PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 26 NOVEMBRE 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2011 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1.

Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soit S le second point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ABO. Montrer que les droites (OS) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 1

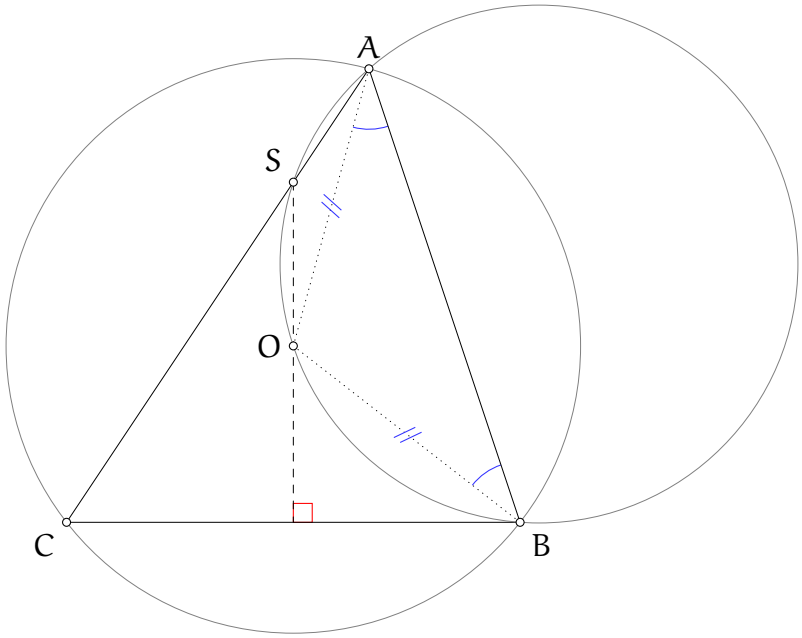
D'après le théorème de l'angle au centre, on a l'égalité $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB}$.

De plus, AOB est isocèle en O, donc $\widehat{ABO} = \widehat{OAB}$. Puisque la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, on en déduit que $\widehat{ABO} = \widehat{OAB} = 90° - \widehat{ACB}$.

Or, le quadrilatère $ABOS$ étant inscriptible par construction, on a :

$$\widehat{CSO} = 180° - \widehat{OSA} = \widehat{ABO} = 90° - \widehat{ACB},$$

ce qui permet de conclure que $(OS)\perp(BC)$.



Solution Alternative :
On souhaite montrer que $(OS)\perp(BC)$. Or, on sait que O appartient à la médiatrice de $[BC]$, il suffit donc de montrer que S appartient aussi à cette médiatrice. Il faut donc montrer que le triangle SBC est isocèle en B.
Or, comme O est le centre du cercle circonscrit à ABC, on sait que les triangles OAC et OBC sont tous les deux isocèles en O. On a donc que :

$$\widehat{OAC} = \widehat{OCA}, \quad \widehat{OBC} = \widehat{OCB}.$$

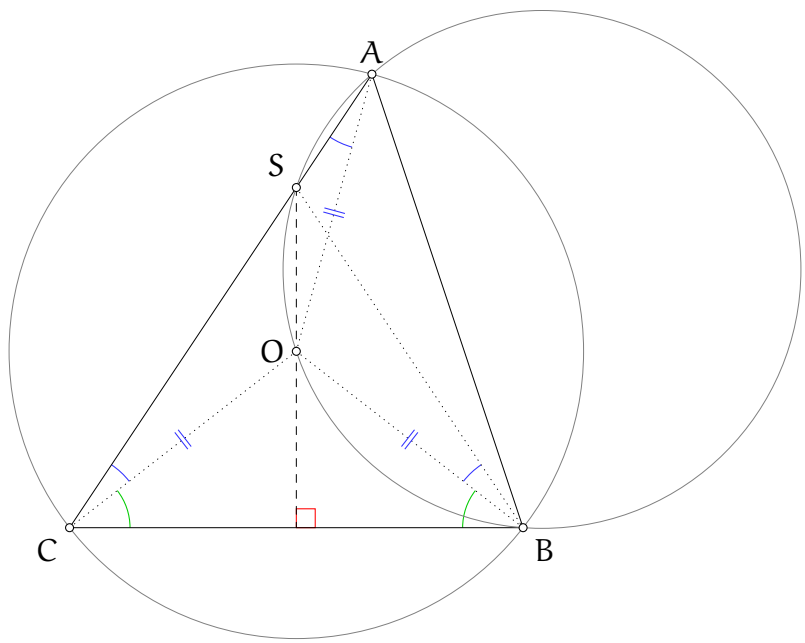
De plus, comme les points S, A, B et O sont cocycliques, on d'après le théorème de l'angle inscrit que

$$\widehat{SBO} = \widehat{SAO} = \widehat{CAO}.$$

Ainsi, on a que :

$$\widehat{SCB} = \widehat{ACO} + \widehat{OCB} = \widehat{CAO} + \widehat{OBC} = \widehat{SBO} + \widehat{OBC} = \widehat{SBC},$$

ce qui permet de conclure.



Commentaire des correcteurs : Le problème a été beaucoup traité, et bien traité par la plupart des copies. De trop nombreux.ses élèves manquent cruellement de concision : le problème pouvait être résolu en quelques lignes, sans introduire de points mais la plupart des copies introduisent par exemple le centre du cercle circonscrit à $ABOS$. C'est certes une très bonne idée d'essayer d'introduire de nouveaux points, mais toutes les copies utilisant ce point ne l'utilisaient en fait que pour redémontrer le théorème de l'angle inscrit. Il est important d'être capable de minimiser le nombre de points introduits et les calculs utilisés (dans la limite du raisonnable) : cela permet à la fois de gagner du temps et de prendre du recul sur les arguments pour éviter la fakesolve : moins une preuve est alambiquée, moins il y a de chances qu'une erreur s'y soit glissée. De plus, beaucoup d'élèves n'ont pas eu le réflexe, après avoir montré que S est sur la médiatrice de BC, de conclure en utilisant que la bissectrice d'un segment est perpendiculaire à ce segment. On notera enfin que de nombreuses solutions pouvaient être simplifiées en remarquant que 0 est le pôle Sud issu de S dans SAC. Il est dommage qu'aucune copie n'ait mentionné ce fait...

Exercice 2.

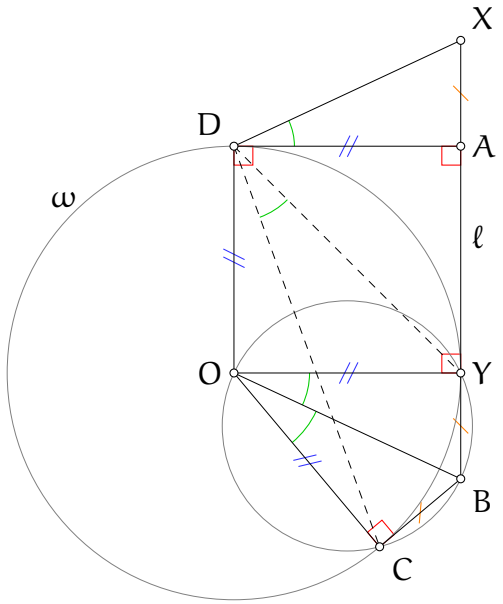
Soient un cercle ω et une droite ℓ tangente à ω en Y. Soit X un point sur ℓ. Une tangente à ω, perpendiculaire à ℓ, rencontre ℓ au point A et est tangente à ω au point D, de telle sorte que A et X soient du même côté de ℓ par rapport à Y. Soit B un point sur ℓ, de tel sorte que A, Y et B soient alignés dans cet ordre et tel que $AX = BY$. La seconde tangente à ω passant par B touche ω au point C. Montrer que $\widehat{XDA} = \widehat{YDC}$.

Solution de l'exercice 2

Notons O le centre de ω. On sait que $\widehat{ODA} = \widehat{OYA} = 90°$, les droites AD et AY étant tangentes à w en D et en Y. Or, d'après l'énoncé, on a que $\widehat{DAY} = 90°$. Ainsi, $ODAY$ est un quadrilatère dont trois angles sont droits, et il s'agit donc d'un rectangle.

D'autre part, O étant le centre du cercle ω, on a que $OD = OY$, ce qui montre que le quadrilatère $ODAY$ est en fait un carré. En particulier, $DA = OY = R$, où R est le rayon de ω. En outre, on a que $BY = BC$ car ce sont les deux tangentes issues de B par rapport à ω (le triangle BYC est donc isocèle par angle tangentiel).

Finalement, on a vu que $\widehat{OCB} = \widehat{DAX} = 90°$, $OC = R = DA$ et $CB = BY = AX$. Ainsi, DAX est semblable à OCB et à OYB. On obtient donc que $\widehat{YOC} = 2\widehat{XDA}$. D'après le théorème de l'angle au centre, on en déduit que $\widehat{YDC} = \widehat{XDA}$, ce qui conclut.



Commentaire des correcteurs : L'exercice a été dans la grande majorité très bien réussi, tout le monde ou presque a pensé à introduire le centre du cercle, ce qui aidait grandement. Quelques élèves ne prouvent cependant pas les faits qu'ils avancent, nous rappelons qu'une figure ne constitue pas une preuve surtout lorsque celle-ci est une longue chasse aux angles. Il est un peu dommage par ailleurs que plus d'élèves n'aient pas remarqué que $YOCB$ était cyclique, c'est une configuration très classique qui devrait sauter aux yeux (deux angles droits opposés). Enfin nous rappelons que lorsque deux triangles sont semblables, l'ordre des lettres est très important !

Exercice 3.

Soit ABC un triangle acutangle avec $AB < AC < BC$, et Γ_1 son cercle circonscrit. Soit Γ_2 le cercle de centre A et de rayon AC. Γ_2 recoupe la droite (BC) au point D et le cercle Γ_1 au point E. Soit F la seconde intersection de la droite (AD) et du cercle Γ_1. Montrer que B est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF.

Solution de l'exercice 3

Montrons dans un premier temps l'égalité de longueurs $BD = BF$. Pour cela, on effectue une chasse aux angles. Etant donné que $D \in \Gamma_2$, on a $AC = AD$. Le triangle ADC est donc isocèle et il en découle l'égalité d'angles $\widehat{CDA} = \widehat{ACD}$. De plus, on sait que les points A, F, B et C sont cocycliques. Dès lors, on a $\widehat{ACB} = 180° - \widehat{AFB} = \widehat{BFD}$. Finalement, on a

$$\widehat{BFD} = \widehat{ACB} = \widehat{ACD} = \widehat{CDA} = \widehat{BDF}.$$

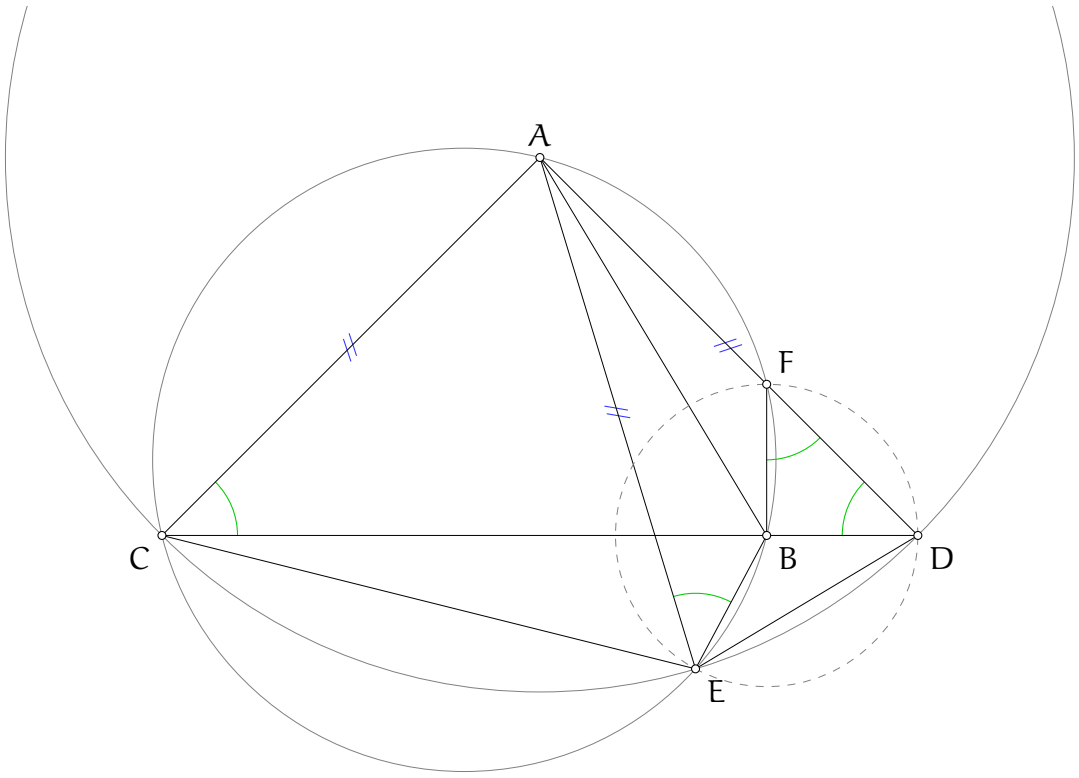
Le triangle BDF est donc isocèle en B, d'où l'on tire l'égalité $BD = BF$.
Dans un second temps, on montre l'égalité $BE = BD$.
En utilisant le théorème de l'angle inscrit, on obtient :

$$\widehat{AEB} = \widehat{ACB} = \widehat{CDA} = \widehat{ADB}.$$

Puisque les points D et E appartiennent à Γ_2, nous avons également $AD = AE$, ou encore $\widehat{AED} = \widehat{ADE}$. Dès lors, on a

$$\widehat{BED} = \widehat{AED} - \widehat{AEB} = \widehat{ADE} - \widehat{ADB} = \widehat{BDE},$$

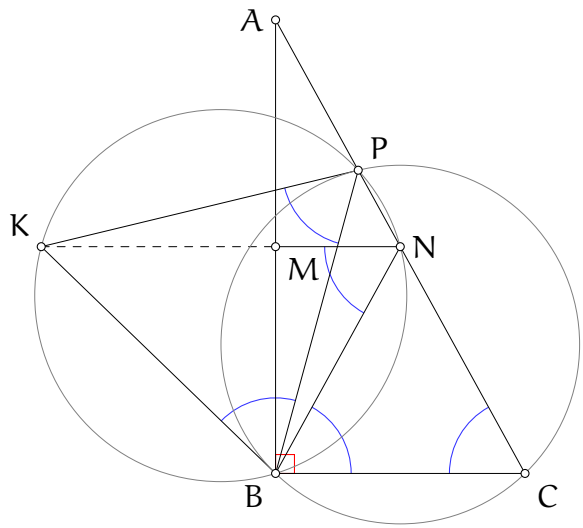
ce qui démontre l'égalité $BE = BD$. Finalement, nous avons montré que $BD = BF = BE$, donc B est bel et bien le centre du cercle circonscrit au triangle DEF.



Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi à l'aide des propriétés des points cocycliques. Attention, il y a beaucoup trop d'erreurs/d'inversions de lettres dans les écritures des angles, il est important de bien se relire. Globalement, les élèves ne sont pas assez succincts, on pouvait bien détailler la solution en moins d'une page. Il y a également beaucoup de copies sans figures, ou avec des figures non utilisées.

Exercice 4. Soit ABC un triangle rectangle en B. On pose M et N les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$. Soit P un point sur le segment $[AC]$. On nomme K le point d'intersection des tangentes en P et en B au cercle circonscrit à BPC. Montrer que M, N et K sont alignés.

Solution de l'exercice 4



Tout d'abord, comme le triangle ABC est rectangle en B, on sait que N est le centre de son cercle circonscrit (étant le milieu d'un diamètre). En particulier, on a que NBC est isocèle en N, ce qui donne :

$$\widehat{NBC} = \widehat{NCB}.$$

De plus, d'après le théorème de l'angle tangentiel, on a que :

$$\widehat{KPB} = \widehat{PCB} = \widehat{PBK}.$$

Ainsi, on obtient que $KPB \sim NCB$, et donc :

$$\widehat{PKB} = \widehat{BNC}.$$

Ainsi les points K, P, N et B sont cocycliques. Finalement, on a que :

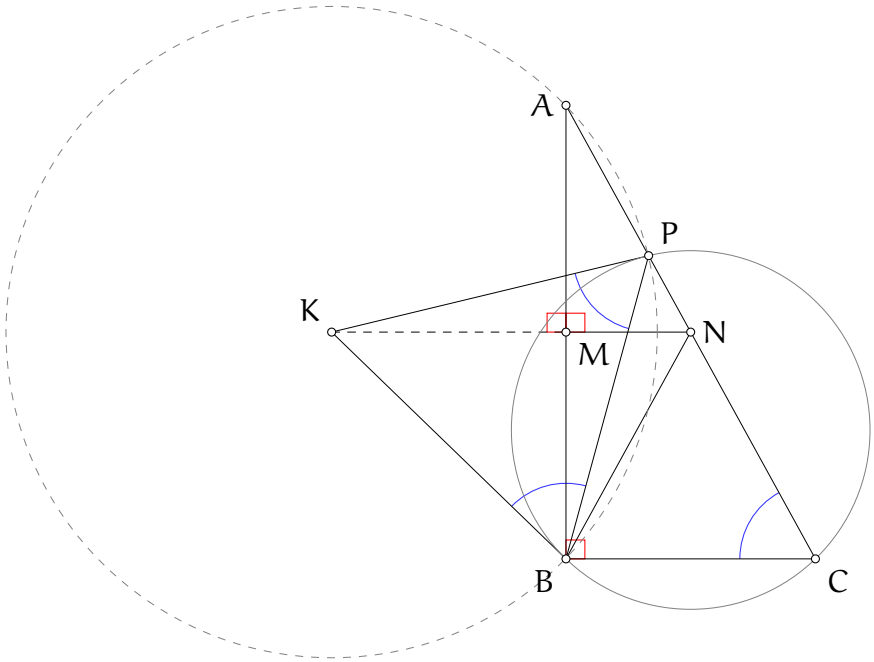
$$\widehat{PNK} = \widehat{PBK} = \widehat{PCB}$$

d'après les théorèmes de l'angle inscrit et de l'angle tangentiel. On sait enfin que $(MN)//(BC)$ d'après le théorème des milieux. Ainsi, on a que :

$$\widehat{PNM} = \widehat{PCB} = \widehat{PNK},$$

ce qui permet de conclure que K, N et M sont alignés.

Solution alternative :



Le triangle ABC est rectangle en B donc

$$\widehat{BCA} = 90° - \widehat{BAC}.$$

Par angle tangentiel on a de plus

$$\widehat{KBP} = \widehat{KPB} = \widehat{BCP},$$

donc

$$\widehat{BKP} = 180° - 2\widehat{BCA} = 2\widehat{BAC}.$$

Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre K passant par B et P. Par angle inscrit on a $A \in \mathcal{C}$ donc finalement $KA = KB$, soit $\widehat{AMK} = 90°$, puisque KM est la médiane du triangle isocèle ABK.

D'après le théorème de la droite des milieux on a $(MN) \parallel (BC)$, d'où $\widehat{AMN} = 90°$ par angles correspondants. On en déduit bien que les points K, M et N sont alignés, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été beaucoup abordé et très bien réussi. Le premier réflexe, central, était de repérer la configuration de la droite des milieux impliquant le parallélisme des droites (MN) et (BC). Cela suggérait ainsi la possibilité d'une solution par chasse aux angles à condition d'arriver à lier le point K aux points N ou M. Les élèves ont su proposer une grande variété de solutions, toutes très élégantes. La plupart gravitaient ainsi autour de quadrilatères cycliques centraux cachés dans la figure. D'autres copies, plus rares, mettaient en avant ingénieusement des triangles sembables permettant de conclure.

Beaucoup de copies vont droit au but, mais d'autres sont moins concises. Bien qu'elles soient très claires (ce qui est bien !), il est important d'apprendre à rédiger très efficacement ses solutions pour ne pas perdre de temps, en particulier en test et en compétitions. La quasi-totalité des copies comportaient une figure, ce qui est très bon signe !
Un écueil a été rencontré assez fréquemment, par la mention d'une 'réciproque de l'angle au centre', dans l'esprit de la solution alternative. Il faut faire attention : l'angle au centre n'est pas une équivalence telle

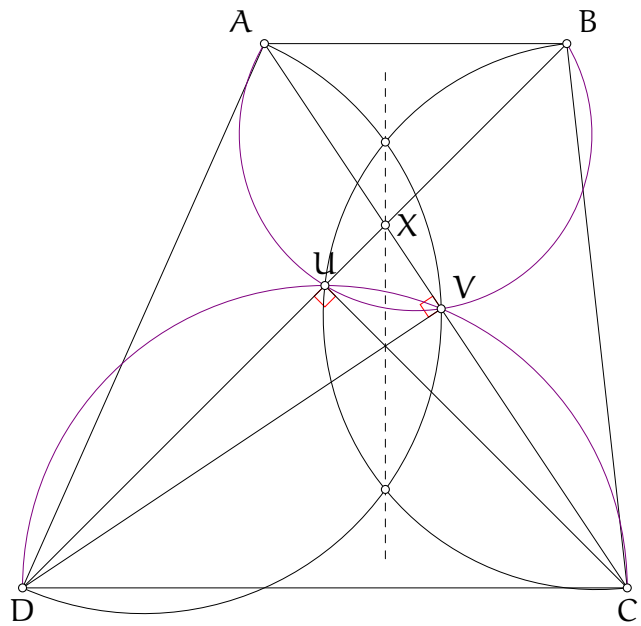
quelle, il faut une hypothèse de plus pour en obtenir la réciproque. Effectivement l'égalité $\frac{1}{2}\widehat{BKP} = \widehat{BAP}$ ne suffit pas à garantir que K est le centre du cercle (ABP) : par angle inscrit tous les points sur le cercle circonscrit au triangle (BKP) vérifient cette même égalité. Il faut donc une information de plus pour garantir qu'il s'agit bien de K : ici il fallait souligner que $KP = KB$, ce qui n'a que rarement été fait.

Finalement, il est important d'introduire proprement vos points au début de votre solution, par exemple en annonçant d'entrée de jeu "Soit O le centre de (BCP)". N'oubliez pas non plus de citer tous les théorèmes que vous utilisez, plusieurs élèves ne mentionnent pas le parallélisme induit par la droite des milieux, ou l'angle tangentiel. Par ailleurs, il est souvent peu pratique d'un point de vue rédactionnel de noter $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ses angles (même si c'est très utile au brouillon ou sur la figure !) : pour le correcteur il sera toujours plus clair de lire une égalité comme $\widehat{BCP} = 90 - \angle BKP$ que $\alpha = 90 - \gamma$ où α et γ ont été défini quelques lignes plus tôt.

Exercice 5.

Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) est parallèle à (CD). On pose X le point d'intersection des droites (AC) et (BD). On suppose que les cercles de diamètre $[AD]$ et $[BC]$ s'intersectent en deux points, que l'on nomme P et Q. Montrer que les points P, Q et X sont alignés.

Solution de l'exercice 5



On note U le projeté orthogonal de C sur $[BD]$ et V le projeté orthogonal de D sur (AC). Nommons Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètres $[AD]$ et $[BC]$. On sait que V est sur le cercle Γ_1 puisque $\widehat{AVD} = 90°$. De même, on sait que U est sur Γ_2. On sait aussi que $CDUV$ est inscriptible car $\widehat{DVC} = \widehat{DUC} = 90°$. Par puissance d'un point, on obtient donc que :

$$XU \cdot XD = XV \cdot XC \iff \frac{XD}{XC} = \frac{XV}{XU}.$$

Or, $(AB)//(CD)$, ainsi d'après le théorème de Thalès, on a que :

$$\frac{XD}{XC} = \frac{XB}{XA}.$$

Par conséquent :

$$\frac{XV}{XU} = \frac{XB}{XA} \iff XA \cdot XV = XB \cdot XU.$$

Ainsi, X a la même puissance par rapport au cercle Γ_1 et au cercle Γ_2, il appartient donc à leur axe radical. Or comme, Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en P et Q, on sait que (PQ) est l'axe radical des deux cerclces, ainsi, on obtient que X, P et Q sont alignés.

Solution Alternative 1 :
En reprenant les notations précédentes, on a que :

$$\widehat{XUV} = \widehat{XCD},$$

puisque $UDCV$ est inscriptible. Or, comme $(DC)//(AB)$, on a par angle alterne-interne que :

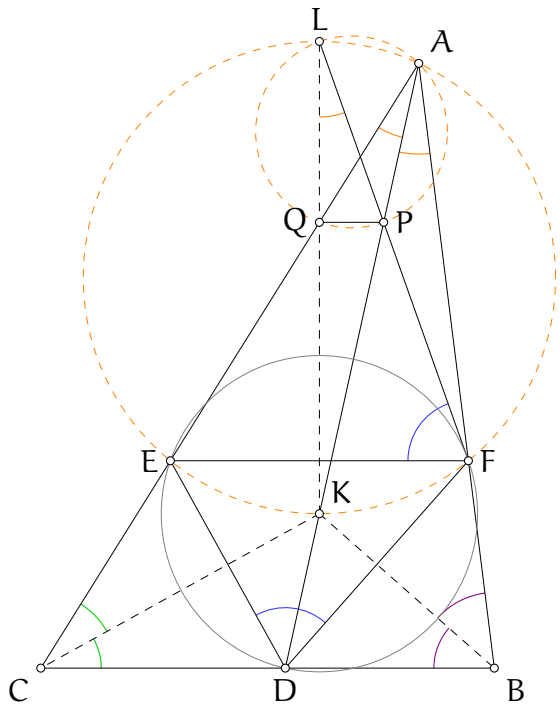
$$\widehat{XCD} = \widehat{XAB}.$$

Ce qui nous donne, d'après la réciproque au théorème de l'angle inscrit, que le quadrilatère $ABUV$ est inscriptible.
On considère les cerclces Γ_1, Γ_2 et le cercle circonscrit à $AUBV$. Leurs axes radicaux sont $(PQ), (AV)$ et (UB). On sait que ces trois axes sont concourants, en le centre radical de ces trois cercles. Or (AV) et (UB) s'intersectent en X. Ainsi, on obtient bien que P, Q et X sont alignés.

Commentaire des correcteurs : Le problème est globalement bien réussi. La plupart des élèves ont une solution très similaire au corrigé, mais certains ont parfois préféré utiliser plusieurs Al Kashi et Thalès pour des longues pages de calcul. Les erreurs commises par les élèves n'ayant pas réussi sont distinctes, mais certains ont supposé que le trapèze était isocèle (ou inscriptible, ce qui est équivalent) : cela n'a pas de raison d'être vrai.

Exercice 6. Soit ABC un triangle acutangle, et D, E et F des points sur les côtés respectifs $[BC]$, $[AC]$, et $[AB]$ tels que $BF = BD$ et $CD = CE$. On suppose de plus que (EF) est parallèle à (BC). On pose P le point d'intersection de la droite (AD) avec la tangente en F au cercle circonscrit au triangle DEF. On pose Q le point d'intersection de la médiatrice du segment $[EF]$ avec la droite (AC). Montrer que (PQ) est parallèle à (BC).

Solution de l'exercice 6



Tout d'abord, on pose L et K les intersections respectives de la médiatrice à $[EF]$ avec (FP) et avec (AD). On a que :

$$\widehat{EDF} = 180° - \widehat{FDB} - \widehat{EDC}$$

car les points B, D et C sont alignés dans cet ordre. Comme $BD = BF$, le triangle BDF est isocèle en B et donc :

$$\widehat{FDB} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

De même, on obtient que :

$$\widehat{EDC} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{ACB}.$$

Donc :

$$\widehat{EDF} = \frac{1}{2}\left(\widehat{ABC} + \widehat{ACB}\right) = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$$

car les sommes des angles d'un triangle vaut $180°$.
Or, comme (FP) est tangent au cercle cironscrit à DEF, on a par angle tangentiel que :

$$\widehat{LFE} = \widehat{FDE} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Mais comme L appartient à la médiatrice de $[EF]$ on a que $(LK)\perp(EF)$ et donc :

$$\widehat{FLK} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

D'autre part, comme $(EF)//(BC)$, on a d'après le théorème de Thalès que :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{FB}{EC}.$$

Or, $BF = BD$ et $CE = CD$, ce qui nous donne :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}.$$

Ainsi, d'après le théorème de la bissectrice, on a que (AD) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, donc que

$$\widehat{FAK} = \widehat{BAD} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}.$$

Cela montre que les points L, F, K et A sont cocycliques. De plus, K étant l'intersection de la bissectrice issue de A dans le triangle EFA et de la médiatrice issue de $[EF]$, il est donc le pôle sud issue de A dans le triangle AEF. Ainsi, les point E, K, F, A et L sont cocycliques. On en déduit que :

$$\widehat{QLP} = \widehat{FLK} = \widehat{FAK} = \widehat{KAE} = \widehat{QAP}.$$

Ainsi, les points Q, P, A et L sont cocycliques. Enfin, on obtient que :

$$\widehat{QPL} = \widehat{QAL} = \widehat{LFE},$$

et donc que $(QP)//(EF)$. Or, on sait déjà que $(BC)//(EF)$, donc $(PQ)//(BC)$.

Solution Alternative 1 :
Montrons dans un premier temps que I, le centre du cercle inscrit à ABC, est le centre du cercle circonscrit au triangle DEF.
Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle DEF. Alors, On $(BO) \perp (DF)$ et $(CO) \perp (DE)$ donc

$$\widehat{FBO} = \widehat{OBF} \quad \text{et} \quad \widehat{CDO} = \widehat{OCE}.$$

Maintenant, on montrer que A, I et D sont alignés.
Soient A' l'intersection de (DI) et (AB).

$$\widehat{IAF} + \frac{\widehat{BCA}}{2} = \frac{\widehat{BAC} + \widehat{ACB}}{2} = \widehat{DA'F} + \widehat{FDA'} = \widehat{DA'F} + \widehat{FDI} = \widehat{IA'F} + \frac{\widehat{BCA}}{2}.$$

donc $A' = A$.

(PF) est tangent à (DEF) donc $\widehat{PFI} = 90°$.
Montrons que P, Q, I et F sont concycliques.

$$\widehat{FIA} = \widehat{ACB} \Longrightarrow \widehat{IPF} = 90° - \widehat{ACB}.$$

Comme $QF = QE$, on a

$$\widehat{QFE} = \widehat{ACB} \Longrightarrow \widehat{IQF} = 90° - \widehat{ACB}.$$

Ainsi

$$\widehat{IQF} = 90° - \widehat{ACB} = \widehat{IPF}.$$

Ainsi F, I, P et Q sont cocycliques
On obtient alors :

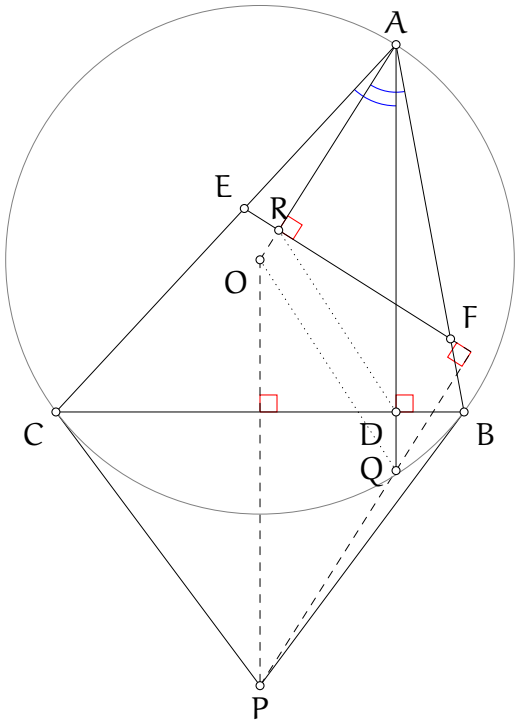
$$\widehat{IQP} = 90° \Longrightarrow PQ \perp IQ \perp EF$$

Donc (PQ) est parallèle à (BC).

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien réussi.

Exercice 7. Soit ABC un triangle et soient D, E et F les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets A, B et C. Soit P le point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit au triangle ABC en B et C. La perpendiculaire à (EF) passant par P coupe (AD) au point Q. Soit R le projeté orthogonal de A sur (EF). On note O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que (DR) et (OQ) sont parallèles.

Solution de l'exercice 7



La première chose que l'on peut remarquer sur une figure propre est que O, A, R semblent alignés. Commençons par montrer ce résultat.
Le triangle COA est isocèle en O, donc $\widehat{OAC} = \frac{180° - \widehat{AOC}}{2}$. Or, par angle au centre, $2\widehat{ABC} = \widehat{AOC}$, donc $\widehat{OAC} = 90° - \widehat{ABC}$.
D'un autre côté, $BCEF$ est inscriptible (car $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90°$) donc $\widehat{AEF} = \widehat{FBC}$. On a alors

$$\widehat{RAC} = 90° - \widehat{AER} = 90° - \widehat{ABC}.$$

Ainsi, $\widehat{OAC} = \widehat{RAC}$ donc A, O, R sont bien alignés.

D'après la réciproque du théorème de Thalès, montrer que $(OQ)//(DR)$ revient maintenant à montrer que :

$$\frac{AR}{AD} = \frac{AO}{AQ}.$$

On sait que le quadrilatère $BCEF$ est inscriptible, on a donc que $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$, ou encore que $\widehat{FAR} = \widehat{CAD}$. Ainsi, $AFR \sim ACD$ et donc

$$\frac{AR}{AD} = \frac{AF}{AC}.$$

On remarque que $(AR)\perp(EF)$ et $(PQ)\perp(EF)$, mais aussi que $(AD)\perp(BC)$ et $(OP)\perp(BC)$. Donc le quadrilatère $AOPQ$ est un parallélogramme puisque ses côtés opposés sont parallèles. Ainsi,

$$\frac{AO}{AQ} = \frac{PQ}{PO}.$$

Puisque O est le centre du cercle circonscrit de ABC, on a que $AO = OB = PQ$. Or, on a que $\widehat{OBP} = 90° = \widehat{AFC}$ et $\widehat{BOP} = \widehat{FAC}$ par angle au centre, donc $AFC \sim OBP$. Finalement, on obtient que :

$$\frac{AF}{AC} = \frac{OB}{OP} = \frac{PQ}{PO},$$

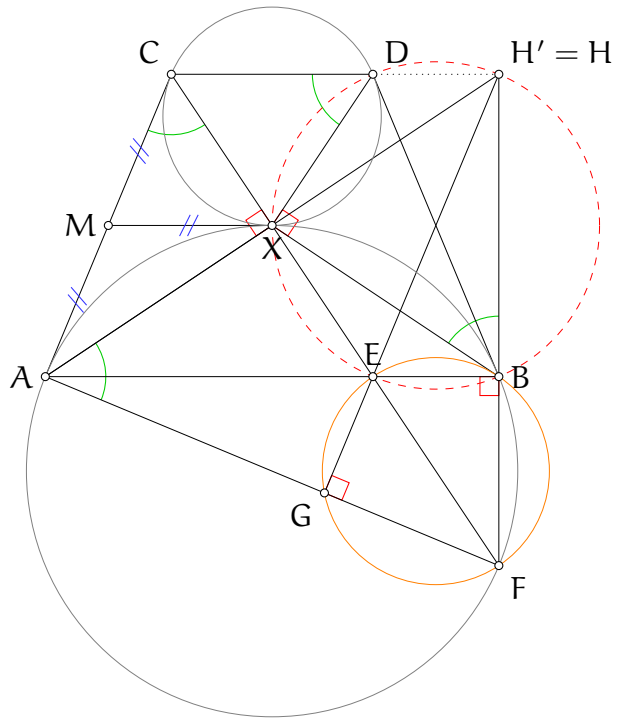
ce qui conclut.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice a été assez peu traité (moins que le 8) et c'est bien dommage ! Le problème était certes difficile, mais il était relativement aisé de gagner des points intermédiaires. il suffisait par exemple de montrer que les points A, R, O sont alignés pour avoir un point. Il est d'ailleurs dommage que certains élèves n'aient pas remarqué cette propriété : chercher des points alignés (ou cocycliques) doit toujours être le premier réflexe après avoir tracé une figure propre, et remarquer cet alignement était ici une première étape nécessaire pour utiliser le théorème de Thalès.

Exercice 8.

Soient ω_1 et ω_2 deux cercles tangents extérieurement en X. Soient A, B, C et D quatre points tels que A, B sont sur ω_1 et C, D sont sur ω_2 et tels que (AC) et (BD) sont les tangentes communes à ω_1 et ω_2. La droite (CX) coupe (AB) au point E et recoupe ω_1 au point F. La droite (AF) recoupe le cercle circonscrit au triangle EBF au point G. La droite (AX) coupe (CD) au point H. Montrer que les points G, E et H sont alignés.

Solution de l'exercice 8



Ce problème peut faire peur à priori, mais avec une figure bien tracée, on arrive bien à voir ce qu'il faut démontrer. En outre, il ne faut pas avoir peur d'aller bout de ses idées, en particulier pour les chasses aux angles.

Lemme : On a que $\widehat{AXC} = 90°$.

Notons M le milieu de $[AC]$, on a que $MA^2 = MC^2$, donc M a la même puissance par rapport à ω_1 et ω_2. Il appartient donc à leur axe radical, qui est la tangente aux deux cercles passant par X. Par puissance d'un point, on obtient donc que :

$$MA^2 = MX^2 = MC^2.$$

Donc M est le centre du cercle circonscrit au triangle ACX, ce qui montre que le triangle ACX est rectangle en X. On trouve de même que $\widehat{BXD} = 90°$.

En particulier, on a l'égalite $\widehat{AXF} = 90°$, ce qui montre que $[AF]$ est un diamètre de ω_1. Cela montre d'après le théorème de l'angle inscrit que $\widehat{ABF} = 90°$. Puisque le quadrilatère $GEBF$ est inscriptible, on a ainsi $\widehat{FGE} = 90°$. On a donc que $(GE), (FB)$ et (AX) sont concourantes en un point noté H' car se sont les hauteurs du triangle AEF.

On va montrer que $H' = H$.

Comme $H' \in (AX)$, il suffit de montrer que les points H', C et D sont alignés.

On a que le quadrilatère $XEBH'$ est inscriptible car $\widehat{EXH'} = \widehat{EBH'} = 90°$. Puisque le triangle BXD est rectangle en X, le théorème de l'angle tangentiel montre que :

$$\widehat{XDB} = 90° - \widehat{XBD} = 90° - \widehat{XAE} = \widehat{AEX}.$$

Ainsi, les points B, E, D et X sont cocycliques, et ce cercle contient H' par ce qui précède.
D'autre part, on sait que le quadrilatère $ACDB$ est un trapèze isocèle, donc que $(CD)//(AB)$. Enfin, on a que :

$$\widehat{CDB} = 180° - \widehat{ABD} = 180 - \widehat{AFB} = 180 - \widehat{BXH'} = 180° - \widehat{BDH'}$$

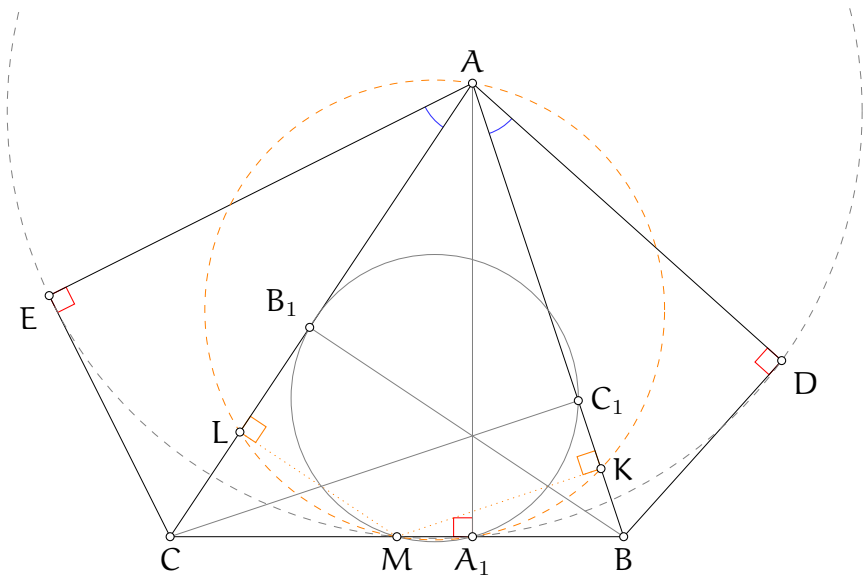
d'après le théorème de l'angle inscrit et tangentiel et car le quadrilatère $AXFB$ est inscriptible. Cela permet bien de conclure que les points C, D et H' sont alignés et donc que $H' = H$.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice a été bien abordé pour sa position. Malheureusement, plusieurs copies pensent conclure mais présupposent certaines propriétés, par exemple B, F, H alignés ou $\widehat{AXC}$ droit, sans les montrer. Certaines supposent même que G, E, H sont alignés sans faire exprès et concluent à partir de là... Il faut donc faire attention quand on écrit des égalités d'angles qu'on s'appuie sur quelque chose de démontré et pas seulement apparent sur une figure. Enfin, les chasses aux angles ne sont pas toujours très bien rédigées : quand on a une égalité d'angles par cocyclicité, on écrit que les 4 points sont cocycliques, si on utilise l'angle tangentiel on le mentionne, ...

Exercice 9.

Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit D un point du plan tel que les points C et D sont de part et d'autre de la droite (AB) et tel que $\widehat{ADB} = 90°$. Soit E un point du plan tel que les points B et E sont de part et d'autre de la droite (AC) et tel que $\widehat{AEC} = 90°$. On suppose que $\widehat{BAD} = \widehat{CAE}$. On note A_1, B_1 et C_1 les pieds respectifs des hauteurs issues des sommets A, B et C dans le triangle ABC. Soit K le milieu du segment $[BC_1]$ et L le milieu du segment $[CB_1]$. Montrer que les centres des cercles circonscrits aux triangles AKL, $A_1B_1C_1$ et DEA_1 sont alignés.

Solution de l'exercice 9



Dans la suite, on utilisera la notation "$\mathcal{C}_{XYZ}$" pour désigner le cercle circonscrit au triangle XYZ. On commence par repérer les propriétés apparentes sur la figure : il semble que le cercle $\mathcal{C}_{AKL}$ passe par un autre point de l'énoncé : A_1. De plus les trois cercles de l'énoncé semblent se rencontrer en un second point de la droite (BC).

Par ailleurs, le cercle $\mathcal{C}_{A_1B_1C_1}$ ne doit pas nous être indifférent : c'est le cercle d'Euler ! Si vous n'êtes pas familier avec, pas de panique, il faut simplement savoir qu'il passe par d'autres points que les pieds des hauteurs ; il passe également par les milieux des trois cotés du triangle ABC. On pourra consulter les propriétés du cercle d'Euler dans le cours de la POFM Progresser en géométrie. Notons M le milieu du segment $[BC]$, et montrons qu'il s'agit du second point d'intersection des trois cercles.

Démontrons que M appartient au cercle d'Euler $\mathcal{C}_{A_1B_1C_1}$:

Comme les angles $\widehat{BC_1C}$ et $\widehat{BB_1C}$ sont droits, B_1 et C_1 appartiennent au cercle de diamètre $[BC]$, de centre M. En pariculier, M appartient à la médiatrice de $[B_1C_1]$.
De même, les quadrilatères AB_1A_1B et AC_1A_1C sont inscriptibles. Par angle inscrit, on obtient

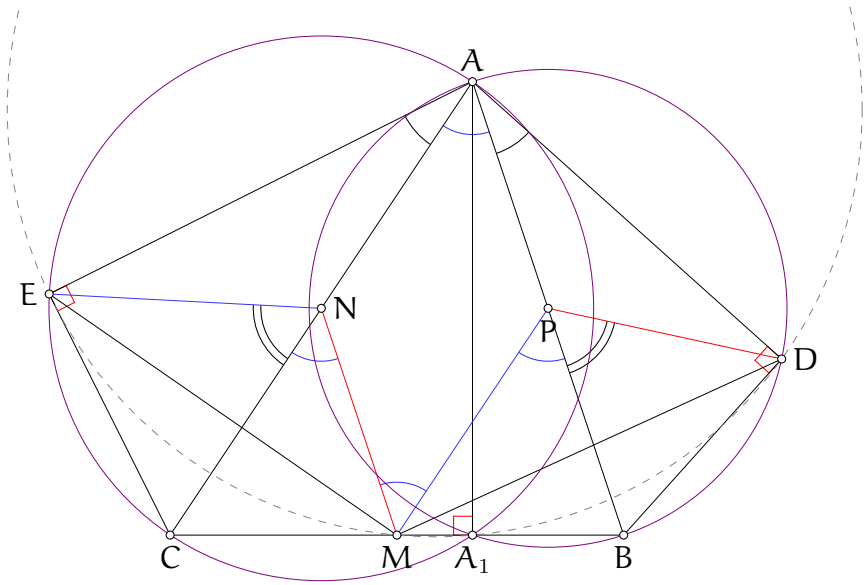
$$\widehat{C_1A_1B} = 180° - \widehat{C_1A_1C} = \widehat{BAC} = 180° - \widehat{B_1A_1B} = \widehat{B_1A_1C},$$

donc (BC) est une bissectrice extérieure de $C_1A_1B_1$. On conclut alors par le théorème du pôle Nord.

Montrons à présent que M et A_1 appartiennent au cercle $\mathcal{C}_{AKL}$:

Comme M est le centre du cercle $\mathcal{C}BC_1B_1$, il appartient comme K à la médiatrice de $[BC_1]$, et comme L à la médiatrice de $[CB_1]$. De plus $\widehat{AA_1M} = 90°$, donc les points A,K,A_1,M et L appartiennent tous au cercle de diamètre $[AM]$.

Désormais il ne reste plus qu'à montrer que M appartient au cerlce DA_1E :



Notons N et P les milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[AB]$. Par droite des milieux, nous savons que $(NM) \parallel (AB)$ et $(MP) \parallel (AC)$. Par conséquent, le quadrilatère $APMN$ est un parallélogramme. On en déduit en particulier que $AN = PM$. Or, le triangle ACE étant rectangle en E, le centre de son cercle circonscrit est N. Donc $NE = NA$. Cela montre que $PM = EN$. De la même manière, on montre que $NM = PD$. De plus, par angles correspondants,

$$\widehat{NMP} = \widehat{CNM} = \widehat{CAB} = \widehat{MPB}.$$

D'autre part, par angle au centre dans les cercles $\mathcal{C}_{AEC}$ et $\mathcal{C}_{ADB}$, on obtient :

$$\widehat{ENC} = 2 \cdot \widehat{EAC} = 2 \cdot \widehat{BAD} = \widehat{BPD}.$$

On a ainsi montré que les triangles ENM et MPD sont isométriques, puisque $EN = MP$, $\widehat{ENM} = \widehat{MPD}$ et $NM = PD$.
En particulier, $\widehat{NEM} = \widehat{PMD}$. Notons que $(AA_1) \perp (BC)$, donc les points A, E, C, A_1 et A, D, B, A_1 sont cocycliques. Par angles inscrits dans $\mathcal{C}_{AEC}$ et $\mathcal{C}_{ADB}$, on a donc

$$\widehat{EA_1A} = \widehat{ECA} = 90° - \widehat{EAC} = 90° - \widehat{BAD} = \widehat{ABD} = \widehat{AA_1D}.$$

Donc $\widehat{EA_1D} = 180° - 2 \cdot \widehat{EAC} = 180° - \widehat{ENC}$. Enfin,

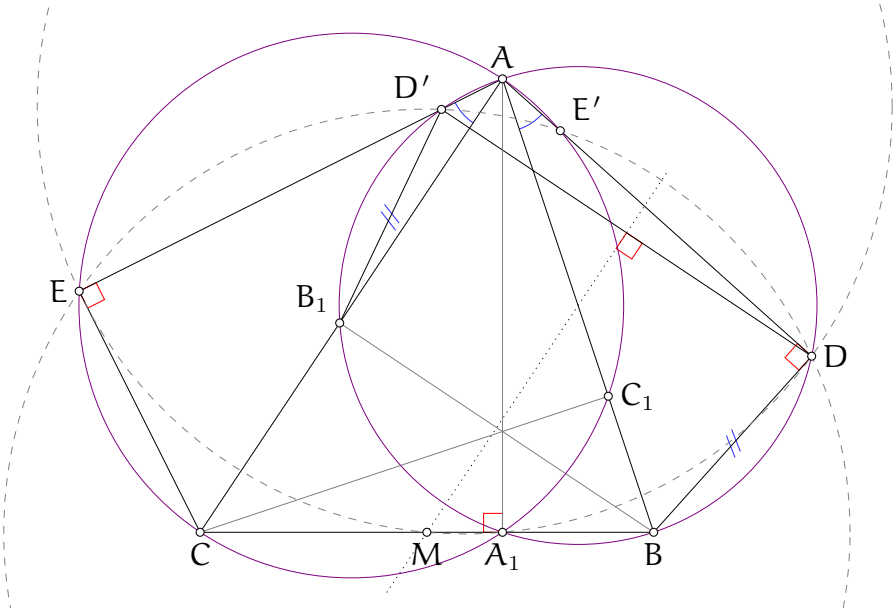
$$\widehat{EMD} = \widehat{EMN} + \widehat{NMP} + \widehat{PMD} = \widehat{EMN} + \widehat{CNM} + \widehat{NEM} = 180° - \widehat{ENC} = \widehat{EA_1D}.$$

Par angle inscrit, on en déduit donc que les points E, M, A_1, D sont cocycliques, ce qui conclut.

Solution alternative du fait que $M \in (DA_1E)$: Introduisons D' le second point d'intersection de (AE) avec $\mathcal{C}_{ADB}$ et E' le second point d'intersection de (AD) avec $\mathcal{C}_{AEB}$. Une motivation possible est la volonté de "symétriser" un peu plus le problème.
Comme $\widehat{BDA} = 90°$ on a la cocyclicité des points A,D',B_1,A_1,B et D. Grâce à notre condition d'angle et le théorème de l'angle inscrit, on obtient alors $\widehat{D'DB_1} = \widehat{D'AB_1} = \widehat{DAB} = \widehat{DB_1B}$ c'est à dire $(DD')//(BB_1)$. Le quadrilatère $DD'B_1B$ est donc à la fois trapèze et inscriptible, il s'agit donc d'un trapèze isocèle et les médiatrices de $[BB_1]$ et $[DD']$ sont confondues.
Comme $MB = MB_1$, on obtient que $MD = MD'$ et de façon analogue, $ME = ME'$.
Par angle inscrit, on a aussi

$$\begin{aligned}\widehat{DE'E} &= 180° - \widehat{AE'E} = 180° - \widehat{ACE} = 90° + \widehat{CAE}\\ &= 90° + \widehat{DAB} = 180° - \widehat{ABD} = 180° - \widehat{DD'A}\\ &= \widehat{DD'E},\end{aligned}$$

donc les points D,E',D' et E sont cocycliques et le centre de ce cercle est nécessairement M, puisque M est sur les médiatrices de $[DD']$ et de $[EE']$.
En particulier on a $MD = ME$. De plus, par angle inscrit, $\widehat{DA_1B} = \widehat{DAB} = \widehat{CAE} = \widehat{CA_1E}$, donc M est sur la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{DA_1E}$ et grâce au théorème du pôle Sud, M appartient au cercle $\mathcal{C}_{DA_1E}$. En conclusion, les trois cercles de l'énoncé passe par A_1 et M, donc les trois centres appartiennent à la médiatrice de $[A_1M]$ et en particulier ils sont alignés.



Commentaire des correcteurs : L'exercice a été réussi par quelques élèves. La première partie était très accessible et était correctement résolue dans la plupart des copies qui ont été rendues. Il ne faut donc pas hésiter à chercher, au moins partiellement, tous les exercices de l'envoi. Afin de montrer que le mileu de BC était bien sur le cercle DA_1E (ce qui constituait la partie dure de l'exercice), les élèves ont introduit les autres milieux dans le triangle ABC et ont effectué des chasses aux triangles semblables (par exemple les triangles MNE et DPM étaient isométriques et semblables à DAE). Une autre preuve est présentée dans ce corrigé.

Exercices Seniors

Exercice 10.

Soient ABC un triangle, D et E les pieds des hauteurs issues de A et B. Les projetés orthogonaux du point D sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ sont notés respectivement P et Q. On note M le point d'intersection de (PQ) avec (DE). Montrer que M est le milieu du segment $[DE]$.

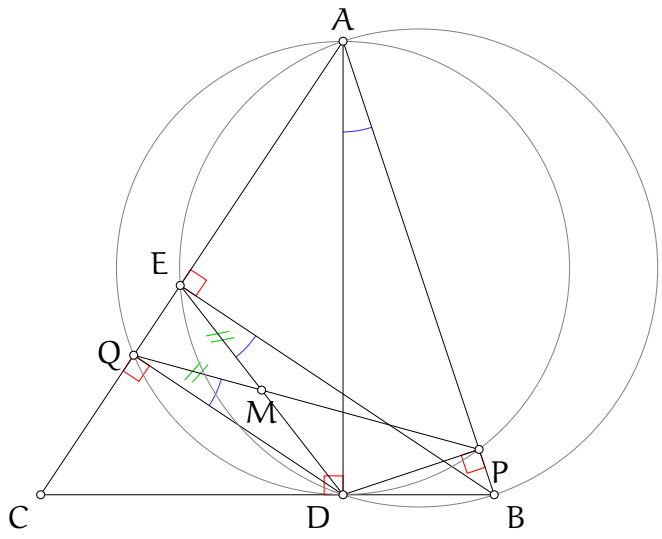
Solution de l'exercice 10 Par hypothèse, nous savons que les angles $\widehat{AEB}$ et $\widehat{ADB}$ sont droits, donc le quadrilatère $AEDB$ est cyclique. De même, les angles $\widehat{AQD}$ et $\widehat{APD}$ étant droits, le quadrilatère $APQD$ est cyclique. Appelons Γ le cercle circonscrit au triangle DEQ. Afin de montrer que le point M est le milieu du segment DE, il suffit de montrer qu'il s'agit du centre du cercle Γ.
Or, puisque l'on a $\widehat{EQD} = 90°$, le segment DE est un diamètre de Γ. Nous allons montrer que $ME = MQ$. Ainsi, on saura que le point M est l'intersection de la médiatrice de EQ et du diamètre DE de Γ, ce qui prouvera bien que le point M est en fait le centre de Γ. En particulier, on obtiendra que $ME = MD$.
Nous procédons par chasse aux angles. En utilisant le fait que les quadrilatères $APDQ$ et $ABDE$ sont cycliques, on obtient par angle inscrit :

$$\widehat{MQE} = 90° - \widehat{PQD} = 90° - \widehat{PAD},$$

et

$$\widehat{MEQ} = 90° - \widehat{MEB} = 90° - \widehat{DAB}.$$

Ainsi, $\widehat{MEQ} = \widehat{MQE}$, ce qui montre bien que $ME = MQ$ et conclut la preuve.



Solution Alternative :
Commençons par lister quelques propriétés de la figure qui découlent des nombreux angles droits.

— Comme (BE) et (DQ) sont perpendiculaires à (AC), elles sont parallèles entre elles.
— Comme $\widehat{AQD} = 90° = 180° - \widehat{APD}$, le quadrilatère $APDQ$ est inscriptible.
— De plus, (BC) est tangente à ce cercle car $[AD]$ en est un diamètre et $(AD) \perp (BC)$ qui passe par D.

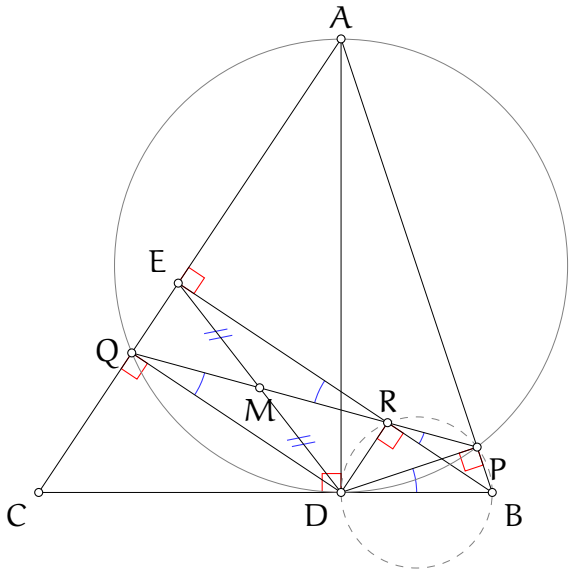
A présent, introduisons R le point d'intersection de (QP) et (BE).
Par angle tangentiel et alterne/interne on a :

$$\widehat{PDB} = \widehat{PQD} = \widehat{QRE} = \widehat{PRB}.$$

Dès lors, les points Q, B, D et R sont cocyclique et par angle inscrit :

$$\widehat{BRD} = \widehat{BPD} = 90°.$$

Ainsi le quadrilatère $EQDR$ contient au moins 3 angles droits ; c'est donc un rectangle.
Comme les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieux, on a bien $M \in (RP)$ et cela conclut.



Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi par l'ensemble des élèves. Les élèves ont très bien justifié la cocyclicité des différents points de la figure en indiquant précisément les théorèmes utilisés. Pour conclure, certains élèves ont introduit le point F comme l'intersection de (EB) et (PQ), puis ont montré que $QDFE$ était cyclique et donc un rectangle. Il est possible de se passer de l'introduction de ce point (voir corrigé), mais cela fonctionne très bien. Attention, certains élèves n'ont pas fait de figure : en géométrie, c'est indispensable !

Exercice 11.

Soit ABC un triangle, H son orthocentre et Ω son cercle circonscrit. Soit ℓ une droite passant par H. On nomme ℓ_A, ℓ_B et ℓ_C les symétriques de ℓ par rapport aux droites $(BC), (AC)$ et (AB). Montrer que les droites ℓ_A, ℓ_B et ℓ_C sont concourantes en un point appartenant à Ω.

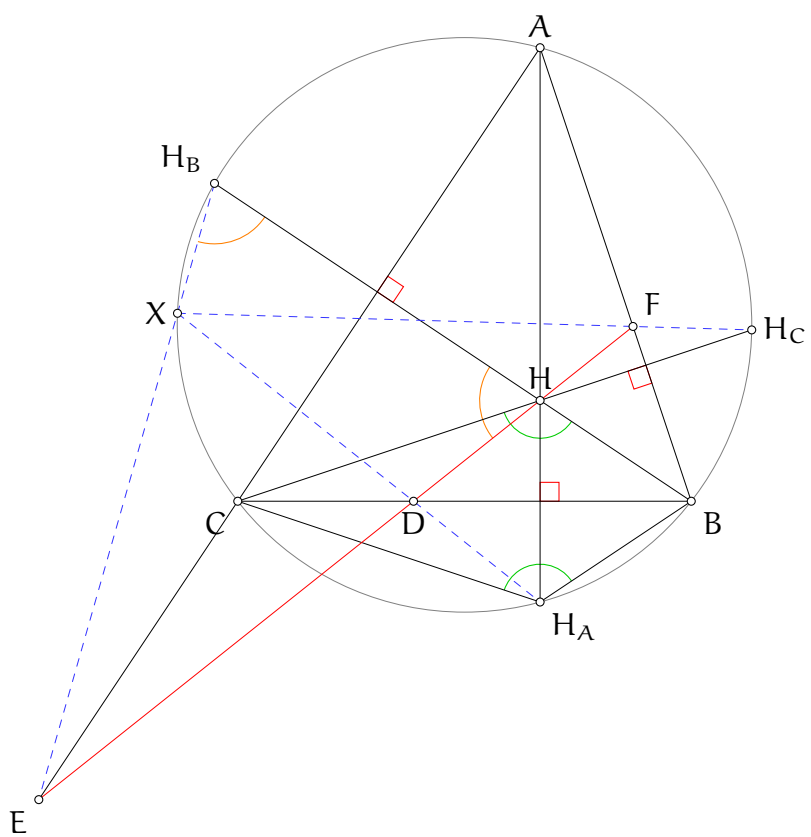
<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On introduit logiquement H_A, H_B et H_C les symétrique de H par rapport aux cotés du triangle, car ils appartiennent toujours à ℓ_A, ℓ_B et ℓ_C.
Montrons en fait que ces points appartiennent tous à Ω. On a

$$\begin{aligned}\widehat{BH_AC} = \widehat{BHC} &= 90^\circ - \widehat{HBC} + 90^\circ - \widehat{HCB} \\ &= \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ - \widehat{BAC}.\end{aligned}$$

D'où $H_A \in \Omega$ par réciproque du théorème de l'angle inscrit, et de même pour H_B et H_C.
Notons à présent D, E et F les points d'intersections de ℓ avec les côtés du triangle, et X la seconde intersection de ℓ_A avec Ω. On peut alors calculer par angle inscrit et symétries :

$$\widehat{XH_BB} = 180^\circ - \widehat{XH_AB} = 180^\circ - \widehat{DHB} = \widehat{H_BHE} = \widehat{BH_BE}.$$

Ainsi, X appartient à ℓ_B. De même, on obtient que X appartient à ℓ_C et cela conclut.



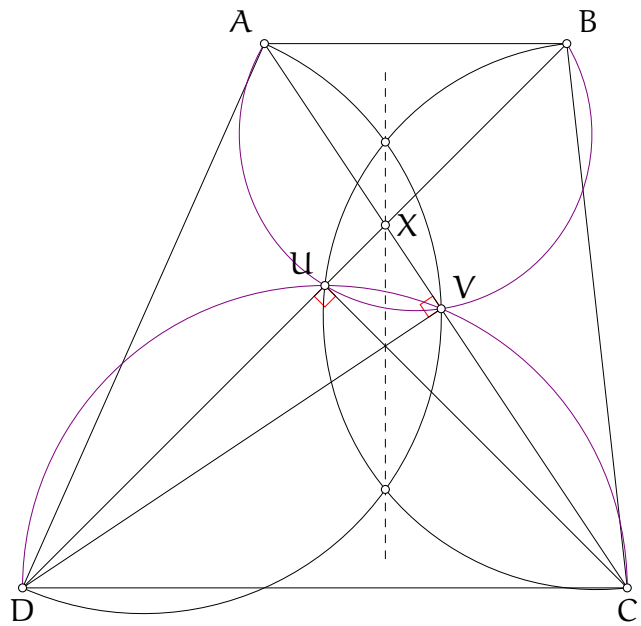
<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice a été très bien réussi par ceux qui l'ont abordé. L'erreur la plus fréquente a été de d'abord montrer que les intersections deux à deux des droites l_A, l_B et l_C étaient toutes sur Ω puis d'en déduire sans raisonnement supplémentaire que ces trois droites sont concourantes sur Ω : tel quel c'est faux, on pourrait très bien imaginer que l_A, l_B et l_C sont les droites d'un triangle de cercle circonscrit Ω. Il était donc nécessaire de détailler un peu plus, par exemple en précisant que ladite intersection était la deuxième intersection de l_A et Ω après le symétrique de H par (BC). On notera également

que le cas où l est parallèle à un des côtés du triangle (et donc on n'a pas d'intersection entre l et ce côté) n'a été traité par quasiment personne : il faut faire gaffe à cela car selon les exercices/compétitions, ce genre d'oubli peut être pénalisé. Finalement, on peut retenir de cet exercice, si on ne le savait pas déjà, que les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle vivent tous sur le cercle circonscrit : beaucoup d'élèves s'embêtent à le redémontrer, et il faut savoir le faire, mais c'est aussi considéré suffisamment connu pour être utilisé tel quel.

Exercice 12.

Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) est parallèle à (CD). On pose X le point d'intersection des droites (AC) et (BD). On suppose que les cercles de diamètre $[AD]$ et $[BC]$ s'intersectent en deux points, que l'on nomme P et Q. Montrer que les points P, Q et X sont alignés.

Solution de l'exercice 12



On note U le projeté orthogonal de C sur $[BD]$ et V le projeté orthogonal de D sur (AC). Nommons Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètres $[AD]$ et $[BC]$. On sait que V est sur le cercle Γ_1 puisque $\widehat{AVD} = 90°$. De même, on sait que U est sur Γ_2. On sait aussi que $CDUV$ est inscriptible car $\widehat{DVC} = \widehat{DUC} = 90°$. Par puissance d'un point, on obtient donc que :

$$XU \cdot XD = XV \cdot XC \iff \frac{XD}{XC} = \frac{XV}{XU}.$$

Or, $(AB)//(CD)$, ainsi d'après le théorème de Thalès, on a que :

$$\frac{XD}{XC} = \frac{XB}{XA}.$$

Par conséquent :

$$\frac{XV}{XU} = \frac{XB}{XA} \iff XA \cdot XV = XB \cdot XU.$$

Ainsi, X a la même puissance par rapport au cercle Γ_1 et au cercle Γ_2, il appartient donc à leur axe radical. Or comme, Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en P et Q, on sait que (PQ) est l'axe radical des deux cerclces, ainsi, on obtient que X, P et Q sont alignés.

Solution Alternative 1 :
En reprenant les notations précédentes, on a que :

$$\widehat{XUV} = \widehat{XCD},$$

puisque $UDCV$ est inscriptible. Or, comme $(DC)//(AB)$, on a par angle alterne-interne que :

$$\widehat{XCD} = \widehat{XAB}.$$

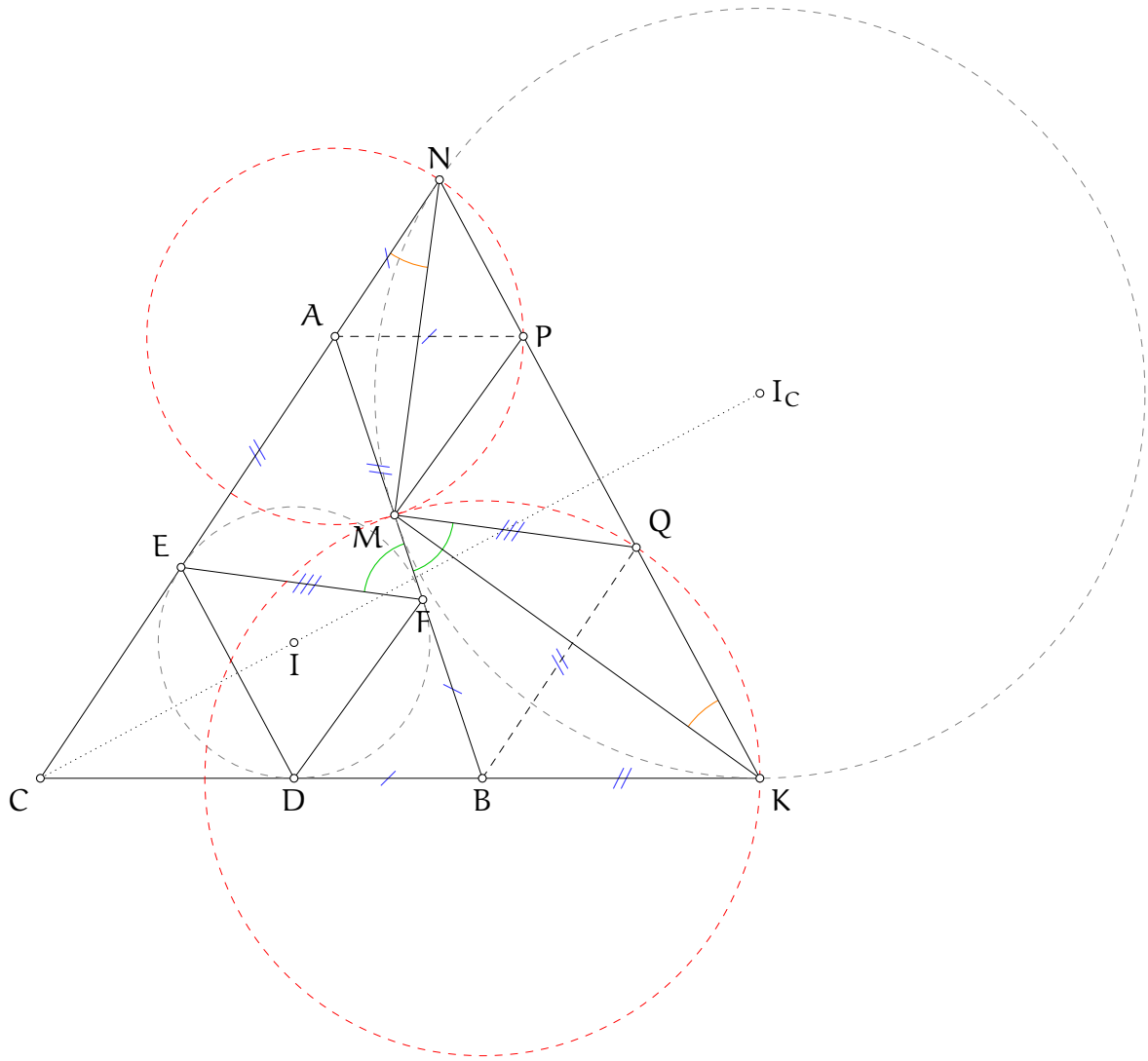
Ce qui nous donne, d'après la réciproque au théorème de l'angle inscrit, que le quadrilatère $ABUV$ est inscriptible.
On considère les cerclces Γ_1, Γ_2 et le cercle circonscrit à $AUBV$. Leurs axes radicaux sont $(PQ), (AV)$ et (UB). On sait que ces trois axes sont concourants, en le centre radical de ces trois cercles. Or (AV) et (UB) s'intersectent en X. Ainsi, on obtient bien que P, Q et X sont alignés.

Commentaire des correcteurs : Le problème est très bien résolu. Les élèves qui ont voulu calculer directement la puissance de X par rapport au deux cercles en utilisant la formule $OX^2 - R^2$ s'en sont sortis assez rapidement avec Al-Kashi et la formule de la médiane. Cependant attention : plusieurs copies ne daignent pas définir les points qui sont notés sur leur figure. Quand des points semblent vérifier trois propriétés sur la figure, il est impossible de savoir lesquelles sont supposées ou prouvées. Il faut définir EXPLICITEMENT les points introduits, un dessin ne suffit pas.

Exercice 13.

Soit ABC un triangle. Le cercle C-exinscrit du triangle ABC touche les droites $(AB), (AC)$ et (BC) respectivement aux points M, N et K. Les points P, Q sont sur la droite (NK) et vérifient $AN = AP$ et $BK = BQ$. Montrer que le rayon du cercle circonscrit au triangle MPQ est égal à celui du cercle inscrit dans ABC.

Solution de l'exercice 13



On pose D, E et F les points de tangence du cercle inscrit au triangle ABC respectivement avec les côtés $(BC), (AC)$ et (AB). On a que $AE = AF$, $BF = BD$ et $CD = CE$. On pose $x = AE$, $y = BF$ et $z = CD$.

Lemme 1 :

On a que $AN = AM = y$ et $BM = BK = x$.

Preuve : On a que $CN = CK$ car ce sont les tangentes issues de C par rapport au cercle C-exinscrit. On a donc que :

$$AN + x + z = BK + y + z \iff An + x = BK + y$$

Or, on a que :

$$AM + BM = AC = x + y$$

Ce qui nous donne bien le résultat souhaité.

Maintenant, on va montrer que $PQM \sim DEF$.
On a déjà que $(DE)//(NK) = (PQ)$ d'après la réciproque du théorème de Thalès puisque les triangles CDE et CKN sont tous les deux isocèles en C.
On a par chasse aux angles : Comme le triangle AMP est isocèle en A, on a que :

$$\widehat{AMP} = 90 - \frac{1}{2}\widehat{PAM}$$

Or d'après le théorème de l'angle au centre, on obtient que :

$$\frac{1}{2}\widehat{PAM} = \widehat{PNM}$$

Puis, par angle tangentiel, on a que :

$$\widehat{PNM} = \widehat{KNM} = \widehat{BKM}$$

Enfin comme les triangles BKM et BDF sont isocèles en B, on obtient que :

$$\widehat{BFD} = 90 - \frac{1}{2}\widehat{ABC}, \quad \widehat{MKB} = 90 - \frac{1}{2}\widehat{MBK}$$

Ainsi, comme K, B et D sont alignés :

$$90 - \widehat{MKB} = \widehat{BFD}$$

Ce qui nous donne :

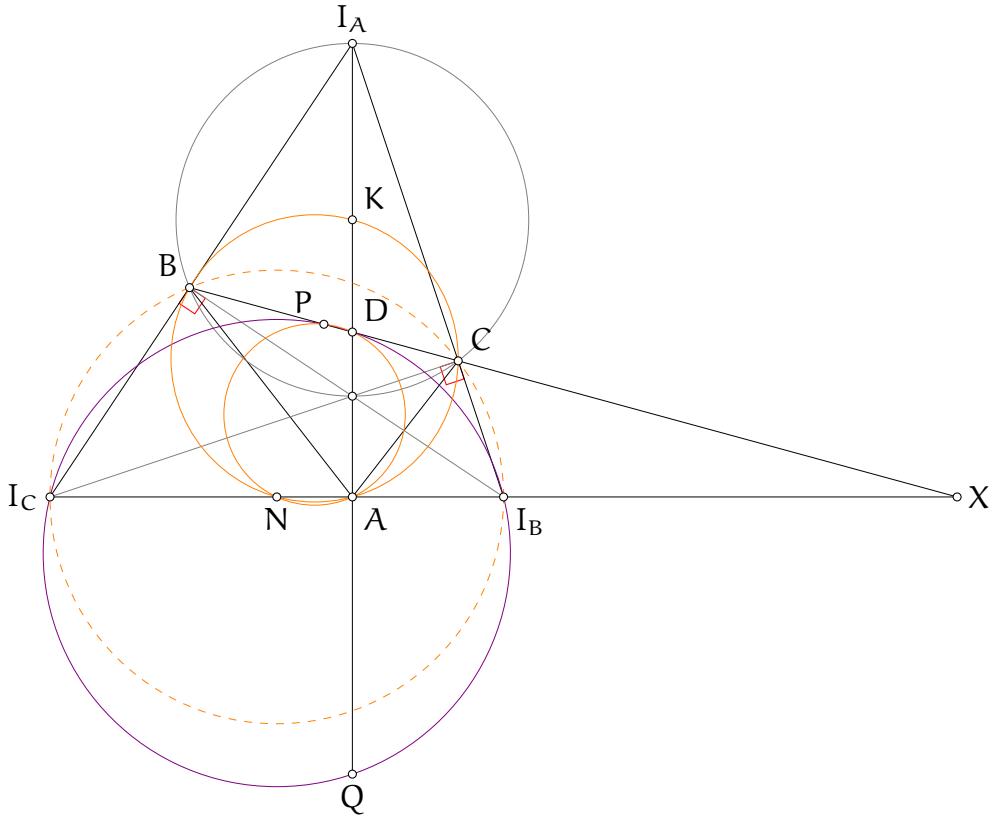
$$\widehat{AMP} = \widehat{BFD}$$

On a donc que $(PM)//(FD)$, de même, on peut montrer que $(QM)//(FE)$, ainsi, on a bien que $PQM \sim DEF$
Il suffit donc de montrer que une des longueurs des deux triangles sont égaux, ce qui permettrait de montrer que les deux triangles sont isométriques et donc que leurs rayons de cercle circonscrit soient égaux.
Or, on a : $\widehat{AMP} = \widehat{BFD}$ et $AP = AM = y = BF = BD$, ainsi, les deux triangles AMP et BFD sont isocèles en A et B respectivement, avec le même angle à leur base. Ainsi, ils sont égaux, ce qui nous amène à $MP = FD$, ce qui conclut.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Le problème a été extrémement bien résolu par les élèves qui l'ont traité. Il est cependant à noter qu'il est préférable de redémontrer les lemmes connus lorsque l'on résout les premiers exercices.

Exercice 14. Soit ABC un triangle acutangle, tel que $AB < AC$. On nomme K le milieu de l'arc BC ne contenant pas A et P le milieu du segment $[BC]$. Soient I_B et I_C les centres respectifs des cercles B-exinscrits et C-exinscrits du triangle ABC. Soit Q le symétrique du point K par rapport à A. Montrer que les points P, Q, I_B et I_C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 14



En traçant le cercle passant par I_B, I_C et P, on se rend compte que celui-ci passe également par le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$, que l'on note D. On va alors procéder en deux temps : on va montrer que les points D, P, I_B et I_C sont cocycliques, puis montrer que les points I_B, Q, I_C et D sont cocycliques. Ceci permettra de conclure que les cinq points D, P, I_B, Q et I_C sont sur un même cercle.

Mais avant de commencer, on introduit le point I_A, centre du cercle $A-$exinscrit dans le triangle ABC, et on rappelle que, puisque les points I_A, I_B et I_C appartiennent aux bissectrices extérieures des angles du triangle ABC, les points A, B et C sont les pieds des hauteurs issues des sommets I_A, I_B et I_C dans le triangle $I_AI_BI_C$. On constate alors qu'il est plus pertinent de se raisonner dans le triangle $I_AI_BI_C$ que dans le triangle ABC.

Les points D, P, I_B et I_C sont cocycliques.

Comme il n'y a usuellement pas beaucoup de relations d'angles avec un milieu de segment, on va passer par des égalités de longueurs et utiliser la réciproque de la puissance d'un point. On introduit pour cela X le point d'intersection des droites (BC) et (I_BI_C). On note également N le pôle Nord du sommet A, qui est sur la droite (I_BI_C).

Notons également que, puisque $\widehat{I_CCI_B} = \widehat{I_CBI_B} = 90°$, les points B, C, I_B et I_C sont cocycliques.

Enfin, les points K, P et N sont alignés sur la médiatrice du segment $[BC]$ et la droite (AN) est la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$, donc $\widehat{NPD} = 90° = \widehat{NAD}$. Les points N, P, D et A sont donc cocycliques. En appliquant la puissance du point X aux différents cercles, on trouve

$$XP \cdot XD = XN \cdot XA = XB \cdot XC = XI_B \cdot XI_C,$$

ce qui montre que les points D, P, I_B et I_C sont cocycliques.

<u>Les points D, I_B, Q et I_C sont cocycliques.</u>

Il suffit, par puissance d'un point, de montrer que $AI_B \times AI_C = AD \times AQ$. Or, comme expliqué précédemment, on a que $\widehat{KPD} = \widehat{DAX} = 90$, on a donc que D est l'orthocentre du triangle KNX, ainsi le quadrilatère $KPAX$ est inscriptible :

$$NA \cdot NX = NP \cdot NK$$

D'autre part, puisque le quadrilatère $PDNA$ est inscriptible, on a que :

$$\widehat{QNX} = \widehat{KNX} = \widehat{ADX}$$

Car K est Q sont symétriques par rapport à (XN), donc que le quadrilatère $NQDX$ est inscriptible, ce qui nous donne :

$$AQ \cdot AD = AN \cdot AX$$

On pose R le rayon du cercle circonscrit au quadrilatère BCI_BI_C, ce qui nous donne $R = NB = NC$.
On a donc d'après la définition de la puissance d'un point par rapport à un cercle que :

$$AI_B \cdot AI_C = R^2 - AN^2$$

On veut donc montrer que :

$$AN \cdot AX + AN^2 = R^2 \iff NA \cdot NX = R^2$$

Or, comme (KN) la méddiatrice de $[BC]$ et le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC, on a que :

$$\widehat{KBN} = \widehat{BDN} = 90 \iff R^2 = NB^2 = NP \cdot NK = NA \cdot NX$$

Ce qui permet de conclure

<u>Solution Alternative 1 :</u> On pouvait montrer que les points D, I_B, Q et I_C étaient cocycliques. En, effet, comme les droites (AD) et (AX) sont les bissectrices de $\widehat{BAC}$, on obtient que $((AD), (AX); (AB), (AC)) = -1$. Ainsi :

$$-1 = (D, X; B, C) \overset{I_A}{=} (A, X; I_C, I_B).$$

Or, comme N est le milieu de $[I_CI_B]$, l'identité de Mac-laurin, nous donne que :

$$AI_C \cdot AI_B = AN \cdot AIX = AQ \cdot AD.$$

Ce qui permettait aussi de conclure.

<u>Solution alternative 2 :</u> Par le théorème du cercle d'Euler, on a :

$$I_BII_A \sim I_BBC \quad \text{et} \quad I_CII_A \sim I_CBC.$$

Donc :

$$\widehat{I_BKA} = \widehat{I_BPC} \quad \text{et} \quad \widehat{I_CKA} = \widehat{I_CPB} \iff \widehat{I_CQI_B} = 180 - \widehat{I_CPI_B}.$$

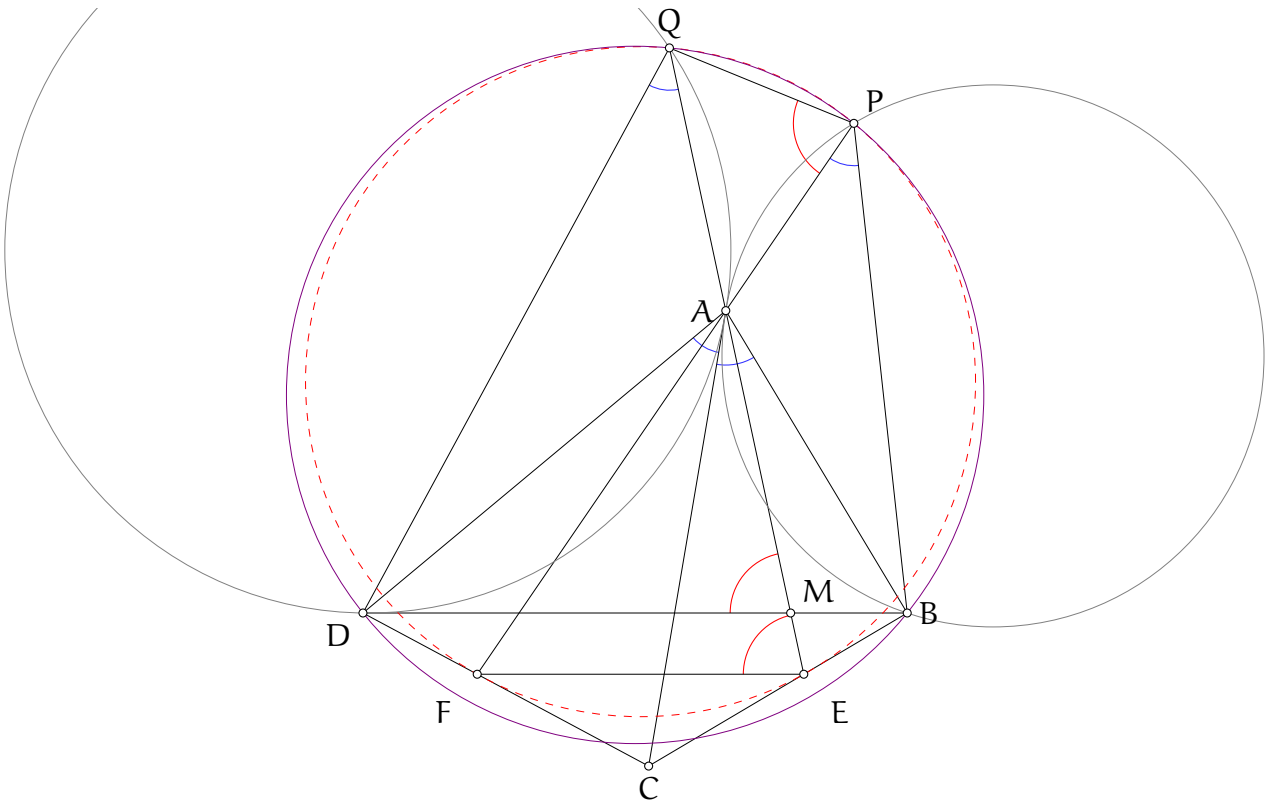
ainsi le quadrilatère PQI_BI_C est inscriptible.

Commentaire des correcteurs : Le problème a été plutôt bien résolu par ceux qui l'ont traité. La solution pouvait être découpée en deux parties : montrer que PDI_BI_C sont cocycliques et montrer que QDI_BI_C sont cocycliques. Plusieurs copies qui n'avaient pas de solution complète ont obtenu les points de l'une des deux parties, c'est toujours une bonne idée de présenter ses avancées partielles. De plus, il est à déplorer que plusieurs élèves aient perdu des points en ne justifiant pas que K est sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$: c'est bien de remarquer que K est un pôle Sud, mais il faut le justifier ! Une partie importante des copies utilise des outils avancés (géométries projective, barycentrique,...).

Exercice 15.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que C appartient à la bissectrice de $\widehat{BAD}$. Soient E et F des points respectivement sur les droites (BC) et (CD) de sorte que (EF) est parallèle à (BD). Soient P et Q des points sur les droites (FA) et (EA) respectivement tels que le cercle ω_1 circonscrit au triangle ABP et le cercle ω_2 circonscrit au triangle ADQ sont tous les deux tangents à (AC). Montrer que les points B, P, Q et D sont cocycliques.

Solution de l'exercice 15



On commence par montrer que les points P, Q, E et F sont cocycliques. Pour cela on va utiliser la puissance d'un point. Il s'agit de montrer que :

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AF}.$$

On va montrer cela grâce à une chasse aux rapports avec la loi des sinus et donc avec une chasse aux angles. On a dans un premier temps, d'après le théorème de l'angle tangentiel que :

$$\widehat{PBA} = \widehat{CAF}, \qquad \widehat{QDA} = \widehat{CAE}.$$

Mais on a aussi, grâce au fait que (AC) est la bissectrice de $\widehat{BAD}$, que :

$$\widehat{BPA} = \widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{AQD}.$$

Ainsi, on a que :

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AP}{BA}\frac{AB}{AD}\frac{AD}{QA} = \frac{\sin(\widehat{ABP})}{\sin(\widehat{BPA})}\frac{AB}{AD}\frac{\sin(\widehat{AQD})}{\sin(\widehat{ADQ})} = \frac{AB}{AD}\frac{\sin(\widehat{CAF})}{\sin(\widehat{CAE})}.$$

Mais, comme $(EF)//(BD)$, on a également que :

$$\frac{CE}{CF} = \frac{CB}{CD}.$$

Ainsi, on obtient que :

$$\frac{AE}{AF} = \frac{AE}{EC}\frac{EC}{CF}\frac{CF}{FA} = \frac{\sin(\widehat{ECA})}{\sin(\widehat{CAE})}\frac{CB}{CD}\frac{\sin(\widehat{CAF})}{\sin(\widehat{FCA})} = \frac{CB}{CD}\frac{\sin(\widehat{ECA})}{\sin(\widehat{FCA})}\frac{\sin(\widehat{CAF})}{\sin(\widehat{CAE})}.$$

Or, d'après la loi des sinus :

$$\frac{CB}{BA} = \frac{\sin(\widehat{CAB})}{\sin(\widehat{BCA})}, \qquad \frac{CD}{DA} = \frac{\sin(\widehat{CAD})}{\sin(\widehat{DCA})}.$$

Ainsi :

$$\frac{CB}{CD}\frac{\sin(\widehat{ECA})}{\sin(\widehat{FCA})} = \frac{AB}{AD}.$$

Finalement, on a bien que :

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{AE}{AF}.$$

On est désormais en position de conclure. On introduit M le point d'intersection des droites (BD) et (AE). On a que :

$$\widehat{BPQ} = \widehat{BPA} + \widehat{APQ} = \widehat{BAC} + \widehat{FEQ} = \widehat{DAC} + \widehat{DMA}$$
$$= 180 - \widehat{ADB} - \widehat{MAC} = 180 - \widehat{ADB} - \widehat{QDA} = 180 - \widehat{QDB}.$$

Ceci conclut.

<u>Solution Alternative :</u>
Pour cette nouvelle solution, raisonnons "à l'envers" : si l'énoncé est vrai, on dispose alors de trois cercles circonscrits aux triangles/quadrilatère ABP, AQD et $QPBS$. Dès lors le centre radical de ces trois cercles doit se situer à l'intersection des axes radicaux (CA), (BP) et (DQ), en particulier, ces droites doivent être concourante.
Mais si nous démontrons ce fait, alors en notant Z l'intersection des trois droites, on aura par puissance d'un point $ZP \cdot ZB = ZA^2 = ZQ \cdot ZB$, d'où les points B, P, Q et D seraient cocyclique. Ainsi **il faut et il suffit de démontrer que les droites** (CA)**,** (BP) **et** (DQ) **sont concourantes**.

Pour ce faire, nous allons utiliser la géométrie dynamique dite "traditionnelle", c'est à dire basée sur les birapports. Pour les non initiés, l'idée est la suivante : si on montre que l'on peut passer projectivement d'un point à un autre (c'est à dire que si on prenais le point initial dans 4 position distinctes, le birapport de ces 4 points serait le même que ceux des 4 positions obtenues pour l'autre), et qu'on montre qu'ils sont par trois fois identiques, c'est qu'ils sont toujours égaux.

Ici on considère que les points A, B, C, D sont fixés, avec les cercles ω_B et ω_D tangents à (AC) en A passant par B et D respectivement. On peut alors détailler le "passage projectif" comme suit : on définit d'abord Z un point quelconque de AC, puis on construit dans cette ordre :

- P la seconde intersection de (ZB) avec ω_B
- F l'intersection de (PA) avec (DC)
- E l'intersection de la parallèle à (BD) passant par F avec (CB)

— Q la seconde intersection de (EA) avec ω_A
— Z' l'intersection de (DQ) avec (AC)

Il s'agit donc de démontrer que $Z = Z'$ et toute les opérations que l'on a réalisé sont bien projective.

On va alors traiter 3 position de Z particulièrement facile.

1) $Z = A$

Dans ce cas, $P = A$ car $Z = A \in \omega_B$, puis $F = C$ car (CA) est la tangente à ω_B en A, puis $E = C = F$ et $Q = A$, d'où $Z' = A = Z$.

2) $Z = I_\infty$, le point à l'infini de la droite (CA).

Dans ce cas, P est l'intersection de ω_B avec la droite parallèle à (AC) passant par B. On a alors $\widehat{DAC} = \widehat{BAC} = \widehat{APB}$ d'où P est aligné avec B et C
Dès lors, $F = D$, puis $E = B$ et Q est la seconde intersection de (AB) avec ω_D. Comme ce qui précède, on obtient que (QD) est parallèle à (AC), d'où $Z' = I_\infty = Z$.

3) $Z = S$, le pôle sud de A dans le triangle ADB

Le choix de ce point n'est pas directement indiqué, mais après avoir testé d'autre points (comme $Z = (AC) \cap (BD)$ par exemple), il s'avère plus aisé à traiter.
Comme A, B, P et D sont cocyliques, on obtient $\widehat{BPA} = \widehat{BAZ} = \widehat{DAZ} = \widehat{DBZ}$, d'où (PA) est parallèle à (BD). Dès lors on peut observer que les points F, E et Q vont également apartenir à la parallèle à (BD) passant par A, et la même chasse aux angles indique que $Z' = S = Z$.

Si certaine de ces étapes sèment de la confusion, un bon réflexe est de "s'imaginer" Z très proche de la postition voulue, pour voir dans ce cas où se situent les points, sans problème de définition apparent.

Nous avons dès à présent finit.
Pour être plus précis, les étapes que l'on a suivis étant projective, on peut dire que pour tout $Z \in (AC)$ on a

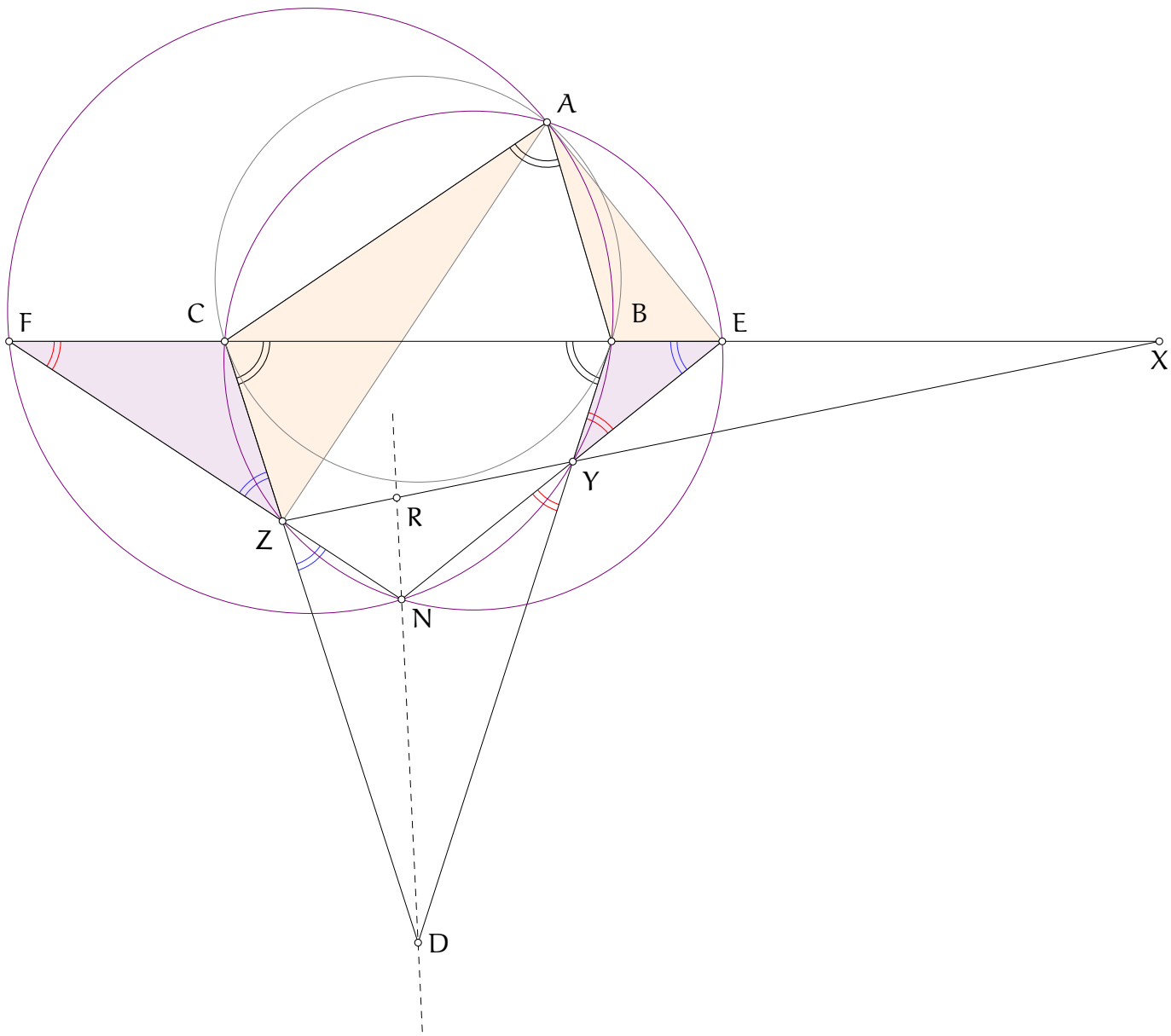
$$b_{ASI_\infty Z} = b_{ASI_\infty Z'}$$

d'où $Z = Z'$ et les droites (CA), (BP) et (DQ) sont concourantes, ce qui conclut.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Le problème était difficile et nécessitait d'utiliser des égalités de rapports en plus des égalités d'angles que l'on pouvait établir. La plupart des élèves ayant résolu l'exercice ont procédé comme dans la première solution du corrigé, c'est-à-dire en montrant d'abord que P, Q, E et F sont cocycliques en traduisant cette cocyclicité en égalité de rapports grâce à la puissance d'un point, et en montrant ensuite que P, Q, B et D sont cocycliques à l'aide d'une chasse aux angles.

Exercice 16. Soit un triangle ABC dont les trois côtés sont de longueurs différentes. La bissectrice extérieure à l'angle $\widehat{BAC}$ rencontre (BC) en X. Les droites ℓ_b et ℓ_c sont les tangentes issues de B et C par rapport au cercle circonscrit à ABC. Une droite passant par X coupe ℓ_b et ℓ_c aux points Y et Z respectivement. On pose N le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles AYB et AZC et D le point d'intersection des droites ℓ_b et ℓ_c. Montrer que la droite (ND) est une bissectrice de $\widehat{YNZ}$.

Solution de l'exercice 16



En traçant les cercles circonscrits aux triangle ABY et ACZ, on s'aperçoit qu'ils passent respectivement par les points d'intersection des droites (NZ) et (NY) avec (BC). On commence donc par montrer ce résultat.

Soit E le point d'intersection des droites (NY) et (BC). D'après le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{ECN} = \widehat{BAC}$. D'autre part, le théorème de l'angle tangentiel implique également que $\widehat{ABY} = \widehat{ABC} + \widehat{BAC}$ et $\widehat{ACZ} = \widehat{ACB} + \widehat{BAC}$. On a donc d'après le théorème de l'angle inscrit appliqué aux deux cercles circonscrits aux triangles ABY et ACZ,

$$\widehat{ZNY} = \widehat{ANY} + \widehat{ZNA} = 180° - \widehat{ABY} + 180° - \widehat{ACZ} = 180° - \widehat{BAC}.$$

On a montré que $\widehat{ZNE} = 180° - \widehat{ZCE}$, les points C, Z, N et E sont donc cocycliques. On procède de la même manière pour montrer que les points F, N, Y, B et A sont cocycliques.

Une première conséquence est que $\widehat{BEY} = 180° - \widehat{CZN} = \widehat{CZF}$ et $\widehat{CFZ} = 180° - \widehat{BYN} = \widehat{BYE}$. Les triangles BEY et CZF sont donc semblables.

Revenons à l'exercice et posons R le point d'intersection de la droite (DN) avec la droite (YZ). D'après le théorème de la bissectrice, pour montrer l'exercice, il suffit de montrer que $\frac{NY}{NZ} = \frac{RY}{RZ}$. On va donc calculer le quotient $\frac{NY \cdot RZ}{NZ \cdot RY}$ et montrer qu'il vaut 1. D'après la loi des sinus dans les triangles ZRD, YRD, ZND et YND

$$ZR = DZ\frac{\sin\widehat{ZDN}}{\sin\widehat{ZRD}}, \quad YR = DY\frac{\sin\widehat{NDY}}{\sin\widehat{DRY}}, \quad \frac{NZ}{\sin\widehat{ZDN}} = \frac{ND}{\sin\widehat{DZN}}, \quad \frac{NY}{\sin\widehat{YDN}} = \frac{ND}{\sin\widehat{DYN}}$$

de sorte que, en remplaçant et en simplifiant par $\sin\widehat{ZRD} = \sin\widehat{DRY}$,

$$\frac{NY \cdot RZ}{NZ \cdot RY} = \frac{NY}{NZ} \cdot \frac{DZ\sin\widehat{ZDN}}{DY\sin\widehat{YDN}} = \frac{DZ}{DY}\frac{NY}{\sin\widehat{YDN}}\frac{\sin\widehat{ZDN}}{NZ} = \frac{DZ\sin\widehat{DZN}}{DY\sin\widehat{DYN}} = \frac{DZ\sin\widehat{CZF}}{DY\sin\widehat{BYE}}.$$

Concernant le ratio $\frac{DZ}{DY}$, le théorème de Ménélaüs appliquée à la droite (YZ) dans le triangle BCD donne

$$\frac{DZ}{DY} = \frac{CZ}{BY}\frac{BX}{CX} = \frac{CZ}{BY}\frac{BA}{CA},$$

où on a utilisé le théorème de la bissectrice (extérieure) au point X. L'expression devient

$$\frac{NY \cdot RZ}{NZ \cdot RY} = \frac{BA}{CA}\frac{CZ\sin\widehat{CZF}}{BY\sin\widehat{BYE}}.$$

On peut désormais appliquer la loi des sinus dans les triangles FCZ et YBE :

$$CZ\sin\widehat{CZF} = FZ\sin\widehat{FCZ} = FZ\sin\widehat{CAB} \qquad BY\sin\widehat{BYE} = YE\sin\widehat{YBE} = YE\sin\widehat{BAC}.$$

Ainsi,

$$\frac{NY \cdot RZ}{NZ \cdot RY} = \frac{BA}{CA}\frac{FZ}{YE} = \frac{BA}{CA}\frac{CZ}{BE}.$$

Pour conclure, il faut donc démontrer que $\frac{BA}{CA} = \frac{BE}{CZ}$. Or, on remarque que $\widehat{ABE} = 180° - \widehat{ABC} = \widehat{ZCA}$ et que $\widehat{AEB} = \widehat{AZC}$ d'après le théorème de l'angle inscrit. Il vient que les triangles ABE et ACZ sont semblables, ce qui implique bien que le membre de droite de l'égalité ci-dessus vaut 1, et conclut l'exercice.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> La plupart des élèves qui ont rendu l'exercice l'ont trouvé, que cela soit par la même méthode que le corrigé ou par de la géométrie projective (méthodes dynamiques, théorème de Desargues...).

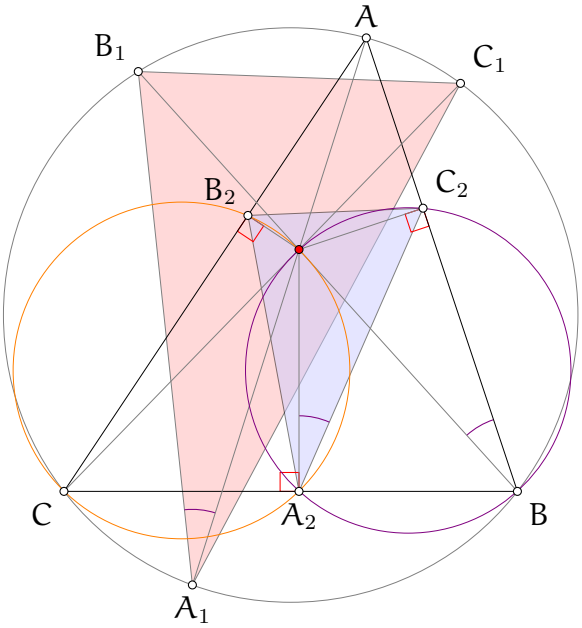
Exercice 17.

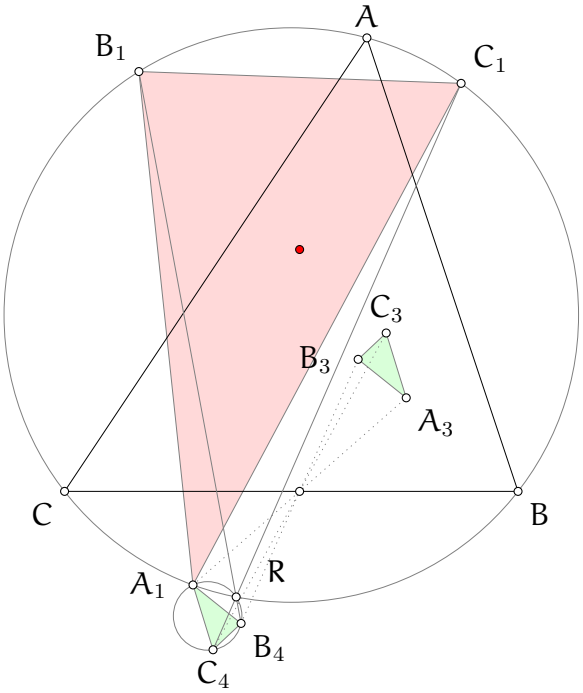
Soit ABC un triangle, k son cercle circonscrit et H son orthocentre. Soit P un point arbitraire dans le triangle ABC. Les droites (AP), (BP) et (CP) recoupent le cercle k aux points A_1, B_1 et C_1. Les points A_2, B_2 et C_2 sont les projections orthogonales de P sur les droites (BC), (CA) et (AB). Les points A_3, B_3 et C_3 sont les symétriques de A_1, B_1 et C_1 par rapport aux points A_2, B_2 et C_2. Montrer que les points H, A_3, B_3 et C_3 sont cocycliques.

Solution de l'exercice 17

Ce problème est difficile, la difficulté réside principalement dans le fait de trouver des informations sur les triangles $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$, puis les relier à des éléments connus de H, comme le cercle d'Euler.

Dans tout le problème, on va désigner par (ABC) le cercle circonscrit à ABC, puis on notera de manière générale un polygone inscriptible comme $(A_1 \dots A_n)$, où les A_i sont les sommets du polygone. Enfin, on notera $\Gamma_{[AB]}$ le cercle de diamètre $[AB]$





Étape 1 : Montrons que les $A_iB_iC_i$ sont semblables

Dans un premier temps, on va démontrer que $A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2 \sim A_3B_3C_3$. On a tout d'abord que (PA_2B_2C) et (PA_2C_2B) puisque :

$$\widehat{PA_2B} = \widehat{PA_2C} = \widehat{PC_2B} = \widehat{PB_2C} = 90 \iff B_2, A_2 \in \Gamma_{[PC]} \quad C_2, A_2 \in \Gamma_{[PB]}$$

Ainsi par une chasse aux angles grâce au théorème de l'angle inscrit, on a que :

$$\widehat{B_2A_2C_2} = \widehat{B_2A_2P} + \widehat{PA_2C_2} = \widehat{ACC_1} + \widehat{B_1BA} = \widehat{B_1A_1A} + \widehat{AA_1C_1} = \widehat{B_1A_1C_1}$$

Ainsi, on a de la même manière que $\widehat{A_2B_2C_2} = \widehat{A_1B_1C_2}$ et $\widehat{A_2C_2B_2} = \widehat{A_1C_1B_1}$, donc que $A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$.

On pose B_4 et C_4 les symétriques de B_3 et C_3 avec A_2. On a donc que $A_3B_3C_3 \sim A_1B_4C_4$. On remarque que $(C_2A_2)//(C_1C_4)$, d'après le théorème des milieux, car C_2 est le milieu de $[C_1C_3]$ et A_2 est le milieu

de $[C_3C_4]$, de même, $(B_2A_2)//(B_1B_4)$. En particulier, si on pose R l'intersection de (B_1B_4) et (C_1C_4), on obtient que :

$$\widehat{C_1RB_1} = \widehat{C_2A_2B_2} = \widehat{C_1A_1B_1}$$

Ainsi $R \in (ABC)$.
On a aussi que :

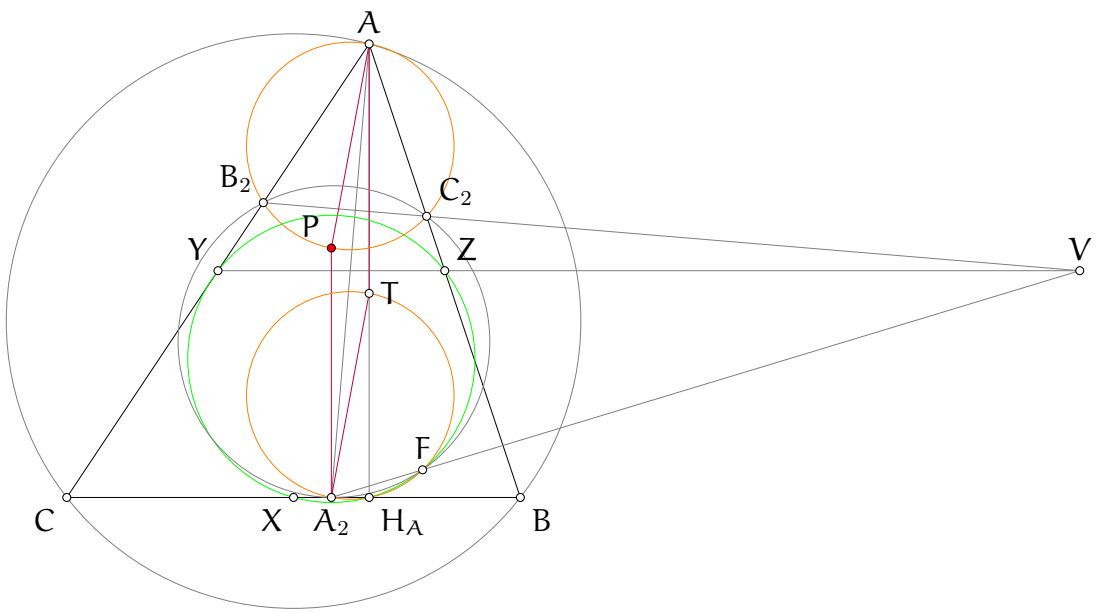
$$\frac{A_1B_1}{A_1C_1} = \frac{A_2B_2}{A_2C_2} = \frac{C_1C_4}{B_1B_4}$$

Ainsi $C_1A_1C_4 \sim B_1A_1B_4$, donc que $R \in (A_1B_4C_4)$. En particulier, on obtient, par une chasse aux angles, que :

$$\widehat{A_1B_4C_4} = \widehat{A_1RC_1} = \widehat{A_1B_1C_1}$$

De même $\widehat{A_1C_4B_4} = \widehat{A_1C_1B_1}$, donc $A_1B_4C_4 \sim A_1B_1C_1$, ce qui permet de conclure cette partie.

Maintenant on va essayer de relier les triangles $A_iB_iC_i$ au cercle d'euler à ABC. Pour cela, on pose X, Y, Z les milieux respectifs de $[BC], [CA]$ et $[AB]$ et le pied de la hauteur H_A issue de A dans le triangle ABC. Dans la suite, on pose T le point d'intersection de (AH_A) avec la parallèle à (AP) passant par A_2. Puisque (PA_2) et (AT) sont parallèles, le quadrilatère APA_2T est un parallélogramme.

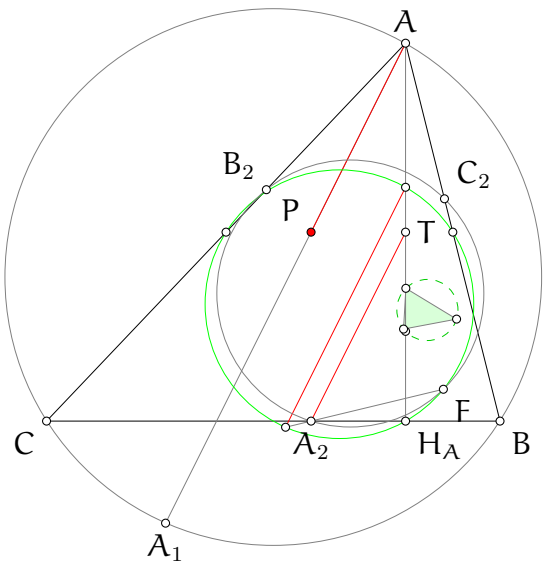


Etape 2 : Montrons qu'il existe un point F appartenant à (XYZ), $(A_2B_2C_2)$ et $\Gamma_{[TA_2]}$

On pose V le point d'intersection de (B_2C_2) avec (YZ), et on pose F le second point d'intersection de (A_2V) avec $(A_2B_2C_2)$, dont on sait d'après le premier théorème de Fontené (le théorème est redonné et redémontré à la fin de la solution), que $F \in (XYZ)$.
On pose aussi I, I' et L les milieux de $[TA_2]$, $[AP]$ et $[AA_2]$. On sait que ATA_2P est un parallélogramme. Donc $(II')\perp(BC)$ et L est le milieu de $[II']$.
Or, d'après le théorème des milieux, on a que $L \in (YZ)$, ce qui nous donne que I' est le symétrique de I par rapport à L.
En particulier, on sait que I est le centre de (TH_AA_2) et que I' est le centre de (APC_2B_2). Ainsi, ces deux cercles sont symétriques par rapport à (YZ), il s'agit donc de leur axe radical, on a donc que :

$$P_V(\Gamma_{[TA_2]}) = P_V(\Gamma_{[AP]}) = VC_2 \cdot VB_2 = VF \cdot VA_2$$

Donc $F \in \Gamma_{[TA_2]}$.



Etape 3 : Montrons que $H \in (A_3B_3C_3)$

On pose M le milieu de $[AH]$ et N le second point d'intersection de (A_2F) avec le cercle d'Euler de ABC, à savoir (XYZ). Enfin, on pose R le milieu de $[AA_1]$.

On a d'après le théorème de l'angle inscrit que :

$$\widehat{TA_2F} = \widehat{TH_AF} = \widehat{MNF}$$

Donc $(MN)//(TA_2)//(AP)$. Or on rappelle que H est le centre de l'homothétie h envoyant (XYZ) sur (ABC). Comme $h(N)$ est sur (ABC) et sur la parallèle à (MN) passant par $h(M) = A$, on déduit que $h(N) = A_1$, ce qui veut dire que les points A_1, N et H sont alignés, et que N est le milieu de $[A_1H]$. D'autre part, on sait que A_2 est le milieu de $[A_3A_1]$, donc que $(A_3H)//(NA_2) = (FA_2)$. De manière similaire, on trouve que $(B_3H)//(FA_3)$. Ce qui nous permet d'avoir que :

$$\widehat{A_3HB_3} = \widehat{A_2FB_2} = \widehat{A_2B_2C_2} = \widehat{A_3C_3B_3}$$

Car $F \in (A_2B_2C_2)$ et car $A_2B_2C_2 \sim A_3B_3C_3$. Enfin, on obtient bien que H, A_3, B_3 et C_3 sont cocycliques

Premier théorème de Fontené :

Soit ABC un triangle, A', B' et C' les milieux respectifs des côtés du triangle. Soit P un point quelconque, on considère son triangle podal $A_2B_2C_2$. On pose X l'intersection de $(B'C')$ avec (B_2C_2), on pose de même Y et Z les intersections de $(A'C')$ avec (A_2C_2) et de $(A'B')$ avec (A_2B_2). Alors on a que (A_2X), (B_2Y) et (C_2Z) sont concourants sur les cercles circonscrits à $A'B'C'$ et $A_2B_2C_2$

Preuve :

Il suffit de montrer qu'une des intersections de $(A'B'C')$ avec $(A_2B_2C_2)$ appartient à (A_2X), les autres se montrent de manière analogue.

On pose E le centre de $(A'B'C')$ et O' le centre de $(A_2B_2C_2)$. On définit F comme le projeté de A sur (PO'). Enfin, on nomme L le symétrique de A_2 par rapport à $(B'C')$.

On remarque tout d'abord que $(AL)//(BC)$, donc que $\widehat{ALP} = 90$.

Comme $A, C_2, P, F, B_2 \in \Gamma_{[AP]}$, on et que $A, C', F, O, B' \in \Gamma_{[AO]}$, on a que :

$$\widehat{FC'X} = \widehat{FAB'} = \widehat{B_2C_2F} = \widehat{XC_2F}$$

Ainsi C', X, F, C_2 sont cocycliques.

On pose L' la seconde intersection de (FX) avec $\Gamma_{[AP]}$. On a que $AL'C_2F$ est inscriptible, mais on sait aussi que $FXC'C_2$ est inscriptible, donc :

$$\widehat{AC'X} = \widehat{C_2FL'} = \widehat{C_2AL'}$$

Donc $(AL')//(B', C')$, ainsi $L = L'$, c'est-à-dire que L, X et F sont alignés.

On pose Q la seconde intersection de (A_2X) avec $(A'B'C')$ et F' le symétrique de Q par rapport à $(B'C')$.
On considère $S_{B'C'}$ la symétrie d'axe $(B'C')$. Cette symétrie échange le cercle d'euler de ABC et $\Gamma_{[AO]}$
Donc $F'\Gamma_{[AO]}$ car Q appartient au cercle d'euler de ABC.
D'autre part, on a que S échange A_2 avec L. Or A_2, X et Q sont alignés, donc X, LF' sont alignés, ainsi $F = F'$.
On en déduit en particulier que A_2LQF est un trapèze isocèle, donc :

$$XL \cdot XF = XQ \cdot XA_2 = XB_2 \cdot XC_2$$

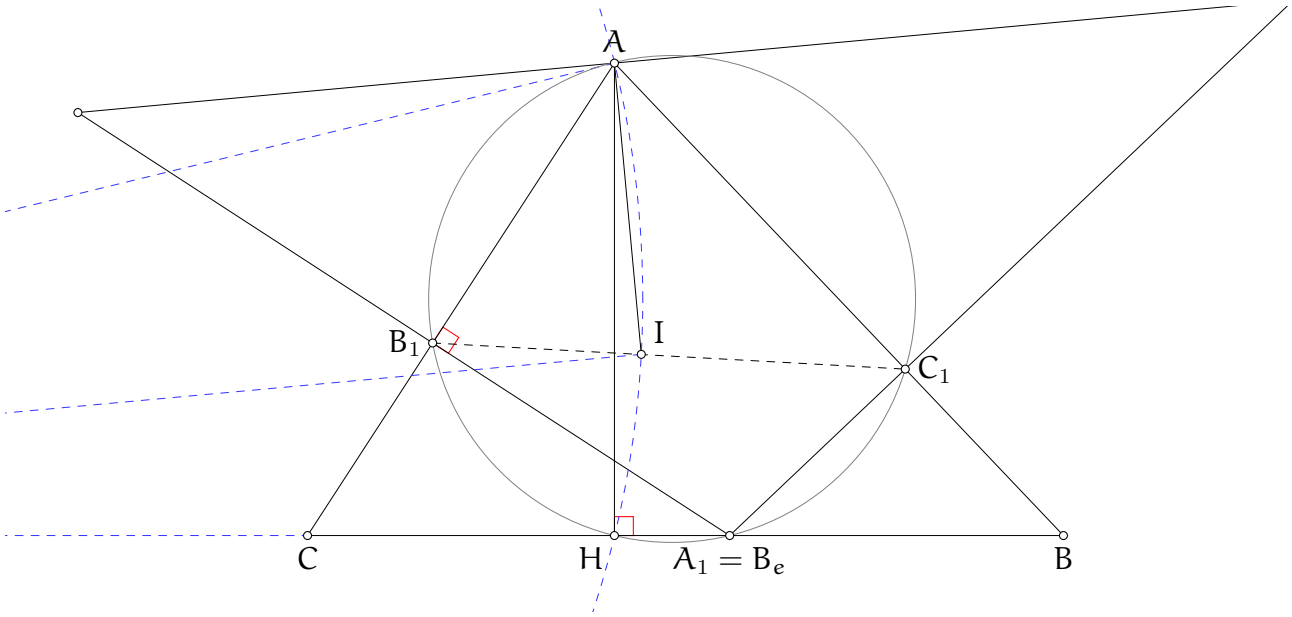
Donc $Q \in (A_2B_2C_2)$, ce qui permet de conclure.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Le problème était plutôt dur, seul un élève a réussi à rendre une copie complète. Une étape importante était de conjecturer l'existence du point de Fontené, mais il était tout de même possible d'obtenir des points grâce aux triangles semblables, ce qui était la majorité des cas rendus.

Exercice 18.

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. On note respectivement A_1, B_1 et C_1 les points de tangence des cercles A-exinscrit,B-exinscrit et C-exinscrit avec (BC), (CA) et (AB). Enfin, on définit D le point de (BC) tel que $\widehat{AID} = 90°$. Montrer que si A appartient au cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$, alors (AD) est tangente au cercle circonscrit à DB_1C_1.

Solution de l'exercice 18



Dans la suite, on utiliseras la notation "(XYZ)" pour désigner quelque soit X, Y et Z le cercle circonscrit au triangle XYZ.

Une partie de la difficulté du problème réside dans l'obtention d'une figure convenable à la main. En test, il faut tatonner avec des brouillons jusqu'à se faire une idée d'où placer A par rapport à B et C.

Les conjectures auxquelles on doit aboutir après cette démarche sont :

1. A_1 est diamétralement opposé à A dans le cercle (AB_1C_1)
2. I appartient à (B_1C_1)
3. (AD) est tangente à (AB_1C_1)

Démontrons les deux premiers points qui peuvent être traités relativement indépendemment car il ne font pas intervenir D. D'ailleurs ils ont fait l'objet d'un autre exercice pour la séléction féminine américaine.

Preuve du point 1 :

Soit I_A, I_B et I_C les centres exinscrits opposés respectivement à A,B et C. Il se trouve que les droites que l'on est amené à tracer (I_AA_1),(I_BB_1) et (I_CC_1) sont, de manière générale, concourantes en B_e, appellé point de Bevan que l'on peut définir simplement comme le centre de $(I_AI_BI_C)$. Il est évidement pas attendu (et même pas recommandé) de connaître tout les points de ce genre de la géométrie du triangle, et il faut simplement ne pas paniquer lorsqu'ils apparaissent.

Preuve de l'existence du point de Bevan : Il suffit de remarquer que les points A, B et C sont les pieds des hauteurs du triangle $I_AI_BI_C$. Dans le triangle $I_AI_BI_C$, la droite (BC) et la droite (I_BI_C) sont donc anti-parallèles. Le centre du cercle circonscrit au triangle $I_AI_BI_C$ est donc sur la perpendiculaire à (BC) passant par I_A, à savoir (I_AA_1). Il en est de même pour les droites (I_BB_1) et (I_CC_1). $\square$.

Notons que $\widehat{B_eB_1A} = 90° = \widehat{B_eC_1A}$, donc B_e est le point diamétralement opposé à A dans (AB_1C_1). Notons alors que $(A_1B_e) \perp (BC)$ par la propriété énoncée et $(A_1B_e) \perp (AA_1)$ puisque A_1 est sur le

cercle AB_1C_1) de diamètre $[AB_e]$. Ainsi, si $A_1 \neq B_e$, les droites (BC) et (AA_1) sont parallèles, ce qui est absurde. Ainsi, $A_1 = B_e$ d'où le premier point.

Preuve du point 2 :

Désormais, pour montrer que $I \in (B_1C_1)$ il "suffit" d'appliquer le théorème de Papus avec les deux triplets I_B,A,I_C et B,A_1,C car $C_1 = (BA) \cap (A_1I_C)$, $I = (BI_B) \cap (CI_C)$ et $B_1 = (A_1I_B) \cap (CA)$.

Preuve du point 3 :

On va montrer à présent que le cercle (ADI) est le A-cercle d'Apollonius du triangle AB_1C_1, que l'on note Ω. Cette partie fait intervenir des outils avancés mais qui sont importants en géométrie : si vous n'êtes pas familier avec il est conseillé de se référer aux cours de géométrie projectives donnés lors des stages de la préparation comme par exemple celui du groupe D de l'été 2021.

Comme I est le pied de la bissectrice issue de A dans le triangle AB_1C_1, on a directement qu'il appartient à Ω.
Soit H le pied de la hauteur issue de A, on a $H \in (AB_1C_1)$ car $\widehat{AHA_1} = 90°$. Il est classique qu'un paire de droite et ses deux bissectrices sont harmoniques. Si on note K le pied de la bissectrice extérieure issue de A, en projetant depuis B sur cette dernière on obtient que K,I_C,A et I_B sont harmoniques. En projetant depuis A_1 sur (AB_1C_1), on obtient que H est le quatrième point harmonique par rapport à A dans le triangle AB_1C_1. Dès lors H appartient à Ω.
Ainsi $\Omega = (AIH)$, mais $\widehat{DHA} = 90° = \widehat{DIA}$ donc D est le point diamétralement opposé à A dans Ω et M le milieu de $[AD]$ est le centre de Ω.

Pour conclure, on fait appel à un dernier résultat classique sur le cercle d'Apollonius (laissé au lecteur, à noter qu'en compétition il sera sûrement toléré d'invoquer ce résultat sans démonstration) : le centre de Ω est l'intersection entre la tangente en A à (AB_1C_1) avec (B_1C_1). Dès lors, on a que (DA) est tangente à (AB_1C_1) et que $M \in (B_1C_1)$. Par puissance d'un point, on a $MD^2 = MA^2 = MB_1 \cdot MC_1$ d'où (MD) est tangente à (DB_1C_1) et cela conclut.

Commentaire des correcteurs : Le problème était de fait très dur, et une étape importante dans la réflexion était de faire des conjectures sur une figure impossible à tracer. Dans ce type de situation il est pertinent de tracer une figure sans chercher à verifier les conditions, puis de trouver des propriétés générale qui sont en lien avec la condition : ici le point diamétralement opposé à A dans le cercle AB_1C_1 appartenait toujours à la perpendiculaire à BC passant par A_1. Pour résoudre le problème il était également nécessaire de faire appel au théorème de Pappus ou de la géométrie analytique. Les peu nombreux élèves ayant rendu une copie sur l'exercice ont dans l'ensemble très bien traité le problème ou réalisé des avancés significatives.