EF pathologique

Mano Etilé

December 2025

1 Cours

1.1 Quand peut-on avoir affaire à un monstre ?

1.1.1 Vous n'arrivez pas à résoudre un cas précis

Un exemple serait L'EF de Cauchy. Si je suppose que $f(1) = 1$, j'ai sans problème $f(x) = x$ sur tout Q. on pourrait être tenter de le montrer sur R. Mais, c'est faux. Donc, si vous passez beaucoup de temps a essayer de montrer quelque chose (typiquement restreindre la valeur de la fonction en 0 à seulement 0) que vous n'y arrivez pas, considerez que ce que vous essayer de montrer est peut être faux. Certaines EF on une solution évidente, simple, et une ou plusieurs solutions complexes et bistordu

1.1.2 L'équation est sur Z et les petites valeurs sont étranges/Il y a plusieurs petites valeurs possibles qui sont cohérentes entre elles

C'est pas trop dur de construire une EF dont la solution dépend de la décomposition modulo 2,3,5... qui est hautement non lineaire (on mélange des ^{2} avec des modulos...)

1.1.3 il est facile de résoudre f sur une partie de son domaine, mais vous n'arrivez a rien sur le reste

par exemple vous résolvez f sur Q ou sur les diadiques, ou si l'équation est à domaine entier, seulement pour les nombres premiers, ou seulement pour les carrés... et le reste semble inatteignable !

1.1.4 Tout est à l'intérieur des f dans l'équation fonctionnelle

dans ce cas, l'équation en tant qu'équation sur la "variable" f peut faire des choses étrange, comme forcer f à rester locale (i.e par exemple forcer f à rester entre 0 et 1, ce qui fait qu'une équation sur R devient une équation sur $[0; 1]$ ce qui peut permettre de créer des bizarreries).

1.1.5 Le problème n'a qu'une seule opération

Dans ce cas, dur typiquement de parler de R proprement sans deux opérations, car les réels sont reliés entre eux par deux opérations. c'est par exemple le problème de l'EF de Cauchy.

1.2 les types de pathologies

1.2.1 pathologie légère

Par exemple en plus de $f(x) = x$, il y a $f(x) = 2 - 3x$. Bon ce n'est pas une grosse différence, mais c'est déjà un peu étrange, d'autant que plusieurs solutions assez différentes veut dire disjonction de cas nanani nanana... en bref, tester des polynomes de petits degré, genre $ax + b$ et $ax^2 + bx + c$.

1.2.2 Pathologie modulaire

apparaissent assez régulièrement dans les EF sur Z, et consiste a ce que f soit in fine définie par une disjonction de cas modulo un certain entier. Dans ce cas, l'EF donne souvent l'impression de donner trop de libertés, vu que vous êtes presque en train de résoudre plusieurs EF en même temps (par exemple une EF sur les paires une sur les impaires).

1.2.3 Pathologie locales/structurelles

Votre EF peut prendre seulement des valeurs spécifiques. Par exemple, vous avez prouvé que $f(x)^2 = 1$ ou alors $0 < f(x) < 1$, ou alors f est nulle sur les rationnels. Dans ce cas, vo(s)tre fonction(s) peu(ven)t prendre certaines valeurs à certains endroits, d'autre valeurs à d'autre etc... C'est assez facile de construire une EF comme ça. Par exemple, si en ignorant mes variables internes, mon EF s'écrit $f()^2 + 2f()^3 = 2f() + f(f())$, il se peut que cette structure précise permette de restreindre f aux racines de $x^2 + 2x^3 = 2x + x$ d'où ensuite on devra faire un disjonction de cas sur si $f = 0$, $f = 1$... et ce qui est dans les f permettrait tout à fait de faire que certains réels prennent une valeurs et d'autre en prennent une autre.

2 TD

Les exos qui suivent ne sont pas vraiment en ordre de difficulté claire, même si les derniers sont assez durs. Faites ceux qui vous intéressent, en gardant à l'esprit deux choses : ayez une vision méta en vous demandant à quel monstre vous avez affaire (ou pas ? 2 EF sont saines dans la liste qui suit. Saurez vous les trouver ?).

2.1 EF 1

de Z dans Z : $f(a)^2 + f(b)^2 + f(c)^2 = 2f(a)f(b) + 2f(b)f(c) + 2f(c)f(a)$ dès que $a + b + c = 0$.

2.2 EF 2

sur R. Trouver toutes les tripletrs de fonctions injectives tels que $f(x + f(y)) = g(x) + h(y)$, $g(x + g(y)) = h(x) + f(y), h(x + h(y)) = f(x) + g(y)$

2.3 EF 3

sur R. $f(xy)(f(x) - f(y)) = (x - y)f(x)f(y)$

2.4 EF 4

$f^{f^{f(n)}(n)}(n) = n$ sur les entiers positifs.

2.5 EF 5

sur les réels : $f(y^2 + 2xf(y) + f(x)^2) = (y + f(x))(x + f(y))$.

2.6 EF 6

sur les rationnels, on dispose de f tel que $f(x + y) - f(x) - f(y)$ est entier. Est-ce qu'il existe une constante c tel que $f(x) - cx$ est entier pour tout x ?

2.7 EF 7

sur les réels, trouver toutes les f tels que la médiane de a, b, c est la médiane de $f(a, b), f(b, c), f(c, a)$.

2.8 EF 8

des entiers naturels dans les réels. Trouver toutes les f tel que $f(x+y)+f(1)+f(xy) = f(x) + f(y) + f(1 + xy)$

2.9 EF 9

sur les réels. $f(x + f(x + y)) + f(xy) = x + f(x + y) + yf(x)$

2.10 EF 10

sur les réels. $f(f(x) + x + y) = 2x + f(y)$

2.11 EF 11

sur les entiers positifs. $f(f(f(n))) = f(n + 1) + 1$

2.12 EF 12

sur les rationnels : $f(x)f(y)f(x+y) = f(xy)(f(x)+f(y))$

2.13 EF 13

sur les réels. $f(x^2+y^2+2f(xy)) = f(x+y)^2$