PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 3 : ARITHMÉTIQUE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 29 JANVIER 2026

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe senior est constitué des élèves nés en 2010 ou avant, ou étant en terminale. Les autres élèves sont dans le groupe junior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Existe-t-il des entiers a, b tels que $a^2 + b^2 = 103^3$?

Exercice 2. Trouver le plus grand entier naturel k tel que $7^n + 5$ soit divisible par k pour tout $n \geqslant 1$.

Exercice 3. Trouver tous les entiers positifs x, y tels que $x^2 + y! = 2026$.

Exercice 4. Soient a et b des entiers strictement positifs tels que $a + b + 1$ soit premier et

$$a + b + 1 \mid 4ab - 1.$$

Montrer que $a = b$.

Exercice 5. Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs (n, d) telles que $d \mid n^2$ et $(n - d)^2 < 2d$.

Exercice 6. Soit p un nombre premier, et n le plus petit entier strictement supérieur à 1 tel que $n^6 - 1$ soit divisible par p. Montrer que p divise au moins l'un des deux nombres suivants :

$$(n+1)^6 - 1, \quad (n+2)^6 - 1.$$

Exercice 7. Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs (n, k) tels que $n! + n = n^k$.

Exercice 8. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ tels que les nombres $2^k \cdot n - 1$ soient premiers pour tout $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Exercice 9. Trouver tous les entiers $k \geqslant 0$ tels qu'il existe des entiers $m, n \geqslant 2$ tels que

$$3^k + 5^k = n^m.$$

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite arithmétique d'entiers telle que $a_0 = 1$, et telle que la suite est non constante. Montrer que la suite contient une infinité de cubes parfaits.
Note : Une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ d'entiers est dite *arithmétique* s'il existe un entier $r \in \mathbb{Z}$ tel que pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} - a_n = r$. Un entier $z \in \mathbb{Z}$ est appelé un *cube parfait* s'il existe un entier $s \in \mathbb{Z}$ tel que $z = s^3$.

Exercice 11. Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs (n, d) telles que $d \mid n^2$ et $(n-d)^2 < 2d$.

Exercice 12. Un entier $n \geqslant 2$ est dit discontinu si en notant $d_1 < d_2 < \ldots < d_k$ ses diviseurs strictement positifs, il existe i tel que $d_i > d_{i-1} + \cdots + d_1 + 1$.
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $n, n+1, \ldots, n+2025$ sont discontinus.

Exercice 13. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ tels que pour tout p premier divisant n, $p+n$ est un carré parfait.

Exercice 14. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 2$ tels que les nombres $2^k \cdot n - 1$ soient premiers pour tout $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$.

Exercice 15. Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}$ telles que $f(a) \leqslant f(b)$ si $a \mid b$ et

$$f(ab) + f(a^2 + b^2) = f(a) + f(b)$$

pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 16. Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers tel que $P(0) = 0$ et $\operatorname{pgcd}\{P(i), i \in \mathbb{N}\} = 1$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $\operatorname{pgcd}\{P(i+n) - P(i), i \in \mathbb{N}\} = n$.

Exercice 17. Montrer qu'il n'existe pas d'entier $n > 1$ tel que $2^n - 1 \mid 3^n - 1$.

Exercice 18. Soient $m_1, \ldots, m_{2025}$ des entiers premiers entre eux deux-à-deux, et pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2025$, A_i un sous ensemble de $\{1, \ldots m_i - 1\}$. Montrer qu'il existe un entier $N > 0$ satisfaisant

$$N \leqslant \prod_i (2|A_i| + 1)$$

et tel que pour tout i et pour tout $a \in A_i$, $m_i \nmid N - a$.