

# Super TD de super polynômes

## Exercice 1

Faire la division euclidienne de  $X^3 + 2X^2 + X + 1$  par  $X + 3$ . Et par  $X^2 + 3$  ?

## Exercice 2

Quelle est la multiplicité de 1 dans le polynôme  $X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 6X + 2$  ?

## Exercice 3

Soit  $P$  un polynôme de degré 2025 tel que  $P(k) = k$  pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, 2025\}$ . Que vaut  $P(-1)$  ?

## Exercice 4

Quels sont les polynômes de degré plus petit que 3 tels que  $P(0) = 0, P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9$  ?

## Exercice 5

$|X|$  est-il un polynôme ?

## Exercice 6

Quels sont les polynômes tels que  $P(2x) = 2P(x)$  pour tout  $x$  ?

Aurait-on la même réponse si on ne suppose plus que  $P$  est un polynôme ?

## Exercice 7

Quels sont les polynômes tels que  $P(x)^3 = P(x^3)$  pour tout  $x$  et  $P(2) = 2$  ?

Et si on remplace  $P(2) = 2$  par  $P(2) = 4$  ?

## Exercice 8

Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que  $P(X) = P'(X)P''(X)$ .

## Exercice 9

Soit  $P$  un polynôme à coefficients entiers tel que  $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$  pour  $a, b, c, d$  des nombres entiers distincts. Peut-on avoir un entier  $n$  tel que  $P(n) = 8$  ?

## Exercice 10

Trouver tous les réels  $x, y$  tels que  $x + y = 3$  et  $x^5 + y^5 = 33$

## Exercice 11

Trouver tous les triplets  $x, y, z$  de réels tels que

$$x + y + z = 17, xy + yz + zx = 94 \text{ et } xyz = 168.$$

## Exercice 12

Trouver tous les réels  $x, y, z$  tels que  $x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3 = 3$ .