcher sont tels que $\frac{2}{3} \leq t \leq 2$. Vérifions que $t \in [2/3, 2]$ convient. On a

$$A+B-C > x^2t + y^2t + xy(t-2) = t\left(x^2 + y^2 + \frac{t-2}{t}xy\right) \geq t(x^2+y^2-2xy) = (x-y)^2 \geq 0,$$

car $-2 \leq \frac{t-2}{t} \leq 0$ pour tout $t \in [2/3, 2]$.

Exercice 7. *(IMO 2007 P1)* Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$d_i = \max\{a_j, 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j, i \leqslant j \leqslant n\}$$

On pose $d = \max\{d_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
1) Montrer que pour tous $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ réels, on a

$$\max\{|x_i - a_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}$$

2) Montrer qu'existent des réels $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ tels qu'on ait égalité dans l'inégalité précédente.

Solution 7. 1) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$, il suffit de montrer que $d_i \leqslant 2\max\{|x_j - a_j|, 1 \leqslant j \leqslant n\}$.
Soit $p \leqslant i$ tel que $a_p = \max\{a_j, j \leqslant i\}$ et $r \geqslant i$ tel que $a_r = \min\{a_j, j \geqslant i\}$. Alors

$$d_i = a_p - a_r = a_p - x_p + \underbrace{x_p - x_r}_{\leqslant 0} + x_r - a_r \leqslant |a_p - x_r| + |a_r - x_r| \leqslant 2\max\{|x_j - a_j|\}$$

ce qui donne l'égalité.

2) On regarde le cas d'égalité de notre inégalité ci-dessus. Si $d_i = d$, il faudrait que la suite (x_i) satisfasse $a_p \geqslant x_p$ (pour que $a_p - x_p = |a_p - x_p|$), $x_p = x_r$ et $x_r \geqslant a_r$. De plus pour que $|a_p - x_p| = |a_r - x_r| = \max\{|a_j - x_j|\}$, il faut déjà que $|a_p - x_p| = |a_r - x_r|$, soit $x_p = x_r = \frac{a_p + a_r}{2}$.
Soit donc $M_i = \max\{a_j, j \leqslant i\}$ et $m_i = \min\{a_j, j \geqslant i\}$. Le raisonnement ci-dessus nous invite à poser $x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$.
Montrons que ça marche. Tout d'abord, la suite (M_i) est croissante (le max est pris sur un ensemble plus grand), de même que la suite (m_i) (le min est pris sur un ensemble plus petit). On déduit que (x_i) est également croissante. De plus, si $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$x_i - a_i \leqslant \frac{M_i + m_i}{2} - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2} \leqslant \frac{d}{2}$$

et

$$x_i - a_i \geqslant \frac{M_i + m_i}{2} - M_i = -\frac{d_i}{2} \geqslant \frac{d}{2}$$

de sorte que $|x_i - a_i| \leqslant \frac{d}{2}$. L'inégalité étant satisfaite pour tout i, on déduit que $\max\{|a_j - x_j|\} \leqslant d/2$.
Comme la 1) garantit l'inégalité inverse, on a bien égalité.

Exercice 8. *(EGMO 2018 P6)*
1) Montrer que pour tout $0 < t < \frac{1}{2}$, il existe un entier $n > 0$ tel que : pour tout ensemble S de n entiers strictement positifs, il existe deux éléments distincts $x, y \in S$ et $m \geqslant 0$ entier tels que

$$|x - my| \leqslant ty.$$

2) Déterminer si pour tout $0 < t < 1/2$, il existe un ensemble S infini d'entiers distincts tel que pour tous $x, y \in S$, $m > 0$,

$$|x - my| > ty.$$

Solution 8. 1) Considérons un ensemble ne vérifiant pas la propriété et notons $x_1 > \ldots > x_n$ ses éléments. Pour tout indice i, on a donc

$$x_i - 1 \times x_{i+1} < -tx_{i+1},$$

ce qui implique que $\dfrac{x_i}{x_{i+1}} < 1 - t$. D'autre part,

$$x_1 - 0 \times x_n > tx_n.$$

On déduit que

$$t < \frac{x_1}{x_n} = \frac{x_1}{x_2} \cdot \frac{x_2}{x_3} \cdot \ldots \cdot \frac{x_{n-1}}{x_n} > (1-t)^{n-1}.$$

Cette inégalité étant fausse pour n suffisamment grand, on conclut l'existence d'un entier n vérifiant l'exercice.

2) Il s'agit de trouver un ensemble S tel que, pour tous $x, y \in S$ et tout entier $m > 0$,

$$\left| \frac{x}{y} - m \right| < t.$$

Si on ordonne les éléments de $S = \{s_1 < \ldots < s_n\}$, le cahier des charges de la suite s_i est le suivant : pour tout $i < j$,

$$\frac{s_i}{s_j} < \frac{1}{2}, \quad t < \left\{ \frac{s_j}{s_i} \right\} < \frac{1}{2}.$$

Posons s_1 un entier à définir plus tard et (s_n) définie par

$$s_{n+1} = \frac{(s_1 \ldots s_n)^2 + 1}{2}.$$

On montre par récurrence qu'il s'agit d'une suite strictement croissante d'entiers impairs. Par ailleurs, lorsque s_1 est suffisamment grand, on a les estimations

$$\frac{s_i}{s_n} \leqslant \frac{2}{s_i} \leqslant \frac{2}{s_1} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{s_n}{s_i} = \frac{s_i(s_1 \ldots s_{i-1}s_{i+1} \ldots s_{n-1})^2}{2} + \frac{1}{2s_i} \leqslant \frac{s_i(s_1 \ldots s_{i-1}s_{i+1} \ldots s_n)^2}{2} + \frac{1}{2s_1}.$$

Il vient que $\dfrac{s_n}{s_i}$ est de la forme $k + \dfrac{1}{2} + \varepsilon$ avec $\varepsilon < \frac{1}{2s_i}$. On déduit que pour tout m,

$$\left|m - \frac{s_n}{s_i}\right| > \frac{1}{2} - \frac{1}{2s_i}.$$

Pour s_1, suffisamment grand, cette quantité est supérieure à t, ce qui justifie que (s_n) satisfait la propriété voulue.

Exercice 9. *(IMO SL 2021 A5)* Soit $n \geqslant 2$ et $a_1, \dots, a_n$ des réels strictement positifs de somme 1. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1-a_k}(a_1 + a_2 + \ldots + a_{k-1})^2 < \frac{1}{3}.$$

Solution 9. La première idée est de travailler non pas avec les a_k mais avec les sommes partielles $s_k = a_1 + \ldots + a_k$.
L'expression devient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{1 - s_k + s_{k-1}} s_{k-1}^2.$$

On cherche alors à simplifier le dénominateur de chaque terme. Appliquer $\frac{1}{1 - s_k + s_{k-1}} \leqslant \frac{1}{s_{k-1}}$ est trop gourmand, on cherche donc une estimation plus précise (et toute la difficulté du problème est là). On peut par exemple établir

$$1 - s_k + s_{k-1} \geqslant \frac{s_{k-1}}{s_k} \Leftrightarrow (s_k - s_{k-1})(1 - s_k) \geqslant 0.$$

Ainsi, l'expression devient

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{s_k - s_{k-1}}{1 - s_k + s_{k-1}} s_{k-1}^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) s_{k-1}^2 \cdot \frac{s_k}{s_{k-1}} = \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) s_{k-1} s_k.$$

On n'est alors plus très loin de pouvoir conclure. D'après l'inégalité des moyennes, $s_{k-1}s_k \leqslant \frac{1}{3}(s_{k-1}^2 + s_{k-1}s_k + s_k^2)$, si bien que

$$\sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) s_{k-1} s_k \leqslant \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1})(s_{k-1}^2 + s_{k-1}s_k + s_k) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n} (s_k^3 - s_{k-1}^3) = \frac{s_n^3 - s_0^3}{3} = \frac{1}{3}.$$