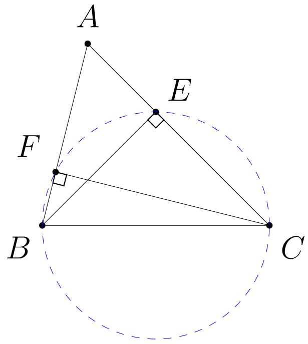
Puissance d'un point et Axes radicaux

Puissance d'un point

Les angles donnent des quadrilatères cycliques, des alignements, ... C'est sympa.

Exemple 1. Soit ABC un triangle acutangle. Soit E et F les pieds des hauteurs issues des points B et C. Montrer que le quadrilatère $BCEF$ est cyclique.

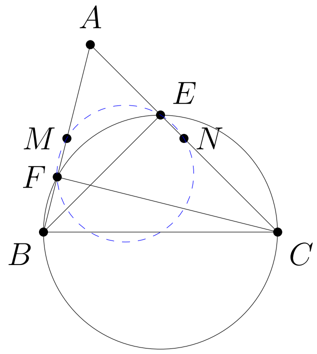


Démonstration. On procède par angle inscrit : on a par construction $\widehat{BFC} = 90 = \widehat{BEC}$ donc le quadrilatère $BCEF$ est cyclique.

□

Toutefois certain objets ou conditions ne se comportent pas gentiment avec des angles (milieu, centre de gravité, ...). Comment faire ?

Exemple 2. Soit ABC un triangle acutangle. Soit E et F les pieds des hauteurs issues des points B et C. On note M et N les milieux des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Montrer que le quadrilatère $ENFM$ est cyclique.



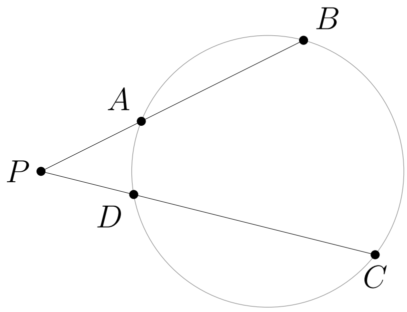
Démonstration. Le quadrilatère $BCEF$ est cyclique donc $\angle ABE = \angle ACF$. Les triangles ABE et ACF sont ainsi sembables, et $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF}$. En divisant cette égalité par 2 on obtient $\frac{AM}{AE} = \frac{AN}{AF}$ donc les triangles AME et ANF sont aussi sembables. Finalement on en déduit que $\angle AME = \angle ANF$, et donc que $\angle EMF + \angle ENF = 180$, ce qui conclut.

□

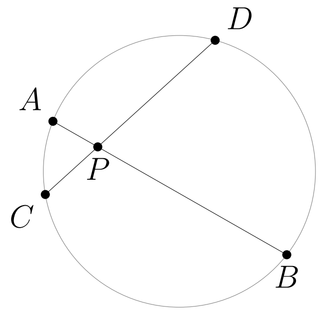
Ainsi on peut faire le lien en introduisant des triangles sembables ! Toutefois il est compliqué d'y penser systématiquement et de trouver les bons : la solution précédente parait astucieuse. Il est donc intéressant d'automatiser le raisonnement précédent.

Théorème 3 (Puissance d'un point)**.** Soit Γ un cercle et P un point du plan. Une droite ℓ_1 intersecte le cercle Γ en les points A et B et une droite ℓ_2 intersecte le cercle Γ en les points C et D. On a :

$$PA \times PB = PC \times PD.$$



Cas extérieur



Cas intérieur

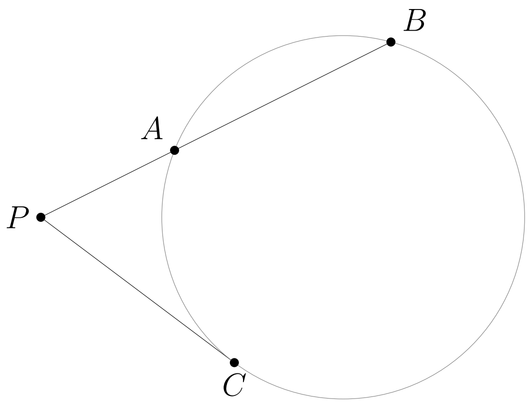
Démonstration (Cas extérieur). Le quadrilatère $ABCD$ est cyclique donc $\angle PAD = \angle PCB$. On en déduit que le triangle PAC est sembable au triangle PDB donc $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$. En multipliant par $PB \times PC$ cette égalité on retrouve l'égalité demandée.

□

On peut considérer le cas 'limite' du théorème précédent. Si la droite ℓ_2 est de plus tangente au cercle Γ, on tend alors à avoir $C = D$. On en déduit le cas particulier suivant à la démonstration analogue.

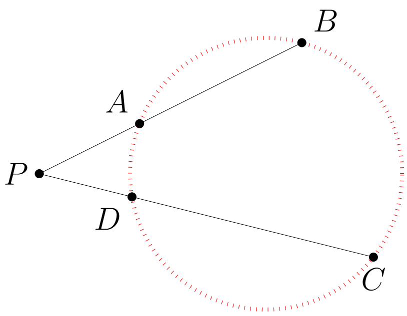
Théorème 4 (Puissance d'un point (cas tangent))**.** Soit Γ un cercle et P un point du plan. Une droite ℓ_1 intersecte le cercle Γ en les points A et B et une droite ℓ_2 est tangente à Γ en C. On a :

$$PA \times PB = PC^2.$$

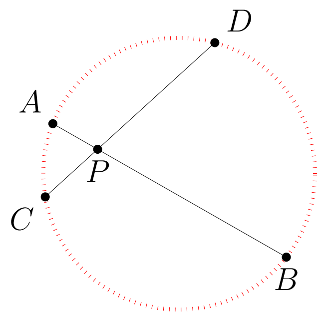


On a alors une réciproque (d'autant plus utile !) à ce théorème.

Théorème 5 (Puissance d'un point v2)**.** Soit P un point du plan ainsi que A, B, C et D quatre points du plan tels que $P \in (AB)$ et $P \in (CD)$. On suppose que P appartient au segment $[AB]$ et au segment $[CD]$ ou alors qu'il n'appartient à aucun des deux segments ; on suppose de plus avoir $PA \times PB = PC \times PD$. Alors les points A, B, C et D sont cocycliques.



Cas extérieur



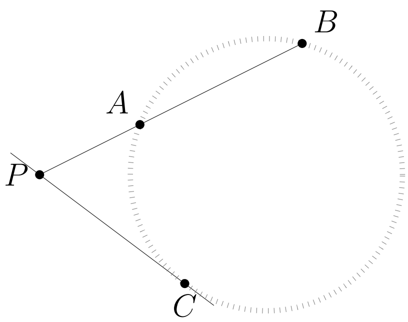
Cas intérieur

Démonstration (Cas extérieur). On a $PA \times PB = PC \times PD$ donc les triangles PAC et PDB sont semblables d'où $\angle DCA = \angle DBA$. Par angle inscrit le quadrilatère $ABCD$ est donc cyclique.

□

Le théorème de la puissance d'un point est donc en fait une équivalence ! Similairement il est important de noter le cas limite suivant.

Théorème 6 (Puissance d'un point v2 (cas tangent))**.** Soit A, B et C trois plans du plan ainsi que P un point de la droite (AB) n'appartenant pas au segment $[AB]$. On suppose avoir $PA \times PB = PC^2$, alors la droite (PC) est tangente au cercle circonscrit au triangle (ABC).



Axes radicaux

Grâce au théorème 1, on peut maintenant définir sans équivoques la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Définition 7 (Puissance d'un point)**.** Soit P et Γ un cercle fixé. On prend ℓ une droite du plan qui coupe Γ en les points A et B. On sait que la quantité $PA \times PB$ reste constante quand la droite ℓ varie : on appelle cette constante la puissance de P par rapport à Γ.

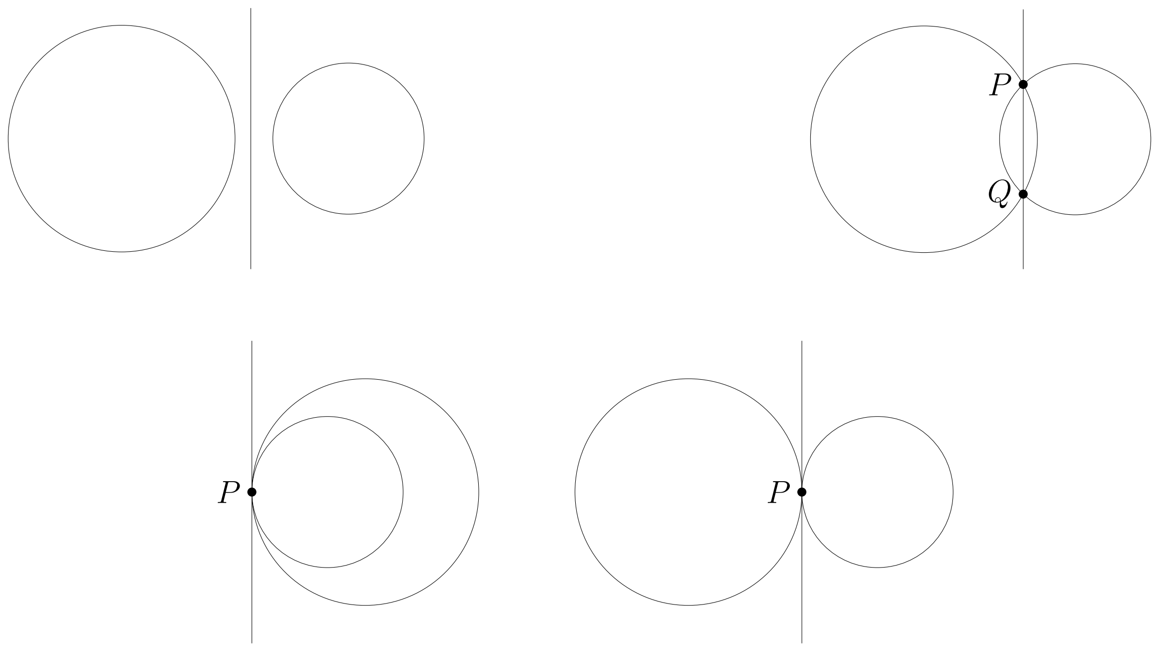
Si O est le centre de Γ et si P est à l'extérieur de Γ, en prenant ℓ une tangente à Γ on trouve que la puissance de P par rapport à Γ vaut $OP^2 - r^2$ avec r le rayon de Γ. C'est en pratique une autre définition de la puissance d'un point, que l'on peut prolonger quand P est à l'intérieur de Γ.

Remarque 8.
La puissance d'un point à un cercle ne dépend que de sa distance au centre du cercle.

On considère maintenant deux cercles Γ_1 et Γ_2 de centres O_1 et O_2 et de rayons r_1 et r_2. On définit leur axe radical comme l'ensemble des points P dont la puissance par rapport aux cercles Γ_1 et Γ_2 est égale. C'est en particulier l'ensemble des points P tels que

$$PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2.$$

Théorème 9 (Axe radical)**.** L'axe radical des cercles Γ_1 et Γ_2 est une droite.

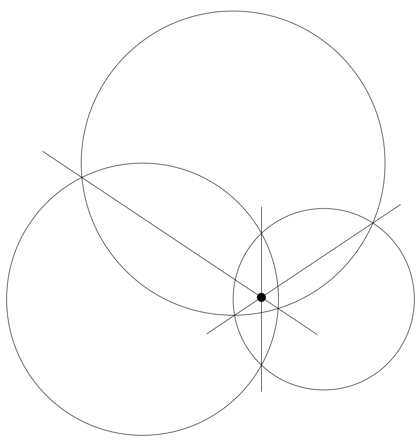


Quatre configurations d'axe radical

En particulier il est important de remarquer que si Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en les points P et Q, leur axe radical est la droite (PQ). Par ailleurs pour des raisons de symétrie on peut ajouter que l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la droite joignant leurs centres.

On considère pour finir une configuration à trois cercles.

Théorème 10 (Centre radical)**.** Etant donné trois cercles non concentriques, leurs axes radicaux deux-à-deux sont soit concourrents, soit parallèles.



Démonstration. On note Γ_1, Γ_2 et Γ_3 les cercles ainsi que $\ell_{i,j}$ l'axe radical des cercles Γ_i et Γ_j.

Si $\ell_{1,2}$ et $\ell_{2,3}$ ne sont pas parallèles on peut noter X leur intersection. X appartient à $\ell_{1,2}$ donc X a la même puissance par rapport aux ceercles Γ_1 et Γ_2. Similairement X a la même puissance par rapport aux cercles Γ_2 et Γ_3. Ainsi X a la même puissance par rapport aux cercles Γ_1 et Γ_3 : $X \in \ell_{1,3}$.

$\square$

En pratique, on peut montrer que les axes radicaux sont tous parallèles si et seulement si les centres des trois cercles sont alignés.

Exercices

Puissance d'un point

Exercice 1
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points P et Q. Soit ℓ une tangente commune aux deux cercles qui touche Γ_1 en A et Γ_2 en B. Montrer que la droite (PQ) passe par le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 2
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points P et Q. Soit $Z \in (PQ)$. Une tangente issue de Z au cercle Γ_1 le touche en X. Une tangente issue de Z au cercle Γ_2 le touche en Y. Montrer que $ZX = ZY$.

Exercice 3
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points P et Q. Soit Z un point de la droite (PQ). Une tangente issue de Z au cercle Γ_1 le touche en X. Une droite passant par Z intersecte Γ_2 en les points A et B. Montrer que la droite (ZX) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABX.

Exercice 4
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points A et B. Soit C et D des points de Γ et soit E et F des points de Ω tels que les droites (AB), (CD) et (EF) soient concourantes. Montrer que le quadrilatère $CDEF$ est cyclique.

Exercice 5
Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H. Soit E et F les pieds des hauteurs issues des points B et C respectivement. On note J le milieu du segment $[HB]$ et K le milieu du segment $[HC]$. Montrer que le quadrilatère $JKEF$ est cyclique.

Exercice 6
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit P et Q des points appartenant aux droites (AB) et (AC) respectivement tels que les cercle (BPI) et (BQI) soient tangents à la droite (AI). Montrer que les points B, C, Q et P sont cocycliques.

Exercice 7
Soit ABC un triangle acutangle. La hauteur issue de B intersecte le cercle de diamètre $[AC]$ en les points P et Q. La hauteur issue de C intersecte le cercle de diamètre $[AB]$ en les points R et S. Montrer que le quadrilatère $PQRS$ est cyclique.

Exercice 8
Soit Γ un cercle. Un cercle ω est tangent intérieurement au cercle Γ en T. Soit P un point de ω différent de T, ainsi que M le milieu du segment $[TP]$. On note A et B les points d'intersection de la tangente à ω au point P avec le cercle Γ. Montrer que les points O, M, A et B sont cocycliques.

Exercice 9 (Belarus MO 2019)
Soit ABC un triangle et M le milieu du segment $[BC]$. Soit B_1 le second point d'intersection du cercle (ABM) avec la droite (AC) et C_1 le second point d'intersection du cercle (ACM) avec la droite (AB). Soit O le centre du cercle (AB_1C_1). Montrer que $OB = OC$.

Axe radical

Exercice 10
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points P et Q. Soit ℓ une tangente commune aux deux cercles qui touche Γ_1 en A et Γ_2 en B. Montrer que la droite (PQ) passe par le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 11
On considère deux cercles qui ne s'intersectent pas. On trace leurs quatre tangentes communes, puis on colorie chaque fois le milieu entre les deux points de tangence sur chacune des tangentes. Montrer que les quatre points coloriés sont alignés.

Exercice 12
Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note C un point sur ω. On note H le projeté orthogonal de C sur le segment $[AB]$. Le cercle de centre C et de rayon CH recoupe ω en X et Y. Montrer que X, Y et le milieu du segment $[CH]$ sont alignés.

Exercice 13
On considère un triangle ABC. On place deux points P et Q sur les segments $[AB]$ et $[AC]$. Les cercles de diamètres $[BQ]$ et $[CP]$ s'intersectent en les points M et N. Montrer que la droite (MN) passe par l'orthocentre du triangle ABC.

Centre radical

Exercice 14
Soit ABC un triangle d'orthocentre H, ainsi que E et F les pieds des hauteurs issues des points B et C respectivement. Finalement, on note Q la deuxième intersection du cercle (AEF) avec le cercle (ABC). Montrer que les droites (AQ), (EF) et (BC) sont concourrantes.

Exercice 15
Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 16
Soit ABC un triangle. Soit D, E et F des points respectivement sur les médiatrices des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que les droites passant par les points A, B et C respectivement perpendiculaires aux segments $[EF]$, $[FD]$ et $[DE]$ sont concourantes.

Et d'autres exos

Exercice 17
Soit deux cercles Γ_1 et Γ_2 tangents extérieurement en un point T. On considère une tangente commune à ces deux cercles qui touche Γ_1 en P et Γ_2 en Q. Montrer que le triangle PQT est rectangle.

Exercice 18
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Montrer que les symétriques de H par rapport au milieu du segment $[BC]$ et à la droite (BC) sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 19
Soit ABC un triangle d'orthocentre H . Soit D le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $DH \times DA = DB \times DC$.

Exercice 20
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et Q l'intersection de la droite (MH) et du cercle (ABC) du même côté que A du segment $[BC]$. Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (BQH).

Exercice 21
Soit A, B et C trois points sur un cercle Γ tels que $AB = BC$. Les tangentes en A et B au cercle Γ se rencontrent en D. On note E la seconde intersection de la droite (DC) avec Γ. Montrer que la droite (AE) passe par le milieu du segment $[BD]$.

Exercice 22
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P différent de D et ω_2 en le point Q différent de B. Montrer que $BQ = DP$.

Exercice 23
Soit ABC un triangle et E, F les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. La droite (EF) rencontre le cercle circonscrit à ABC en deux points P et Q. Soit B' et C' les symétriques de B et C par rapport à (AC) et (AB) respectivement. Montrer que les points B', C', P et Q sont cocycliques.

Exercice 24
Soit ABC un triangle. On place deux points $M \in [AC]$ et $N \in [AB]$ tels que $(MN) \parallel (BC)$. Montrer que les cercles de diamètre $[BM]$ et $[CN]$ s'intersectent sur la hauteur issue de A.

Exercice 25
Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et respectivement D, E et F les pieds de ses hauteurs issues des sommets A, B et C respectivement. Prouver que les cercles (AOD), (BOE) et (COF) s'intersectent en un point X différent de O.

Exercice 26 (St Petersburg 2016)
Soit ℓ une droite du plan et deux points A et P n'appartenant pas à ℓ. Montrer qu'il existe un

point du plan fixe X tel que pour tout triangle rectangle ABC d'hypothènus sur ℓ, le point X appartient au cercle (BCP).

Exercice 27 (Sharygin 2013 P21)
Soit ω un cercle, ainsi que $[BC]$ et $[DE]$ deux cordes de ω qui s'intersectent en le point A. La droite passant par D parallèle à la droite (BC) rencontre ω une deuxième fois en F. La droite (FA) intersecte ω à nouveau en T. Finalement soit $X = (ET) \cap (BC)$ et N le symétrique de A par rapport à X. Montrer que le cercle (DXN) passe par le milieu du segment $[BC]$.

Exercice 28
Soit ABC un triangle et ω son cercle circonscrit. Soit S le milieu de l'arc (BC) ne contenant pas A. Soit $X \in [AB]$ et $Y \in [AC]$ tels que $(XY) \parallel (BC)$. On prend P (resp. Q) la seconde intersection de (SX) (resp. (SY)) avec ω et $R = (PQ) \cap (XY)$. Montrer que (AR) est tangente à ω.

Exercice 29 (ELMO 2012 P1)
Soit ABC un triangle. Soit D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement et soit ω le cercle circonscrit au triangle (AEF). Soit ω_1 le cercle passant par D tangent en E à ω et ω_2 le cercle passant par D tangent en F à ω. Montrer que les cercles ω_1 et ω_2 s'intersectent en un point sur (BC) autre que D.

Exercice 30
On considère un segment $[AB]$ dans le plan. On choisit un point M dessus, et on construit des points C et D tels que les triangles AMC et BMD soient équilatéraux ainsi que en haut du segment $[AB]$. Les cercles circonscrits à ces deux triangles s'intersectent à nouveau en $N \neq M$. Montrer que peu importe le choix du point M, la droite (MN) passe par un point K fixé.

Exercice 31 (USAMO 2023 P1)
Soit ABC un triangle acutangle. On note M le milieu du segment $[BC]$. Soit P le projeté orthogonal de C sur la droite (AM). On suppose que le cercle circonscrit au triangle ABP intersecte de nouveau la droite (BC) en $Q \neq B$. On note finalement N le milieu du segment $[AQ]$. Montrer que $NB = NC$.

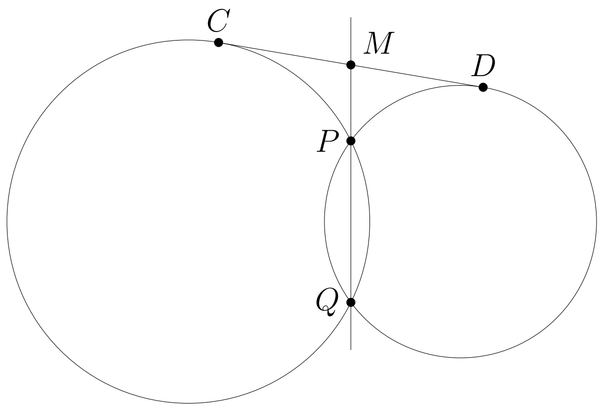
Exercice 32
Soit ABC un triangle acutangle tel que $AC > AB$. On note M le milieu de $[BC]$, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. On prend K le milieu de $[ME]$ et L le milieu de $[MF]$. Finalement T est un point de la droite (KL) tel que $(TA) \parallel (BC)$. Montrer que $TA = TM$.

Exercice 33 (Grèce TST 2018)
Soit ABC un triangle de centre de gravité G. On note D, E et F les pieds des hauteurs issues des points A, B et C respectivement. Soit $T = (ABC) \cap [GD]$ et N la deuxième intersection de (AG) et de (ABC). Prouver que le quadrilatère $FEMN$ est cyclique.

Solutions

Exercice 1
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points P et Q. Soit ℓ une tangente commune aux deux cercles qui touche Γ_1 en A et Γ_2 en B. Montrer que la droite (PQ) passe par le milieu du segment $[AB]$.

Solution de l'exercice 1



On définit $M = (PQ) \cap (AB)$. L'idée va être de calculer la puissance de M par rapport à chacun des cercles du problème :

— La droite (MA) est tangente au cercle Γ_1 donc :

$$MA^2 = MP \times MQ,$$

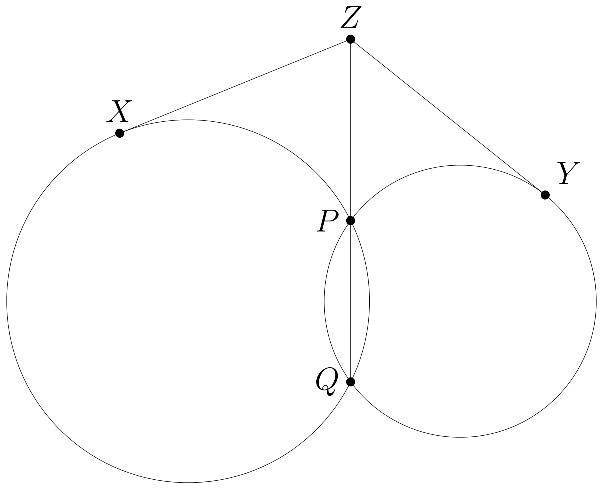
— La droite (MB) est tangente au cercle Γ_2 donc :

$$MB^2 = MP \times MQ.$$

On en déduit que $MA = MB$: M est le milieu du segment $[AB]$.

Exercice 2
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points P et Q. Soit $Z \in (PQ)$. Une tangente issue de Z au cercle Γ_1 le touche en X. Une tangente issue de Z au cercle Γ_2 le touche en Y. Montrer que $ZX = ZY$.

Solution de l'exercice 2



L'idée va être de calculer la puissance de Z par rapport à chacun des deux cercles du problème.

— La droite (ZX) est tangente au cercle Γ_1 donc par puissance d'un point :

$$ZX^2 = ZP \times ZQ.$$

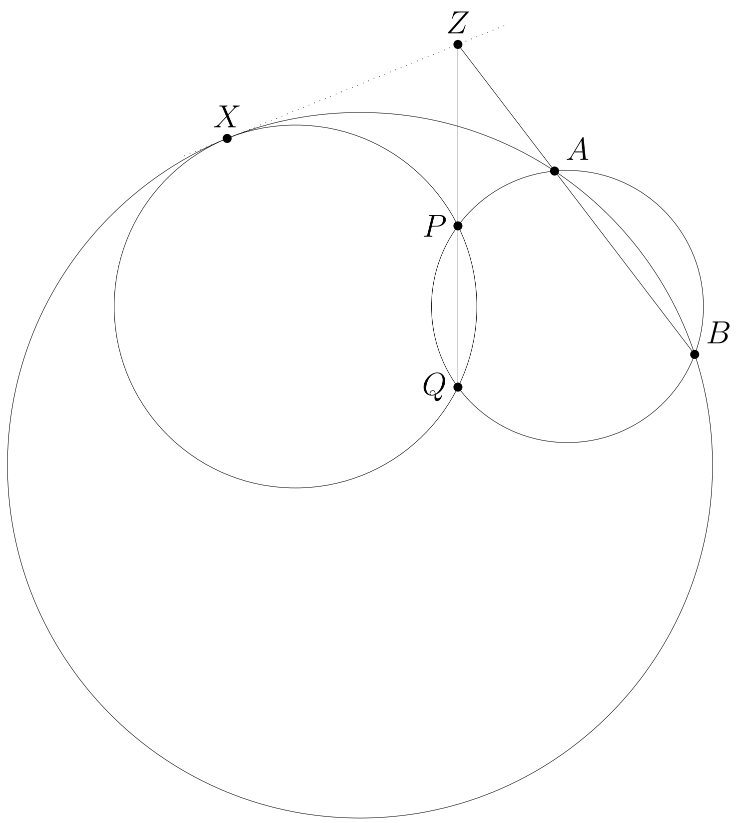
— La droite (ZY) est tangente au cercle Γ_2 donc par puissance d'un point :

$$ZY^2 = ZP \times ZQ.$$

On en déduit bien que $ZX = ZY$.

Exercice 3
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points A et B. Soit C et D des points de Γ et soit E et F des points de Ω tels que les droites (AB), (CD) et (EF) soient concourantes. Montrer que le quadrilatère $CDEF$ est cyclique.

Solution de l'exercice 3



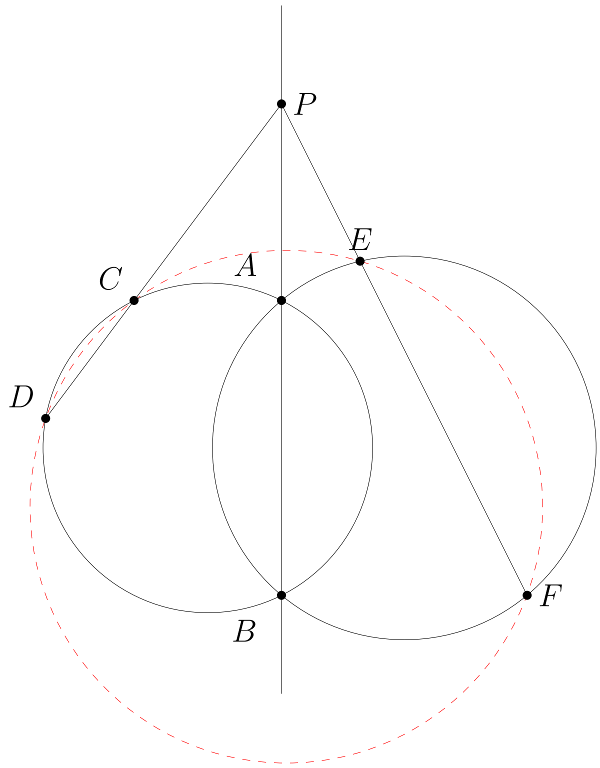
On procède comme dans l'exercice 1. Par puissance d'un point :

$$ZX^2 = ZP \times ZQ = ZA \times ZB.$$

On en déduit par réciproque de la puissance d'un point (cas tangent) que la droite (ZX) est tangente au cercle (ABX).

Exercice 4
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points A et B. Soit C et D des points de Γ et soit E et F des points de Ω tels que les droites (AB), (CD) et (EF) soient concourantes. Montrer que le quadrilatère $CDEF$ est cyclique.

Solution de l'exercice 4



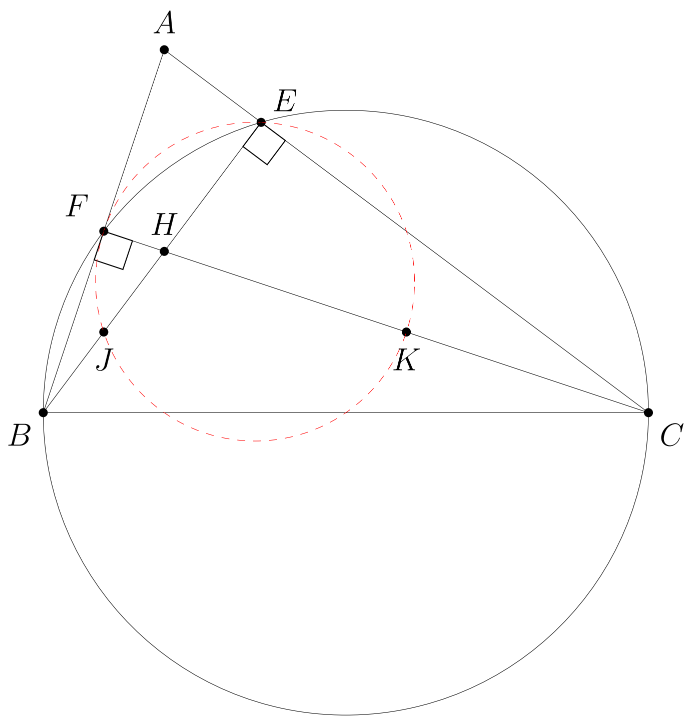
Soit P le point de concourante de ces droites. Par puissance d'un point :

$$PC \times PD = PA \times PB = PE \times PF.$$

Par réciproque de la puissance d'un point il vient que les points C, D, E et F sont cocycliques.

Exercice 5
Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H. Soit E et F les pieds des hauteurs issues des points B et C respectivement. On note J le milieu du segment $[HB]$ et K le milieu du segment $[HC]$. Montrer que le quadrilatère $JKEF$ est cyclique.

Solution de l'exercice 5



Le quadrilatère $BCEF$ est cyclique donc par puissance d'un point :

$$HB \times HE = HC \times HF.$$

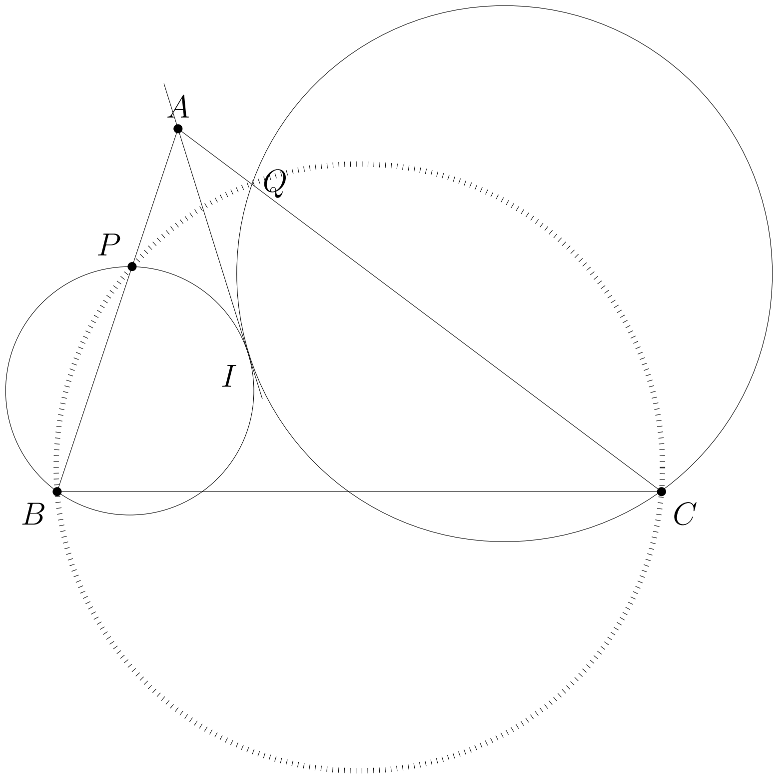
On divise cette égalité par 2 :

$$HJ \times HE = HK \times HF.$$

Ainsi par réciproque de la puissance d'un point, le quadrilatère $JKEF$ est cyclique.

Exercice 6
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit P et Q des points appartenant aux droites (AB) et (AC) respectivement tels que les cercle (BPI) et (BQI) soient tangents à la droite (AI). Montrer que les points B, C, Q et P sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6



La droite (AI) est tangente au cercle (BQI) donc

$$AP \times AB = AI^2.$$

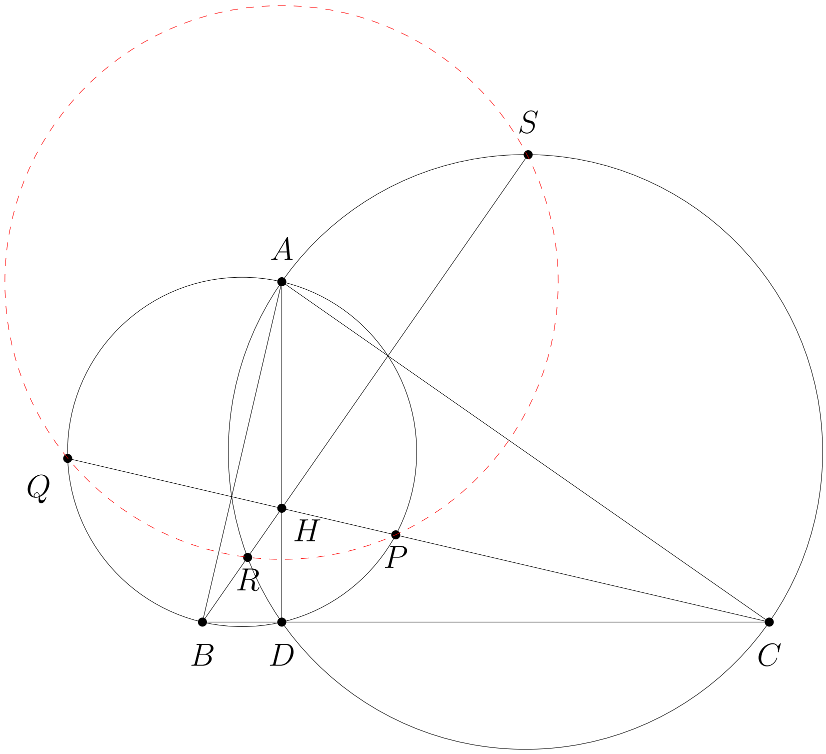
Similairement on obtient que

$$AQ \times AC = AI^2.$$

On en déduit que $AP \times AB = AQ \times AC$: le quadrilatère $PBCQ$ est bien cyclique.

Exercice 7
Soit ABC un triangle acutangle. La hauteur issue de B intersecte le cercle de diamètre $[AC]$ en les points P et Q. La hauteur issue de C intersecte le cercle de diamètre $[AB]$ en les points R et S. Montrer que le quadrilatère $PQRS$ est cyclique.

Solution de l'exercice 7



Notons D le pied de la hauteur issue de A et H l'orthocentre du triangle. On a $\widehat{ADB} = 90$ donc D appartient au cercle de diamètre $[AB]$. On en déduit par puissance d'un point que :

$$HP \times HQ = HA \times HD.$$

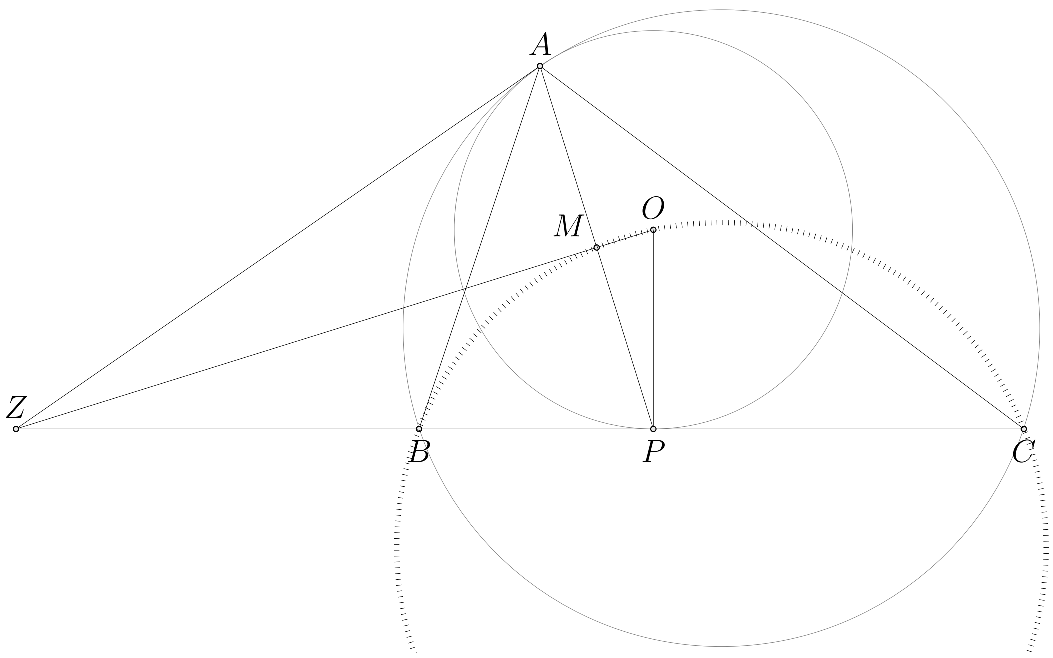
Similairement on trouve que :

$$HR \times HS = HA \times HD.$$

Ainsi $HP \times HQ = HR \times HS$ et par réciproque de la puissance d'un point on en déduit que le quadrilatère $PQRS$ est cyclique.

Exercice 8
Soit Γ un cercle. Un cercle ω est tangent intérieurement au cercle Γ en T. Soit P un point de ω différent de T, ainsi que M le milieu du segment $[TP]$. On note A et B les points d'intersection de la tangente à ω au point P avec le cercle Γ. Montrer que les points O, M, A et B sont cocycliques.

Solution de l'exercice 8



On doit exploiter la tangence des cercles ω et Γ : il semble pertinent d'introduire leur tangente commune. En particulier un point prometteur est l'intersection de cette tangente commune avec la droite (BC) : notons le Z.

On remarque que Z est sur la droite (OM). En effet la symétrie d'axe (ZO) fixe ω donc échange A et P : on en déduit que M est fixé donc que $M \in (ZO)$ ainsi que $(AM) \perp (ZO)$. On veut montrer que :

$$ZB \times ZC = ZM \times ZO.$$

On sait déjà que par tangence

$$ZB \times ZC = ZA^2,$$

donc on s'est ramené à prouver que $ZM \times ZO = ZA^2$.

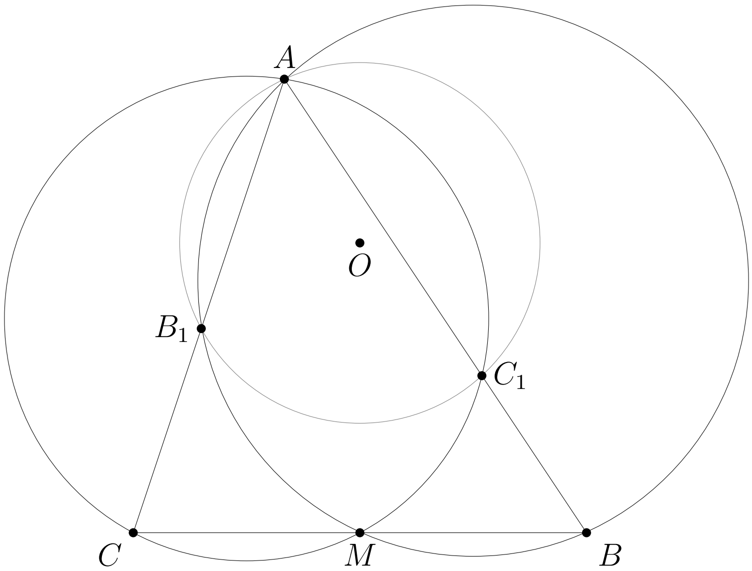
On doit maintenant prouver quelque chose portant uniquement sur le triangle rectangle AZO. En l'occurence M est le projeté de A sur le côté $[ZO]$ donc on a des triangles semblables : $\triangle ZAM \sim \triangle ZOA$. On en déduit que

$$\frac{ZM}{ZA} = \frac{ZA}{ZO},$$

ce qui conclut.

Exercice 9 (Belarus MO 2019)
Soit ABC un triangle et M le milieu du segment $[BC]$. Soit B_1 le second point d'intersection du cercle (ABM) avec la droite (AC) et C_1 le second point d'intersection du cercle (ACM) avec la droite (AB). Soit O le centre du cercle (AB_1C_1). Montrer que $OB = OC$.

Solution de l'exercice 9



On veut montrer que $OB = OC$. Cela revient à dire que les points et ont la même puissance par rapport au cercle (AB_1C_1) (formule $OP^2 - r^2$).

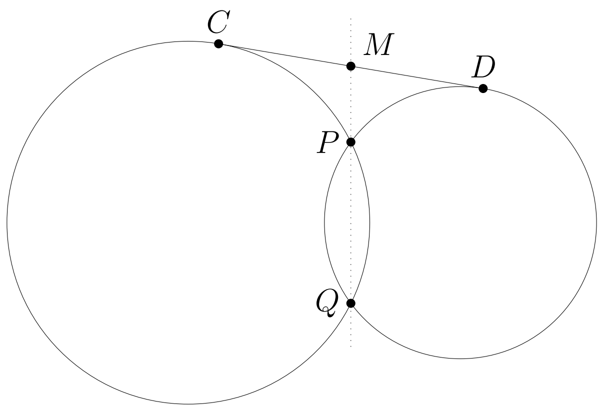
— La puissance de B par rapport au cercle (AB_1C_1) vaut $BA \times BB_1 = BM \times BC = \frac{1}{2}BC^2$.

— La puissance de C par rapport au cercle (AB_1C_1) vaut $CA \times CC_1 = CM \times CB = \frac{1}{2}BC^2$.

On a donc bien l'égalité voulu.

Exercice 10
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en les points P et Q. Soit ℓ une tangente commune aux deux cercles qui touche Γ_1 en A et Γ_2 en B. Montrer que la droite (PQ) passe par le milieu du segment $[AB]$.

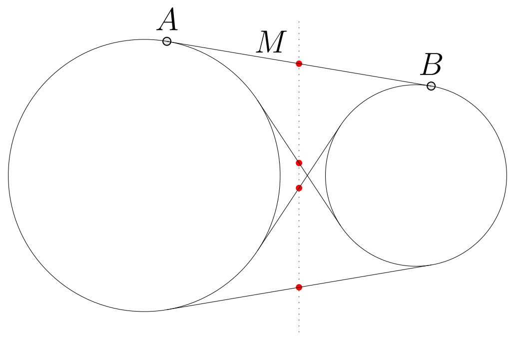
Solution de l'exercice 10



Soit M le milieu du segment $[AB]$. La droite (AB) est tangente aux cercles Γ_1 et Γ_2 et par définition $MA = MB$. On en déduit que M à la même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2 : il est sur leur axe radical, qui est la droite (PQ).

Exercice 11
On considère deux cercles qui ne s'intersectent pas. On trace leurs quatre tangentes communes, puis on colorie chaque fois le milieu entre les deux points de tangence sur chacune des tangentes. Montrer que les quatre points coloriés sont alignés.

Solution de l'exercice 11



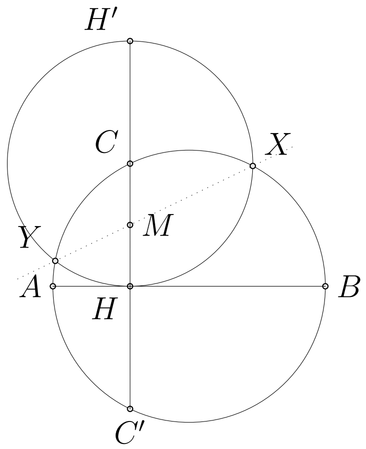
Montrons que ces quatre points sont tous sur l'axe radical des deux cercles.

On considère par exemple le segment $[AB]$ tangent au cercle Γ_1 en A et au cercle Γ_2 en B. Soit M son milieu. L'exercice précédent nous donne alors directement que M appartient à l'axe radical ds deux cercles, ce qui permet de conclure.

Exercice 12

Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note C un point sur ω. On note H le projeté orthogonal de C sur le segment $[AB]$. Le cercle de centre C et de rayon CH recoupe ω en X et Y. Montrer que X, Y et le milieu du segment $[CH]$ sont alignés.

Solution de l'exercice 12



Soit M le milieu du segment $[CH]$. Soit ω_1 le cercle de diamètre $[AB]$ et ω_2 le cercle de centre C passant par H. La droite (XY) est l'axe radical de ω_1 et ω_2. Il s'agit donc de montrer que le point M a la même puissance par rapport à chacun de ces deux cercles.

On introduit ainsi H' la deuxième intersection de la droite (CH) avec ω_1 et C' la deuxième intersection de la droite (CH) avec ω_2.

— La puissance de M par rapport à ω_1 vaut

$$MH' \times MH = (MC + CH') \times MH = \left(\frac{CH}{2} + CH\right) \times \frac{CH}{2} = \frac{3}{4}CH^2.$$

— La puissance de M par rapport à ω_2 vaut :

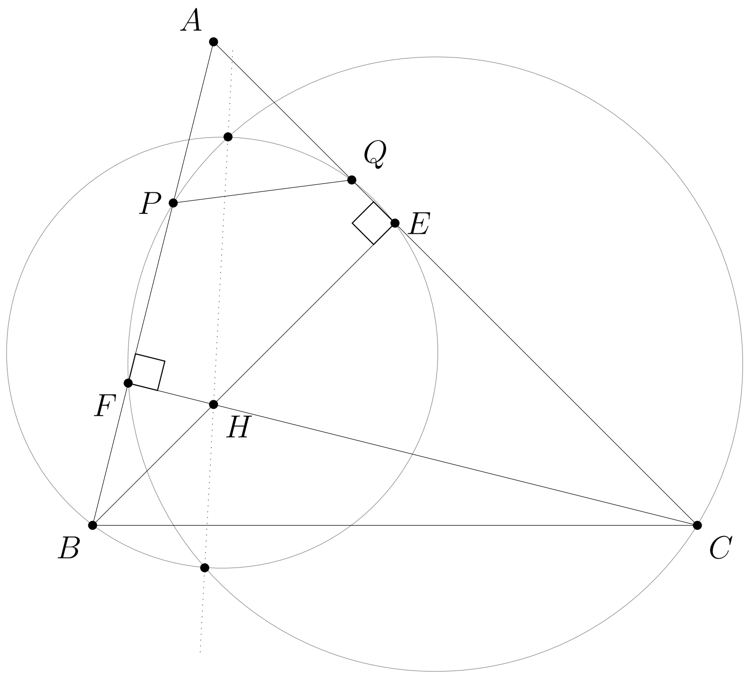
$$MC' \times MC = (MH + HC') \times MC = \left(\frac{CH}{2} + CH\right) \times \frac{CH}{2} = \frac{3}{4}CH^2.$$

En effet la symétrie d'axe (AB) échange C et C' et fixe H donc $HC = HC'$.

Cela conclut.

Exercice 13
On considère un triangle ABC. On place deux points P et Q sur les segments $[AB]$ et $[AC]$. Les cercles de diamètres $[BQ]$ et $[CP]$ s'intersectent en les points M et N. Montrer que la droite (MN) passe par l'orthocentre du triangle ABC.

Solution de l'exercice 13



On veut montrer que H est sur l'axe radical des cercles mentionnés. Il s'agit donc de calculer sa puissance par rapport à chacun des cercles.

On introduit E et F les pieds des hauteurs issues des points B et C. En traçant une belle figure on constate que E appartient au cercle de diamètre $[BP]$: en effet $\angle BEP = 90$. On en déduit que la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[BP]$ vaut

$$HB \times HE.$$

Similairement la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[CQ]$ vaut :

$$HC \times HF.$$

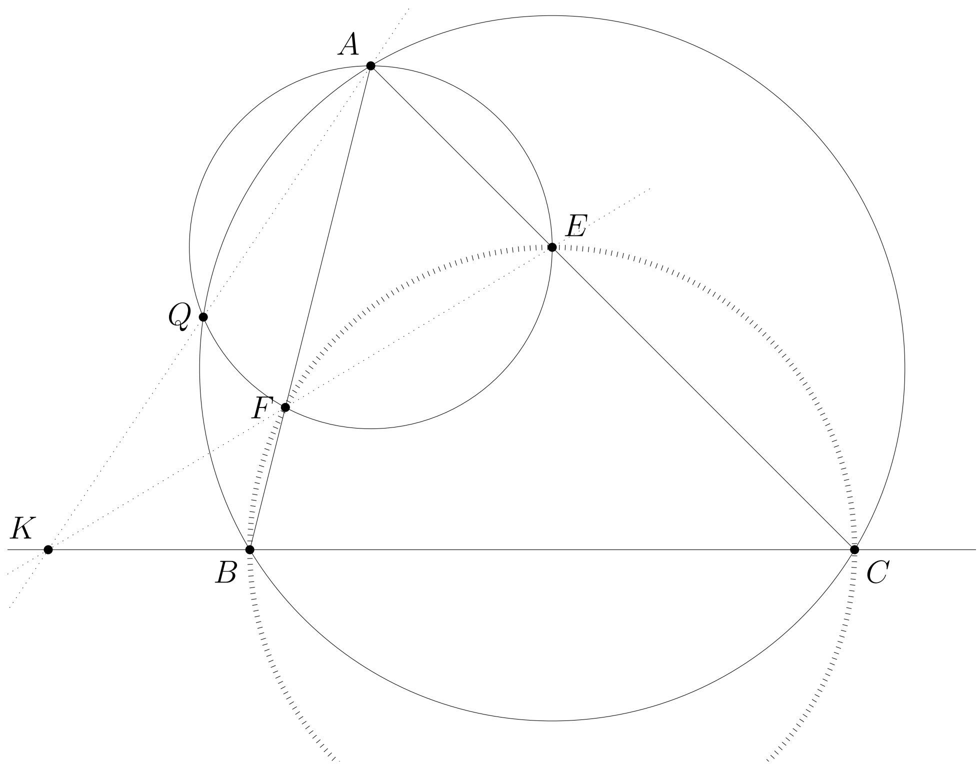
Finalement le quadrilatère $BCEF$ est cyclique donc

$$HB \times HE = HC \times HF,$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 14
Soit ABC un triangle d'orthocentre H, ainsi que E et F les pieds des hauteurs issues des points B et C respectivement. Finalement, on note Q la deuxième intersection du cercle (AEF) avec le cercle (ABC). Montrer que les droites (AQ), (EF) et (BC) sont concourrantes.

Solution de l'exercice 14

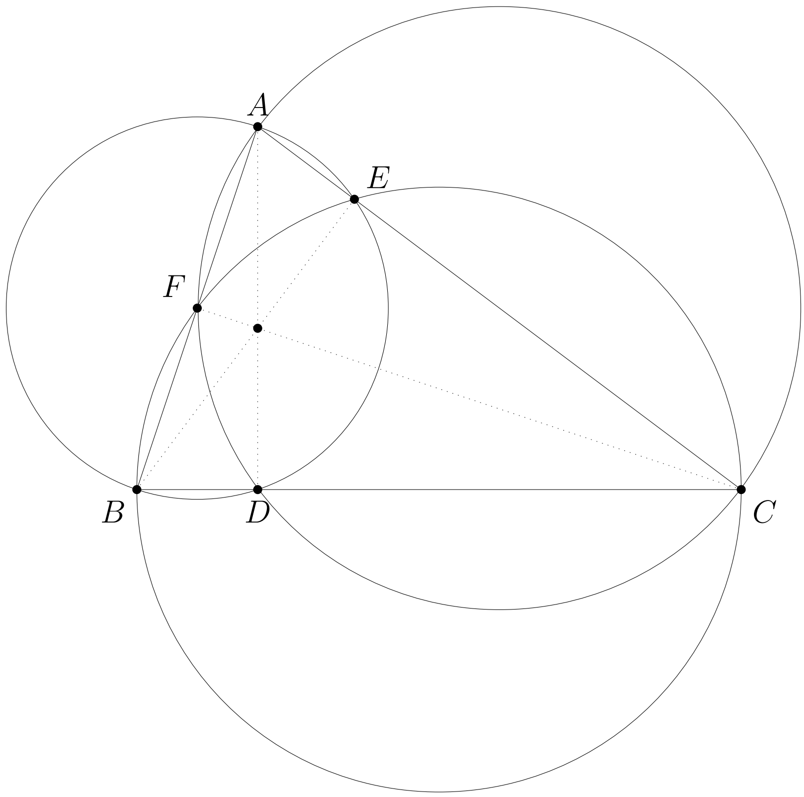


Il nous manque un cercle pour compléter la configuration du centre radical.

Justement le quadrilatère $BCEF$ est cyclique. En considérant les cercles (AEF), (BCE) et (ABC) on obtient donc bien la concourrance des droites (AQ), (EF) et (BC) !

Exercice 15
Montrer que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Solution de l'exercice 15

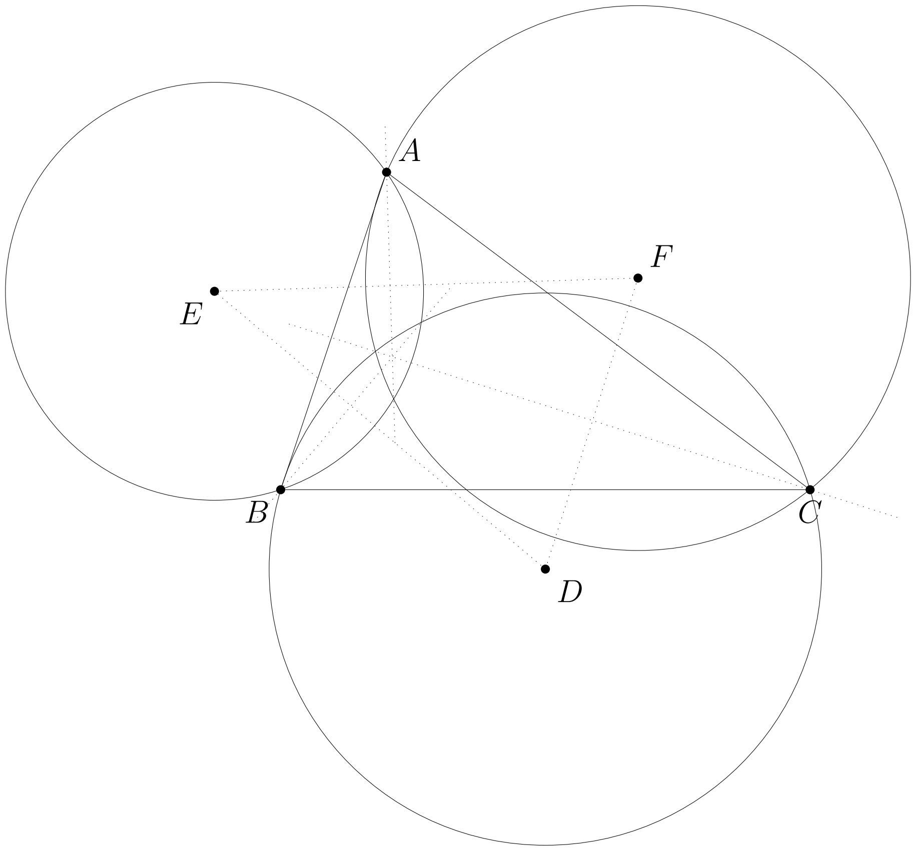


Les quadrilatères $BCEF$, $CAFD$ et $ABDE$ sont cycliques. Leurs axes radicaux sont les droites (AD), (BE) et (CF) donc par centre radical ces trois droites sont concourent bien en l'orthocentre du triangle.

Remarque 11.
On aurait pu considérer à la place les cercles de diamètre $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

Exercice 16
Soit ABC un triangle. Soit D, E et F des points respectivement sur les médiatrices des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que les droites passant par les points A, B et C respectivement perpendiculaires aux segments $[EF]$, $[FD]$ et $[DE]$ sont concourantes.

Solution de l'exercice 16



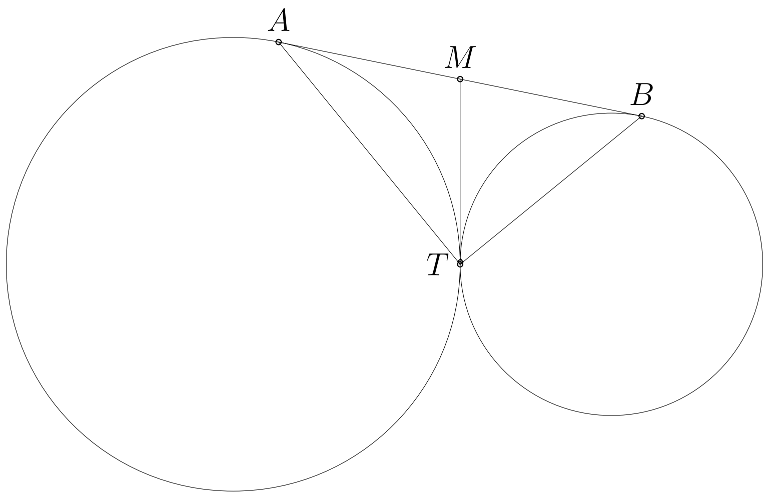
On a envie d'utiliser que l'axe radical de deux cercles est une droite perpendiculaire à la droite joignant leur centre. Ainsi on veut naturellement introduire trois cercles, centrés en les points D, E et F et appliquer le théorème du centre radical dessus.

En l'occurence la seule information dont on dipose sur le point D est que D est sur la médiatrice du segment $[BC]$: $DB = DC$. Ainsi un seul cercle centré en D semble raisonnable : celui passant par les points B et C. Similairement on considère le cercle de centre E passant par les points A et B ainsi que le cercle de centre F passant ppar les points A et C.

Le théorème du centre radical nous donne alors directement la concourrence souhaitée, ce qui conclut.

Exercice 17
Soit deux cercles Γ_1 et Γ_2 tangents extérieurement en un point T. On considère une tangente commune à ces deux cercles qui touche Γ_1 en P et Γ_2 en Q. Montrer que le triangle PQT est rectangle.

Solution de l'exercice 17



Soit M le milieu du segment $[PQ]$. On sait que M appartient à l'axe radical des cercles Γ_1 et Γ_2 qui est en l'occurence la tangente commune aux cercles en T.

On en déduit que

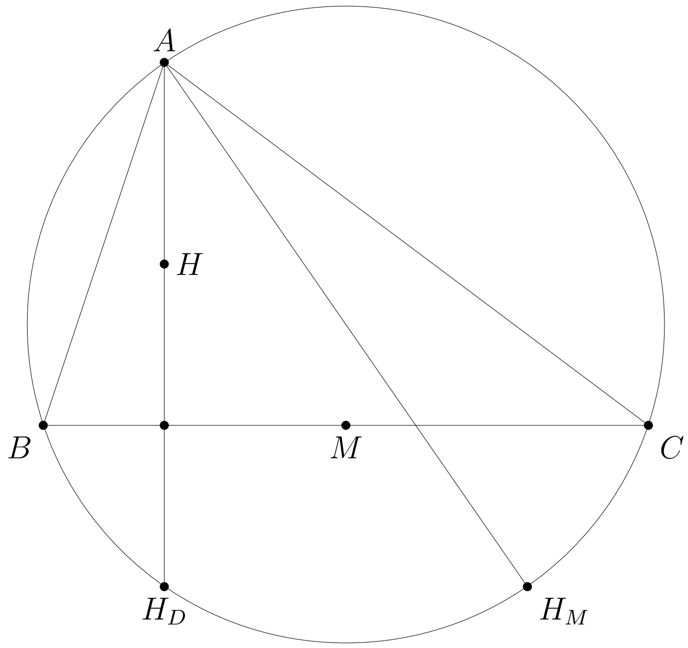
$$MP^2 = MT^2 = MQ^2,$$

soit que $MA = MT = MB$: le triangle PQT est donc rectangle en T.

Exercice 18

Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Montrer que les symétriques de H par rapport au milieu du segment $[BC]$ et à la droite (BC) sont sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Solution de l'exercice 18



On les note H_M et H_D respectivement. On va procéder par chasse aux angles.

On a

$$\angle CBH_D = \angle CBH = 90 - \angle C = \angle H_DAC,$$

donc le point H_D appartient au cercle (ABC).

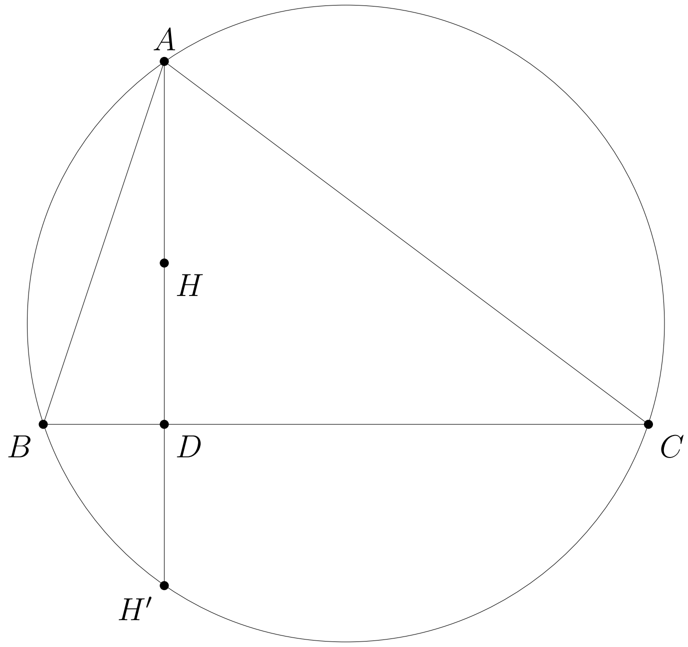
Similairement on a

$$\angle BCH_M = \angle BCH = 90 - \angle B = \angle BAH_M,$$

donc le point H_M appartient au cercle (ABC).

Exercice 19
Soit ABC un triangle d'orthocentre H . Soit D le pied de la hauteur issue de A. Montrer que $DH \times DA = DB \times DC$.

Solution de l'exercice 19

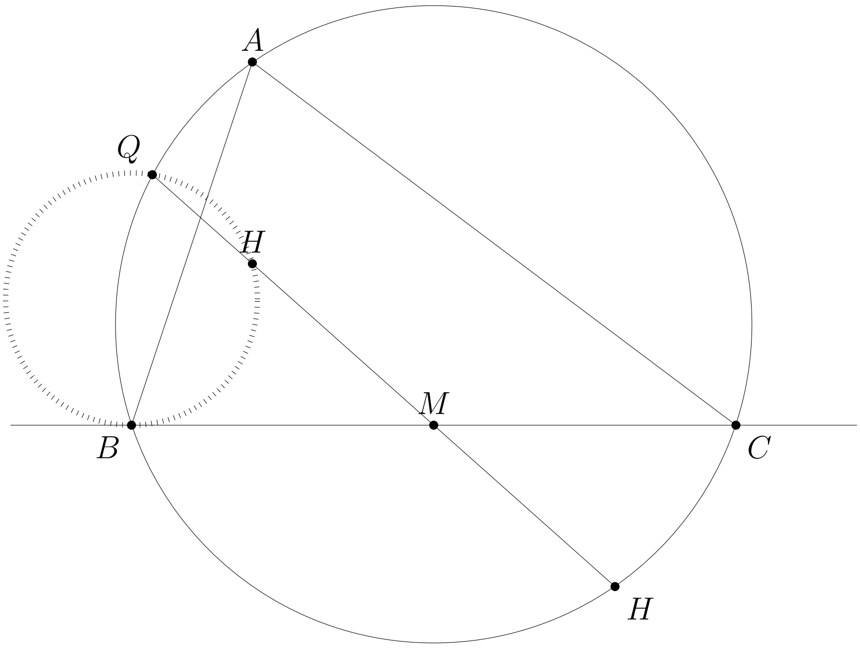


L'égalité $HD \times AD = BD \times CD$ ressemble furieusement à une puissance de point centrée en D. Seul problème, il faudrait que H se situe de l'autre côté de la droite (BC) pour se ramener à une des configurations du théorèmes.

On complète donc la configuration en introduisant H' le symétrique de H par la droite (BC). On veut ainsi montrer que $DH' \times DA = DB \times DC$, soit que le quadrilatère $ABH'C$ est cyclique par puissance d'un point. C'est vrai grâce à l'exercice 18 !

Exercice 20
Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Soit M le milieu du segment $[BC]$ et Q l'intersection de la droite (MH) et du cercle (ABC) du même côté que A du segment $[BC]$. Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle (BQH).

Solution de l'exercice 20



On veut montrer que $MQ \times MH = MB^2$. On peut se servir du fait que M est le milieu du segment $[BC]$ en écrivant que $MB^2 = MB \times MC$: on a alors presque une configuration de puissance d'un point.

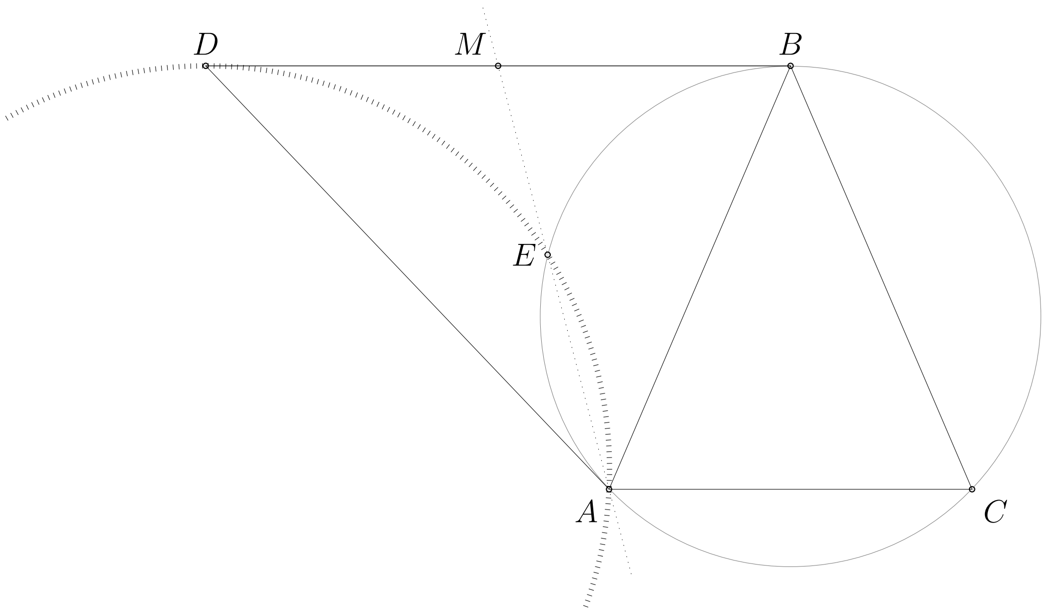
Pour la compléter on introduit H' le symétrique de H par rapport à M. On sait que $H' \in (ABC)$ donc

$$MH \times MQ = MH' \times MQ = MB \times MC = MB^2.$$

Ainsi la droite (MB) est tangente au cercle circonscrit au triangle (BQH).

Exercice 21
Soit A, B et C trois points sur un cercle Γ tels que $AB = BC$. Les tangentes en A et B au cercle Γ se rencontrent en D. On note E la seconde intersection de la droite (DC) avec Γ. Montrer que la droite (AE) passe par le milieu du segment $[BD]$.

Solution de l'exercice 21



Notons M le milieu du segment $[BD]$. Si les points M, E et A étaient effectivement alignés, on aurait

$$ME \times MA = MB^2 = MD^2,$$

donc le cercle (AED) serait tangent à la droite (BD).

En fait réciproquement, si le cercle (AED) est tangent à la droite (BD) alors l'axe radical des cercles (AED) et (ABC) passe par M : $M \in (AE)$. On montre ce fait par chasse aux angles.

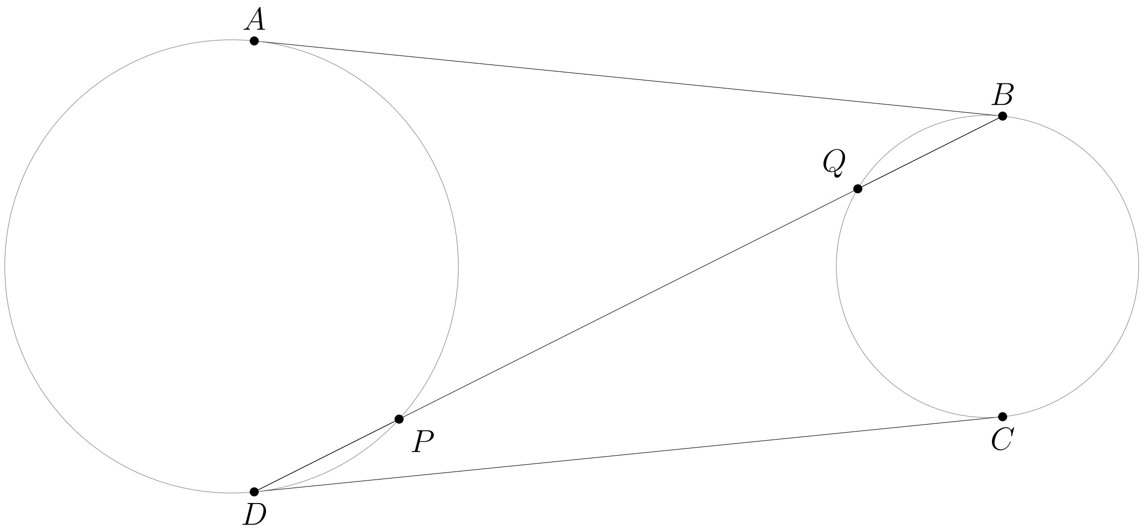
On a $\angle BAC = \angle BCA = \angle DAB = \angle DBA$ donc $\angle ADB = \angle ABC$. On en déduit que :

$$\begin{aligned}\angle BDE = \angle BDC &= 180 - \angle DBC - \angle DCB \\ &= 180 - \angle DBA - \angle ADB - \angle BAE \\ &= \angle DAE,\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Exercice 22
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P différent de D et ω_2 en le point Q différent de B. Montrer que $BQ = DP$.

Solution de l'exercice 22



La symétrie d'axe la droite joignant les centres de ω_1 et ω_2 échange A et D ainsi que B et D. On en déduit que $AB = CD$.

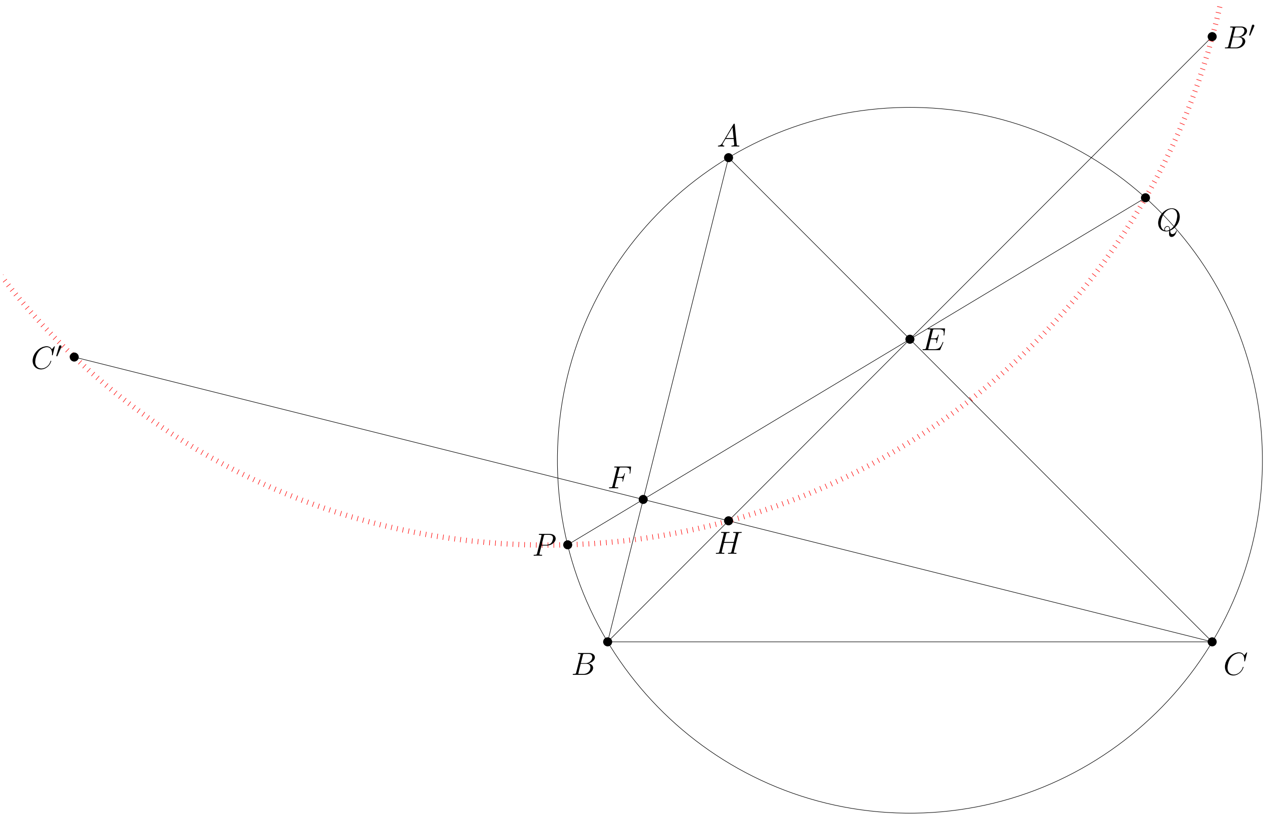
On a alors par puissance d'un point

$$DQ \times DB = DC^2 = BA^2 = BP \times BD.$$

En simplifiant par BD on trouve l'égalité demandée.

Exercice 23
Soit ABC un triangle et E, F les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. La droite (EF) rencontre le cercle circonscrit à ABC en deux points P et Q. Soit B' et C' les symétriques de B et C par rapport à (AC) et (AB) respectivement. Montrer que les points B', C', P et Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 23



Il est particulièrement important pour ce problème de tracer une belle figure ! Ici on se rend compte que le point H appartient au cercle $(EFPQ)$. Cela permet de simplifier grandement le problème : il suffit maintenant de montrer que les quadrilatères $PQHB'$ et $PQHC'$ sont cycliques pour conclure. Montrons que le quadrilatère $PQHB'$ est cyclique. Il s'agit de montrer que

$$EB' \times EH = EP \times EQ.$$

On sait que

$$EP \times EQ = EA \times EB,$$

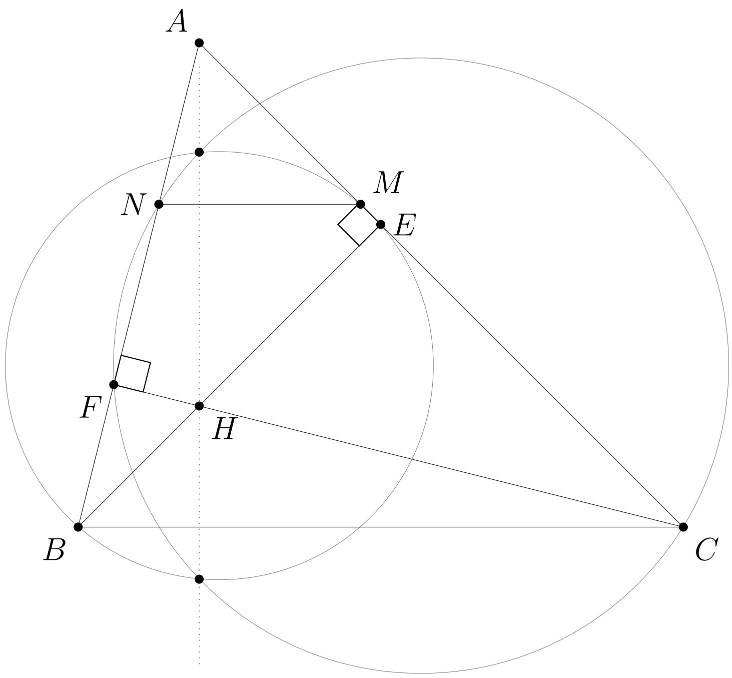
donc il s'agit en fait de montrer que $EB' \times EH = EA \times EB$, soit que les points B', C, H et A sont cocycliques.

Or c'est vrai par l'exercice 18 ! Effectivement la symétrie d'axe (AC) envoie A sur A, B' sur B, C sur C et H sur H' de sorte que $H' \in (ABC)$.

On en déduit que le quadrilatère $PQHB'$ est cyclique, et on montre similairement que le quadrilaètre $PQHC'$ est cyclique, ce qui conclut.

Exercice 24
Soit ABC un triangle. On place deux points $M \in [AC]$ et $N \in [AB]$ tels que $(MN) \parallel (BC)$. Montrer que les cercles de diamètre $[BM]$ et $[CN]$ s'intersectent sur la hauteur issue de A.

Solution de l'exercice 24



On introduit H l'orthocentre du triangle, ainsi que E et F ses pieds sur les côtés (AC) et (AB). Il s'agit de montrer que l'axe radical des deux cercles mentionnés est la droite (AH).

On commence par montrer que H est sur leur axe radical. Il s'agit donc de calculer sa puissance par rapport à chacun des cercles.

En traçant une belle figure on constate que E appartient au cercle de diamètre $[BM]$: en effet $\angle BEM = 90$. On en déduit que la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[BM]$ vaut

$$HB \times HE.$$

Similairement la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[CN]$ vaut :

$$HC \times HF.$$

Finalement le quadrilatère $BCEF$ est cyclique donc

$$HB \times HE = HC \times HF,$$

ce qui permet de conclure cette partie.

On remarque maintenant que A est aussi sur leur axe radical. En effet $BCEF$ est cyclique donc :

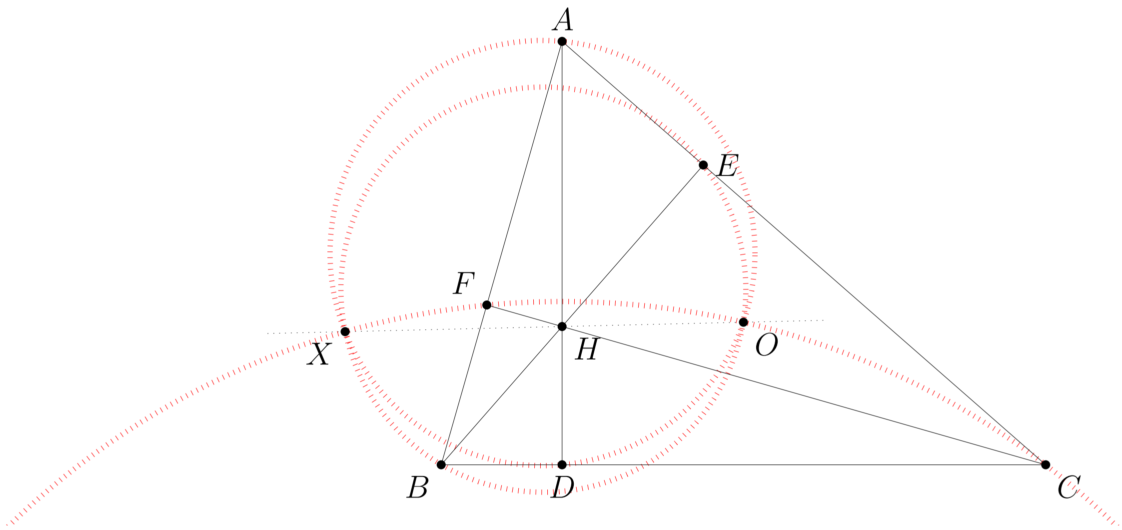
$$AB \times AF = AC \times AE.$$

De plus $(NM) \parallel (BC)$ donc
$$\frac{AN}{AB} = \frac{AM}{AC}.$$
En multipliant ces deux égalités :
$$AN \times AF = AM \times AE,$$
ce qui conclut.

Exercice 25

Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et respectivement D, E et F les pieds de ses hauteurs issues des sommets A, B et C respectivement. Prouver que les cercles (AOD), (BOE) et (COF) s'intersectent en un point X différent de O.

Solution de l'exercice 25



Un nouveau problème où tracer une figure est essentiel ! Ici on se rend compte que l'orthocentre H du triangle appartient à la droite formée par O et X. Ca a l'air intéressant, on peut se demander pourquoi.

Le quadrilatère $ABDE$ est cyclique donc $HA \times HD = HB \times HE$: H appartient à l'axe radical des cercles (AOD) et (BOE), qui est *a priori* la droite (OX).

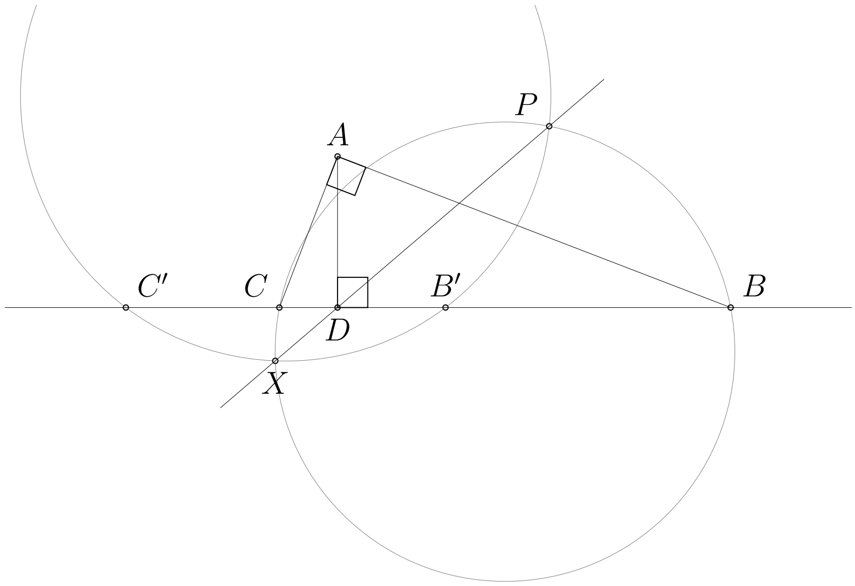
On peut dès lors définir X autrement. Soit X' la seconde intersection de la droite (OH) avec le cercle (AOD). On a

$$HX' \times HO = HA \times HD = HB \times HE,$$

donc X' appartient au cercle (BOE). On montre de même que X' appartient au cercle (COF), ce qui conclut : les trois cercles (AOD), (BOE) et (COF) concourrent en $X' = X$.

Exercice 26 (St Petersburg 2016)
Soit ℓ une droite du plan et deux points A et P n'appartenant pas à ℓ. Montrer qu'il existe un point du plan fixe X tel que pour tout triangle rectangle ABC d'hypothènus sur ℓ, le point X appartient au cercle (BCP).

Solution de l'exercice 26



On peut essayer de deviner l'identité du point X en traçant deux positions possibles pour B : B et B'. Toutefois cela ne semble pas beaucoup nous avancer, il va falloir procéder autrement.

La droite (XP) est l'axe radical des cercles (BPC) et $(B'PC')$. Vu que les points X et P sont fixes, elle est également fixe : on peut dès lors se demander s'il n'y aurait pas un point intéressant dessus. En l'occurence le seul point raisonnable serait son intersection avec ℓ. En traçant une belle figure on se rend alors compte qu'il s'agit du pied de la hauteur issue de A !

Soit D le projeté orthogonal de A sur ℓ. On a

$$DB \times DC = DA^2 = DB' \times DC',$$

donc D appartient à l'axe radical des cercles (BPC) et $(B'PC')$.

Soit X la deuxième intersection de la droite (XP) avec le cercle (PBC). On a alors

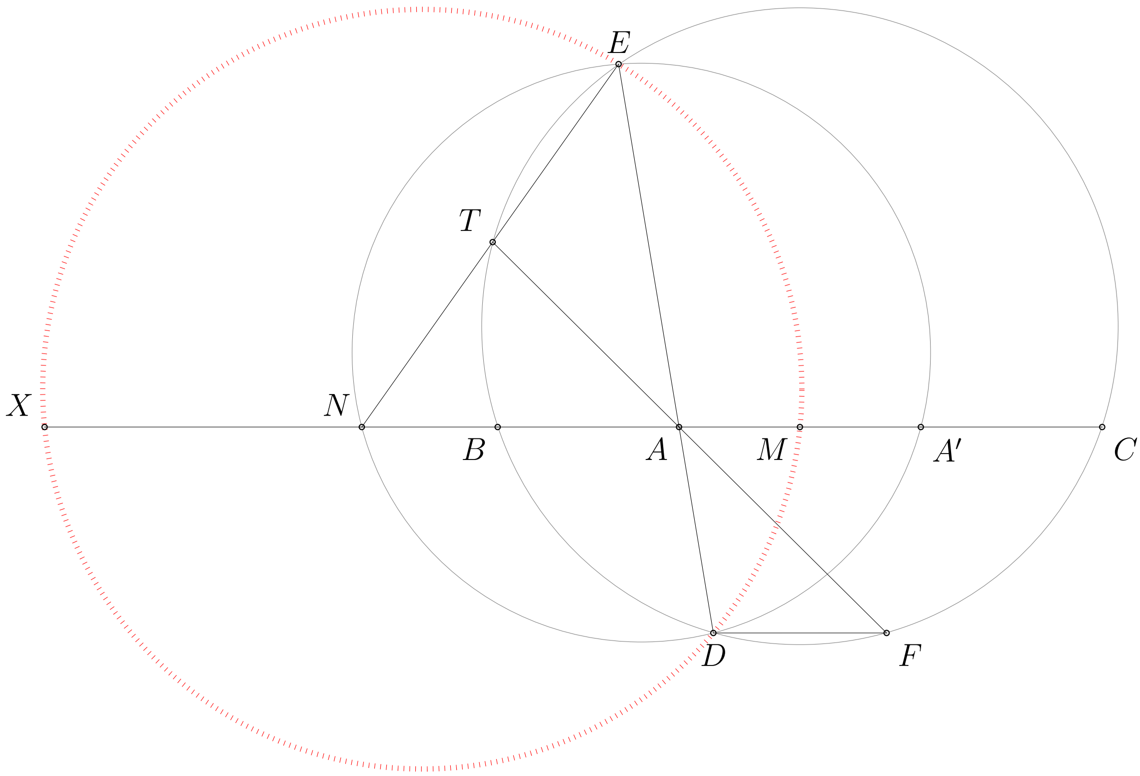
$$DX \times DP = DC \times DB = DC' \times DB',$$

donc X appartient aussi au cercle $(B'PC')$.

Ceci étant vrai pour tout point B' sur ℓ, on en déduit que X est le point fixe recherché.

Exercice 27 (Sharygin 2013 P21)
Soit ω un cercle, ainsi que $[BC]$ et $[DE]$ deux cordes de ω qui s'intersectent en le point A. La droite passant par D parallèle à la droite (BC) rencontre ω une deuxième fois en F. La droite (FA) intersecte ω à nouveau en T. Finalement soit $X = (ET) \cap (BC)$ et N le symétrique de A par rapport à X. Montrer que le cercle (DXN) passe par le milieu du segment $[BC]$.

Solution de l'exercice 27



Soit M le milieu du segment $[BC]$. On veut montrer que

$$AX \times AM = AD \times AE.$$

Le point X n'est pas sympathique : on ne sait vraiment rien sur lui et il dépend trop de N. On aurait donc avantage à le supprimer de la figure ! Pour cela on introduit A' le symétrique de A par rapport à M.

On a :

$$AX \times AM = AN \times AA',$$

donc le quadrilatère $DA'EX$ est cyclique si et seulement si le quadrilatère $DA'EN$ l'est. On peut donc oublier le point X et tenter de montrer la cocyclicité du quadrilatère $DA'EN$.

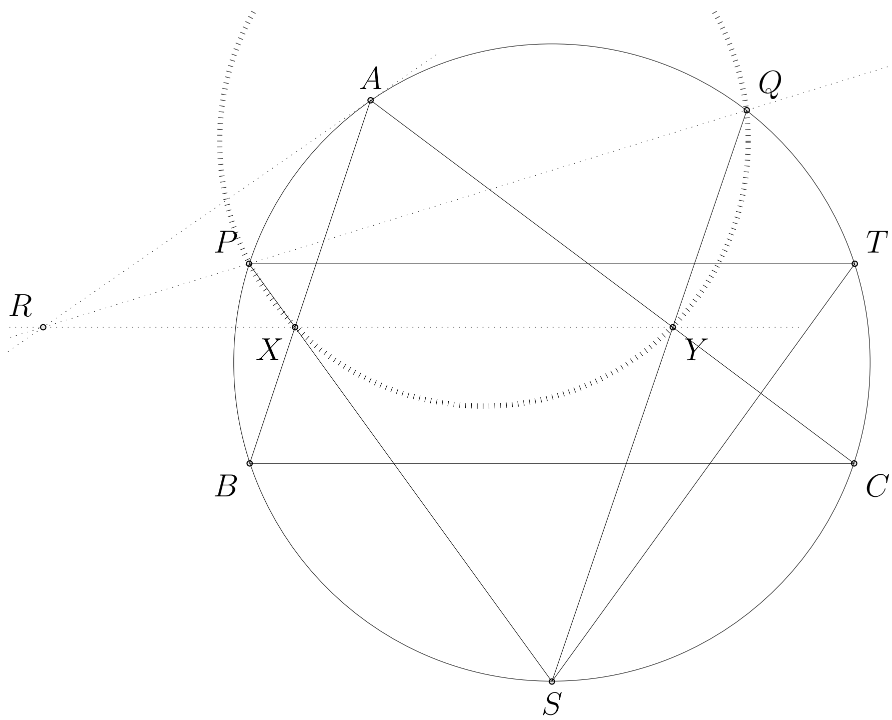
Une symétrie par rapport à la médiatrice du segment $[BC]$ échange A et A' ainsi que D et F : le quadrilatère $AA'FD$ est un trapèze isocèle, donc $\angle AA'D = \angle FAA'$. On a alors :

$$\angle NA'D = \angle AA'D = \angle FAA' = \angle DFT = \angle NED,$$

donc le quadrilatère $DA'EN$ est bien cyclique, ce qui conclut.

Exercice 28
Soit ABC un triangle et ω son cercle circonscrit. Soit S le milieu de l'arc (BC) ne contenant pas A. Soit $X \in [AB]$ et $Y \in [AC]$ tels que $(XY) \parallel (BC)$. On prend P (resp. Q) la seconde intersection de (SX) (resp. (SY)) avec ω et $R = (PQ) \cap (XY)$. Montrer que (AR) est tangente à ω.

Solution de l'exercice 28



On aimerait reformuler l'énoncé en concourrence de droites afin de pouvoir utiliser le centre radical. Pour cela cherchons plutôt à montrer que la droite (XY), la droite (PQ) et la tangente au cercle (ABC) en A sont concourrantes.

On dipose d'un grand cercle dans la figure : (ABC). On voudrait en trouver deux autres afin de compléter la configuration. Il semble judicieux de considérer le cercle (AXY) : miracle, $(XY) \parallel (BC)$ donc il est tangent au cercle (ABC) en A.

Il nous manque un cercle : on aurait envie de montrer que le quadrilatère $XYPQ$ est cyclique pour conclure. Cela revient à montrer que $\angle PQS = \angle SXY$. Pour exploiter le parallélisme donné on introduit $T \in (ABC)$ tel que $(PT) \parallel (BC)$.

La symétrie d'axe la médiatrice de $[BC]$ fixe S et échange P et T : on a $PS = TS$. On en déduit que

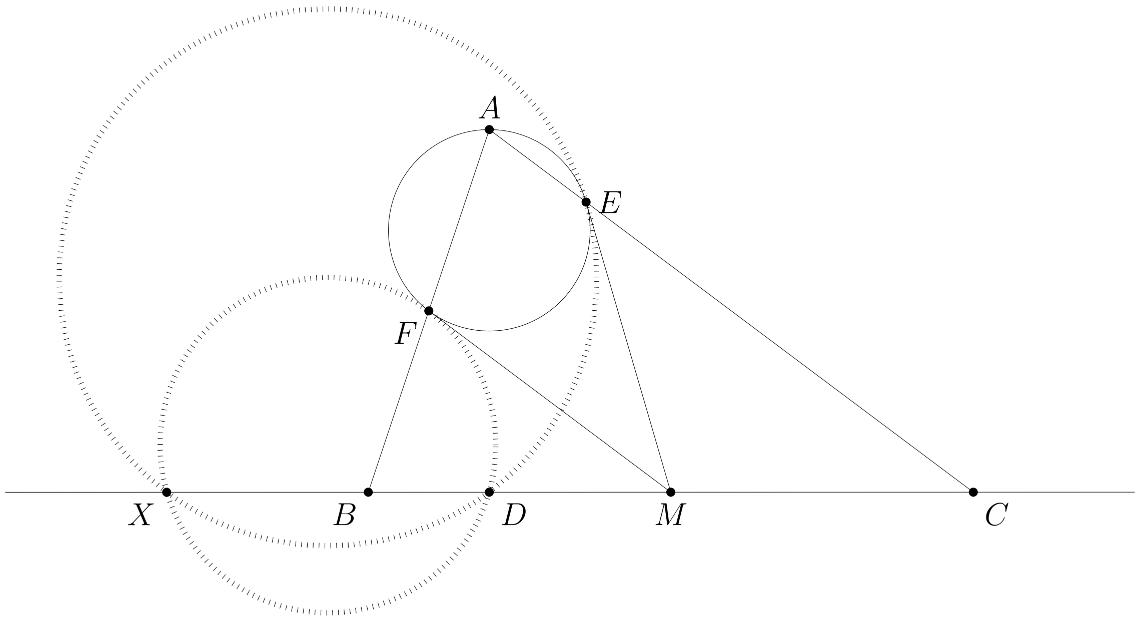
$$\angle SQP = \angle STP = \angle SPT = \angle SXY,$$

ce qui conclut : le quadrilaètre $XYQP$ est cyclique.

Finalement on applique le centre radical aux cercles (ABC), (AXY) et (XYP) : la droite (AR) est tangente au cercle (ABC).

Exercice 29 (ELMO 2012 P1)
Soit ABC un triangle. Soit D, E et F les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement et soit ω le cercle circonscrit au triangle (AEF). Soit ω_1 le cercle passant par D tangent en E à ω et ω_2 le cercle passant par D tangent en F à ω. Montrer que les cercles ω_1 et ω_2 s'intersectent en un point sur (BC) autre que D.

Solution de l'exercice 29



Notons X la seconde intersection des cercles ω_1 et ω_2. On veut montrer que X est sur la droite (BC), c'est-à-dire que l'axe radical de ω_1 et ω_2 est la droite (BC).

On pourrait être tenté de calculer la puissances des points B et C par rapport à ces cercles, mais on va vite se retrouver bloqué à moins de faire des choses trop calculatoires pour le moment. On s'arrête donc un instant : peut-on obtenir des informations simplement ?

En l'occurence on sait que l'axe radical des cercles ω_1 et ω ainsi que l'axe radical des cercles ω_2 et ω concourrent en un point sur la droite (XD). Il suffirait donc de prouver que ce point appartient à la droite (BC).

L'axe radical de deux cercles tangents est leur tangente commune en leur point d'intersection. On trace donc une belle figure avec les tangentes en E et F au cercle (AEF)... et on se rend compte qu'elle s'intersectent en fait en le milieu du segment $[BC]$! Notons le M, on veut ainsi montrer que la droite (ME) est tangente au cercle (AEF).

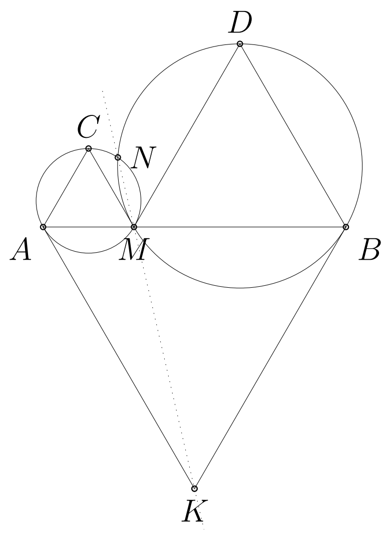
On sait pour cela que le quadrilatère $BCEF$ est cyclique. Mieux encore, le centre de ce cercle est le point M puisque $\angle BEC = 90$. On en déduit ainsi :

$$\angle FEM = 90 - \frac{1}{2}\angle EMF = 90 - \angle EBF = \angle A.$$

Ainsi la droite (ME) est tangente au cercle (AEF). On montre de même que la droite (MF) est tangente au cercle (AEF), ce qui conclut.

Exercice 30
On considère un segment $[AB]$ dans le plan. On choisit un point M dessus, et on construit des points C et D tels que les triangles AMC et BMD soient équilatéraux ainsi que en haut du segment $[AB]$. Les cercles circonscrits à ces deux triangles s'intersectent à nouveau en $N \neq M$. Montrer que peu importe le choix du point M, la droite (MN) passe par un point K fixé.

Solution de l'exercice 30



On nous donne la liberté de bouger le point M sur tout le segment $[BC]$ pour deviner le point K. On va donc en profiter pour considérer les cas les plus simples possibles. Justement, si M est le milieu du segment $[BC]$, la droite (MN) est la médiatrice du segment $[BC]$ donc le point K doit être équidistant des points A et B.

Vu qu'il y a beaucoup de triangles équilatéraux dans cette figure, il semble raisonnable de supposer en outre que le point K est en fait tel que le triangle ABK soit équilatéral. On vérifie ce fait à l'aide d'une belle figure : ça concorde. Entreprenons donc de le montrer.

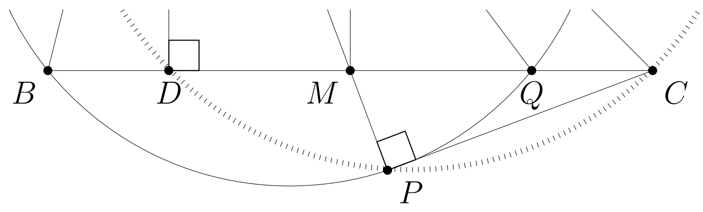
On veut montrer que K est sur l'axe radical des cercles (AMC) et (BMD) : il s'agit de calculer la puissance de K par rapport à chacun de ces cercles.

On y vient : la droite (KA) a l'air suspicieusement tangente au cercle (ACM) ! C'est effectivement le cas puisque $\angle ACM = 60 = \angle BAK$. On en déduit que la puissance de K par rapport au cercle (ACM) vaut KA^2. Similairement la puissance de K par rapport au cercle (BMD) vaut KB^2. On a de plus $AK = BK$ donc cela permet de conclure : K appartient bien à la droite (MN).

Remarque 12.
On aurait aussi pu deviner K en prenant $M = A$ et $M = B$. Toutefois il faut un peu d'habitude pour se rendre compte que la droite (MN) se transforme bien respectivement en les droites (AK) et (BK) tracées sur la figure. N'hésitez pas à en constater avec geogebra par exemple.

Exercice 31 (USAMO 2023 P1)
Soit ABC un triangle acutangle. On note M le milieu du segment $[BC]$. Soit P le projeté orthogonal de C sur la droite (AM). On suppose que le cercle circonscrit au triangle ABP intersecte de nouveau la droite (BC) en $Q \neq B$. On note finalement N le milieu du segment $[AQ]$. Montrer que $NB = NC$.

Solution de l'exercice 31



On veut montrer que N est sur la médiatrice du segment $[BC]$, soit que $\angle NMC = 90$. On connait peu le point N : on a donc tout intérêt à considérer l'homothétie centrée en Q de rapport 2 qui envoie N sur A. On se ramène alors à prouver que l'image de M par cette homothétie est le pied de la hauteur issue de A.

Soit D le symétrique de Q par M. Il s'agit de montrer que $\angle ADC = 90$. On a déjà $\angle APC = 90$ donc finalement il s'agit de prouver que $D \in (APC)$.

On sait justement que le quadrilatère $BPQA$ est cyclique, d'où :

$$MA \times MP = MQ \times MB.$$

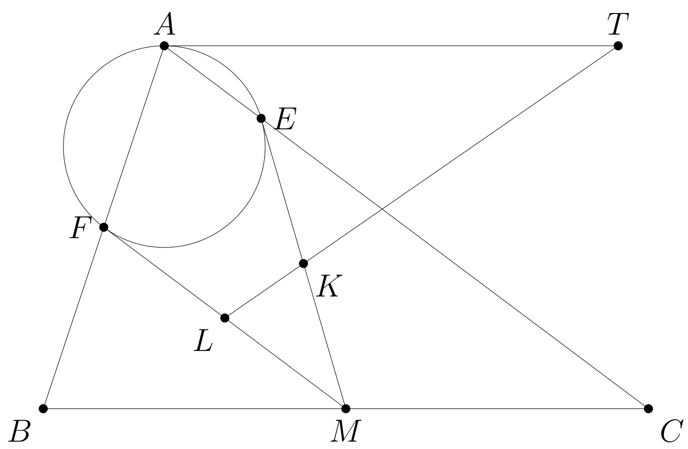
On en déduit ainsi que :

$$MA \times MP = MD \times MB,$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 32
Soit ABC un triangle acutangle tel que $AC > AB$. On note M le milieu de $[BC]$, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. On prend K le milieu de $[ME]$ et L le milieu de $[MF]$. Finalement T est un point de la droite (KL) tel que $(TA) \parallel (BC)$. Montrer que $TA = TM$.

Solution de l'exercice 32



Une belle figure nous permet de remarquer que le cercle (AEF) joue un rôle central : les droites (TA), (ME) et (MF) y sont tangentes. On entreprend de le montrer par une brêve chasse aux angles. D'une part

$$\angle TAE = ACB = \angle AFE,$$

donc la droite (TA) est tangente au cercle (AEF). D'autre part le point M est le centre du cercle $(BCEF)$ donc

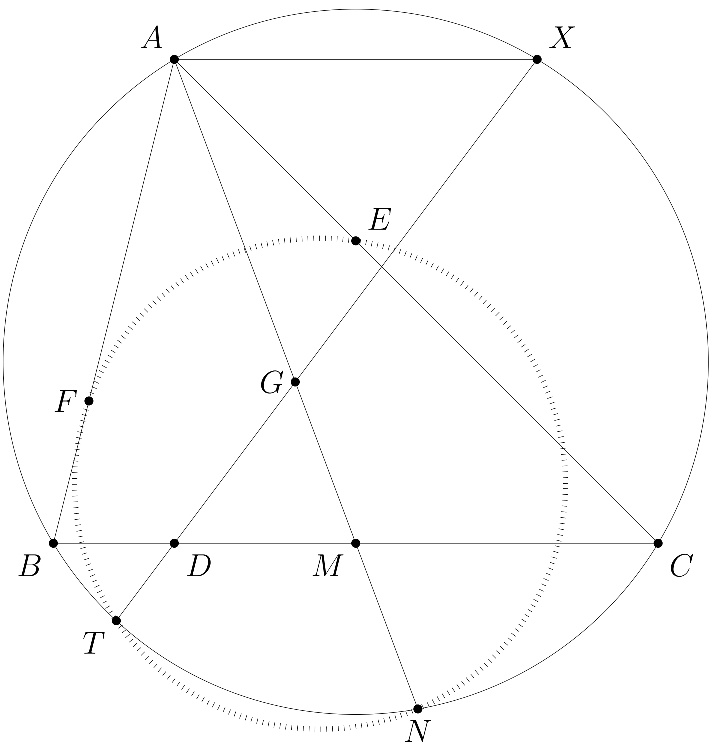
$$\angle FEM = 90 - \frac{1}{2}\angle EMF = 90 - \angle EBF = \angle A.$$

Ainsi la droite (ME) est tangente au cercle (AEF), et similairement la droite (MF) est tangente au cercle (AEF).

Dès lors, on constate que la droite (KL) est l'axe radical du cercle (AEF) et du point M (cercle centré en M de rayon 0). En effet $KE^2 = KM^2$ et $LF^2 = LM^2$. On en déduit que T a la même puissance par rapport au cercle (AEF) et au cercle M : $TA^2 = TM^2$, ce qui conclut.

Exercice 33 (Grèce TST 2018)
Soit ABC un triangle de centre de gravité G. On note D, E et F les pieds des hauteurs issues des points A, B et C respectivement. Soit $T = (ABC) \cap [GD)$ et $N = (GA) \cap (ABC)$ avec N différent de A. Prouver que le quadrilatère $FETN$ est cyclique.

Solution de l'exercice 33



Il faut de nouveau faire une belle figure ! On se rend alors compte que les points T, D, M et N ont l'air cocycliques ; les points D et M sont davantage liés aux points T et N donc ça semble plus simple à prouver : essayons.

On voudrait montrer que

$$GT \times GD = GM \times GN.$$

On veut utiliser que les points T et N appartiennent au cercle (ABC). Pour cela on est tenté d'introduire X la seconde intersection de la droite (GD) avec (ABC), de sorte que

$$GT \times GX = GN \times GA.$$

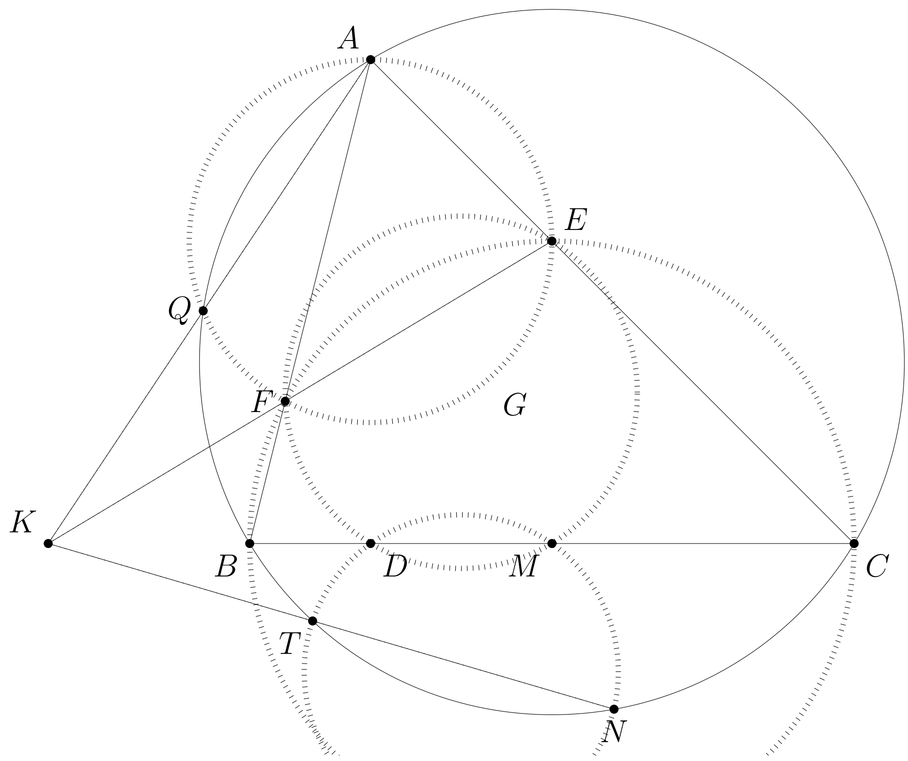
Il suffirait ainsi de prouver que :

$$\frac{GD}{GX} = \frac{GM}{GA},$$

soit que les droites (AX) et (DM) sont parallèles. On sait que G est un centre d'homothétie intéressant du triangle ABC : on veut ainsi considérer l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre G qui envoie A sur M.

On montre sans peine que $\mathcal{H}$ envoie B sur le milieu du segment $[AC]$, et C sur le milieu du segment $[AB]$. Ainsi elle envoie le cercle (ABC) sur le cercle d'Euler (DEF). Elle fixe la droite (GD) donc finalement elle envoie X sur D : les droites (DM) et (AX) sont donc bien parallèles.

On en déduit que le quadrilatère $TDMN$ est cyclique.



Si le quadrilatère $FEMD$ était bien cyclique, les axes radicaux nous donneraient que les droites (EF), (DM) et (TN) sont concourrantes. On peut donc essayer de le montrer sans cette hypothèse. Soit Q la seconde intersection des cercles (AEF) et (ABC). On a beaucoup de cercles dans la figure ! C'est le moment idéal pour spammer les axes radicaux.

— Les cercles (TNM), (ABC) et (DEF) nous donnent que la droite (TN) passe par l'intersection de (BC) et de l'axe radical des cercles (ABC) et (DEF).

— Les cercles (DEF), (ABC) et (AEF) nous donnent que l'axe radical des cercles (ABC) et (DEF) passe par l'intersection de (EF) et de (AQ) .

— Les cercles (AEF), (ABC) et (BCE) nous donnent que la droite (BC) passe par l'intersection de (EF) et de (AQ).

On en déduit que les droites (BC), (EF) et (TN) concourrent en un point K. Finalement

$$KT \times KN = KD \times KM = KF \times KE,$$

donc le quadrilatère $FENT$ est cyclique, ce qui conclut.