# 1 Cours

1. Définition

La**puissance du point** $P$ par rapport à un cercle est définie par : $PB \times PA$

où $A$ et $B$ sont les deux points d'intersection d'une droite passant par $P$ avec le cercle.

\

Pourquoi cette définition ne dépend-elle pas de la droite choisie ?

\

\

**Preuve**

Considérons une deuxième droite passant par $P$ et coupant le cercle en $C$ et $D$.

On va montrer que $PB \times PA = PC \times PD$.

Les triangles $\triangle PBC$ et $\triangle PDA$ sont semblables :

$$\widehat{BPC} = \widehat{DPA}, \widehat{ADP} = \widehat{ADC} = 180^\circ - \widehat{ABC} = \widehat{PBC}.$$

Ainsi, les triangles sont semblables et :

$$\frac{PB}{PD} = \frac{PC}{PA} \Longrightarrow PB \cdot PA = PC \cdot PD.$$

\

\

**Propriété**

Si $PE$ est la tangente issue de $P$ au cercle, alors la puissance de $P$ vaut $PE^2$.

Preuve

Les triangles $\triangle PEB$ et $\triangle PAE$ sont semblables :

Donc

$PB \cdot PA = PE^2$.

\

\

**Propriété**

La puissance de $P$ peut également s'exprimer en fonction de la distance $OP$ au centre $O$ du cercle de rayon $r$ :

\

Puissance de $P = OP^2 - r^2$.

\

Preuve

Le triangle $OPE$ est rectangle en $E$, donc :

\

$PE^2 = OP^2 - OE^2 = OP^2 - r^2$.

\

\

\

**Propriété (Cocyclicité)**

Soient quatre points $A, B, C, D$ non alignés tels que :

\

$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$

\

Avec $P$ l'intersection de $(AB)$ et $(CD)$

\

Alors les points$A, B, C, D$ sont **cocycliques**.

\

\

**Propriété (Tangence)**

Si $PA \cdot PB = PC^2$, alors la droite $(PC)$ est tangente au cercle $(ABC)$ en $C$.

\

\

Etant donnés deux cercles $\omega_1$ et $\omega_2$, quel est le lieu des points qui possèdent la même puissance par rapport à chaque cercle ?

\

Soit $P$ qui a la même puissance par rapport à chaque cercle, alors on a $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$ soit $PH^2 + HO_1^2 - r_1^2 = PH^2 + HO_2^2 - r_2^2$

Donc $HO_1^2 - r_1^2 = HO_2^2 - r_2^2$ et en notant $x$ la distance $O_1H$ on doit donc avoir $x^2 - r_1^2 = (O_1O_2 - x)^2 - r_2^2$ donc $H$ est uniquement déterminé.

Donc l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport aux deux cercles est la **droite** perpendiculaire à $O_1O_2$ passant par $H$.

C'est **l'axe radical** de $\omega_1$ et $\omega_2$.

\

\

**Théorème**

Etant donné un troisième cercle $\omega_3$, les trois axes radicaux sont soit parallèles soit concourrants. Dans ce cas, le point d'intersection des axes radicaux est appelé le centre radical des trois cercles.

\

\

Exercice 3

$Z$ est sur l'axe radical des deux cercles, donc $ZA \times ZB = ZP \times ZQ = ZX^2$ et donc par puissance du point $Z$ on a bien $ZX$ tangente à $ABX$ en $X$.

Exercice 4

$Z$ est sur l'axe radical des deux cercles, donc $ZY^2 = ZP \times ZQ = ZX^2$ et donc $ZX = ZY$

Exercice 5

$Z$ est sur l'axe radical des deux cercles, donc $ZA \times ZB = ZP \times ZQ = ZC \times ZD$ et donc $ABCD$ est cyclique.

Exercice 6

L'intersection $M$ est sur l'axe radical des deux cercles donc $ME^2 = MA \times MB = MF^2$donc $M$ est le milieu de $[EF]$

Exercice 7

Notons $H_A, H_B, H_C$ les trois pieds des hauteurs, par réciproque du théorème de l'angle inscrit, $ABH_AH_B$ et cyclique ainsi que $BCH_BH_C$et $ACH_AH_C$ les axes radicaux de chaque paire de cercle sont les trois hauteurs du triangle qui sont donc concourantes par théorème du centre radical.

Exercice 8

Montrer que $BB' \times BM = BA \times BP$ revient à montrer que $AB'MP$ est cyclique par puissance du point $B$. On le montre par chasse aux angles

$\widehat{CBM} = \widehat{BPM} = \widehat{APM}$ par angle tangentiel et comme $\dfrac{BM}{B'M} = \dfrac{AM}{MC}$ par Thalès les droites $AB'$ et $BC$ sont parallèles et par angles alternes internes, on obtient $\widehat{CBM} = \widehat{AB'M}$.

On conclut par réciproque du théorème de de l'angle inscrit car $\widehat{AB'M} = \widehat{APM}$.

Exercice 9

On veut montrer que $MKLO$ cyclique. Tout d'abord notons que $A, O, M$ sont alignés.

En effet ils sont tous les trois sur la médiatrice de $[PQ]$ (par puissance du point $A$, $AP^2 = AQ^2$ donc $AP = AQ$)

il suffit donc de montrer que $AM \times AO = AK \times AL$.

Par puissance de de $A$ sur le cercle passant par $K, L, P$ on a déjà que $AP^2 = AK \times AL$. On doit donc montrer que $AM \times AO = AK \times AL = AP^2$ c'est à dire que le cercle passant par $P, M, O$ est tangent en $P$ à $(AP)$.

Ceci se montre par chasse aux angles car par angle tangentiel puis angle au centre on a $\widehat{APM} = \widehat{APQ} = \frac{1}{2}\widehat{POQ} = \widehat{POM}$. ce qui conclut par réciproque du théorème de l'angle tangentiel.

Exercice 10

Pour pouvoir appliquer le théorème du centre radical il suffit de montrer que $AXBY$ est cyclique, c'est bien le cas par réciproque de l'angle inscrit. Les trois droites sont alors des axes radicaux qui sont donc concourants (ou parallèles).

Exercice 11

Par puissance du point $M$ on a $MB^2 = MC \times MA$ donc comme $M$ est le milieu de $BP$ on a $MP^2 = MC \times MA$ donc $MP$ est tangente à $ACP$ en $P$ et par deux applications du théorème de l'angle tangentiel, on obtient $\widehat{CPM} = \widehat{PAC} = \widehat{ADP}$et les droites sont parallèles.

Exercice 12

On a une situation assez classique avec l'orthocentre et les pieds de hauteurs. En particulier,

$F, E, C, B$ sont cocycliques. Ainsi la puissance du point $H$ donne pour ce cercle :

$HF \cdot HC = HE \cdot HB$

Comme $HB = 2 \cdot HJ$ et $HC = 2 \cdot HK$, on a $HF \cdot HK = HE \cdot HJ$ ainsi, $F, E, J, K$ sont cocycliques

Exercice 13

On voit rapidement que $D$ est aussi sur les cercles de diamètre $[AB]$ et$[AC]$. On remarque qu'on est ramené à une situation connue en considérant $H$ l'orthocentre. En effet, par la

puissance du point $H$ dans les deux cercles, on a :

$HK \cdot HL = HA \cdot HD = HM \cdot HN$

D'où $N, K, M, L$ cyclique.

Exercice 14

Soit $M$ le milieu de $[OH]$. On nomme $D$ l'intersection, autre que $H$, de $(OH)$ avec le cercle

de centre $O$ et de rayon $OH$. On nomme $C$ l'intersection, autre que $O$, de $(OH)$ et du cercle de

diamètre $AB$. Il faut montrer que $M$ est sur l'axe radical des deux cercles. Pour cela, montrons

que $M$ a la même puissance par rapport aux deux cercles. On note $d = MO$. On a $MH = d$

et $OH = 2d$, mais on a aussi $HC = MO = 2d$ par symétrie d'axe $(AB)$ et$OD = OM = 2d$ par

symétrie de centre O. On a donc $MO \cdot MC = d \cdot 3d = 3d^2$

et $MH \cdot MD = d \cdot 3d = 3d^2$, d'où

$MO \cdot MC = MH \cdot MD$, ce qui conclut par puissance du point M.

Exercice 15

Par puissance du point $B$ par rapport au cercle$(ACM)$, on a

$BA \times BC_1 = BM \times BC$.

De même, par puissance du point C par rapport au cercle $(ABM)$, on trouve

$CA \times CB_1 = CM \times BC$.

Puisque $M$ est le milieu de $[BC]$, on obtient que $BA \times BC_1 = CA \times CB_1$, ce qui signifie que les

points B et C ont la même puissance par rapport au cercle $(AB_1C_1)$. Comme cette puissance

correspond au carré de leur distance au centre moins le carré du rayon du cercle, les deux

points ont même distance au centre $O$.

Exercice 16

Considérons les cercles $\Omega_1$ et$\Omega_2$de centre M et N et de rayons respectifs$MA$ et $NB$. Montrons

que $P$ est sur l'axe radical des deux cercles. Soit X et Y les pieds des hauteurs issus de A et D

respectivement sur $[CD]$ et $[AB]$. L'angle droit donne de façon immédiate que $X$ appartient à

$\Omega_1$ et que $Y$ appartient à $\Omega_2$. Comme $XYAD$ est cyclique, $P$ à la même puissance par rapport

aux deux cercles et il est sur l'axe radical. De la même manière on montre que $Q$ est sur l'axe

radical de$\Omega_1$ et$\Omega_2$. L'axe radical de deux cercles étant perpendiculaire à la droite qui relie

leurs centres, on peut conclure.

Exercice 17

On introduit $H$ l'orthocentre de $ABC$ et on montre facilement qu'il est sur l'axe radical des

trois cercles en calculant sa puissance par rapport à chaque cercle puis en utilisant entre autres

$EADB$ cyclique. Les cercles sont donc coaxiaux (leurs axes radicaux sont confondus) et ils se

rencontrent en un point autre que $O$.