PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ALGÈBRE
À TÉLÉVERSER AU PLUS TARD LE 27 DÉCEMBRE 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe senior est constitué des élèves nés en 2010 ou avant, ou étant en terminale. Les autres élèves sont dans le groupe junior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit x et y deux réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geqslant 3-xy$.

Exercice 2. Soit $a, b, c \geqslant 3$ des réels. Montrer que $abc \geqslant 3(a+b+c)$.

Exercice 3. Soit x, y, z des réels strictement positifs. Trouver la valeur minimale que peut prendre l'expression

$$M = \frac{x^2}{(x+z)(x+y)} + \frac{y^2}{(y+x)(y+z)} + \frac{z^2}{(z+y)(z+x)}.$$

Exercice 4. Soit x et y deux entiers strictement positifs tels que

$$\sqrt{\sqrt{x}+\sqrt{y}} - \sqrt{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = 2.$$

Montrer que x est le carré d'un entier.

Exercice 5. Soit a, b, c des réels strictement positifs distincts tels que $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 3$. Montrer que

$$\frac{a^2-b^2}{a^3-b^3} + \frac{b^2-c^2}{b^3-c^3} + \frac{c^2-a^2}{c^3-a^3} < 2.$$

Exercice 6. Soit a, b, c des réels tels que :

$$a+b+c=2,$$

$$a^2+b^2+c^2=2.$$

Peut-on avoir à la fois $|a-b|<1, |b-c|<1$ et $|c-a|<1$?

Exercice 7. Soit S un ensemble de n réels positifs distincts. Montrer qu'il existe $x, y \in S$ tels que

$$\frac{xy+2y+1}{y-x} > n.$$

Exercice 8. Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. Soit $s = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, et $p = a_1 a_2 \cdots a_n$. Montrer que

$$2^n \cdot \sqrt{p} \leqslant 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \ldots + \frac{s^n}{n!}.$$

Exercice 9. Soit $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ des réels strictement positifs tels que l'on ait les deux égalités

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 4n,$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} = n.$$

Montrer que $\frac{x_n}{x_1} \geqslant 7 + 4\sqrt{3}$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit $a, b, c \geqslant 3$ des réels. Montrer que $abc \geqslant 3(a+b+c)$.

Exercice 11. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de réels définie par $a_0 = 1$, $a_1 = a \geqslant 1$, et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$a_{n+2} = a_{n+1}(a_{n+1} - 1) - a_n(a_n - 2).$$

Montrer que $a_n \geqslant 1$ pour tout $n \geqslant 0$.

Exercice 12. Soit $0 < a < b < c < d$ quatre réels tels que $ad \geqslant bc$. Montrer que $a + d \geqslant b + c$.

Exercice 13. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xf(y) - y^2) = (y+1)f(x-y).$$

Exercice 14. Rémi choisit une suite $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers strictement positifs. Il définit ensuite la suite $b_1, b_2, \ldots$ de réels par, pour tout $n \geqslant 1$,

$$b_n = \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Il remarque alors que parmi un million de termes consécutifs de la suite (b_n), il en existe toujours au moins un qui est entier.
Montrer que l'un des termes de la suite (b_n) est supérieur ou égal à 2025^{2025}.

Exercice 15. Glustave écrit 2025 polynômes unitaires de degré 2025 au tableau. Tous ces polynômes sont à coefficients réels positifs. A chaque minute, il choisit deux polynômes f et g écrits au tableau, et les remplace par deux polynômes unitaires f_1 et g_1 tels que $f_1 + g_1 = f + g$ ou $f_1 g_1 = fg$.
Est-il possible qu'au bout d'un certain temps, chacun des polynômes écrits ait 2025 racines réelles strictement positives ?

Exercice 16. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y > 0$,

$$f(x + f(y)) = yf(xy + 1).$$

Exercice 17. Soit n un entier strictement positif. Trouver la plus grande constante M telle que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré au plus $n-1$,

$$\sum_{i=0}^{n} (i^n - P(i))^2 \geqslant M.$$

Exercice 18. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite strictement croissante de réels positifs et inférieurs ou égaux à 1. Montrer qu'il existe un réel apparaissant exactement une fois dans la suite

$$\frac{a_1}{1}, \frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \ldots$$