Inégalités

Un carré est positif

Exercice 1
Soit x un réel. Montrer que

$$x^2 + \frac{1}{x^2} \geqslant 2.$$

Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice 2
Soient x, y des réels strictement positifs. Montrer que

$$x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y,$$

et trouver les cas d'égalité.

Exercice 3
Soient x, y deux réels quelconques. Montrer que

$$x^2 + y^2 + 2 \geqslant 2(x + y).$$

Exercice 4
Pour x, y réels, montrer que

$$x^2 + xy + y^2 \geqslant 0.$$

L'inégalité arithmético-géométrique

Théorème 1. Pour $a, b \geqslant 0$,

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$$

Exercice 5
Soit $x > 0$. Montrer que

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Exercice 6
Soient a, b, c des réels positifs. Montrer que

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc.$$

Exercice 7 (Lemme du tourniquet)
Soient a, b, c des réels positifs. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

IAG À TROIS TERMES

Théorème 2. Pour $a, b, c \geqslant 0$,

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc},$$

avec égalité ssi $a = b = c$.

Remarque : forme équivalente

$$(a+b+c)^3 \geqslant 27abc.$$

Exercice 8
Montrer que

$$(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 9a^2b^2c^2.$$

Exercice 9
Soient $a, b, c > 0$ tels que $abc = 8$. Trouver le minimum de $a + b + c$.

Exercice 10
Soient $a, b, c > 0$ tels que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$. Montrer que

$$a + b + c \geqslant 3.$$

IAG À n TERMES

Théorème 3. Pour $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n > 0$,

$$\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n},$$

avec égalité ssi tous les a_i sont égaux.

Exercice 11
Montrer que

$$1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4x^4.$$

Exercice 12
Montrer que pour $x, y, z > 0$,

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geqslant 6.$$

Exercice 13
Soient $a, b, c, d > 0$ et $abcd = 1$. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10.$$

Exercice 14 (Très difficile)
Soient $a, b, c, d > 0$ tels que $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{cda}{(1-b)^2} + \frac{dab}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}.$$

Exercice 15
Soient $a, b > 0$. Montrer que

$$a^3 + b^3 + a + b \geqslant 4ab.$$

Cauchy-Schwarz et mauvais élèves

Exercice 16

Soit $a, b, c > 0$ Montrer que

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Ceci constitue l'inégalité arithmético-quadratique.

Exercice 17
Soit $a, b, c > 0$ Montrer que

$$(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geqslant 9$$

Exercice 18

Soit x, y, z positifs et non tous nuls. Montrer que

$$\frac{1}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{9}{x+z} \geqslant \frac{18}{x+y+z}$$

et donner les cas d'égalités.

Exercice 19

Soit a, b, c strictement positifs tels que $a^2 + 4b^2 + 9b^2 = 1$. Quelle est la plus grand valeur que peut prendre $a + b + c$?

Exercice 20 (Inégalité de Nesbitt)
Soit a, b, c strictement positifs, montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{b+a} \geqslant \frac{3}{2}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 21
Soit a, b, c strictement positifs, montrer que

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(b+a)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 22

Soit x, y, z strictement positifs, montrer que

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geqslant \frac{3}{4}$$

et donner les cas d'égalité.